Začneme zopakováním pojmu *funkce jedné proměnné spojité v bodě* (je to speciální případ Definice 12.1 spojitého zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ z metrického prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ do metrického prostoru $\mathcal{Y} = (Y, \varrho^*)$, kde $X = Y = \mathbb{R}^1$ a $\varrho(x, y) = \varrho^*(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}^1$):

22.1. Definice. Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, jestliže je definovaná v nějakém otevřeném intervalu I, který obsahuje bod x_0, a jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (závislé na ε) takové, že pro všechna

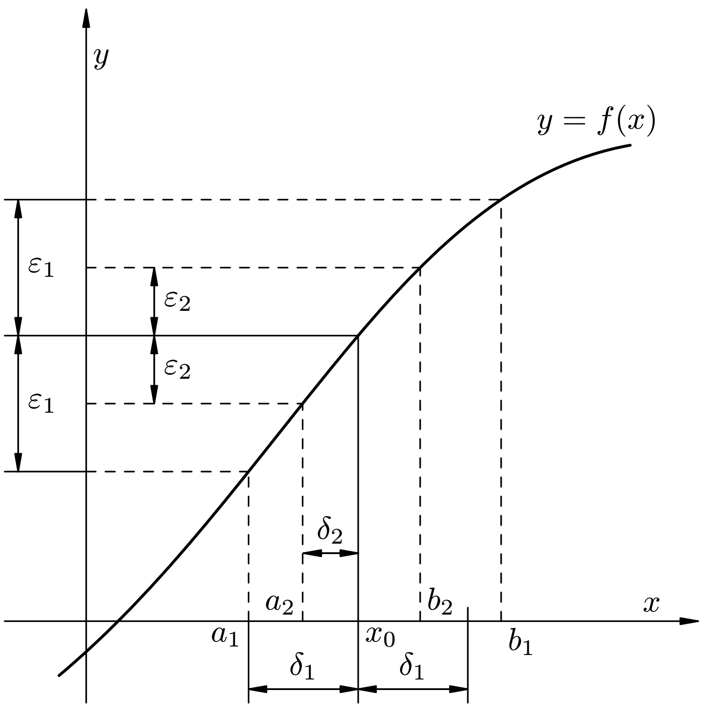
$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I \tag{22.1}$$

platí

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{22.2}$$

Pokud je funkce $f(x)$ spojitá ve všech bodech intervalu I, říkáme, že je spojitá na intervalu I.

Díváme-li se na obrázek funkce, která je spojitá na intervalu (jak je tomu na Obr. 22.1), myslíme, že je vše jasné. V 22.3 a 22.4 uvedeme dvě dosti potrhané funkce a budeme zkoumat jejich spojitost. Ty funkce si ani pořádně neumíme nakreslit. Dříve však ještě v 22.2 zobecníme Definici 22.1 na případ, že daná funkce není definována ve všech bodech intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (Toto zobecnění nebude použito v 22.3 a 22.4.)



Obr. 22.1. K definici spojité funkce

22.2. Poznámka. Někdy funkce není definována ve všech bodech intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Potom vztah (22.1) píšeme obecněji:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap M, \tag{22.1*}$$

kde M je množina bodů osy x, ve kterých je funkce $f(x)$ definována a $x_0 \in M$. Uveďme čtyři příklady:

a) Nechť $M = \langle -1, 0) \cup \langle 1, 2\rangle$, přičemž $f(x) = -1$ pro $x \in \langle -1, 0)$ a $f(x) = 1$ pro $x \in \langle 1, 2\rangle$. Tato funkce $f(x)$ je spojitá na množině M.

b) Nechť $M = \langle -1, 0) \cup (0, 2\rangle$ (tj. $M = \langle -1, 2\rangle \setminus \{0\}$), přičemž $f(x) = -1$ pro $x \in \langle -1, 0)$ a $f(x) = 1$ pro $x \in (0, 2\rangle$. Tato funkce $f(x)$ je spojitá na množině M. (Je nutné si uvědomit, že každý bod $x_0 \in M$ ležící v ε-okolí bodu $x = 0$, kde $0 < \varepsilon < 1$, je vnitřním bodem množiny M.)

c) Nechť $M = \langle -1, 2\rangle$, přičemž $f(x) = -1$ pro $x \in \langle -1, 0\rangle$ a $f(x) = 1$ pro $x \in (0, 2\rangle$. Tato funkce je nespojitá v bodě $x = 0$.

d) Nechť $M = \{-1, 0, 1, 2\}$ a nechť funkce $f(j)$ ($j = -1, 0, 1, 2$) nabývá v bodech $x = j$ libovolných pevných konečných hodnot. Tato funkce je spojitá na množině M. (Abychom to dokázali, zvolme libovolně $0 < \delta < 1$. Potom $(j - \delta, j + \delta) \cap M = \{j\}$, takže nerovnost (22.2), kde $x_0 = j$, je splněna pro všechny body ležící v $(j - \delta, j + \delta) \cap M$ – je to jednobodová množina.)

22.3. Definice Dirichletovy funkce. Pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ definujeme

$$f_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ iracionální}, \\ 1 & \text{pro } x \text{ racionální}. \end{cases}$$

22.4. Definice Riemannovy funkce. Pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ definujeme

$$f_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ iracionální}, \\ \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q}, \quad p,\ q \text{ nesoudělná}. \end{cases}$$

Dirichletova funkce je fádní, ale nenakreslitelná, protože racionálních bodů je v každém intervalu nekonečně (i když spočetně) mnoho.

Co se týče Riemannovy funkce, je také nenakreslitelná, její průběh je však o mnoho zajímavější, takže stojí za to tuto funkci vyhodnotit alespoň v některých bodech (viz také Obr. 22.2)

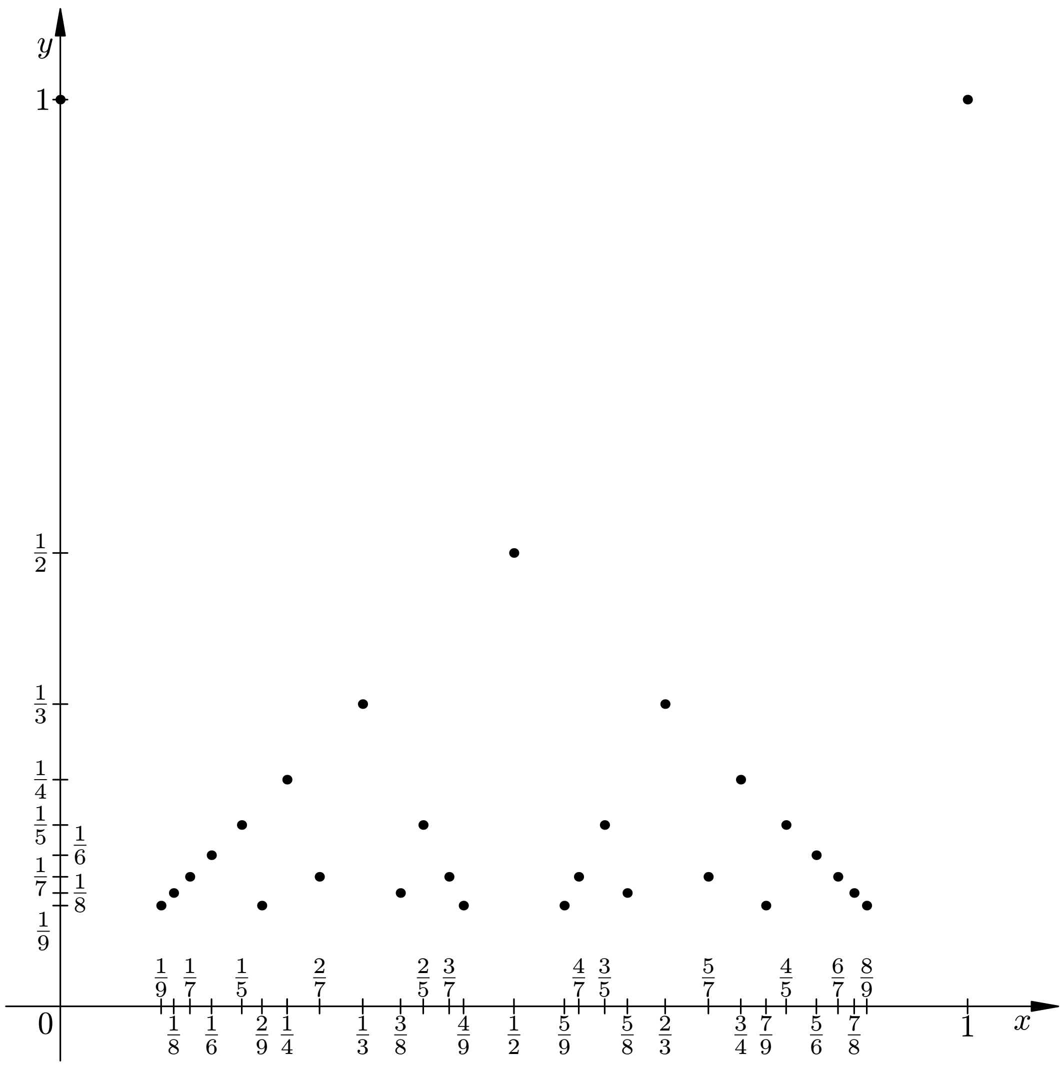
$$\begin{gathered}
f_R(0) = f_R(1) = 1, \\
f_R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \\
f_R\left(\frac{1}{3}\right) = f_R\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}, \\
f_R\left(\frac{1}{4}\right) = f_R\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}, \\
f_R\left(\frac{1}{5}\right) = f_R\left(\frac{2}{5}\right) = f_R\left(\frac{3}{5}\right) = f_R\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5}, \\
f_R\left(\frac{1}{6}\right) = f_R\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}, \\
f_R\left(\frac{1}{7}\right) = f_R\left(\frac{2}{7}\right) = f_R\left(\frac{3}{7}\right) = f_R\left(\frac{3}{7}\right) = f_R\left(\frac{4}{7}\right) = \\
= f_R\left(\frac{5}{7}\right) = f_R\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{1}{7},
\end{gathered}$$

$$f_R\left(\frac{1}{8}\right) = f_R\left(\frac{3}{8}\right) = f_R\left(\frac{5}{8}\right) = f_R\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8}\,,$$

$$f_R\left(\frac{1}{9}\right) = f_R\left(\frac{2}{9}\right) = f_R\left(\frac{4}{9}\right) = f_R\left(\frac{5}{9}\right) =$$

$$= f_R\left(\frac{7}{9}\right) = f_R\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{1}{9}\,,$$

atd. (Můžeme si představit, že "graf" Dirichletovy funkce je obrázek nějakého nepoužitého ideálního kartáčku na zuby, kdežto "graf" Riemanovy funkce je obrázek podobného, ale už velmi používaného a tedy vydřeného ideálního kartáčku na zuby.) Přikročíme ke zkoumání spojitosti obou funkcí.



Obr. 22.2. Riemannova funkce

22.5. Věta. *Dirichletova funkce $f_D(x)$ je nespojitá ve všech bodech, kdežto Riemannova funkce $f_R(x)$ je spojitá v iracionálních bodech – body nespojitosti má pouze v racionálních bodech.*

Důkaz. a) Případ funkce $f_D(x)$: Zvolme $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ a $0 < \varepsilon < 1$ libovolně, ale pevně. Ať je $\delta > 0$ sebemenší, vždy jsou v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ jak racionální, tak iracionální body, takže nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ není splněna pro všechny body tohoto intervalu.

b) Případ funkce $f_R(x)$: Zvolme iracionální $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ a $\varepsilon > 0$ libovolně, ale pevně. Existuje jenom *konečný* počet přirozených čísel q, která nepřevyšují svou hodnotou číslo $\frac{1}{\varepsilon}$, z čehož plyne, že v uzavřeném intervalu $\langle 0, 1\rangle$ existuje pouze konečný počet racionálních čísel $\frac{p}{q}$, pro která $f_R(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} \geq \varepsilon$. To znamená, že existuje tak malé $\delta > 0$, že v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ neleží žádný z těchto bodů $\frac{p}{q}$ (je jich přece konečný počet). Tedy

$$|f(x) - f(x_0)| = f(x) < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

čímž je spojitost funkce $f_R(x)$ v iracionálních bodech dokázána.

