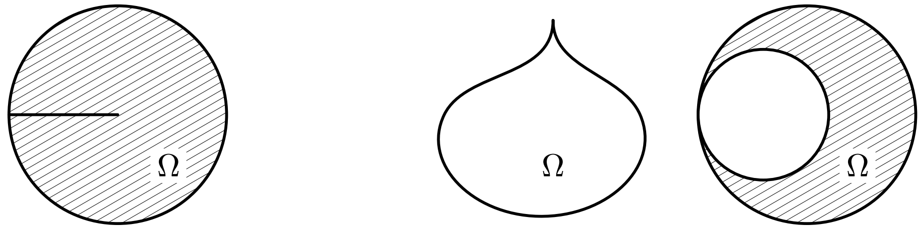
37. Greenova a Ostrogradského věta. Prostory $C^\infty(\overline{\Omega})$ a $C_0^\infty(\Omega)$

37.1. Definice. Říkáme, že dvojrozměrná ohraničená oblast Ω má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$, jestliže v téměř všech bodech $\partial\Omega$ existuje *vnější* normála k Ω a jestliže se $\partial\Omega$ skládá z konečného počtu hladkých částí.

Poznámka. V případě hranice $\partial\Omega$ z definice 37.1 jsou vyloučeny řezy (viz Obr. 37.1 pro $\dim\Omega = 2$); nejsou však vyloučeny body vratu (viz Obr. 37.2 opět pro $\dim\Omega = 2$). Oblast Ω může také být vícenásobně souvislá.



Obr. 37.1 a Obr. 37.2a a 37.2b

37.2. Greenova věta. *Nechť ohraničená dvojrozměrná oblast Ω má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$ bez bodů vratu. Nechť P, Q jsou funkce spojité v $\overline{\Omega}$, které mají spojité a ohraničené první derivace v Ω. Nechť hranice $\partial\Omega$ je orientována tak, že při jejím probíhání ve směru orientace máme oblast Ω po levé ruce. Potom*

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y, \tag{37.1}$$

kde integrály jsou brány v Riemannově smyslu.

Důkaz. Větu pro její důležitost dokážeme. Důkaz bude rozdělen do částí **A** – **E**.

A) Omezíme-li se v předchozí formulaci na *konvexní* ohraničenou dvojrozměrnou oblast Ω, dostaneme *elementární tvar Greenovy věty*, který se dokazuje v základních kursech matematické analýzy a který proto nebudeme dokazovat.

B) Každou ohraničenou uzavřenou (obecně vícenásobně souvislou) dvojrozměrnou oblast $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí lze vyjádřit jako sjednocení konečného počtu konvexních uzavřených oblastí s polygonální hranicí, které mají navzájem disjunktní vnitřky.

Analogická věta platí i v $\mathbb{R}^3$ a důkaz (jak v $\mathbb{R}^2$, tak $\mathbb{R}^3$) je částí důkazu mnohem obecnější věty (viz [Kř]).

V případě $\mathbb{R}^2$ uvedené tvrzení ve většině případů plyne z názoru, protože téměř každou ohraničenou uzavřenou (obecně vícenásobně souvislou) dvojrozměrnou oblast Ω s polygonální hranicí lze snadno ztriangulovat (tj. rozdělit na konečný počet uzavřených trojúhelníků tak, že každé dva trojúhelníky jsou buď disjunktní, nebo mají společný vrchol, nebo společnou stranu. Tvrzení pak plyne z toho, že každý trojúhelník je konvexní.

C) Tvrzení z části **A)** lze nyní snadno rozšířit na případ, že $\overline{\Omega}$ je ohraničená uzavřená (obecně vícenásobně souvislá) dvojrozměrná oblast $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí.

Abychom to dokázali, vyjádřeme $\overline{\Omega}$ ve tvaru

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{K}_j,$$

kde $\overline{K}_1, \dots, \overline{K}_n$ jsou uzavřené konvexní oblasti s navzájem disjunktním vnitřky. Hranici ∂K_j každé této oblasti orientujme kladně (tj. proti smyslu chodu hodinových ručiček). Podle části **A)** pak platí pro $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\iint_{\overline{K}_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial K_j} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y.$$

Sečtěme nyní tento vztah od $j = 1$ do $j = n$. Na levé straně pak dostaneme dvojný integrál přes polygonální oblast $\overline{\Omega}$ a na pravé straně křivkový integrál druhého druhu přes $\partial\Omega$ (protože křivkové integrály přes úsečky ležící uvnitř Ω se navzájem vyruší: po každé vnitřní úsečce se integruje dvakrát, a to v opačných smyslech).

D) V [Fi, Dodatek] je dokázána přístupným způsobem tato věta, jejíž důkaz je metodickým zpracováním některých výsledků publikovaných v [He]:

Nechť ohraničená dvojrozměrná oblast Ω má po částech hladkou hranici (ve smyslu Definice 37.1) bez bodů vratu. Potom lze každou funkci $f(x, y) \in C^m(\Omega)$ prodloužit do celé roviny $\mathbb{R}^2$ se zachováním třídy.

E) Nyní jsme připraveni dokázat Greenovu větu v plné obecnosti. Aproximujme proto danou oblast Ω nějakou oblastí Ω_h s polygonální hranicí $\partial\Omega_h$, jejíž vrcholy leží na Ω. Tato aproximace může být hrubá; musí však mít tu vlastnost, že množina ohraničená křivkami $\partial\Omega$ a $\partial\Omega_h$ je sjednocením konvexních oblastí ve tvaru "srpečků" (tj. dvojúhelníků s jednou zakřivenou stranou, která je částí $\partial\Omega$, a druhou přímou stranou, která je jednou z úseček, z kterých je složena polygonální hranice $\partial\Omega_h$) – viz Obr. 37.4.

Podle části **C)** platí

$$\iint_{\overline{\Omega}_h} \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega_h} \widetilde{P} \,\mathrm{d}x + \widetilde{Q} \,\mathrm{d}y,$$

kde $\widetilde{P}$ a $\widetilde{Q}$ jsou prodloužení funkcí P a Q podle věty z části **D)**. Tento vztah může být napsán ve tvaru

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{\Omega}_h} \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\partial\Omega} \widetilde{P} \,\mathrm{d}x + \widetilde{Q} \,\mathrm{d}y + \\ &+ \int_{\partial\Omega_h} \widetilde{P} \,\mathrm{d}x + \widetilde{Q} \,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} \widetilde{P} \,\mathrm{d}x + \widetilde{Q} \,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{a}$$