Nechť nyní $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ je racionální. Zvolme $0 < \varepsilon < f(x_0)$. Ať je $\delta > 0$ sebemenší, vždy jsou v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ jak racionální, tak iracionální body, takže nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ není splněna pro všechny body tohoto intervalu, což dokazuje nespojitost funkce $f_R(x)$ v racionálních bodech. $\square$

Je třeba zdůraznit, že obě funkce $f_D(x)$ a $f_R(x)$ jsou potrhané ve stejných bodech. Přitom první je všude nespojitá, kdežto druhá téměř všude spojitá (tento pojem bude precizován později).

Přejdeme k nám již známé definici Riemannova integrálu:

22.6. Definice Riemannova integrálu. Číslo

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{nebo stručněji} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

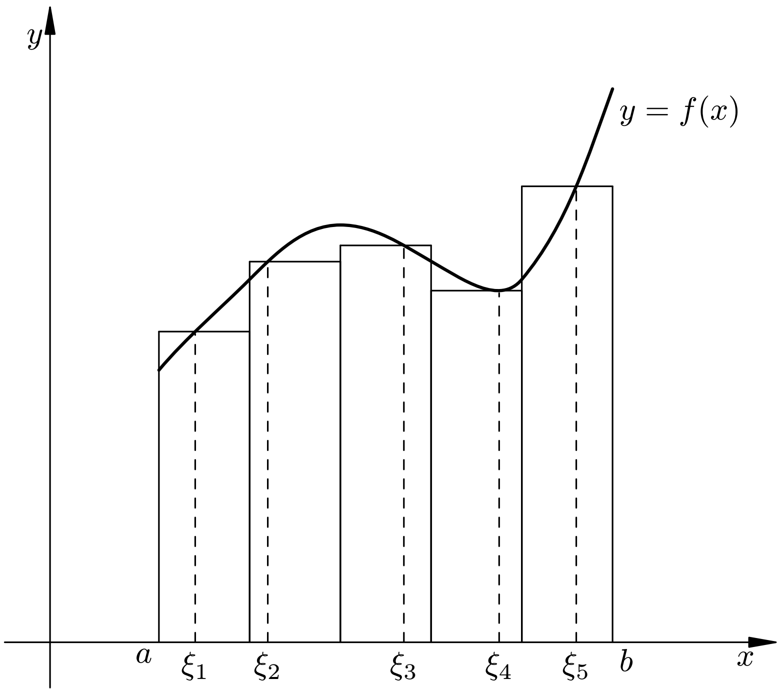
nazýváme *Riemannovým integrálem* funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index $N(\varepsilon)$ tak, že pro $n \geq N(\varepsilon)$ platí

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \tag{22.3}$$

nezávisle na tom, jak volíme čísla $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$, kde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{22.4}$$

jsou ekvidistantní body, které dělí uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ na n stejně velkých dílků délky $(b - a)/n$. $\square$



Obr. 22.3. K definici Riemannova integrálu

V případě nezáporné spojité funkce $f(x)$ vyjadřuje součin $\frac{b-a}{n} f(\xi_i)$ plochu obdélníka o délce základny $\frac{b-a}{n}$ a výšce $f(\xi_i)$ a výraz $\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$ přibližný plošný obsah dvojrozměrné jednoduše souvislé množiny U ohraničené segmentem $\langle a, b \rangle$, dvěma svislými úsečkami o délkách $f(a)$, $f(b)$ a grafem funkce $f(x)$ (viz Obr. 22.3). Vzhledem k libovolnosti ε pak plyne geometrický význam Riemannova integrálu $(R) \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ ze spojité nezáporné funkce $f(x)$: Je to plošný obsah množiny U.

Pomocí Definice 22.6 se Riemannovy integrály nepočítají; na jejím základě bylo vyvinuto mnoho rafinovaných výpočetních metod – my však tuto definici probereme na dvou příkladech.

22.7. Příklad. Vypočtěte Riemannův integrál z funkce $f(x) = kx$ $(k > 0)$ přes interval $\langle a, b \rangle$.

Definujme dva součty

$$s(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} kx_i, \quad S(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} kx_j.$$

Zřejmě platí

$$s(f) < \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} k\xi_i < S(f).$$

Dokážeme nyní, že

$$\int_a^b kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} [s(f) + S(f)] \, .$$

Je totiž

$$\frac{1}{2}[s(f)+S(f)]=\sum_{i=1}^{n}P_i\,,$$

kde P_i je plocha lichoběžníku o základně $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ a s rameny kx_{i-1}, kx_i, takže

$$P_i=\frac{1}{2}k(x_{i-1}+x_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}k(x_{i-1}+x_i),$$

přičemž $\sum_{i=1}^{n}P_i$ je plocha lichoběžníka o základně $b-a$ a s rameny ka, kb. Nyní je zřejmé, že ke každému $\varepsilon>0$ lze najít $N(\varepsilon)$ tak, že

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}f(\xi_i)-P_i\right)\right|<\varepsilon,\quad n\geq N(\varepsilon),$$

protože $\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$ je plocha obdélníku o stejné základně jako lichoběžník P_i a výšce $f(\xi_i)$. Tedy platí

$$\int_a^b kx\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}P_i=\frac{1}{2}k(a+b)(b-a)=\frac{1}{2}k(b^2-a^2).$$

Obvyklými metodami integrálního počtu dostaneme stejný výsledek:

$$\int_a^b kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}kx^2\Big|_a^b=\frac{1}{2}k(b^2-a^2).$$

22.8. Příklad. Dokážeme, že Riemannův integrál z Dirichletovy funkce $f_D(x)$ neexistuje. Pokud zvolíme všechna ξ_i $(i=1,\ldots,n)$ racionální, platí

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_D(\xi_i)=1\,.$$

Pokud zvolíme všechna ξ_i $(i=1,\ldots,n)$ iracionální, platí

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_D(\xi_i)=0\,.$$

Pokud budou některá ξ_i iracionální a některá racionální, budeme mít

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_D(\xi_i)=\frac{k}{n}\,,$$

kde $0<k<n$ je celé číslo. Vidíme tedy, že Definici 22.6 nelze splnit.

V Příkladu 22.8 jsme viděli, že aparát Riemannova integrálu není dostatečný; selhal zde v případě celkem fádní funkce. Je to jeden z mnoha příkladů podporujících tvrzení, že matematická analýza potřebuje integrál obecnější, než je integrál ve smyslu Riemannově.

Lebesgue se inspiroval při svých matematických objevech nejprostšími názornými poznatky, které nám dává přímé pozorování skutečnosti. Lebesgueův kritický duch odstraňoval každý nepodstatný prvek, i když tento prvek již vešel natolik do běžné praxe, že se už nikdo neptal po jeho účelu.

Jak již jsme viděli, hlavní roli v procesu riemannovského integrování mají dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, v němž je definována funkce $f(x)$, na konečný počet dílků. Tedy body z $\langle a, b\rangle$ jsou zde roztříděny do konečného počtu podintervalů podle svého pořadí zleva doprava na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Lebesgue zjistil, že toto uspořádání zleva doprava (tj. uspřádání podle velikosti prvních souřadnic bodů $[x, f(x)]$ grafu funkce $f(x)$) je výsledkem rutiny, že *nevyplývá z podstaty problému integrování.* Použití tohoto uspořádání je dokonce i nepraktické, tak jak je nepraktické počítání obnosu peněz podle prvního způsobu v následujícím příkladě, který nemá s integrálem nic společného.

Představme si, že kromě osmi mincí (desetihaléře, dvacetihaléře, padesátihaléře, koruny, dvoukoruny, pětikoruny, desetikoruny, dvacetikoruny) máme ještě čtyři různé stříbrné mince (padesátikorunu, stokorunu, dvousetkorunu a pětisetkorunu) a tři zlaté mince (tisícikorunu, dvoutisícikorunu a pětitisícikorunu) – tedy celkem patnáct různých typů – a že máme několikakilogramový váček (či spíše vak) těchto mincí. Náš úkol by byl stanovit přesně peněžní částku v tomto vaku. Jsou možné dva způsoby:

1. Vytahovat z vaku jednu minci po druhé a postupně sečítat (trochu ekonomičtější, ale téměř stejně nešikovné by bylo mince vysypat na stůl a postupně odebírat).

2. Vysypat mince na stůl a rozdělit je do patnácti hromádek – v každé by byly mince pouze jednoho druhu. V každé hromádce bychom mince sečetli a jejich počet vynásobili hodnotou mince; součet patnácti dílčích výsledků pak by dalo hledaný výsledek.

Riemannovská integrace připomíná první způsob. Zde hodnoty

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$$

jsou také postupně "odebírány" v náhodném pořadí (ta náhodnost je dána tvarem grafu funkce $f(x)$).

Příklad se dvěma způsoby sčítání hodnot mincí vymyslel Lebesgue, aby názorně ukázal cestu pro jiný způsob integrace: Roztřídění mincí podle jejich hodnot nás přivádí na myšlenku uspořádat body z $\langle a, b\rangle$ podle jim odpovídajících hodnot funkce $f(x)$, což vede k tomuto důsledku: nedělit na dílky segment $\langle a, b\rangle$, který leží na ose x, ale segment $\langle A, B\rangle$ na ose y, kde čísla A, B jsou v případě ohraničené funkce $f(x)$ libovolně zvolená čísla splňujíci nerovnosti[1]

$$A < f(x) < B. \tag{22.1}$$

Segment $\langle A, B\rangle$ rozdělíme body

$$A = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_i < y_{i+1} < \cdots < y_n = B$$

[1] Konstrukce Lebesgueova integrálu na číslech A, B nezávisí, tato čísla musejí jenom splňovat nerovnosti (22.1).

na konečný počet dílků a přiřadíme tomuto dělení konečnou posloupnost n množin

$$e_0,\, e_1,\, e_2, \ldots, e_i,\, e_{i+1}, \ldots, e_{n-1}$$

kde množina e_i $(i = 0, \ldots, n-1)$ obsahuje právě všechny body $x \in \langle a, b\rangle$, pro něž platí $y_i \leq f(x) < y_{i+1}$.

Množiny e_i $(0 \leq i \leq n-1)$ jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocení je právě interval $\langle a, b\rangle$, takže definují rozklad intervalu $\langle a, b\rangle$. Avšak tak jako počítání peněz se stane praktičtější, když obětujeme něco z elementárního charakteru operací, podobně pozorujeme, že při uvedeném postupu je povaha množin e_i složitější než dílky v případě riemannovské integrace; množiny e_i jsou tím složitější, čím složitější je funkce $f(x)$ (viz Obr. 23.1, kde je na ose x zobrazena množina e_1, která sestává ze čtyř podmnožin).

Lebesgue si uvědomil – a to je druhá velká myšlenka, kterou zavedl do teorie integrálu – že teorii integrálu musí předcházet obecná teorie míry množin, teorie, která má nás naučit dát pravý smysl pojmu míry pro co nejobecnější množiny.

Je samozřejmé, že takováto obecná teorie míry bude muset splňovat určité logické a intuitivní požadavky. Například: Musí přiřazovat intervalům a mnohoúhelníkovým i mnohostěnným oblastem tutéž míru, kterou jim přiřazuje elementární matematika; je-li dán rozklad měřitelné množiny A na konečný nebo *spočetný* počet disjunktních množin A_i, které jsou všechny měřitelné, musí být míra množiny A rovna součtu měr množin A_i (vlastnost aditivity).

Dříve než se dotkneme v kap. 24 otázek souvisejících s mírou množin na přímce, popíšeme stručně v kap. 23 konstrukci Lebesgueova integrálu ohraničené funkce na libovolné ohraničené měřitelné množině E. Vyjdeme z premisy (kterou v kap. 24 dokážeme), že každé ohraničené množině E je přiřazeno číslo $\operatorname{meas} E$, míra množiny E.[2]

Na závěr této motivační kapitoly uveďme význam lebesgueovských množin e_i (kvůli kterým je nutno vybudovat lebesgueovskou teorii míry množin): definujeme pomocí rozkladu intervalu $\langle a, b\rangle$ tzv. *dolní* a *horní* Lebesgueův součet $s(f)$ a $S(f)$ vztahy

$$s(f) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \operatorname{meas} e_k, \quad S(f) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \operatorname{meas} e_k\,.$$

V kap. 23 dokážeme, že dolní součty mají supremum U a horní součty infimum V a že platí

$$U = V.$$

Tuto společnou hodnotu nazveme *Lebesgueovým integrálem* přes interval $\langle a, b\rangle$.

23. Měřitelné funkce. Lebesgueův integrál z ohraničené funkce

23.1. Definice měřitelné funkce. Funkce $f(x)$ zadaná na množině E se nazývá *měřitelnou*, je-li měřitelná tato množina a jestliže pro libovolné a je měřitelná množina

$$\{x \in E : f(x) > a\}\,.$$

[2]Přesněji řečeno, každé množině E, která není zkonstruována pomocí *axiomu výběru*, protože Vitali dokázal s pomocí tohoto axiomu zkonstruovat (nepředstavitelnou) lebesgueovsky neměřitelnou množinu.

23.2. Věta. *Je-li $f(x)$ funkce měřitelná na množině E, potom při libovolném a jsou měřitelné množiny*

$$\{x \in E : f(x) \geq a\}, \quad \{x \in E : f(x) = a\},$$

$$\{x \in E : f(x) \leq a\}, \quad \{x \in E : f(x) < a\}.$$

Nyní můžeme přikročit k **definici Lebesgueova integrálu** ohraničené měřitelné funkce:

Nechť na měřitelné množině E je dána *měřitelná ohraničená* funkce $f(x)$, přičemž

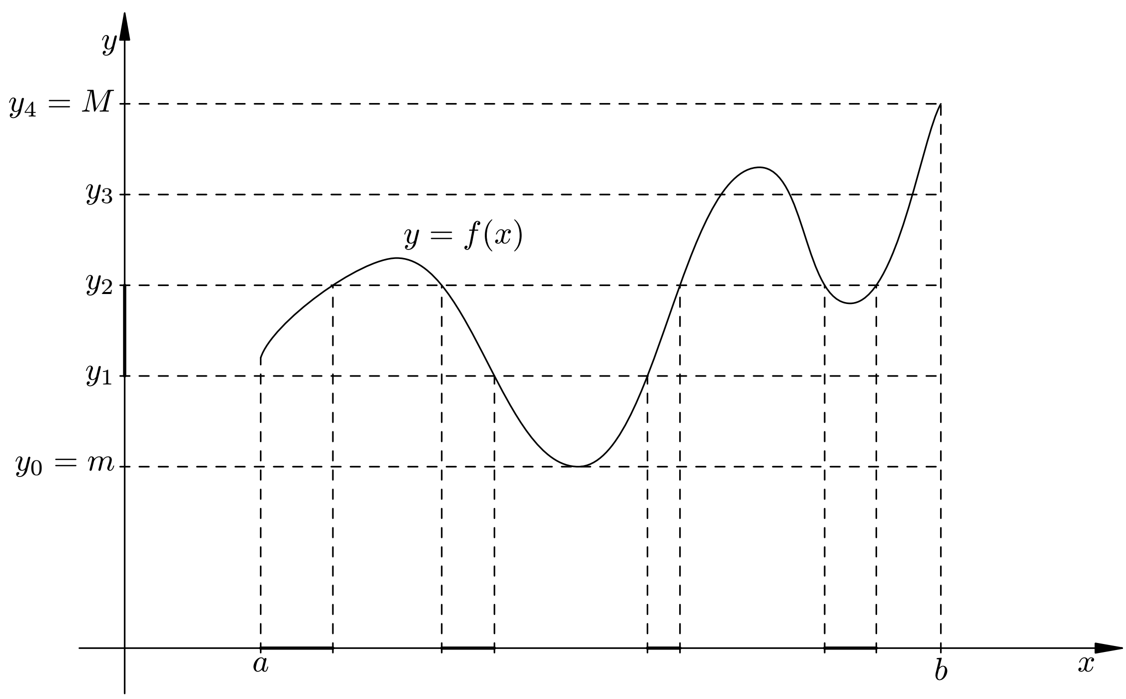
$$A < f(x) < B.$$

Rozdělme uzavřený interval $\langle A, B\rangle$ na části pomocí bodů

$$y_0 = A < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = B \tag{23.1}$$

a přiřaďme každému polozavřenému intervalu $\big\langle y_k, y_{k+1}\big)$ tzv. *Lebesgueovu množinu* (viz Obr. 23.1)

$$e_k = \{x \in E : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$



Obr. 23.1. K definici Lebesgueových množin

Na Obr. 23.1 je vyznačena na x-ové ose lebesgueovská množina $e_1 = \{x \in (a, b) : y_1 \leq f(x) < y_2\}$. Ostatní lebesguovské množiny, jejichž sjednocení spolu s e_1 dají celý interval (a, b), se zkonstruují podobně.

Snadno se prověří tyto čtyři vlastnosti Lebesgueových množin e_k:
1) množiny e_k jsou navzájem disjunktní: $e_i \cap e_j = \emptyset \quad (i \neq j)$;
2) množiny e_k jsou měřitelné;[3]
3) $E = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} e_k$;
4) $\operatorname{meas} E = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \operatorname{meas} e_k$.

Definujme dolní a horní Lebesgueův součet s a S:

$$s(f) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \operatorname{meas} e_k, \quad S(f) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \operatorname{meas} e_k .$$

Položíme-li

$$\lambda = \max\,(y_{k+1} - y_k)\,,$$

bude platit

$$0 \leq S(f) - s(f) \leq \lambda \operatorname{meas} E\,. \tag{23.2}$$

23.3. Lemma. *Žádný dolní Lebesgueův součet $s(f)$ není větší než libovolný horní Lebesgueův součet.*

Důkaz. A) Nejprve dokážeme, že *přidáním dalších bodů dělení intervalu $\langle A, B\rangle$ se dolní součet nezmenší a horní součet nezvětší.*

Předpokládejme, že máme dělení segmentu $\langle A, B\rangle$ definované body

$$y_0 < y_1 < \cdots < y_n$$

kterému odpovídá dolní součet s_0 a horní součet S_0, a že jsme přidali bod $\overline{y}$, pro který platí

$$y_i < \overline{y} < y_{i+1}. \tag{*}$$

Potom při $k \neq i$ vystupují intervaly $\langle y_k, y_{k+1})$ a s nimi i množiny e_k i v novém způsobu dělení. Pouze interval $\langle y_i, y_{i+1})$ se rozpadá na dva intervaly

$$\langle y_i, \overline{y}), \quad \langle \overline{y}, y_{i+1})\,.$$

Spolu s tím se množina e_i rozkládá na dvě množiny

$$e_i^1 = \{x \in \langle a, b\rangle : y_i \leq f(x) < \overline{y}\}, \quad e_i^2 = \{x \in \langle a, b\rangle : \overline{y} \leq f(x) < y_{i+1}\}\,.$$

Zřejmě platí

$$e_i = e_i^1 \cup e_i^2, \quad e_i^1 \cap e_i^2 = \emptyset\,,$$

takže

$$\operatorname{meas} e_i = \operatorname{meas} e_i^1 + \operatorname{meas} e_i^2\,. \tag{**}$$

Z dosud řečeného je jasné, že nový dolní součet s se získá ze součtu s_0 záměnou sčítance $y_i \operatorname{meas} e_i$ výrazem $y_i \operatorname{meas} e_i^1 + \overline{y} \operatorname{meas} e_i^2$. Tato skutečnost spolu se vztahy (*), (**) implikuje $s \geq s_0$.

Pro horní součty probíhá důkaz analogicky.

B) Uvažujme jakékoliv dva způsoby dělení D_1, D_2 segmentu $\langle A, B\rangle$. Nechť těmto způsobům korespondují dolní součty s_1, s_2 a horní součty S_1, S_2.

[3] Toto plyne z Věty 23.2 a vztahu $e_k = \{x \in \{x \in E : y_k \leq f(x)\} : f(x) < y_{k+1}\}$.

Utvořme třetí způsob dělení segmentu $\langle A, B\rangle$ – způsob D_3, ve kterém body dělení jsou tvořeny jak body dělení D_1, tak body dělení D_2. Jestliže způsobu D_3 korespondují součty s_3, S_3, potom v důsledku části A tohoto důkazu platí $s_1 \le s_3$ a $S_3 \le S_2$. Protože $s_3 \le S_3$, je jasné, že $s_1 \le S_2$, což jsme potřebovali dokázat. $\square$

Zvolme nějaký určitý horní Lebesgueův součet $S_0(f)$. Protože pro každý dolní Lebesgueův součet $s(f)$ bude podle Lemmatu 23.3

$$s(f) \le S_0(f)\,,$$

vidíme, že množina $\{s(f)\}$ všech Lebesgueových dolních součtů je ohraničená shora. Nechť U je její supremum,

$$U = \sup\{s(f)\}\,.$$

Potom je jasné, že

$$U \le S_0(f)\,.$$

Vzhledem k libovolnosti součtu $S_0(f)$ poslední nerovnost dokazuje, že množina $\{S(f)\}$ všech horních Lebesgueových součtů je ohraničená zdola. Nazveme V její infimum,

$$V = \inf\{S(f)\}\,.$$

Zřejmě při libovolném způsobu dělení bude

$$s(f) \le U \le V \le S(f)\,.$$

Podle (23.2) odtud máme

$$0 \le V - U \le \lambda \operatorname{meas} E\,,$$

a protože je λ libovolně malé, tak

$$U = V\,.$$

23.4. Definice Lebesgueova integrálu. Společnou hodnotu čísel $U = \sup\{s\}$, $V = \inf\{S\}$ nazýváme *Lebesgueovým integrálem* ohraničené měřitelné funkce $f(x)$ na množině E a značíme symbolem

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

V těch případech, kdy je vyloučena záměna s jinými druhy integrálu, píšeme prostě

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

V případě, že $E = \langle a, b\rangle$, píšeme

$$(L)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

23.5. Příklad. Vypočtěme Lebesgueův integrál

$$(L)\int_0^1 f_D(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nechť $Q_{01} \subset \langle 0,1\rangle$ značí množinu racionálních čísel. Zvolme libovolně dělení (23.1) a nechť m je takové, že $y_m \leq 1 < y_{m+1}$. Dále nechť r je takové, že $y_r \leq 0 < y_{r+1}$. Podle definice pro příslušný dolní a horní Lebesgueův součet s a S a toho, že $\operatorname{meas} Q_{01}$ (bude to dokázáno v Příkladu 24.14) platí

$$s(f_D) = y_m \cdot \operatorname{meas} Q = 0\,, \quad S(f_D) = y_{m+1} \cdot \operatorname{meas} Q = 0\,,$$

takže z libovolnosti dělení (23.1) plyne

$$(L)\int_0^1 f_D(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Následujícími dvěma větami vyvrcholila klasická analýza na přelomu 19. a 20. století:

23.6. Věta (Lebesgue). *Aby ohraničená funkce byla integrovatelná* (R), *je nutné a stačí, aby byla téměř všude spojitá.*

Z Vět 23.6 a 22.5 plyne, že Riemannova funkce $f_R(x)$ je riemannovsky integrovatelná. Její integrál na segmentu $\langle 0,1\rangle$ vypočítáme pomocí Věty 23.7 v Příkladu 28.3.

23.7. Věta (Lebesgue). *Každá funkce integrovatelná* (R) *je nutně integrovatelná i* (L) *a oba integrály si jsou rovny.*

Věta obrácená k Větě 23.7 však neplatí – viz Příklady 22.8 a 23.5 o integrálech Dirichletovy funkce.

24. Teorie lebesgueovské míry množin na přímce

24.1. Struktura otevřených ohraničených množin. *Každá neprázdná ohraničená otevřená množina* $G \subset \mathbb{R}^1$ *je vyjádřitelná ve tvaru sjednocení konečného počtu nebo spočetné množiny navzájem disjunktních otevřených intervalů, jejichž koncové body nenáležejí množině* G *(tyto otevřené intervaly nazýváme vytvořujícími intervaly).*

24.2. Struktura uzavřených ohraničenÓých množin. *Každá neprázdná ohraničená uzavřená množina* $F \subset \mathbb{R}^1$ *je buď uzavřený interval nebo se získá z nějakého uzavřeného intervalu odebráním konečného počtu nebo spočetné množiny navzájem disjunktních otevřených intervalů, jejichž koncové body náležejí množině* F.

Druhá část následující Definice 24.3 vychází přímo z Věty 24.1 (je přirozené definovat míru otevřené množiny jako součet délek jejích vytvořujících intervalů).

24.3. Definice míry otevřené ohraničené množiny. a) Mírou intervalu (a, b), kde $a < b$, se nazývá jeho délka, tj. $b - a$. Toto číslo se značí

$$\operatorname{meas}(a, b) = b - a .$$

b) Mírou $\operatorname{meas} G$ neprázdné otevřené ohraničené množiny $G \subset \mathbb{R}^1$ nazýváme součet délek všech jejích vytvořujících intervalů I_k:

$$\operatorname{meas} G = \sum_k \operatorname{meas} I_k . \quad \square$$

Výraz $\operatorname{meas} G$ je vždy konečný ($0 \le \operatorname{meas} G < \infty$), protože v případě spočetně mnoha sčítanců jde o případ absolutně konvergentní číselné řady.