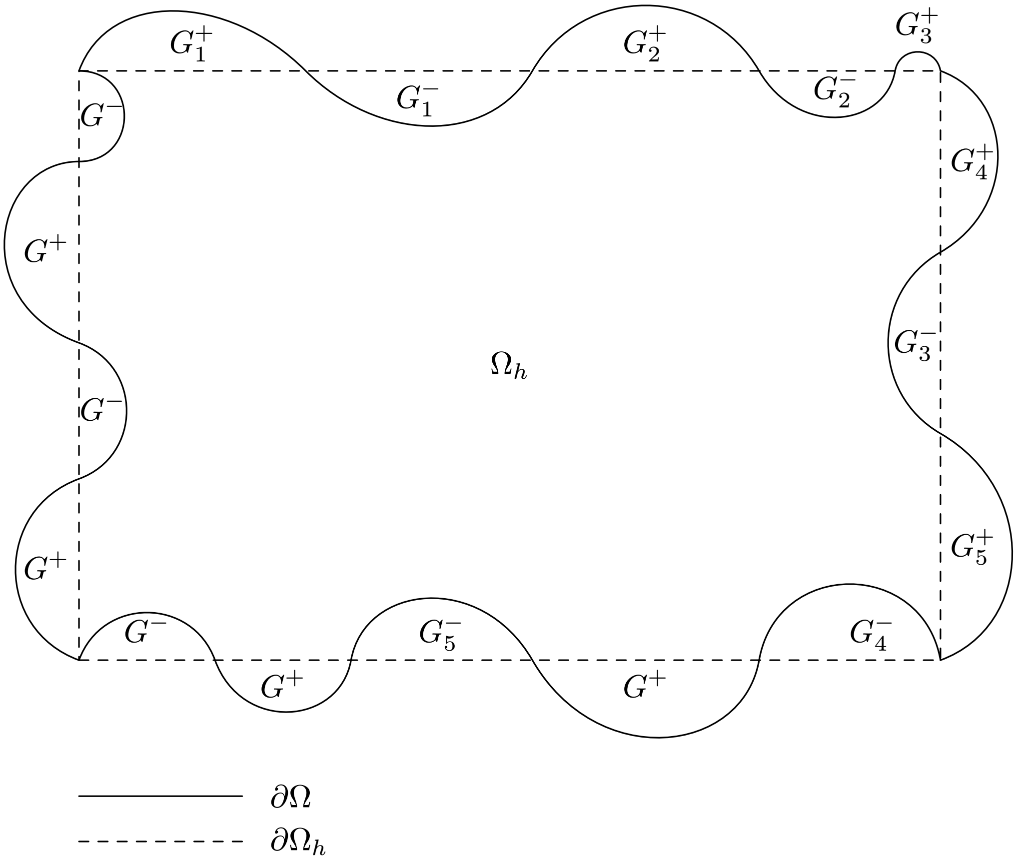


Fig. 37.4 Aproximace $\partial\Omega$ pomocí $\partial\Omega_h$

Srpečkové oblasti ležící vně Ω_h označíme symboly $G^+_{k_i}$, srpečkové oblasti ležící uvnitř Ω_h označíme symboly $G^-_{k_j}$. Platí

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_h} \widetilde{P}\,\mathrm{d}x + \widetilde{Q}\,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} \widetilde{P}\,\mathrm{d}x + \widetilde{Q}\,\mathrm{d}y =&\\ = -\sum_i \int_{\partial G^+_{k_i}} \widetilde{P}\,\mathrm{d}x + \widetilde{Q}\,\mathrm{d}y + \sum_j \int_{\partial G^-_{k_j}} \widetilde{P}\,\mathrm{d}x + \widetilde{Q}\,\mathrm{d}y;&\end{aligned} \tag{b}$$

hranice každé srpečkové oblasti je orientována v kladném smyslu – odtud plyne znaménko minus před prvním součtem na pravé straně vztahu (b). Podle Greenovy věty pro konvexní oblast (viz část **A)** platí

$$\int_{\partial G_k} \widetilde{P}\,\mathrm{d}x + \widetilde{Q}\,\mathrm{d}y = \iint_{G_k} \left(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial\widetilde{P}}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{c}$$

Poslední vztah, který potřebujeme, má tvar

$$\iint_{\Omega_h} \widetilde{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sum_i \iint_{G^+_{k_i}} \widetilde{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sum_j \iint_{G^-_{k_j}} \widetilde{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} \widetilde{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{d}$$

kde $\widetilde{F} := \partial\widetilde{Q}/\partial x - \partial\widetilde{P}/\partial y$. Kombinací vztahů (a) – (d) dostaneme (37.1).

Na tomto důkazu je překvapivé, že nepotřebujeme užít žádný limitní přechod od Ω_h k Ω pro $h \to 0$. To je možné pouze v dvojrozměrném případě. $\square$

37.3. Věta (divergenční tvar Greenovy věty). *Nechť jsou splněny předpoklady věty $\mathcal{P}$.2. Položíme-li $P = -P_2$, $3Q = P_1$, potom*

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} (P_1 n_1 + P_2 n_2)\,\mathrm{d}s, \tag{37.2}$$

kde (n_1, n_2) je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$.

Náčrt důkazu. Platí (zhruba řečeno v první rovnosti)

$$\int_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \left(P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right) \mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (P_1 \sin\alpha - P_2 \cos\alpha)\,\mathrm{d}s, \tag{37.3}$$

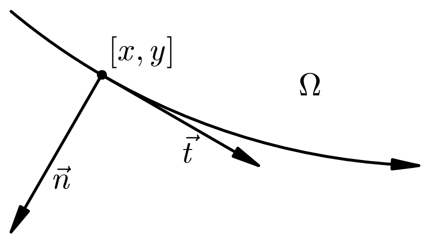
kde α je úhel, který svírá tečna k $\partial\Omega$ (orientovaná shodně s $\partial\Omega$) s kladným směrem osy x. Nechť ω je úhel, který svírá vnější normála k $\partial\Omega$ s kladným směrem osy x. Potom v bodě $[x, y]$ platí (viz Obr. 37.4)

$$\alpha = \omega + \frac{\pi}{2},$$

takže

$$\cos\alpha = -\sin\omega, \quad \sin\alpha = \cos\omega\,. \tag{37.4}$$

Dosazením (37.4) do (37.3) a kombinací získaného vztahu s (37.1), kde v levé straně užijeme značení $P = -P_2$, $Q = P_1$, dostaneme vztah (37.2). $\square$



Obr. 37.4

37.4. Označení. V dalším budeme též značit

$$x_1 := x, \quad x_2 := y \quad (\text{resp. } x_3 = z).$$

Místo $\iint_\Omega$ budeme psát $\int_\Omega$ a místo $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ jenom $\mathrm{d}X$ ($\equiv \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$). Vztah (37.2) má potom tvar

$$\sum_{k=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial P_k}{\partial x_k}\,\mathrm{d}X = \sum_{k=1}^{2} \int_{\partial\Omega} P_k n_k\,\mathrm{d}s\,. \tag{37.5}$$

37.5. Věta (důsledek Greenovy věty). *Nechť jsou splněny předpoklady věty 37.2. Potom platí*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi \,\mathrm{d}X = \int_{\partial\Omega} u\varphi n_j \,\mathrm{d}s - \int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}X\,. \tag{37.6}$$

Důkaz. Položme v (37.5) $P_j = u\varphi$ a $P_i = 0$, kde $i \neq j$, a užijme pravidlo pro derivování součinu. $\square$

37.6. Poznámka. Vztah (37.6) se dá také dokázat v případě trojrozměrné oblasti Ω. V tomto případě pak symbol $\int_{\partial\Omega} u\varphi n_j \,\mathrm{d}s$ znamená plošný integrál přes plošnou hranici $\partial\Omega$. Důkazová technika je v trojrozměrném případě o mnoho složitější, a proto v následujících položkách 37.6a – 37.6k uvedeme alespoň nejdůležitější pojmy a poznatky, které budeme potřebovat v kap. 38. Ostrogradského věta ve tvaru Věty 37.6i.