24.4. Definice míry uzavřené ohraničené množiny. Mírou $\operatorname{meas} F$ neprázdné uzavřené ohraničené množiny $F \subset \mathbb{R}^1$ nazýváme číslo

$$\operatorname{meas} F = b - a - \operatorname{meas}(C_S F) ,$$

kde $S = \langle a, b \rangle$ je nejmenší uzavřený interval obsahující množinu F a $C_S F$ je komplement množiny F do S, tj. $C_S F = S \setminus F$. ($C_S F$ je otevřená množina.)

24.5. Poznámka. Je-li F uzavřený interval, potom $C_S F = \emptyset$. Protože v teorii množin je prázdná množina současně otevřená a uzavřená a protože $\operatorname{meas} \emptyset = 0$, je Definice 24.4 v pořádku i v případě, že množina F je uzavřený interval, tj. $\operatorname{meas} F = b - a$.

Pro vybudování obecné teorie Lebesgueovy míry mají velký význam tyto dvě věty:

24.6. Věta. *Míra otevřené ohraničené množiny G je supremum měr všech možných uzavřených množin, které jsou obsaženy v G.*

24.7. Věta. *Míra uzavřené ohraničené množiny F je infimum měr všech možných otevřených množin, které obsahují F.*

Tyto dvě věty jsou motivací pro následující dvě definice:

24.8. Definice vnější míry. Vnější mírou $\mathrm{m}^* E$ ohraničené množiny E nazýváme infimum měr všech možných otevřených ohraničených množin, které obsahují množinu E:

$$\mathrm{m}^* E = \inf_{G \supset E} \{\operatorname{meas} G\} .$$

24.9. Definice vnitřní míry. Vnitřní mírou $\mathrm{m}_* E$ ohraničené množiny E nazýváme supremum měr všech možných uzavřených ohraničených množin, které jsou obsaženy v množině E:

$$\mathrm{m}_* E = \sup_{F \subset E} \{\operatorname{meas} F\} .$$

Protože se dá dokázat, že platí

a) *Míra otevřené ohraničené množiny G je infimum měr všech možných otevřených ohraničených množin, které obsahují G,*

b) *Míra uzavřené ohraničené množiny F je supremum měr všech možných uzavřených ohraničených množin, které jsou obsaženy v F,*

z Vět 24.6, 24.7 a Definic 24.8, 24.9 plyne:

24.10. Věta. *Je-li G otevřená ohraničená množina, potom*

$$\mathrm{m}^* G = \mathrm{m}_* G = \operatorname{meas} G,$$

kde $\operatorname{meas} G$ *je definována v* 24.3. *Je-li F uzavřená ohraničená množina, potom*

$$\mathrm{m}^* F = \mathrm{m}_* F = \operatorname{meas} F,$$

kde $\operatorname{meas} F$ *je definována v* 24.4.

Vzhledem k výsledku obsaženém ve Větě 24.10 má smysl zobecnit definici míry ohraničených otevřených a uzavřených množin na případ míry libovolné ohraničené množiny v $\mathbb{R}^1$ takto:

24.11. Definice míry. Ohraničená množina E se nazývá *měřitelnou* ve smyslu Lebesguea, jsou-li si vnitřní a vnější míra navzájem rovny. Jejich společnou hodnotu nazýváme mírou množiny E a značíme $\operatorname{meas} E$:

$$\operatorname{meas} E = \mathrm{m}^* E = \mathrm{m}_* E \,.$$

24.12. Věta (totální aditivnost míry). *Je-li ohraničená množina E sjednocením konečného počtu nebo spočetné množiny měřitelných množin, které jsou navzájem disjunktní,*

$$E = \bigcup_k E_k \quad (E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j),$$

potom množina E je měřitelná a platí

$$\operatorname{meas} E = \sum_k \operatorname{meas} E_k \,.$$

Právě uvedené vlastnosti se také říká σ-aditivnost míry.

Míra ohraničených množin v $\mathbb{R}^1$ má dále tyto důležité vlastnosti:

24.13. Věta. *Platí:*
a) Jestliže ohraničená množina $E \subset \mathbb{R}^1$ je sjednocením spočetné množiny měřitelných množin, potom je množina E měřitelná.
b) Průnik spočetné množiny měřitelných množin je měřitelná množina.
c) Rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.
d) Jsou-li E_1, E_2 dvě měřitelné množiny, přičemž $E_1 \supset E_2$, potom pro jejich rozdíl $E = E_1 \setminus E_2$ platí $\operatorname{meas} E = \operatorname{meas} E_1 - \operatorname{meas} E_2$.

24.14. Příklad. Nechť $Q_{01} \subset \langle 0, 1\rangle$ je množina racionálních čísel na segmentu $\langle 0, 1\rangle$. Dokážeme, že
$$\operatorname{meas} Q_{01} = 0. \tag{24.1}$$
Racionální čísla (tj. čísla, která se dají vyjádřit ve tvaru $x = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná celá čísla) očíslujeme lexikograficky takto: $x_1 = 0 = \frac{0}{1}$, $x_2 = 1 = \frac{1}{1}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{3}$, $x_5 = \frac{2}{3}$, $x_6 = \frac{1}{4}$, $x_7 = \frac{3}{4}$, $x_8 = \frac{1}{5}$, $x_9 = \frac{2}{5}$, $x_{10} = \frac{3}{5}$, $x_{11} = \frac{4}{5}$, $x_{12} = \frac{1}{6}$, atd. (tj. čísla s menším q jsou číslována dříve; když mají dvě čísla stejné q, potom číslo s menším p je číslováno dříve). Vidíme, že množina Q_{01} je spočetná (tj. existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou $\mathbb{N}$ přirozených čísel a množinou Q_{01}).

Jednobodová množina $\{x\}$ je uzavřený interval, jehož počáteční a koncový bod splývají. Tedy $\operatorname{meas}\{x\} = x - x = 0$. Můžeme psát
$$Q_{01} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k\}, \quad \{x_i\} \cap \{x_j\} = \emptyset \quad (i \neq j).$$
Tedy můžeme užít Větu 24.12, z které dostáváme (24.1). $\square$

24.15. Příklad. Nechť $I_{01} \subset \langle 0, 1\rangle$ je množina iracionálních čísel na segmentu $\langle 0, 1\rangle$. Dokážeme, že
$$\operatorname{meas} I_{01} = 1. \tag{24.2}$$
Platí $\operatorname{meas}\langle 0, 1\rangle = 1$. Protože $Q_{01} \subset \langle 0, 1\rangle = 1$, můžeme vzhledem k (24.1) užít Větu 24.13d, podle které
$$\operatorname{meas} I_{01} = \operatorname{meas}(\langle 0, 1\rangle \setminus Q_{01}) = \operatorname{meas}\langle 0, 1\rangle - \operatorname{meas} Q_{01} = 1 - 0 = 1,$$
což je vztah (24.2). $\square$

24.16. Příklad. Protože množina I_{01} je podle Příkladu 24.15 měřitelná, platí vzhledem k Definici 24.12
$$\mathrm{m}_* I_{01} = \operatorname{meas} I_{01}. \tag{24.3}$$
Podle definice vnitřní míry (viz 24.9) existuje alespoň jedna uzavřená množina F, pro kterou platí $F \subset I_{01}$. Takovou uzavřenou množinu si neumíme představit, umíme však takových uzavřených množin zkonstruovat nespočetně mnoho. Ukažme to.

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně, ale pevně (přičemž $\varepsilon < \frac{1}{2}$). Nechť pro $k \in \mathbb{N}$ je $J_{k,\varepsilon}$ otevřený interval tvaru

$$J_{k,\varepsilon} = \Big(x_k - \frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{2}, x_k + \frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{2}\Big), \quad x_k \in Q_{01}.$$

Platí

$$\operatorname{meas} J_{k,\varepsilon} = x_k + \frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{2} - \Big(x_k - \frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{2}\Big) = \frac{1}{2^k}\varepsilon.$$

Položme

$$G_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{k,\varepsilon}.$$

Podle Věty 6.15 je G_ε otevřená množina. Pro její míru platí (protože G_ε není sjednocení disjunktních otevřených intervalů)

$$\operatorname{meas} G_\varepsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{meas} J_{k,\varepsilon} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon. \tag{24.4}$$

Množinový rozdíl uzavřené množiny a otevřené množiny je uzavřená množina. Tedy

$$F_\varepsilon = \langle 0, 1\rangle \setminus G_\varepsilon$$

je uzavřená množina, pro jejíž míru vzhledem k (24.4) platí

$$1 \geq \operatorname{meas} F_\varepsilon \geq 1 - \varepsilon. \tag{24.5}$$

První nerovnost v (24.5) platí vzhledem k tomu, že $F_\varepsilon \subset \langle 0, 1\rangle$. Protože navíc množina F_ε neobsahuje vzhledem ke své definici ani jeden racionální bod x_k, je F_ε jedna z hledaných uzavřených množin, pro kterou platí $F_\varepsilon \subset I_{01}$.

Z (24.5) dále plyne

$$\sup_{F_\varepsilon \subset I_{01}} \{\operatorname{meas} F_\varepsilon\} = 1,$$

takže je splněn vztah (24.3). $\square$

24.17. Množiny míry nula. Pokud nelze zjistit přímým výpočtem, že daná množina má míru nula, postupujeme podle tohoto předpisu, který plyne z Věty 24.13a: Množina E má míru nula, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové pokrytí množiny E spočetným systémem otevřených intervalů I_k, že

$$\sum_k \operatorname{meas} I_k < \varepsilon\,.$$

Pomocí tohoto návodu lze také zjistit, že $\operatorname{meas} Q_{01} = 0$. Stačí jako pokrytí množiny Q_{01} užít intervaly $J_{k,\varepsilon}$. $\square$

25. Vlastnosti a strukura měřitelných funkcí

V 23.1 a 23.2 jsme uvedli definici měřitelné funkce a jednu z jejích základních vlastností, která nám stačila k definici Lebesgueova integrálu ohraničené měřitelné funkce $f(x)$. Tuto definici i vlastnost zopakujeme v Definici 25.1 a Větě 25.10.

a) Definice a nejjednodušší vlastnosti měřitelné funkce

Jestliže každému x z množiny E je přiřazeno nějaké číslo $f(x)$, budeme říkat, že na množině E je zadána funkce $f(x)$. Přitom připouštíme i nekonečné hodnoty funkce; požadujeme pouze, aby měly definované znaménko, tj. zavádíme "nevlastní" čísla $-\infty$ a $+\infty$. Tato čísla jsou spjata mezi sebou a s libovolným konečným číslem a nerovnostmi

$$-\infty < a < +\infty$$

a ustanovujeme pro ně následující zákony:

$$+\infty \pm a = +\infty, \quad +\infty + (+\infty) = +\infty, \quad +\infty - (-\infty) = +\infty,$$

$$-\infty \pm a = -\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty, \quad -\infty - (+\infty) = -\infty,$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty,$$

$$+\infty \cdot a = a \cdot (+\infty) = +\infty, \quad -\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty, \quad \text{je-li } a > 0,$$

$$+\infty \cdot a = a \cdot (+\infty) = -\infty, \quad -\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) = +\infty, \quad \text{je-li } a < 0,$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0,$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0.$$

Zde a označuje reálné konečné číslo. Symbolům

$$+\infty - (+\infty),\ -\infty - (-\infty),\ +\infty + (-\infty),\ -\infty + (+\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{a}{0}$$

nepřipisujeme žádný smysl.[4]

25.1. Definice. Funkce $f(x)$ zadaná na množině E se nazývá *měřitelná*, je-li měřitelná tato množina E a jestliže pro libovolné a je měřitelná množina

$$E(f > a) := \{x \in E : f(x) > a\}.$$

25.2. Věta. *Každá funkce zadaná na množině míry nula je měřitelná.*

[4]Obvykle se symbolům $0 \cdot (\pm\infty)$ a $(\pm\infty) \cdot 0$ nepřipisuje také žádný smysl. V této teorii je však vhodnější považovat je rovné nule.

25.3. Věta. *Nechť $f(x)$ je měřitelná funkce zadaná na množině E. Je-li A měřitelná podmnožina množiny E, potom $f(x)$, uvažovaná pouze pro $x \in A$, je měřitelná. (Stručněji: potom $f(x)$ je měřitelná na množině A.)*

25.4. Věta. *Nechť $f(x)$ je dána na měřitelné množině E, která je vyjádřitelná ve tvaru sjednocení konečně nebo spočetně mnoha měřitelných množin E_k,*

$$E = \bigcup_k E_k \,.$$

Je-li $f(x)$ měřitelná na každé množině E_k, potom je měřitelná také na množině E.

25.5. Definice. Dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ zadané na jedné a téže množině E se nazývají *ekvivalentní*, jestliže

$$\operatorname{meas} E(f \neq g) = 0 \,.$$

Ekvivalentnost dvou funkcí značíme $f(x) \sim g(x)$.

25.6. Definice. Nechť nějaká skutečnost S platí pro všechny body nějaké množiny E kromě bodů $x \in E_0 \subset E$. Je-li $\operatorname{meas} E_0 = 0$, potom říkáme, že S platí *téměř všude* na množině E nebo *pro skoro všechny* body množiny E.

25.7. Poznámka. Můžeme tedy říci, že dvě funkce zadané na množině E jsou ekvivalentní, jsou-li si rovné téměř všude na E.

25.8. Věta. *Je-li $f(x)$ měřitelná funkce zadaná na množině E a je-li $g(x) \sim f(x)$, potom $g(x)$ je také měřitelná.*

25.9. Věta. *Jestliže pro všechny body měřitelné množiny E je $f(x) = c$, potom $f(x)$ je měřitelná.*

25.10. Důsledek. *Stupňovitá funkce*[5] *je měřitelná.*

25.11. Věta. *Je-li $f(x)$ měřitelná funkce zadaná na množině E, potom při libovolném a jsou měřitelné množiny*

$$E(f \geq a) := \{x \in E : f(x) \geq a\}, \quad E(f = a) := \{x \in E : f(x) = a\},$$

$$E(f \leq a) := \{x \in E : f(x) \leq a\}, \quad E(f < a) := \{x \in E : f(x) < a\} \,.$$

25.12. Poznámka. Jestliže alespoň jedna z množin

$$E(f < a), \quad E(f \leq a), \quad E(f \geq a)$$

je měřitelná pro každé a, pak funkce $f(x)$ je měřitelná na množině E.

[5] Funkce $f(x)$ zadaná na segmentu $\langle a, b\rangle$ se nazývá *stupňovitá*, jestliže můžeme rozložit segment $\langle a, b\rangle$ body

$$c_0 = a < c_1 < c_2 < \cdots < c_n = b$$

na *konečný* počet částí, uvnitř kterých (tj. v intervalech (c_k, c_{k+1}), kde $k = 0, 1, \ldots, n-1$) je funkce $f(x)$ *konstantní*.

25.13. Věta. *Je-li funkce $f(x)$, která je dána na množině E, měřitelná a je-li k konečné číslo, potom jsou měřitelné funkce* 1) $f(x)+k$, 2) $kf(x)$, 3) $|f(x)|$, 4) $f^2(x)$, 5) $1/f(x)$, *je-li* $f(x) \neq 0$.

25.14. Věta. *Funkce $f(x)$ zadaná a spojitá na segmentu $E = \langle a, b\rangle$ je měřitelná.*

25.15. Definice. Nechť M je podmnožina segmentu $E = \langle a, b\rangle$. Funkce $\varphi_M(x)$, která je rovna jedničce na množině M a nule na množině $E - M$, se nazývá *charakteristická funkce* množiny M.

25.16. Věta. *Množina M a její charakteristická funkce $\varphi_M(x)$ jsou současně měřitelné nebo ne.*

b) Další vlastnosti měřitelných funkcí

25.17. Věta. *Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou konečné měřitelné funkce dané na množině E. Potom je měřitelná každá z funkcí* 1) $f(x) - g(x)$, 2) $f(x) + g(x)$, 3) $f(x) \cdot g(x)$, 4) $f(x)/g(x)$, *je-li* $g(x) \neq 0$.

25.18. Věta. *Nechť na množině E je dána posloupnost měřitelných funkcí $\{f_n(x)\}$. Jestliže v každém bodě $x \in E$ existuje (konečná nebo nekonečná) limita*

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,,$$

potom je funkce $F(x)$ měřitelná.

Následující věta je zobecněním věty 25.18.

25.19. Věta. *Nechť na množině E je dána posloupnost měřitelných funkcí $\{f_n(x)\}$ a nějaká funkce $F(x)$. Platí-li vztah*

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

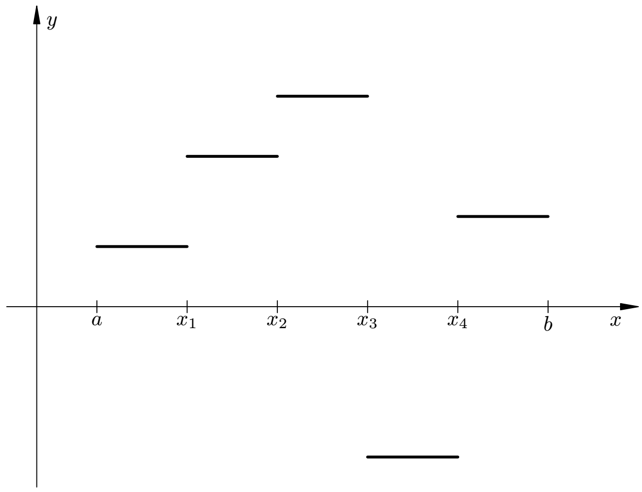
téměř všude na E, potom funkce $F(x)$ je měřitelná.

Text věty 25.18 je shodný s textem věty 25.19 až na to, že ve Větě 25.19 stačí konvergence téměř všude.

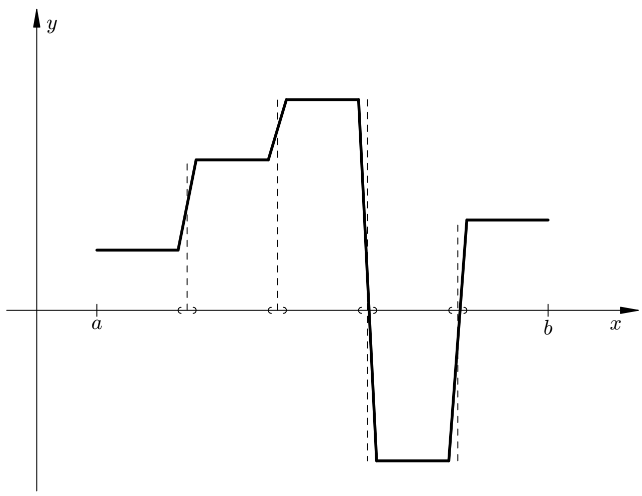
Užití Věty 25.19 ilustrujme na příkladu. Uvažujme *stupňovitou* funkci z Obr. 25.1

$$F(x) = c_i, \quad x \in \big\langle x_{i-1}, x_i\big) \quad (i = 1, \dots, 5,\ x_0 = a,\ x_5 = b)$$

s body nespojitosti $x_1, \dots, x_4$. Nechť $f_n(x)$ je spojitá aproximace funkce $F(x)$, kterou získáme podle Obr. 25.2 tak, že každý bod nespojitosti x_k je středem intervalu $(x_k - \frac{1}{n}, x_k + \frac{1}{n})$. Posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje s výjimkou v bodech $x_1, \dots, x_4$ k funkci $F(x)$, tj. téměř všude. (Důkaz je snadný: Zvolme bod $\overline{x} \in (a, b)$ ($\overline{x} \neq x_k$ $(k = 1, \dots, 4)$) libovolně, ale pevně. Ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít $N(\varepsilon, \overline{x})$, že pro všechna $n > N(\varepsilon, \overline{x})$ je $f_n(\overline{x}) = F(\overline{x})$.) Tedy stupňovitá funkce $F(x)$ z Obr. 25.1 (a



Obr. 25.1 Stupňovitá funkce



Obr. 25.2 Aproximace stupňovité funkce spojitou funkcí

podobně *každá* stupňovitá funkce) je měřitelná. (Tím jsme poněkud komplikovaněji dokázali Důsledek 25.10.)

c) Struktura měřitelných funkcí

Základní strukturální vlastnost měřitelné funkce je vyjádřena větou 25.20.

25.20. Věta (Luzin). *Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na ohraničené měřitelné množině E. Potom tyto dvě podmínky jsou ekvivalentní (tj. $f(x)$, E splňují buďto obě podmínky nebo žádnou z nich):*
(I) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje měřitelná množina $M(\varepsilon) \subset E$ tak, že $\operatorname{meas} M(\varepsilon) < \varepsilon$ a že $f(x)$ je spojitá v $E \setminus M(\varepsilon)$.
(II) Funkce $f(x)$ je měřitelná v množině E.

Důkaz implikace $(I) \Rightarrow (II)$.
Podle (I) ke každému přirozenému n existuje měřitelná množina $M(\frac{1}{n}) \subset E$ tak,

že $\operatorname{meas} M(\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ a že funkce $f(x)$ je spojitá v $E \setminus M(\frac{1}{n})$, takže $f(x)$ je měřitelná v $E \setminus M(\frac{1}{n})$. Tedy podle Věty 25.4 je funkce $f(x)$ měřitelná i v množině

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus M(\tfrac{1}{n}))\,.$$

Ale $E \setminus S = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M(\frac{1}{n}) \subset M(\frac{1}{n})$ pro každé n,[6] a tedy

$$\operatorname{meas}(E \setminus S) \leq \operatorname{meas} M(\tfrac{1}{n}) < \tfrac{1}{n} \quad \forall n,$$

čili

$$\operatorname{meas}(E \setminus S) = 0\,. \tag{25.1}$$

Definujme funkci

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in S, \\ 0 & \text{pro } x \notin S, \text{ tj. pro } x \in E \setminus S. \end{cases}$$

Podle (25.1) je

$$\operatorname{meas}\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

a protože $g(x)$ je měřitelná na množině E,[7] je podle Věty 25.8 funkce $f(x)$ měřitelná na E. $\square$

Opačná implikace $(II) \Rightarrow (I)$, která je též obsažena ve Větě 25.20, tvrdí jinými slovy, že *neexistuje funkce $f(x)$ měřitelná na ohraničené množině E, která by neměla vlastnost (I)*. Jinak: (I) je nutnou podmínkou pro měřitelnost funkce $f(x)$.

Důkaz implikace $(II) \Rightarrow (I)$. Tento důkaz, který pro větší jednoduchost provedeme v případě $E = \langle a, b \rangle$, se opírá o několik významných vět, jejichž důkaz lze najít v [Na].

Věta A (Jegorov). *Nechť na měřitelné množině E je dána posloupnost měřitelných a téměř všude konečných funkcí $\{f_n(x)\}$, která téměř všude v E konverguje k měřitelné a téměř všude konečné funkci $f(x)$:*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)\,. \tag{25.2}$$

V takovém případě existuje ke každému $\delta > 0$ taková měřitelná množina $E_\delta \subset E$, že
1) $\operatorname{meas} E_\delta > \operatorname{meas} E - \delta$,
2) *na množině E_δ probíhá konvergence* (25.2) *stejnoměrně.*

---

[6] Poznamenejme, že rovnost $E \setminus S = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M(\frac{1}{n})$ plyne z prvního de Morganova pravidla $E - \bigcup\limits_i A_i = \bigcap\limits_i (E \setminus A_i)$ a rovnosti $E \setminus (E \setminus M(\frac{1}{n})) = M(\frac{1}{n})$. Pro úplnost uveďme druhé de Morganovo pravidlo: $E \setminus \bigcap\limits_i A_i = \bigcup\limits_i (E \setminus A_i)$.

[7] Je totiž pro každé $a > 0$ $H_a = \{x \in E : g(x) > a\} = \{x \in S : f(x) > a\} \subset S$ a $f(x)$ je na každé podmnožině množiny S spojitá, takže H_a je měřitelná. Nyní je zřejmé, že pro každé $a \leq 0$ platí $H_a = \{x \in E : g(x) > a\} = \widetilde{H}_a \cup (E \setminus S)$, kde $\widetilde{H}_a = \{x \in S : f(x) > a\} \subset S$. Na H_a je $f(x)$ spojitá; co se týče $E \setminus S$, platí (25.1).