37.6a. Definice. a) Říkáme, že bodová množina $\bar{S}$ tvoří úsek plochy, který je regulární vzhledem k souřadné rovině (x, y), jestliže pro body $[x, y, z] \in \bar{S}$ platí

$$z = f(x, y), \quad [x, y] \in \bar{S}_{xy} \tag{37.6a}$$

kde $\bar{S}_{xy}$ je jednoduše souvislá dvojrozměrná ohraničená uzavřená oblast ležící v rovině (x, y), která je ohraničená jednoduchou, po částech hladkou uzavřenou křivkou ∂S_{xy}, a $f : \bar{S}_{xy} \to R^1$ je reálná funkce spojitá na $\bar{S}_{xy}$, která má spojité první parciální derivace $f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$ v S_{xy} (kde symbol S_{xy} značí vnitřek $\bar{S}_{xy}$, tj. $S_{xy} = \bar{S}_{xy} - \partial S_{xy}$; tyto derivace nemusejí být v S_{xy} ohraničené). Uzavřenou oblast $\bar{S}_{xy}$ nazýváme ortogonálním průmětem úseku $\bar{S}$ do roviny (x, y).

Množinu bodů $[x, y, z]$, pro které platí

$$z = f(x, y), \quad [x, y] \in \partial S_{xy},$$

nazýváme hranicí úseku $\bar{S}$ a značíme ∂S.

b) Podobně říkáme, že bodová množina $\bar{S}$ tvoří úsek plochy, který je regulární vzhledem k souřadné rovině (x, z), resp. (y, z), jestliže pro body $[x, y, z] \in \bar{S}$ platí

$$y = g(x, z), \quad [x, z] \in \bar{S}_{xz}, \tag{37.6b}$$

resp.

$$x = h(y, z), \quad [y, z] \in \bar{S}_{yz}, \tag{37.6c}$$

kde uzavřené oblasti $\bar{S}_{xz}$, $\bar{S}_{yz}$ a funkce $g : \bar{S}_{xz} \to R^1$, $h : \bar{S}_{yz} \to R^1$ mají analogické vlastnosti jako uzavřená oblast $\bar{S}_{xy}$ a funkce $f : \bar{S}_{xy} \to R^1$. Uzavřené oblasti $\bar{S}_{xz}$ a $\bar{S}_{yz}$ nazýváme ortogonálními průměty úseku $\bar{S}$ do rovin (x, z) a (y, z).

c) Místo pojmu úsek plochy budeme často užívat jenom výraz úsek.

d) Říkáme, že $\bar{S}$ je regulární úsek, je-li $\bar{S}$ regulární vzhledem k alespoň jedné souřadné rovině.

37.6b. Orientace normály regulárního úseku. Nechť (ξ, η) je ta z rovin (x, y), (x, z), (y, z), vůči níž je úsek $\bar{S}$ regulární; v případě, že je úsek $\bar{S}$ regulární vůči více souřadným rovinám, zvolíme za (ξ, η) jednu z nich. Nechť ζ je ta ze souřadných os x, y, z, která je různá od ξ a η. Nechť $\bar{V}$ je oblast, jejíž hranice ∂V je válcová plocha s řídící křivkou $\partial S_{\xi\eta}$ a povrchovými přímkami rovnoběžnými s osou ζ. Úsek $\bar{S}$ dělí oblast $\bar{V}$ na dvě části, které označíme symboly $\bar{V}_1$ a $\bar{V}_2$ (pořadí číslování záleží buď na naší libovůli, nebo na povaze problému, s kterým orientace normály souvisí). V každém bodě $[x, y, z] \in \bar{S}$ orientujeme jednotkovou normálu $\overrightarrow{n}(x, y, z)$ k úseku $\bar{S}$ ve směru z oblasti $\bar{V}_1$ do oblasti $\bar{V}_2$.

Je-li úsek $\bar{S}$ částí hranice $\partial\Omega$ oblasti $\bar{\Omega}$, potom je definice orientace normály jednodušší: Ve všech bodech $[x, y, z] \in \bar{S}$ míří normála $\overrightarrow{n}(x, y, z)$ buď ven z $\bar{\Omega}$, nebo směrem do Ω.

Úhel, který svírá $\overrightarrow{n}(x, y, z)$ s osou x, resp. y, resp. z budeme značit $\alpha(x, y, z)$, resp. $\beta(x, y, z)$, resp. $\gamma(x, y, z)$, nebo stručně α, resp. β, resp. γ. Platí tedy

$$\overrightarrow{n}(x, y, z) = (\cos\alpha(x, y, z), \cos\beta(x, y, z), \cos\gamma(x, y, z)).$$

37.6c. Věta (o normále). a) *Je-li úsek $\bar{S}$ regulární vzhledem k (x, y) a je popsán vztahem (8.1), potom v každém bodě $[x, y, z] \in S$ (kde S značí vnitřek $\bar{S}$) pro orientovanou jednotkovou normálu platí*

$$\overrightarrow{n}(x, y, z) = \frac{\varepsilon_z}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}(-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1),$$

či stručněji

$$\overrightarrow{n} = \frac{\varepsilon_z}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1),$$

kde $\varepsilon_z = 1$, jestliže $\gamma(x, y, z) < \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y, z] \in S$, a $\varepsilon_z = -1$, jestliže $\gamma(x, y, z) > \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y, z] \in S$. (Z (8.11) plyne, že v bodech $[x, y, z] \in S$ nemůže být $\gamma(x, y, z) = \frac{\pi}{2}$ a že ε_z je pro všechny vnitřní body úseku $\bar{S}$ stejné.)

b) *Je-li úsek $\bar{S}$ regulární vzhledem k (x, z) a je popsán vztahem (8.2), potom v každém bodě $[x, y, z] \in S$ pro orientovanou jednotkovou normálu platí*

$$\overrightarrow{n} = \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_z^2}}(-g_x, 1, -g_z),$$

kde $\varepsilon_y = 1$, jestliže $\beta(x, y, z) < \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y, z] \in S$, a $\varepsilon_y = -1$, jestliže $\beta(x, y, z) > \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y, z] \in S$.

c) *Je-li úsek $\bar{S}$ regulární vzhledem k (y, z) a je popsán vztahem (8.3), potom v každém bodě $[x, y, z] \in S$ pro orientovanou jednotkovou normálu platí*

$$\overrightarrow{n} = \frac{\varepsilon_x}{\sqrt{1 + h_y^2 + h_z^2}}(1, -h_y, -h_z),$$

kde $\varepsilon_x = 1$, jestliže $\alpha(x, y, z) < \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y, z] \in S$, a $\varepsilon_x = -1$, jestliže $\alpha(x, y, z) > \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y, z] \in S$.