Věta B (Fréchet). *Pro každou měřitelnou a téměř všude konečnou funkci $f(x)$ danou na segmentu $\langle a, b\rangle$ existuje posloupnost spojitých funkcí, která konverguje k $f(x)$ téměř všude.*

Věta C. *Nechť F je uzavřená množina, obsažená v segmentu $\langle a, b\rangle$. Je-li funkce $\varphi(x)$ spojitá na množině F, pak je možno definovat na $\langle a, b\rangle$ funkci $\psi(x)$ s následujícími vlastnostmi:*
1) *$\psi(x)$ je spojitá;*
2) *jestliže $x \in F$, potom $\psi(x) = \varphi(x)$;*
3) $\max|\psi(x)| = \max|\varphi(x)|$.

Ve Větě **D** navíc připomínáme základní vlastnost funkce spojité spojité v bodě x_0 (vlastnost 1) plyne z Poznámky 22.2, příklad d)):

Věta D. *Nechť na množině E je dána funkce $f(x)$, přičemž $f(x_0) \neq \pm\infty$. Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in E$ ve dvou případech:*
1) *je-li x_0 izolovaným bodem množiny E;*
2) *jestliže $x_0 \in E'$ a vztahy*

$$x_n \to x_0, \quad x_n \in E$$

implikují vztah

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

Samotný důkaz implikace $(II) \Rightarrow (I)$ již není příliš dlouhý: Nechť

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots \tag{25.3}$$

je ta posloupnost funkcí spojitých na segmentu $\langle a, b\rangle$, jejíž existence je zaručena Fréchetovou větou. Jegorovova věta zaručuje existenci takové měřitelné množiny $E_\delta \subset \langle a, b\rangle$, že

$$\operatorname{meas} E_\delta > b - a - \tfrac{\delta}{2},$$

přičemž na množině E_δ je konvergence posloupnosti (25.3) stejnoměrná:

$$\varphi_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in E_\delta.$$

Odtud podle známé věty z matematické analýzy plyne, že funkce $f(x)$ je spojitá na množině E_δ[8] (ve smyslu Věty **D**: Nelze tuto spojitost chápat tak, že funkce $f(x)$, která se uvažuje na $\langle a, b\rangle$, je spojitá v každém bodě množiny E_δ. Je třeba odstoupit od uvažování funkce $f(x)$ vně množiny E_δ – viz příklad v poznámce pod čarou[9]).

[8] V kurzech matematické analýzy se tato věta dokazuje pro případ funkcí, které jsou definovány na segmentu, ale důkaz platí i v případě funkcí, které jsou dány na libovolné množině.

[9] Uvažujme funkci („obrácená" Dirichletova funkce)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle \text{ iracionální}, \\ 0 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle \text{ racionální}. \end{cases}$$

Tato funkce jako funkce $x \in \langle 0, 1\rangle$ není spojitá ani v jednom bodě segmentu $\langle 0, 1\rangle$, je však spojitá jako funkce $x \in I_{01}$ nebo $x \in Q_{01}$, kde $I_{01} \subset \langle 0, 1\rangle$, resp. $Q_{01} \subset \langle 0, 1\rangle$ je podmnožina iracionálních, resp. racionálních čísel segmentu $\langle 0, 1\rangle$. (Viz též Poznámku 22.2.)

Nechť F je uzavřená podmnožina množiny E_δ s mírou

$$\operatorname{meas} F > \operatorname{meas} E_\delta - \frac{\delta}{2}\,. \tag{25.4}$$

Existence množiny F plyne z vlastností suprema a měřitelnosti množiny E_δ: Je $\mathrm{m}_* E_\delta = \operatorname{meas} E_\delta$, takže vzhledem k definici $\mathrm{m}_* E$ existuje uzavřená množina $F \subset E_\delta$ splňující (25.4). Jestliže uvažujeme funkci $f(x)$ pouze na množině F, potom je spojitá na této množině.

Podle Věty C existuje na $\langle a, b\rangle$ spojitá funkce $\varphi(x)$, která je totožná s $f(x)$ na množině F. Tedy

$$E(f \neq \varphi) \subset \langle a, b\rangle \setminus F$$

a míra množiny $E(f \neq \varphi)$ je menší než δ, takže $\varphi(x)$ je hledaná funkce.

Jestliže navíc $|f(x)| \leq K$, potom tato nerovnost platí i pro $x \in F$, takže podle Věty C

$$|\varphi(x)| \leq K, \quad x \in \langle a, b\rangle\,.$$

Tím je věta dokázána.[10] $\square$

Implikaci $(II) \Rightarrow (I)$ z Luzinovy větu je možno zformulovat i takto: *Měřitelná a téměř všude konečná funkce se stane spojitou, jestliže zanedbáme vhodnou množinu libovolně malé míry.* Někteří autoři berou tuto závažnou vlastnost za samotnou definici pojmu měřitelné funkce. My jsme důkazem ekvivalence $(II) \Leftrightarrow (I)$ stanovili rovnocennost obou definic; druhá je méně formální a ihned ukazuje, že pojem měřitelné funkce je těsně spjat s pojmem spojité funkce.

Pomocí Věty 25.20 opět snadno dokážeme měřitelnost stupňovité funkce z Obr. 25.1. Nechť $G_n = \bigcup_{k=1}^{4} (x_k - \frac{1}{n}, x_k + \frac{1}{n})$, kde n je libovolné přirozené číslo. Potom funkce $F(x)$ je na množině $\langle a, b) - G_n$ spojitá (je nutné promyslet Definici 22.1 spolu s Poznámkou 22.2 a Větou **D**). Tedy podle Věty 25.20 je funkce $F(x)$ měřitelná.

26. Základní vlastnosti integrálu ohraničené měřitelné funkce

26.1. Věta o střední hodnotě. *Jestliže měřitelná funkce $f(x)$ na měřitelné množině E vyhovuje nerovnostem*

$$a \leq f(x) \leq b,$$

potom

$$a \cdot \operatorname{meas} E \leq \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leq b \cdot \operatorname{meas} E\,.$$

[10]Ilustrujme důkaz na na funkci $f(x)$ z předchozí poznámky pod čarou (i když okamžitě vidíme, že $\varphi(x) \equiv 1$): Pro členy posloupnosti (25.3) platí $\varphi_n(x) \equiv 1$ $(n = 1, 2, \dots)$ a platí $\varphi_n(x) \rightrightarrows f(x)$ pro $x \in I_{01}$. Zbývá sestrojit uzavřenou množinu F. Množina Q_{01} je (jako množina racionálních čísel) spočetná, takže její prvky můžeme očíslovat: $Q_{01} = \{x_1, x_2, \dots\}$. Zvolme posloupnost intervalů $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $J_k = \left(x_k - \frac{1}{2^k}\frac{\delta}{4}, x_k + \frac{1}{2^k}\frac{\delta}{4}\right)$, a položme $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$. Podle Věty 24.13a je G měřitelná množina a protože $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, je $\operatorname{meas} G \leq \frac{\delta}{2}$. Protože podle Věty 6.15a sjednocení libovolné množiny otevřených množin je otevřená množina, je G otevřená množina. Položme $F := C_{\langle 0,1\rangle} G = \langle 0, 1\rangle \setminus G$. Je zřejmé, že F je uzavřená množina a pro její míru platí $\operatorname{meas} F \geq 1 - \frac{\delta}{2}$. Tím je důkaz Luzinovy věty zcela ilustrován. Jediná potíž je, že si neumíme množinu G (a tedy ani množinu F) představit.

26.2. Důsledek. *Je-li funkce $f(x)$ konstantní na měřitelné množině E a $f(x) = c$, potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \operatorname{meas} E\,.$$

26.3. Důsledek. *Je-li funkce $f(x)$ nezáporná (nekladná), tak její integrál je také takový.*

26.4. Důsledek. *Je-li* $\operatorname{meas} E = 0$, *potom pro libovolnou ohraničenou funkci $f(x)$ danou na množině E je*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

26.5. Věta. *Nechť na měřitelné množině E je dána měřitelná ohraničená funkce $f(x)$. Je-li množina E sjednocením konečně nebo spočetně mnoha navzájem disjunktních měřitelných množin*

$$E = \bigcup_k E_k \quad (E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j),$$

potom

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

26.6. Poznámka. Tato vlastnost integrálu se nazývá *totální aditivnost integrálu* (nebo též *σ-aditivnost integrálu*).

26.7. Důsledek. *Jsou-li měřitelné ohraničené funkce $f(x)$ a $g(x)$ dané na množině E ekvivalentní, potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Toto tvrzení plyne z Důsledku 26.4.

26.8. Poznámka. Mimo jiné, *integrál funkce, která je ekvivalentní nule, je roven nule.* Toto tvrzení však nelze obrátit, jak ukazuje příklad:
Je-li funkce $f(x)$ zadána na segmentu $\langle -1, 1\rangle$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geq 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0, \end{cases}$$

potom

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -1 + 1 = 0\,,$$

ačkoliv funkce $f(x)$ není ekvivalentní nule. Platí však:

26.9. Důsledek. *Je-li integrál nezáporné měřitelné ohraničené funkce $f(x)$ roven nule,*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (f(x) \geq 0),$$

potom je tato funkce ekvivalentní nule.

26.10. Věta. *Jsou-li na měřitelné množině E dány dvě měřitelné ohraničené funkce $f(x)$ a $F(x)$, potom*

$$\int_E [f(x) + F(x)]\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \int_E F(x)\,\mathrm{d}x.$$

26.11. Věta. *Je-li na měřitelné množině E dána měřitelná ohraničená funkce $f(x)$ a c je konečná konstanta, potom*

$$\int_E cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

26.12. Důsledek. *Jsou-li $f(x)$ a $F(x)$ měřitelné a ohraničené na měřitelné množině E, potom*

$$\int_E [f(x) - F(x)]\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \int_E F(x)\,\mathrm{d}x.$$

26.13. Věta. *Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou měřitelné a ohraničené na měřitelné množině E. Je-li*

$$f(x) \leq F(x),$$

potom

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_E F(x)\,\mathrm{d}x.$$

26.14. Věta. *Je-li funkce $f(x)$ měřitelná a ohraničená na měřitelné množině E, potom*

$$\left|\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

27. Dvě diskontinua

27.1. Cantorovy množiny G a P. Uvažujme segment $\langle 0,1\rangle$ a začněme z něj nekonečným procesem vyjímat otevřené intervaly takto: V nultém kroku vyjmeme ze segmentu (otevřený) interval $G_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; zbudou dva segmenty $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ a $\langle \frac{2}{3}, 1\rangle$. Z těchto dvou segmentů vyjmeme intervaly $G_{11} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ a $G_{12} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ (tzv. první krok). Zbudou celkem čtyři segmenty. Na druhém kroku z každého z těchto čtyř segmentů vyjmeme interval G_{2j} $(1 \leq j \leq 4)$, jehož střed je totožný se středem segmentu a jehož délka je rovna jedné třetině segmentu. Obecně v k-tém kroku $(k = 0, 1, 2, \dots)$ vyjímáme 2^k intervalů, které tvoří otevřenou množinu

$$G_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} G_{kj}\,,$$

jejíž Lebesgueova míra je

$$\operatorname{meas} G_k = \frac{2^k}{3^{k+1}}\,.$$

Sjednocení spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina, takže dospíváme ke *Cantorově diskontinuu*

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} G_{kj},$$

pro jehož Lebesgueovu míru platí

$$\begin{aligned}\operatorname{meas} G = \operatorname{meas}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} G_{kj}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots = \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.\end{aligned}$$

Protože komplement otevřené množiny do uzavřené množiny je uzavřená množina, je množina

$$P = \langle 0,1\rangle \setminus G$$

uzavřená a její Lebesgueova míra je

$$\operatorname{meas} P = 1 - \operatorname{meas} G = 0\,.$$

Paradox, který vzniká v souvislosti s uzavřenou množinou P, je tento: Ačkoliv množina P má Lebesgueovu míru nula, je to množina s mohutností kontinua (tj. dá se vzájemně jednoznačně zobrazit na segment $\langle 0,1\rangle$).

Poznamenejme, že častěji se Cantorovy množiny značí symboly G_0 a P_0. My jsme však symbol G_0 užili v konstrukci *Cantorova diskontinua* v jiném smyslu. □

Druhé zajímavé diskontinuum, které nazveme ε*-diskontinuem*, je uvedeno v 27.2.

27.2. Limitní přechod za znakem integrálu. Na jednom zajímavém příkladu ukážeme v jaké oblasti je Riemannův integrál také nedostatečným prostředkem.

Uvažujme segment (tj. uzavřený interval) $\langle 0,1\rangle$. Vytvoříme nekonečným procesem, který je podobný vytváření Cantorových množin $G \subset \langle 0,1\rangle$ a $P \subset \langle 0,1\rangle$, množinu, kterou označíme $K(\varepsilon) \subset \langle 0,1\rangle$ a nazveme ε*-diskontinuem* (viz Obr. 27.1). Zvolíme $0 < \varepsilon \le \frac{1}{4}$ pevně a na 1. kroku vyjmeme ze segmentu $\langle 0,1\rangle$ interval K_1^ε, jehož střed je totožný se středem segmentu a jehož míra je ε. Zbudou dva segmenty o míře $\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$.

Na 2. kroku z každého ze dvou segmentů vyjmeme interval K_{2i}^ε $(i = 1,2)$, jehož střed je totožný se středem segmentu a jehož míra je $\frac{\varepsilon}{4}$. Na tomto kroku vyjímáme otevřenou množinu $K_2^\varepsilon = K_{21}^\varepsilon \cup K_{22}^\varepsilon$, jejíž míra je $\operatorname{meas} K_2^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$. Zbudou čtyři segmenty, každý o míře $\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8}$.

Na 3. kroku z každého ze čtyř segmentů vyjmeme interval K_{3i}^ε $(i = 1,\dots,4)$, jehož střed je totožný se středem segmentu a jehož míra je $\frac{\varepsilon}{16}$. Na tomto kroku vyjímáme otevřenou množinu

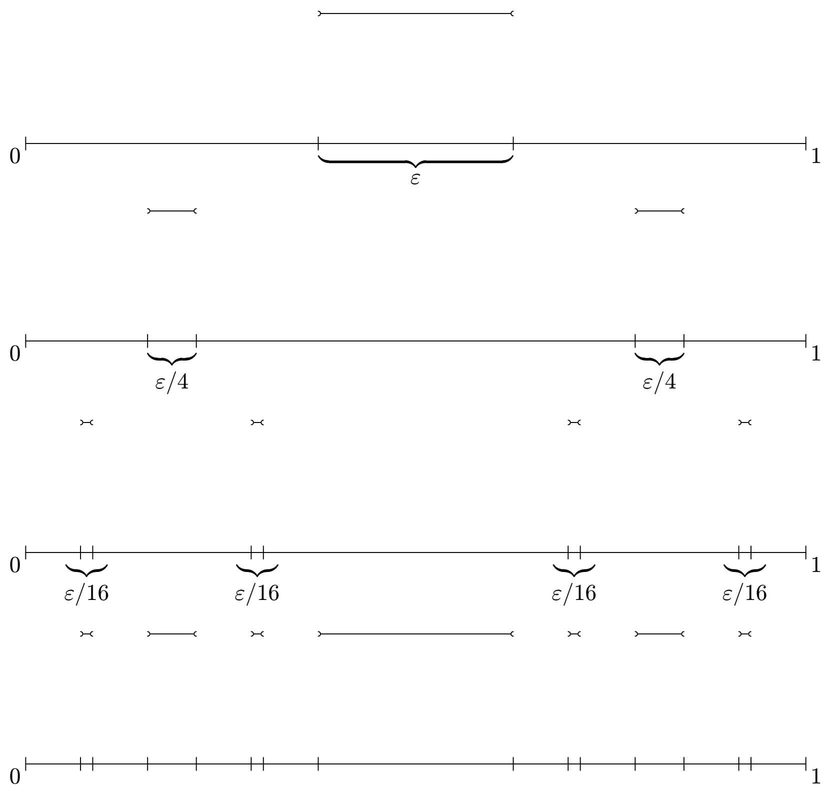
$$K_3^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{4} K_{3i},$$

jejíž míra je $\operatorname{meas} K_3^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$. Zbude osm segmentů, každý o míře $\frac{1}{8} - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{16} - \frac{\varepsilon}{32}$.

Obecně na n-tém kroku z každého z 2^{n-1} segmentů vyjmeme interval K_{ni}^ε $(i = 1,\dots,2^{n-1})$, jehož střed je totožný se středem segmentu a jehož míra je $\frac{\varepsilon}{4^{n-1}}$. Na tomto kroku vyjímáme otevřenou množinu

$$K_n^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} K_{ni},$$

jejíž míra je $\operatorname{meas} K_n^\varepsilon = 2^{n-1}\cdot\frac{\varepsilon}{4^{n-1}} = \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$.



Obr. 27.1. Konstrukce charakteristické funkce ε-diskontinua

Protože sjednocení spočetně mnoha intervalů je otevřená množina, vyjmeme tímto nekonečným procesem ze segmentu $\langle 0,1\rangle$ otevřenou množinu

$$K(\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n^{\varepsilon}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}}K_{ni}^{\varepsilon},$$

pro jejíž Lebesgueovu míru platí

$$\begin{aligned}\operatorname{meas}K(\varepsilon)&=\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)=\\&=\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\varepsilon\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Protože komplement otevřené množiny do uzavřené množiny je uzavřená množina, je množina

$$S(\varepsilon)=\langle 0,1\rangle-K(\varepsilon)$$

uzavřená a její Lebesgueova míra je

$$\operatorname{meas}S(\varepsilon)=1-\operatorname{meas}K(\varepsilon)=1-2\varepsilon\,.$$

Zaveďme dvě funkce (tzv. *charakteristické funkce* množin G_0 a $K(\varepsilon)$):

$$\chi_{G_0}(x)=\begin{cases}1 & \text{pro } x\in G_0,\\ 0 & \text{pro } x\in P_0,\end{cases}$$

$$\chi_{K(\varepsilon)}(x)=\begin{cases}1 & \text{pro } x\in K(\varepsilon),\\ 0 & \text{pro } x\in S(\varepsilon).\end{cases}$$

27.3. Tvrzení. *Množina P_0 je množinou bodů nespojitosti funkce $\chi_{G_0}(x)$ a množina $S(\varepsilon)$ je množinou bodů nespojitosti funkce $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$.*

Důkaz. Důkaz v obou případech probíhá stejně; provedeme jej proto jen v případě funkce $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$. Zvolme $x_0 \in S(\varepsilon)$ libovolně, ale pevně, a zvolme dále libovolně $\delta > 0$. Nechť $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je δ-okolí bodu x_0. Protože vytvořením množiny $K(\varepsilon)$ vznikne nekonečně mnoho množin K^ε_{kj}, je snadno vidět, že po m krocích vytváření množiny $K(\varepsilon)$, kde $\frac{1}{2\delta} + 1 < 2^m$, vznikne množina K^ε_m, pro kterou platí $K^\varepsilon_m \cap O_\delta(x_0) \neq \emptyset$. Tedy v libovolném okolí $O_\delta(x_0)$ existují body x, pro které $\chi_{K(\varepsilon)}(x) = 1$, přičemž $\chi_{K(\varepsilon)}(x_0) = 0$. Odtud plyne nespojitost funkce $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$ v libovolném bodě $x_0 \in S(\varepsilon)$.

V každém bodě $x_0 \in K(\varepsilon)$ je funkce $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$ spojitá: Protože $K(\varepsilon)$ je otevřená množina, existuje $\delta > 0$ tak, že $O_\delta(x_0) \subset K(\varepsilon)$. Avšak $\chi_{K(\varepsilon)}(x) = 1 \ \forall x \in K(\varepsilon)$. $\square$

27.4. Důsledek. *Funkce $\chi_G(x)$ je riemannovsky integrovatelná, kdežto funkce $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$ není riemannovsky integrovatelná; je pouze lebesgueovsky integrovatelná.*

Důkaz. Uvedený výsledek plyne z Tvrzení 27.3, Věty 23.6, faktu, že $\operatorname{meas} P = 0$ a $\operatorname{meas} S(\varepsilon) > 0$, a zřejmé lebesgueovské integrovatelnosti funkce $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$. $\square$

V Lebesgueově smyslu platí

$$\int_0^1 \chi_{K(\varepsilon)}(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{meas} K(\varepsilon) = 2\varepsilon.$$

V Riemannově (a tedy i Lebesgueově) smyslu platí

$$\int_0^1 \chi_{K_1^\varepsilon \cup K_2^\varepsilon \cup \cdots \cup K_n^\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x = \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right),$$

takže v Lebesgueově smyslu

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \chi_{K_1^\varepsilon \cup K_2^\varepsilon \cup \cdots \cup K_n^\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \chi_{K_1^\varepsilon \cup K_2^\varepsilon \cup \cdots \cup K_n^\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \chi_{K(\varepsilon)}(x)\,\mathrm{d}x = 2\varepsilon\,.$$

Vidíme tedy, že Lebesgueova míra a Lebesgueův integrál jsou účinné jak v případě patologických funkcí (jako např. Dirichletova funkce nebo $\chi_{K(\varepsilon)}(x)$), tak patologických jevů, které z hlediska Riemannova integrálu vznikají při limitních přechodech (právě uvedený příklad je totiž speciálním případem Lebesgueovy věty o záměně integrace a limitního přechodu – viz kap. 28).

Uveďme ještě paradox, který souvisí s otevřenou množinou $K(\varepsilon)$. Hranice ∂M otevřené množiny M se obvykle definuje jako

$$\partial M = \overline{M} \setminus M\,,$$

kde $\overline{M}$ je uzávěr množiny M. Z důkazu Tvrzení 27.3 plyne, že $\overline{K}(\varepsilon) = \langle 0, 1\rangle$, takže

$$\partial K(\varepsilon) = \langle 0, 1\rangle \setminus K(\varepsilon) = S(\varepsilon)\,.$$

Zatímco každá z množin $K_1^\varepsilon \cup K_2^\varepsilon \cup \cdots \cup K_n^\varepsilon$ má hranici, která sestává z konečného počtu bodů, a má tedy míru rovnu nule, je

$$\operatorname{meas} \partial K(\varepsilon) = \operatorname{meas} S(\varepsilon) = 1 - \operatorname{meas} K(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon\,.$$

Řešíme tento problém: Nechť na měřitelné množině E je dána posloupnost měřitelných ohraničených funkcí

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x), \ldots,$$

která v nějakém smyslu (stejnoměrně, všude, téměř všude) konverguje k měřitelné ohraničené funkci $F(x)$. Tážeme se, platí-li vztah

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E F(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{28.1}$$

Platí-li (28.1), říkáme, že je možný limitní přechod za znakem integrálu.

Uveďme příklad, že (28.1) obecně neplatí. Definujme na $\langle 0, 1\rangle$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{pro } x \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0 & \text{pro } x \notin (0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Potom pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ bude (dokažte jako cvičení)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

ale

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

a tento integrál nekonverguje k nule. Omezíme se na větu:

28.1. Věta (Legesgue). *Nechť na měřitelné množině E je dána posloupnost $\{f_n(x)\}$ měřitelných* **ohraničených** *funkcí konvergující téměř všude k měřitelné ohraničené funkci $F(x)$,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x) \quad \forall x \in E - E_0 \ (\operatorname{meas} E_0 = 0).$$

Existuje-li konstanta K, že pro všechna n a všechna x[11]

$$|f_n(x)| < K, \tag{28.2}$$

potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E F(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

[11] V uvedeném příkladě není splněna právě tato podmínka, tzv. podmínka stejnoměrné ohraničenosti posloupnosti funkcí.

29. Srovnání Riemannova a Lebesgueova integrálu

Pro velkou důležitost Vět 23.6 a 23.7 opakujeme tyto věty znovu v samostatné kapitole a dokážeme je.

29.1. Věta (Lebesgue). *Aby ohraničená funkce byla integrovatelná* (R), *je nutné a stačí, aby byla téměř všude spojitá.*

29.2. Věta. *Každá funkce integrovatelná* (R) *je nutně integrovatelná i* (L) *a oba integrály jsou sobě rovny.*

Obrácená věta neplatí - viz např. Dirichletovu funkci:

$$f_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle \text{ iracionální,} \\ 1 & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle \text{ racionální.} \end{cases}$$

Lebesqueův integrál z této funkce je podle Příkladu 23.5 roven nule, kdežto Riemannův integrál z této funkce podle Příkladu 22.8 neexistuje.