37.6d. Definice. a) Nechť úsek $\overline{S}$ je regulární vzhledem ke všem třem souřadným rovinám, nechť $\vec{n}(x,y,z)$ je jeho orientovaná jednotková normála a P,Q,R funkce spojité na $\overline{S}$. Klademe

$$\iint_{\overline{S}} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z := \varepsilon_x \iint_{\overline{S}_{yz}} P(h(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{37.6d}$$

$$\iint_{\overline{S}} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z := \varepsilon_y \iint_{\overline{S}_{xz}} Q(x,g(x,z),z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z, \tag{37.6e}$$

$$\iint_{\overline{S}} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \varepsilon_z \iint_{\overline{S}_{xy}} R(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{37.6f}$$

Integrály (37.6d)–(37.6f) nazýváme průmětovými plošnými integrály nebo plošnými integrály druhého druhu.

b) Za stejných předpokladů jako v a) označujeme:

$$\iint_{\overline{S}} (P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y) :=$$

$$:= \iint_{\overline{S}} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\overline{S}} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \iint_{\overline{S}} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{37.6g}$$

Někdy se levá strana (37.6g) píše ve tvaru

$$\iint_{\overline{S}} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

37.6e. Definice. Říkáme, že úsek $\overline{S}$ má vlastnost (R), splňuje-li jednu ze tří následujících podmínek:

a) úsek $\overline{S}$ je regulární vzhledem ke všem třem souřadnicovým rovinám;

b) ortogonální průmět úseku $\overline{S}$ do jedné ze tří souřadnicových rovin má plošnou míru rovnu nule; vzhledem ke zbývajícím dvěma souřadnicovým rovinám je úsek $\overline{S}$ regulární;

c) dvě složky vektoru $\vec{n}(x,y,z)$ jsou rovny nule pro všechny body $[x,y,z] \in \overline{S}$.

37.6f. Věta. *Nechť úsek $\overline{S}$ má vlastnost (R), nechť $\vec{n}$ je jeho orientovaná jednotková normála a P,Q,R jsou tři funkce spojité na $\overline{S}$. Potom platí*

$$\iint_{\overline{S}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{\overline{S}} (P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y).$$

37.6g. Věta. *Nechť úsek $\overline{S}$ je sjednocením n úseků s vlastností (R), které mají navzájem disjunktní vnitřky, $\vec{n}$ je jeho orientovaná jednotková normála a nechť P,Q,R jsou tři funkce spojité na $\overline{S}$. Potom můžeme položit*

$$\iint_{\overline{S}} (P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y) := \sum_{i=1}^{n} \iint_{\overline{S}^i} (P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y).$$

37.6h. Definice. Říkáme, že úsek $\overline{S}$ má vlastnost (R^*), resp. vlastnost (R^{**}), jestliže splňuje podmínky a) – c), resp. podmínky a) – d), kde

a) úsek $\overline{S}$ má vlastnost (R);

b) jsou-li

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z)$$

funkce z analytických vyjádření úseku $\overline{S}$ vzhledem k jednotlivým souřadnicovým rovinám, potom platí alespoň jedna ze tří relací $f \in C^2(\overline{S}_{xy})$, $g \in C^2(\overline{S}_{xz})$, $h \in C^2(\overline{S}_{yz})$;

c) je-li $\operatorname{meas}_2 S_{st} > 0$, potom je hranice ∂S_{st} po částech třídy C^2 a nemá body vratu;

d) alespoň jedna z rovinných oblastí $\overline{S}_{xy}$, $\overline{S}_{xz}$, $\overline{S}_{yz}$ je hvězdnou oblastí. (Oblast $\overline{D}$ je hvězdná, existuje-li alespoň jeden bod $Q \in D$ s vlastností, že každá polopřímka vycházející z tohoto bodu protne hranici ∂D právě v jednom bodě.)

37.6i. Věta (Ostrogradskij). *Nechť $\overline{\Omega}$ je trojrozměrná uzavřená ohraničená oblast, jejíž hranice $\partial\Omega$ nemá body vratu a je sjednocením konečného počtu úseků s vlastností (R^*), které mají navzájem disjunktní vnitřky. Nechť funkce P, Q, R, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ jsou spojité a ohraničené v nějaké ohraničené trojrozměrné oblasti $\widetilde{\Omega}$, pro kterou platí $\widetilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$. Nechť konečně normála k $\partial\Omega$ je orientována tak, že míří ven z oblasti Ω. Potom platí*

$$\iiint_{\overline{\Omega}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} (P \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q \,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y). \quad (37.6\text{h})$$

Důkaz této věty je uveden v kap. 21.

37.6j. Věta (divergenční tvar Ostrogradského věty). *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 37.6i. Položme $P_1 = P$, $P_2 = Q$, $P_3 = R$. Potom*

$$\iiint_{\Omega} \Big(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} + \frac{\partial P_3}{\partial z} \Big) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} (P_1 n_1 + P_2 n_2 + P_3 n_3) \,\mathrm{d}\sigma \qquad (37.6\text{i})$$

čili při značení ve stylu 37.4

$$\sum_{k=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial P_k}{\partial x_k} \,\mathrm{d}X = \sum_{k=1}^{3} P_k n_k \,\mathrm{d}\sigma. \qquad (37.6\text{j})$$

Důkaz. Tvrzení věty plyne z vět 37.6f, 37.6g a 37.6i. □

37.6k. Věta (důsledek Ostrogradského věty). *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 37.6i. Potom platí*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v \,\mathrm{d}X = \int_{\partial\Omega} u v n_j \,\mathrm{d}\sigma - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} \,\mathrm{d}X. \qquad (37.6\text{k})$$

Důkaz. Položme v (37.6j) $P_j = u\varphi$ a $P_i = 0$, kde $i \neq j$, a užijme pravidlo pro derivování součinu. □

37.7. Definice ($C^\infty(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} u$, $C_0^\infty(\Omega)$). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je ohraničená oblast, jejíž hranice se skládá z konečného počtu hladkých částí. Nechť $N = \dim \Omega$ a nechť $C^\infty(\mathbb{R}^N) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ je lineál funkcí $u(X)$, kde $X = [x_1, \ldots, x_N]$, které jsou spojité včetně derivací všech řádů v celém prostoru $\mathbb{R}^N$.

1) Symbolem $C^\infty(\overline{\Omega})$ budeme značit lineál, který dostaneme restrikcí funkcí z $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ na uzavřenou oblast $\overline{\Omega}$.

2) Uzávěr množiny těch bodů oblasti Ω, v nichž je $u(X) \neq 0$, nazýváme *nosičem* funkce $u(X)$ a značíme $\operatorname{supp} u$.

3) Označme dále symbolem $C_0^\infty(\Omega)$ lineární prostor všech funkcí z $C^\infty(\overline{\Omega})$, pro něž platí $u(X) \equiv 0$ v určitém okolí hranice $\partial\Omega$ (v obecném případě různém pro různé funkce z $C_0^\infty(\Omega)$). Pro každé $u \in C_0^\infty(\Omega)$ je $\operatorname{supp} u$ *uzavřená* množina a $\operatorname{supp} u \subset \Omega$, takže $\operatorname{supp} u$ má od hranice $\partial\Omega$ určitou kladnou vzdálenost, protože oblast Ω je *otevřená* souvislá množina.

37.7a. Poznámka. Připomínáme, že nekonečná množina M lineárního normovaného prostoru X se nazývá *kompaktní* (*v sobě*), jestliže každá posloupnost $\{x_n\} \subset M$ obsahuje konvergentní podposloupnost v X (jejíž limita náleží do M). Dokazuje se, že *nutnou a postačující podmínkou* pro to, aby množina $M \subset X$ byla kompaktní, je, aby z *každého* pokrytí množiny M *otevřenými* množinami bylo možno vybrat *konečné podpokrytí.*[1] Podle této nutné a postačující podmínky můžeme každou kompaktní množinu $\operatorname{supp}\varphi$, kde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, pokrýt konečným počtem otevřených kruhů (resp. otevřených koulí) $K_1, \ldots, K_m$, jejichž uzávěry leží v Ω, $\overline{K}_j \subset \Omega$ ($j = 1, \ldots, m$) (protože pokrytí otevřenými množinami je *libovolné*, lze za ně zvolit pokrytí otevřenými kruhy (koulemi), jejichž průměr je menší než $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \operatorname{supp}\varphi)$; odtud plyne, že $\overline{K}_j \subset \Omega$). Označme

$$\operatorname{cover}\varphi := \bigcup_{j=1}^{m} \overline{K}_j \,.$$

Platí $\operatorname{supp}\varphi \subset \operatorname{cover}\varphi$. Z definice (kompaktního) nosiče $\operatorname{supp}\varphi$ funkce φ plyne, že

$$\varphi(X) = 0 \quad \text{pro } X \in \operatorname{cover}\varphi - \operatorname{supp}\varphi \,.$$

Kromě této skutečnosti hranice $\partial(\operatorname{cover}\varphi)$ množiny $\operatorname{cover}\varphi$ je *po částech hladká a nemá body vratu.* Všechny tyto skutečnosti využijeme v kap. 38 (konkrétně v důkazu Lemmatu 38.5).

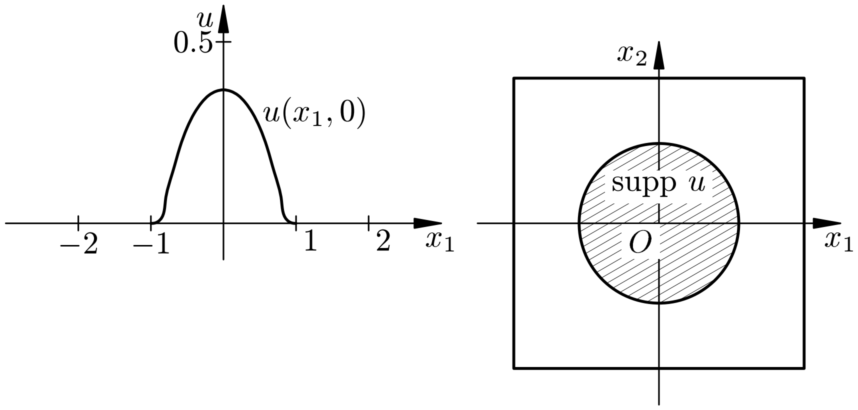
37.8. Příklad (funkce z $C_0^\infty(\Omega)$). Je-li $N = 2$ a je-li Ω čtverec definovaný nerovnostmi $-2 < x_1 < 2$, $-2 < x_2 < 2$, je příkladem funkce s kompaktním nosičem v Ω funkce

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x_1^2-x_2^2)} & \text{pro } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ 0 & \text{jinde v } \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{37.14}$$

Přímým výpočtem se snadno dokáže, že funkce (37.14) má v Ω derivace všech řádů, takže je předně $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. (Pro názornost je na Obr. 37.4 nakreslen řez

[1] Tato podmínka se někdy bere přímo za definici kompaktní množiny. Takto pojatá definice je pak zaxiomatizováním Heine-Borelovy věty.

plochy (37.14) rovinou $x_2 = 0$.) Dále $\operatorname{supp} u$ je uzavřený kruh se středem v počátku souřadnic a poloměrem rovným jedné; jeho vzdálenost od hranice $\partial\Omega$ čtverce $\overline{\Omega}$ je zřejmě kladná (rovná jedné; viz Obr. 37.5).



Obr. 37.5 a Obr. 37.6

Důkaz tvrzení, že funkce (37.14) *náleží do* $C_0^\infty(\Omega)$. Pro lepší přehled užívejme v tomto důkazu symbol x, resp. y, místo x_1, resp. x_2. V tomto značení má funkce (37.14) vyjádření

$$u(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x^2-y^2)} & \text{pro } x^2+y^2<1, \\ 0 & \text{jinde v } \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{a}$$

Stačí dokázat toto: Je-li $A = [x_A, y_A] \in \partial\Omega$ libovolně zvolený bod a blížíme-li se z vnitřku Ω po libovolné cestě k A, tj.

$$(x,y) \to (x_A, y_A), \quad (x,y) \in \Omega,$$

potom limitní hodnota funkce $u(x,y)$ a všech jejích parciálních derivací libovolného řádu je rovna nule.

Přímým výpočtem snadno zjistíme, že pro $(x,y) \in \Omega$ platí

$$u(x,y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}, \tag{b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} \cdot \frac{-2x}{(1-x^2-y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} \cdot \frac{-2y}{(1-x^2-y^2)^2}. \tag{c}$$

Abychom získali jakýsi řád pro vyjádření libovolné m-té parciální derivace funkce $u(x,y)$, napišme jak $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$, tak $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ ve tvaru součinu tří funkcí

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) f_2(x,y) f_3(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f_1(x,y) f_2(x,y) f_3(y), \tag{d}$$

kde

$$f_1(x,y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}, \quad f_2(x,y) = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2}, \quad f_3(\xi) = -2\xi\,. \tag{e}$$

Podle pravidla o derivaci součinu odtud dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = {} & \frac{4x^2}{(1-x^2-y^2)^4} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \frac{8x^2}{(1-x^2-y^2)^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \\ & - \frac{2}{(1-x^2-y^2)^2} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}, \end{aligned} \tag{f}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^4} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \frac{8xy}{(1-x^2-y^2)^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}, \tag{g}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{4y^2}{(1-x^2-y^2)^4}\frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \frac{8y^2}{(1-x^2-y^2)^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \\ - \frac{2}{(1-x^2-y^2)^2}\frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}. \tag{h}$$

Z (b), (c), (f) – (g) vidíme, že každá parciální derivace (prozatím do druhého řádu včetně) je součtem konečného počtu výrazů tvaru

$$P(x,y)f_1(x,y)G_m(x,y), \tag{i}$$

kde

$$P(x,y) = kx^i y^j \quad (i,j,k \in \mathbb{N}), \quad G_m(x,y) = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^m} \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{j}$$

a funkce $f_1(x,y)$ je dána vztahem (e_1). Snadno je vidět, že každá parciální derivace je součtem konečného počtu výrazů tvaru (i). Stačí tedy dokázat, že

$$\lim_{(x,y)\to(x_A,y_A)} P(x,y)f_1(x,y)G_m(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \Omega). \tag{k}$$

Za tím účelem zavedeme polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{l}$$

které nám umožní napsat pravou stranu vztahu (k) ve tvaru

$$\lim_{(x,y)\to(x_A,y_A)} P(x,y)f_1(x,y)G_m(x,y) = \lim_{\substack{r\to 1-\\ \varphi\to\varphi_A}} \left\{P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)F_m(r)\right\}, \tag{m}$$

kde

$$F_m(r) = \frac{\frac{1}{(1-r^2)^m}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-r^2}}}. \tag{n}$$

Podle (m), (n) platí

$$\lim_{\substack{r\to 1-\\ \varphi\to\varphi_A}} \left\{P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)F_m(r)\right\} = P(\cos\varphi_A, \sin\varphi_A) \lim_{r\to 1-} \frac{\frac{1}{(1-r^2)^m}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-r^2}}}. \tag{o}$$