29.3. Příklad. Nyní dokážeme, že Riemannův integrál z Riemannovy funkce $f_R(x)$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$ je roven nule,

$$(R)\int_0^1 f_R(x)\,\mathrm{d}x = (L)\int_0^1 f_R(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Tento výsledek získáme pomocí Vět 29.1 a 29.2 snadno: Nechť $Q \subset \langle 0,1\rangle$ značí množinu racionálních a $I \subset \langle 0,1\rangle$ iracionálních čísel. Potom podle Věty 26.5

$$\int_0^1 f_D(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f_R(x)\,\mathrm{d}x + \int_Q f_R(x)\,\mathrm{d}x.$$

Protože $f_R(x) = 0$ pro $x \in I$, je

$$(L)\int_I f_R(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Co se týče druhého integrálu, stačí užít Důsledek 26.4 věty o střední hodnotě a skutečnost, že $\operatorname{meas} Q = 0$, abychom dostali

$$(L)\int_Q f_R(x)\,\mathrm{d}x = 0\,. \quad \square$$

Nyní přikročíme k důkazu Vět 29.1 a 29.2. Nechť na segmentu $\langle a,b\rangle$ je dána (ne nutně konečná) funkce $f(x)$. Nechť $x_0 \in \langle a,b\rangle$ a $\delta > 0$. Označme symbolem $m_\delta(x_0)$, resp. $M_\delta(x_0)$ infimum, resp. supremum funkce $f(x)$ na intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,

$$m_\delta(x_0) = \inf\{f(x)\}, \quad M_\delta(x_0) = \sup\{f(x)\}, \quad \text{kde } x_0-\delta < x < x_0+\delta.$$

(Samozřejmě uvažujeme pouze ty body intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, které leží na segmentu $\langle a,b\rangle$.) Zřejmě platí

$$m_\delta(x_0) \le f(x_0) \le M_\delta(x_0).$$

Pokud se δ zmenšuje, potom se $m_\delta(x_0)$ nezmenšuje a $M_\delta(x_0)$ nezvětšuje. Proto existují limity

$$m(x_0) = \lim_{\delta\to 0} m_\delta(x_0), \quad M(x_0) = \lim_{\delta\to 0} M_\delta(x_0), \tag{29.1}$$

přičemž zřejmě

$$m_\delta(x_0) \le m(x_0) \le f(x_0) \le M(x_0) \le M_\delta(x_0). \tag{29.2}$$

29.4. Definice. Funkce $m(x)$, resp. $M(x)$ se nazývá *dolní*, resp. *horní Baireova funkce* pro funkci $f(x)$.

29.5. Věta (Baire). *Nechť funkce $f(x)$ je konečná v bodě x_0. Aby funkce $f(x)$ byla v bodě x_0 spojitá, je nutné a stačí, aby platilo*

$$m(x_0) = M(x_0). \tag{29.3}$$

Důkaz. a) *Nutnost.* Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0. Zvolme libovolně, ale pevně $\varepsilon > 0$. Potom lze najít takové $\delta > 0$, že pro všechny body x splňující nerovnost

$$|x - x_0| < \delta$$

platí

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Jinými slovy, pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bude

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Odtud však plyne

$$f(x_0) - \varepsilon \leq m_\delta(x_0) \leq M_\delta(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

a tím spíše podle (29.2)

$$f(x_0) - \varepsilon \leq m(x_0) \leq M(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon,$$

odkud vzhledem k libovolnosti ε plyne (29.3).

b) *Dostatečnost.* Nechť nyní naopak platí (29.3). Potom podle (29.2)

$$m(x_0) = M(x_0) = f(x_0) \tag{29.4}$$

a společná hodnota obou Baireových funkcí je v bodě x_0 konečná.

Zvolme libovolně, ale pevně $\varepsilon > 0$ a najděme tak malé $\delta > 0$, že

$$m(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \leq m(x_0), \quad M(x_0) \leq M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon.$$

Odtud podle (29.4)

$$f(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0), \quad M_\delta(x_0) < f(x_0) + \varepsilon. \tag{29.5}$$

Jestliže nyní $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pak hodnota $f(x)$ leží mezi $m_\delta(x_0)$ a $M_\delta(x_0)$, takže podle (29.5)

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Jinými slovy, z toho, že $|x - x_0| < \delta$ plyne, že

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

tj. funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0. $\square$

29.6. Lemma. *Uvažujme posloupnost dělení segmentu* $\langle a, b\rangle$

$$a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \cdots < x_{n_1}^{(1)} = b,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$a = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \cdots < x_{n_i}^{(i)} = b,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

přičemž při $i \to \infty$

$$\lambda_i = \max\{|x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)}|\} \to 0.$$

Nechť $m_k^{(i)}$ *je infimum hodnot funkce* $f(x)$ *na segmentu* $\langle x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}\rangle$. *Zaveďme funkci* $\varphi_i(x)$ *vztahy*

$$\varphi_i(x) = m_k^{(i)} \text{ pro } x \in (x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}),$$

$$\varphi_i(x) = 0 \text{ pro } x = x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_{n_1}^{(i)}.$$

Jestliže bod x_0 *není totožný s žádným z bodů* $x_k^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, n_i)$, *potom*

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_i(x_0) = m(x_0).$$

Důkaz. Zvolme nějaké i pevně a označme symbolem $\langle x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\rangle$ ten ze segmentů i-tého způsobu dělení, který obsahuje bod x_0. Protože bod x_0 není totožný s žádným bodem dělení, platí

$$x_{k_0}^{(i)} < x_0 < x_{k_0+1}^{(i)},$$

takže při dostatečně malých $\delta > 0$ bude

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \langle x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\rangle.$$

Z této inkluze plyne, že

$$m_{k_0}^{(i)} \le m_\delta(x_0),$$

čili, což je totéž, že

$$\varphi_i(x_0) \le m_\delta(x_0).$$

Přejděme k limitě pro $\delta \to 0$. Potom najdeme, že při libovolném i platí (vzhledem k definici funkce $m(x)$ – viz (29.1))

$$\varphi_i(x_0) \le m(x_0).$$

Tím je Lemma 29.6 dokázáno v případě $m(x_0) = -\infty$. Nechť nyní $m(x_0) > -\infty$ a nechť $h < m(x_0)$. Potom nalezneme takové $\delta > 0$, že $m_\delta(x_0) > h$. Jestliže fixujeme toto δ, najdeme dostatečně velké i_0, že při $i > i_0$ bude

$$\langle x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\rangle \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

kde (jako výše) $\langle x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)} \rangle$ je segment, který obsahuje bod x_0. Existence takového i_0 plyne z podmínky $\lambda_i \to 0$.

Pro takové indexy i bude

$$m_{k_0}^{(i)} \geq m_\delta(x_0) > h,$$

čili (což je totéž)

$$\varphi_i(x_0) > h.$$

Tedy pro **každé** $h < m(x_0)$ lze nalézt takový index i_0, že při $i > i_0$ je

$$h < \varphi_i(x_0) \leq m(x_0),$$

což znamená, že $\varphi_i(x_0) \to m(x_0)$. $\square$

29.7. Důsledek. *Baireovy funkce $m(x)$ a $M(x)$ jsou měřitelné.*

Důkaz. Množina bodů všech dělení $\{x_k^{(i)}\}$ je spočetná, takže má míru nula. Proto z Lemmatu 29.6 plyne, že $\varphi_i(x) \to m(x)$ téměř všude. Ale funkce $\varphi_i(x)$ jsou měřitelné, protože jsou schodovité. Z Věty 25.19 tedy plyne, že funkce $m(x)$ je měřitelná. Pro Baireovu funkci $M(x)$ probíhá důkaz obdobně. (Musí se dokázat analogie Lemmatu 29.6, tj. $\lim_{i\to 0} \varphi_i(x_0) = M(x_0)$, kde v definici funkcí $\varphi_i(x)$ je symbol $m_k^{(i)}$ nahrazen symbolem $M_k^{(i)}$, kde $M_k^{(i)}$ je supremum hodnot funkce $f(x)$ na segmentu $\langle x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)} \rangle$.) $\square$

29.8. Důsledek. *Je-li v podmínkách Lemmatu* 29.6 *funkce $f(x)$ ohraničená, potom*

$$(L) \int_a^b \varphi_i(x)\ \mathrm{d}x \to (L) \int_a^b m(x)\ \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Jestliže $|f(x)| \leq K$, potom zřejmě platí

$$|\varphi_i(x)| \leq K, \quad |m(x)| \leq K.$$

Protože funkce $\varphi_i(x)$, $m(x)$ jsou měřitelné, jsou tedy integrovatelné (L). Nyní stačí užít Větu 28.1 (o limitním přechodu za znakem integrálu) a Lemma 29.6:

$$\lim_{i\to 0} (L) \int_a^b \varphi_i(x)\ \mathrm{d}x = (L) \int_a^b \lim_{i\to 0} \varphi_i(x)\ \mathrm{d}x = (L) \int_a^b m(x)\ \mathrm{d}x. \quad \square$$

Důkaz Věty 29.1. Přeformulujme nyní pro účely tohoto důkazu tvrzení Důsledku 29.8. Za tím účelem si všimněme, že

$$(L) \int_a^b \varphi_i(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n_i-1} \int_{x_k^{(i)}}^{x_{k+1}^{(i)}} \varphi_i(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n_i-1} m_k^{(i)} (x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)}) = s_i,$$

kde s_i je dolní Darbouxův součet (vystupující v definici Riemannova integrálu), který odpovídá i-tému způsobu dělení segmentu $\langle a, b\rangle$. Tedy tvrzení Důsledeku 29.8 znamená, že při $i \to \infty$

$$s_i \to (L) \int_a^b m(x)\, \mathrm{d}x. \tag{29.6}$$

Analogicky můžeme stanovit, že horní Darbouxův součet S_i při rostoucím i konverguje k integrálu z horní Baireovy funkce

$$S_i \to (L) \int_a^b M(x)\, \mathrm{d}x.$$

Dohromady tedy dostáváme

$$S_i - s_i \to (L) \int_a^b (M(x) - m(x))\, \mathrm{d}x. \tag{29.7}$$

Na druhé straně v základním kurzu matematické analýzy se dokazuje, že pro to, aby ohraničená funkce $f(x)$ byla integrovatelná (R) je nutné a stačí, aby $S_i - s_i \to 0$.

Srovnáme-li toto tvrzení se vztahem (29.7), vidíme, že pro integrovatelnost (R) funkce $f(x)$ je nutné a stačí, aby

$$(L) \int_a^b (M(x) - m(x))\, \mathrm{d}x = 0. \tag{29.8}$$

Podmínka (29.8) je v každém případě splněna, je-li rozdíl $M(x) - m(x)$ ekvivalentní nule, tj. symbolicky $M(x) - m(x) \sim 0$. Ale protože tento rozdíl je podle (29.2) **nezáporný**, tak i obráceně z (29.8) plyne, že (viz Důsledek 26.9)

$$m(x) \sim M(x). \tag{29.9}$$

Integrovatelnost (R) ohraničené funkce $f(x)$ je tedy rovnocenná se vztahem (29.9). Srovnáme-li tento výsledek s tvrzením Věty 29.5, dostáváme tvrzení Věty 29.1. $\square$

Důkaz Věty 29.2. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je integrovatelná (R). Potom je $f(x)$ nutně ohraničená a podle Vět 29.1 a 29.5 bude

$$m(x) = M(x) \quad \text{téměř všude na } \langle a, b\rangle.$$

Podle (29.2) však je

$$m(x) \le f(x) \le M(x),$$

což s předchozím vztahem dává

$$f(x) = m(x) \quad \text{téměř všude na } \langle a, b\rangle. \tag{29.10}$$

Protože funkce $f(x)$ je ekvivalentní s měřitelnou funkcí $m(x)$ (viz Důsledek 29.7), tak je podle Věty 25.8 sama měřitelná. Každá ohraničená měřitelná funkce je integrovatelná (L), takže je funkce $f(x)$ integrovatelná (L). Tím jsme dokázali, že z integrovatelnosti libovolné funkce v Riemannově smyslu plyne její integrovatelnost v Lebesgueově smyslu.

Nakonec z ekvivalentnosti funkcí $f(x)$ a $m(x)$ (viz (29.10)) plyne, že

$$(L)\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = (L)\int_a^b m(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ale, jak je známo ze základního kurzu matematické analýzy, v podmínkách Lemmatu 29.6 pro funkci $f(x)$ integrovatelnou (R) platí

$$s_i \to (R)\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x,$$

kde s_i je dolní Darbouxův součet korespondující i-tému způsobu dělení segmentu $\langle a, b\rangle$. Srovnáme-li tento fakt s (29.6), vidíme vzhledem k (29.10), že

$$(R)\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = (L)\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Tím je Věta 29.2 dokázána. □

30. Stanovení primitivní funkce

30.1. Věta. *Nechť funkce $f(x)$ má v každém bodě segmentu $\langle a, b\rangle$ derivaci $f'(x)$. Je-li $f'(x)$* **ohraničená**, *pak je integrovatelná (L) a platí*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$