Limitu stojící na pravé straně vztahu (o) snadno vypočítáme pomocí m-násobného užití l'Hospitalova pravidla. Matematickou indukcí zjistíme, že

$$\lim_{r\to 1-} \frac{\frac{1}{(1-r^2)^m}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-r^2}}} = 0. \tag{p}$$

Ze vztahů (m) – (p) plyne

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_A,y_A)\\ (x,y)\in\Omega}} D^\alpha u(x,y) = 0 \quad \forall|\alpha| \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

čímž je důkaz tvrzení, že funkce ($\mathcal{P}$.14) náleží do $C_0^\infty(\Omega)$, ukončen. Zobecnění získaného výsledku pro $N = 3$ je (vzhledem k užití polárních souřadnic v důkazu) zřejmé. □

38. Zobecněné derivace. Sobolevovy prostory $H^k(\Omega)$

V této kapitole bude symbol $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ značit libovolnou ohraničenou oblast (tj. otevřenou souvislou množinu), jejíž hranice $\partial\Omega$ je po částech hladká ve smyslu Definice $\mathcal{P}$.1. Připouštíme vícenásobně souvislé oblasti.

38.1. Definice (multiindexové značení derivací). Nechť $N = \dim \Omega$. Multiindexem rozumíme N-rozměrný vektor, jehož složky jsou nezáporná celá čísla,

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \quad \alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_N \geq 0 \,. \tag{38.1}$$

Celé číslo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$$

nazýváme délkou multiindexu. Symbol $D^\alpha u$ definovaný vztahem

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \tag{38.2}$$

pak nazýváme derivací v multiindexovém značení.

Příklad. Pro $N = 2,\ \alpha = (3, 0)$ je

$$D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \quad \Big(\text{a ne zbytečně komplikovaně } \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3 \partial x_2^0}\Big);$$

pro $N = 2,\ \alpha = (2, 1)$ je

$$D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} \,.$$

38.2. Definice. Nechť k je celé nezáporné číslo. Každé dvojici $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ přiřazujeme číslo $(u, v)_{k,\Omega}$ dané vztahem

$$(u, v)_{k,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \,\mathrm{d}X \,, \tag{38.3}$$

kde sumace přes $|\alpha| \leq k$ znamená, že je třeba vyčerpat všechny navzájem různé vektory tvaru (38.1), pro něž platí $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N \leq k$.

Příklad. V případě $N = 2,\ k = 2$ je třeba vyčerpat všechny dvojrozměrné multiindexy

$$\begin{gathered}(0,0),\\ (1,0), (0,1),\\ (2,0), (1,1), (0,2),\end{gathered}$$

takže z (38.2) a (38.3) dostaneme

$$(u, v)_{2,\Omega} = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}X + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} \,\mathrm{d}X + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \,\mathrm{d}X +$$

$$+ \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \,\mathrm{d}X + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \,\mathrm{d}X + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \,\mathrm{d}X \,.$$

38.3. Lemma. *Vztah (38.3) definuje na lineárním prostoru $C^\infty(\overline{\Omega})$ skalární součin.*

Důkaz. První dvě vlastnosti skalárního součinu plynou z vlastností integrálů a derivací:

$$\int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega D^\alpha v D^\alpha u \,\mathrm{d}x \,,$$

$$\int_\Omega D^\alpha(au_1 + bu_2) D^\alpha v \,\mathrm{d}x = a \int_\Omega D^\alpha u_1 D^\alpha v \,\mathrm{d}x + b \int_\Omega D^\alpha u_2 D^\alpha v \,\mathrm{d}x \,.$$

Co se týče třetí vlastnosti skalárního součinu, je podle (38.3)

$$(u,u)_{k,\Omega} := \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \,\mathrm{d}x \,. \tag{38.4}$$

Zároveň je vidět, že vztah $(u,u)_{k,\Omega} = 0$ platí právě tehdy, když každý ze sčítanců v (38.4) je roven nule; odtud zejména plyne

$$\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x = 0,$$

čili $u(x) \equiv 0$ v Ω (protože $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$), takže i třetí vlastnost skalárního součinu je plně splněna. $\square$

38.4. Definice. Zavedeme-li v lineálu $C^\infty(\overline{\Omega})$ skalární součin $(u,v)_{k,\Omega}$ daný vztahem (38.3), dostaneme unitární prostor, který označíme $S_2^k(\Omega)$. Normu v $S_2^k(\Omega)$ zavedeme obvyklým způsobem

$$\|u\|_{k,\Omega} := \sqrt{(u,u)_{k,\Omega}} \quad \forall u \in S_2^k(\Omega) \tag{38.5}$$

a vzdálenost (metriku) vztahem

$$\varrho(u,v) := \|u - v\|_{k,\Omega} \quad \forall u,v \in S_2^k(\Omega) \,. \tag{38.6}$$

Poznámka. Unitární prostor $S_2^k(\Omega)$ je také lineárním normovaným prostorem a metrickým prostorem.

Poznámka. Pro $k = 0$ dostáváme skalární součin, normu a metriku prostoru $L_2(\Omega)$, tj.

$$(u,v)_{0,\Omega} = (u,v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall u,v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{atd.} \tag{38.7}$$

38.5. Lemma. *Nechť $u \in S_2^k(\Omega)$, kde hranice $\partial\Omega$ je po částech hladká (ve smyslu Definice 37.1); tj. $\partial\Omega$ může mít body vratu. Potom pro $1 \le |\alpha| \le k$ platí*

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u \,\mathrm{d}X = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}X \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \,. \tag{38.8}$$

Důkaz. Protože oblast Ω může mít body vratu, nelze na levou stranu vztahu (38.8) přímo aplikovat Greenovu větu či některý z jejích důsledků. Podle vlastností (kompaktního) nosiče (viz Definici 37.7 a Poznámku 37.7a) však platí

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u \,\mathrm{d}X = \int_{\text{cover }\varphi} \varphi D^\alpha u \mathrm{d}X \,,$$

kde $\text{cover}\,\varphi \subset \Omega$ je uzavřená oblast definovaná v Poznámce 37.7a, jejíž hranice $\partial(\text{cover}\,\varphi)$ je po částech hladká (ve smyslu Definice 37.1) a nemá body vratu. Tedy podle Věty 37.5 (důsledek Greenovy věty) pro každé j, kde $1 \leq j \leq N$, platí (zde $N = 2$)

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi \,\mathrm{d}X = \int_{\text{cover }\varphi} \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi \mathrm{d}X = \int_{\partial(\text{cover }\varphi)} u\varphi n_j \mathrm{d}s - \int_{\text{cover }\varphi} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\mathrm{d}X = \\ = -\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}X \,,$$

protože $\varphi = 0$ na $\partial(\text{cover}\,\varphi)$. Tím je vztah (38.8) dokázán v případě $|\alpha| = 1$ a $N = 2$.

V případě $N = 3$ užijeme místo Věty 37.5 Větu 37.6i (důsledek Ostrogradského věty)); její předpoklad je splněn: zde roli uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ přebírá $\text{cover}\,\varphi$ a v roli oblasti $\widetilde{\Omega}$ přímo vystupuje oblast Ω.

Protože $D^\alpha\varphi = 0$ na $\partial(\text{cover}\,\varphi)$ pro $|\alpha| \geq 0$, dostaneme vztah (38.8) v obecném případě opakováním užitého postupu. Např., pro $\alpha = (1,1)$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\varphi \,\mathrm{d}X = \int_{\partial(\text{cover }\varphi)} \frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi n_2 \mathrm{d}s - \int_{\text{cover }\varphi} \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\mathrm{d}x = -\int_{\text{cover }\varphi} \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\mathrm{d}x = \\ = -\int_{\partial(\text{cover }\varphi)} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} n_1 \mathrm{d}s + \int_{\text{cover }\varphi} u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\mathrm{d}x = \int_\Omega u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\,\mathrm{d}X \,,$$

což je vztah (38.8) pro $\alpha = (1,1)$. Jak se postupuje v obecném případě, je již zřejmé. $\square$

Derivace funkcí patřících do $L_2(\Omega)$ obecně nemají v každém bodě oblasti Ω (klasické) derivace. Vlastnost uvedená v Lemmatu 38.5 nás však vede k tomu, abychom zavedli tuto definici:

38.6. Definice. Nechť $u \in L_2(\Omega)$ je libovolná funkce. Pokud existuje funkce $u^{(\alpha)} \in L_2(\Omega)$, která splňuje vztahy

$$\int_\Omega \varphi u^{(\alpha)} \,\mathrm{d}X = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}X \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ 1 \leq |\alpha| \leq k, \tag{38.9}$$

potom ji budeme nazývat *zobecněnou derivací typu* (α) funkce $u \in L_2(\Omega)$.

38.7. Poznámka. Protože $u^{(\alpha)} \in L_2(\Omega)$, je $u^{(\alpha)}$ definována na Ω pouze téměř všude, tj. může existovat množina E_u, pro jejíž míru platí $\text{meas}_N E_u$, kde funkce $u^{(\alpha)}$ není definována. Tím se zobecněná derivace odlišuje od klasické derivace: Klasická derivace je definována bodově, kdežto zobecněná derivace je definována na oblasti Ω až na množinu míry nula.

38.8. Věta. *Funkce $u^{(\alpha)}$ jsou jednoznačně určeny funkcí u (ve smyslu prostoru $L_2(\Omega)$).*

Důkaz. Skutečně, mějme dvě funkce u, $\widetilde{u} \in H^k(\Omega)$, pro které platí $u = \widetilde{u}$ v $L_2(\Omega)$. Potom podle (38.9) platí

$$\int_\Omega \varphi u^{(\alpha)} \,\mathrm{d}X = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}X \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ 1 \leq |\alpha| \leq k,$$

$$\int_\Omega \varphi \widetilde{u}^{(\alpha)} \,\mathrm{d}X = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}X \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ 1 \leq |\alpha| \leq k.$$

Protože $u = \widetilde{u}$ v $L_2(\Omega)$, dostáváme odečtením těchto dvou vztahů

$$\int_\Omega (u^{(\alpha)} - \widetilde{u}^{(\alpha)}) \varphi \,\mathrm{d}X = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Protože lineál $C_0^\infty(\Omega)$ je hustý v $L_2(\Omega)$ (viz větu 37.17), plyne odtud podle věty 37.19

$$\widetilde{u}^{(\alpha)} = u^{(\alpha)} \quad \text{v } L_2(\Omega)$$

pro každý multiindex α $(1 \leq |\alpha| \leq k)$, což jsme chtěli dokázat. □

38.9. Označení. Vzhledem k vlastnosti uvedené ve Větě 38.8 budeme značit zobecněné derivace $u^{(\alpha)}$ funkce u stejně jako klasické derivace symbolem $D^\alpha u$ (viz (38.2)).

38.10. Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ značí libovolnou ohraničenou oblast, jejíž hranice $\partial\Omega$ se skládá z konečného počtu hladkých částí.[2] Symbolem $H^k(\Omega)$ (nebo obšírněji $H^{k,2}(\Omega)$) budeme značit normovaný prostor funkcí $u \in L_2(\Omega)$, které mají zobecněné derivace $u^{(\alpha)} \equiv D^\alpha u \in L_2(\Omega)$[3] pro všechna $|\alpha| \leq k$, s normou $\|\cdot\|_{k,\Omega}$. Tento prostor budeme nazývat *Sobolevovým prostorem.*

Uvedeme nyní bez důkazu dvě důležité vlastnosti Sobolevových prostorů $H^k(\Omega)$.

38.11. Věta. *Sobolevovy prostory $H^k(\Omega)$ jsou úplné.*

38.12. Věta. *Nechť oblast Ω má spojitou hranici ve smyslu Nečase (tj. jsou přípustné body vratu, nikoliv však řezy. Potom lineární prostor $C^\infty(\overline{\Omega}) = \mathcal{E}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^N)$ je hustý v $H^k(\Omega)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. (Připomínáme, že $\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^N)$ označuje lineární prostor restrikcí funkcí, které náležejí do $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, na uzavřenou oblast $\overline{\Omega}$, kde $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ je lineární prostor funkcí definovaných na $\mathbb{R}^N$ a nekonečně mnohokrát spojitě diferencovatelných.)*

Uvedeme nyní jeden příklad funkce, která náleží do $H^1(\Omega)$, ale nemá ve všech bodech oblasti Ω klasické derivace prvního řádu. Začneme definicí:

---

[2] Tedy nepožadujeme, aby $\partial\Omega$ byla po částech hladká ve smyslu Definice $\mathcal{P}$.1.

[3] tj. funkce $u^{(\alpha)}$, které splňují vztah (38.9)

38.13. Definice. Říkáme, že funkce $f(x_1, \ldots, x_N)$ je po částech spojitá v ohraničené oblasti Ω, jestliže existuje konečný počet oblastí $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ s vlastnostmi

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{m} \overline{\Omega}_j\,, \quad \Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset \quad (r \neq s;\ r, s = 1, \ldots, m), \tag{38.10}$$

ve kterých je funkce $f(x_1, \ldots, x_N)$ spojitá.

38.14. Lemma. *Nechť Ω je ohraničená N-rozměrná oblast s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$, která nemá body vratu. Nechť funkce $w \in C^0(\overline{\Omega})$ má po částech spojité a ohraničené první derivace v Ω. Nechť podoblasti $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, ve kterých jsou derivace $\partial w/\partial x_r$ $(r = 1, \ldots, N)$ spojité, mají po částech hladké hranice $\partial\Omega_1, \ldots, \partial\Omega_m$, které nemají body vratu. Potom $w \in W_2^1(\Omega)$, přičemž zobecněné první derivace $\partial w/\partial x_r$, které náležejí do $L_2(\Omega)$, jsou v každé podoblasti Ω_j $(j = 1, \ldots, m)$ rovny klasickým derivacím $\partial w/\partial x_r$ $(r = 1, \ldots, N)$.*

Důkaz. Nechť $\vec{n}(\Omega_j)$ je jednotková vnější normála podoblasti Ω_j $(j = 1, \ldots, m)$ a $n(\Omega_j)_1, \ldots, n(\Omega_j)_N$ její složky. Protože

$$\vec{n}(\Omega_p) = -\vec{n}(\Omega_q) \tag{38.11}$$

na společné části hranic uzavřených oblastí $\overline{\Omega}_p$, $\overline{\Omega}_q$ (viz Obr. 38.1), dostaneme pomocí věty 37.5 (tj. důsledku Greenovy věty) pro funkci

$$g_r(x) = \frac{\partial w}{\partial x_r}(x), \quad x \in \Omega_j \quad (j = 1, \ldots, m),$$

kde $\partial w/\partial x_r$ je klasická derivace, postupně tyto vztahy:

$$\int_\Omega g_r \varphi \, \mathrm{d}X = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_j} \frac{\partial w}{\partial x_r} \varphi \, \mathrm{d}X = \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{\partial\Omega_j} w\varphi n(\Omega_j)_r \, \mathrm{d}s - \int_{\Omega_j} w \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \, \mathrm{d}X \right) =$$

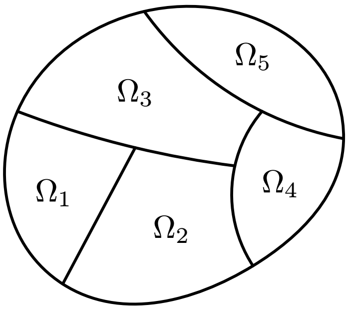
$$= \int_{\partial\Omega} w\varphi n_r \, \mathrm{d}s - \int_\Omega w \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \, \mathrm{d}X = -\int_\Omega w \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \, \mathrm{d}X \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

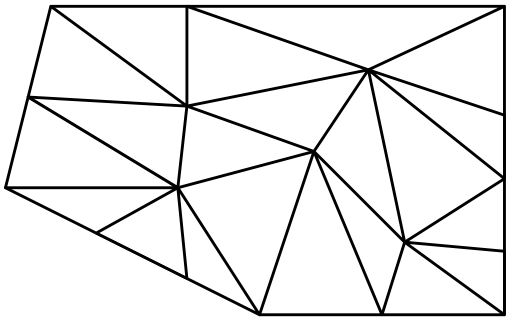
kde n_r označuje r-tou složku jednotkové vnější normály k $\partial\Omega$. (Třetí rovnost plyne z toho, že ve vnitřku Ω se podle (38.11) křivkové integrály na společných částech hranic $\partial\Omega_p$, $\partial\Omega_q$ ruší – viz Obr. 38.1.) Tedy $g_1, \ldots, g_N$ jsou první zobecněné derivace funkce w, protože jsou též ohraničené:

Počet m podoblastí $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ je konečný, takže z ohraničenosti a spojitosti derivací $\partial w/\partial x_r$ v Ω_j $(j = 1, \ldots, m)$ plyne

$$\int_\Omega g_r^2 \, \mathrm{d}X = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_j} \left(\frac{\partial w}{\partial x_r} \right)^2 \mathrm{d}X < \infty \quad (r = 1, \ldots, N).$$

Tedy $g_r \in L_2(\Omega)$. $\square$





Obr. 38.1 a Obr. 38.2

V Důsledku 38.16 uvedeme funkce, které vyhovují podmínkám Lemmatu 38.14 a které se užívají v metodě konečných prvků. Tím se ukáže význam Lemmatu 38.14 pro tuto metodu. Nejprve však musíme zavést v Definici 38.15 pojem triangulace oblasti.

38.15. Definice. Nechť ohraničená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ má polygonální hranici. Množina

$$\mathcal{T} = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_p\}$$

sestávající z konečného počtu uzavřených trojúhelníků $\overline{T}_j$ se nazývá triangulací oblasti $\overline{\Omega}$, jestliže splňuje tyto dvě podmínky:

a) platí

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{p} \overline{T}_j \; :$$

b) libovolné dva trojúhelníky $\overline{T}_i, \overline{T}_j \in \mathcal{T}$ jsou buď disjunktní, nebo mají společný vrchol, nebo společnou stranu (viz Obr. 38.2).

38.16. Důsledek. *Nechť $\mathcal{T}$ je triangulace ohraničené uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Nechť funkce $w \in C^0(\overline{\Omega})$ je polynomem na každém trojúhelníku triangulace $\mathcal{T}$. Potom $w \in H^1(\Omega)$. Kromě toho, ve vnitřku T_j každého trojúhelníka $\overline{T}_j \in \mathcal{T}$ je zobecněná derivace $\partial w/\partial x_i$ rovna klasické derivaci $\partial w/\partial x_i$ $(i = 1, 2)$.*

Nyní se zmíníme o Sobolevových prostorech $H^{k,p}(\Omega)$. Pro základní aplikace jsou prostory $H^k(\Omega)$ dostatečné. Nicméně, je vhodné zmínit se také o prostorech $H^{k,p}(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$, jejichž částečným případem pro $p = 2$ jsou prostory $H^k(\Omega)$.

38.17. Definice. Nechť Ω je ohraničená N-rozměrná oblast s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$ (v případě $N = 2$ ve smyslu Definice 37.1). Symbol $H^{k,p}(\Omega)$ označuje normovaný prostor funkcí $u \in L_p(\Omega)$, které mají zobecněšné derivace $D^\alpha u \in L_p(\Omega)$ pro všechna $|\alpha| \le k$. Norma je definována v tomto prostoru vztahem

$$\|u\|_{H^{k,p}(\Omega)} \equiv \|u\|_{k,p,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \mathrm{d}X \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

39. Motivace: Převedení okrajového problému eliptické parciální diferenciální rovnice na variační formulaci

Uvažujme tento okrajový problém pro Poissonovu rovnici:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{39.1}$$

$$u = \overline{u} \quad \text{on } \Gamma_1\,, \tag{39.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{on } \Gamma_2\,, \tag{39.3}$$

kde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega \quad (\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset)$$

a $f\,, \overline{u}, q$ jsou dané funkce. Výraz

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \tag{39.4}$$

je derivace funkce u podle jednotkové vnější normály $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$.

Násobme rovnici (39.1) libovolnou funkcí $v \in V$, kde

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \quad \text{na } \Gamma_1\} \tag{39.5}$$

a integrujme výsledek přes Ω:

$$-\int_\Omega v \Delta u \,\mathrm{d}X = \int_\Omega v f \,\mathrm{d}X\,. \tag{39.6}$$

Greenova věta (see $\mathcal{P}$.5) aplikovaná na integrál na levé straně vztahu (39.6) dává

$$-\int_\Omega v \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big) \,\mathrm{d}X =$$

$$= -\int_\Omega \Big\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)\Big\} \,\mathrm{d}X + \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big) \,\mathrm{d}X =$$

$$= -\int_{\partial\Omega} v \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2\Big) \,\mathrm{d}s + \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big) \,\mathrm{d}X\,.$$

Podle (39.4), (39.5) a (39.3) platí

$$\int_{\partial\Omega} v \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2\Big) \,\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_2} v q \,\mathrm{d}s\,.$$

Tedy vztah (39.6) může být psán ve tvaru

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big) \,\mathrm{d}X = \int_\Omega v f \,\mathrm{d}X + \int_{\Gamma_2} v q \,\mathrm{d}s\,. \tag{39.7}$$

Dospěli jsme k tomuto problému: Nalézt funkcí u, která splňuje okrajovou podmínku (39.2) a vyhovuje integrálnímu vztahu (39.7) pro všechny funkce $v \in V$ (viz (39.5)). $\square$