31. Integrál nezáporné měřitelné funkce

V této a další kapitole je zobecněna definice Lebesgueova integrálu na neohraničené funkce.

31.1. Lemma. *Nechť funkce $f(x)$ je měřitelná a nezáporná na měřitelné množině E. Nechť dále je N přirozené číslo. Je-li funkce $[f(x)]_N$ definována vztahem*[1]

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x) & \text{je-li } f(x) \le N, \\ N & \text{je-li } f(x) > N, \end{cases}$$

potom je tato funkce také měřitelná.

V podmínkách lemmatu je funkce $[f(x)]_N$ ohraničená a tedy integrovatelná (L). Protože kromě toho

$$[f(x)]_1 \le [f(x)]_2 \le [f(x)]_3 \le \dots,$$

tak

$$\int_E [f]_1 \, dx \le \int_E [f]_2 \, dx \le \int_E [f]_3 \, dx \le \dots$$

a existuje určitá (konečná nebo nekonečná) limita

$$\lim_{N \to \infty} \int_E [f(x)]_N \, dx. \tag{*}$$

31.2. Definice. Limitu $(*)$ nazýváme Lebesgueovým integrálem funkce $f(x)$ na množině E a značíme symbolem

$$\int_E f(x) \, dx \quad \text{nebo } (L) \int_E f(x) \, dx$$

a pokud $E = \langle a, b \rangle$ potom symbolem

$$\int_a^b f(x) \, dx \, .$$

Je-li tento integrál konečný, potom se funkce $f(x)$ nazývá integrovatelnou (L) nebo integrace schopnou na množině E.

31.3. Poznámka. Tímto způsobem připisujeme integrál *každé měřitelné* nezáporné funkci, ale integrovatelnými nazýváme pouze ty funkce, jejichž integrál je konečný. Snadno vidíme, že pro *ohraničenou*, měřitelnou a nezápornou funkci $f(x)$ nová definice integrálu splývá s dřívější, neboť při dostatečně velkých N bude $[f(x)]_N \equiv f(x)$. Proto je každá ohraničená (měřitelná a nezáporná) funkce integrovatelná.

[1] Tato funkce se nazývá „seříznutí funkce $f(x)$ číslem N.“

Příklad. a) Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Platí

$$\left[\frac{1}{x}\right]_N = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{je-li } \frac{1}{x} \le N \text{ čili } \frac{1}{N} \le x, \\ N, & \text{je-li } \frac{1}{x} > N \text{ čili } \frac{1}{N} > x. \end{cases}$$

Odtud

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{N}} N\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{N}}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \big[Nx\big]_0^{\frac{1}{N}} + \Big[\ln x\Big]_{\frac{1}{N}}^1 = 1 + 0 + \ln 1 - \ln\frac{1}{N} = 1 + 0 - 0 + \ln N.$$

Odtud limitním přechodem pro $N \to +\infty$ dostáváme

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

b) Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Platí

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_N = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{je-li } \frac{1}{\sqrt{x}} \le N \text{ čili } \frac{1}{N^2} \le x, \\ N, & \text{je-li } \frac{1}{sx} > N \text{ čili } \frac{1}{N^2} > x. \end{cases}$$

Odtud

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{N^2}} N\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{N^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \Big[Nx\Big]_0^{\frac{1}{N^2}} + \Big[2\sqrt{x}\Big]_{\frac{1}{N^2}}^1 = \frac{1}{N} + 2 - \frac{2}{N}.$$

Odtud limitním přechodem pro $N \to +\infty$ dostáváme

$$\int_0^1 \frac{1}{sx}\,\mathrm{d}x = 2.$$

Tedy funkce $\frac{1}{x}$ není integrace schopná podle Lebesguea, ale funkce $\frac{1}{sx}$ je integrace schopná. (Dostali jsme podobný výsledek jako v teorii nevlastního Riemannova integrálu: první integrál diverguje, kdežto druhý konverguje.)

31.4. Věta. *Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na množině E, potom je na této množině téměř všude konečná.*

31.5. Věta. *Je-li* $\operatorname{meas} E = 0$, *potom každá nezáporná funkce* $f(x)$ *je integrovatelná na množině* E *a platí*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

31.6. Věta. *Jsou-li funkce* $f(x)$ *a* $g(x)$ *ekvivalentní na množině* E, *potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

31.7. Věta. *Je-li funkce* $f(x)$ *nezáporná a měřitelná na množině* E *a je-li* E_0 *měřitelná podmnožina množiny* E, *potom*

$$\int_{E_0} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

31.8. Věta. *Nechť funkce* $f(x)$ *a* $F(x)$ *jsou nezáporné a měřitelné na množině* E. *Je-li* $f(x) \le F(x)$, *potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_E F(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

31.9. Věta. *Jestliže pro nezápornou a měřitelnou funkci na množině* E *platí*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

potom je funkce $f(x)$ *ekvivalentní nule.*

31.10. Věta. *Nechť* $f_1(x)$ *a* $f_2(x)$ *jsou dvě nezáporné měřitelné funkce na množině* E. *Je-li* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

31.11. Věta. *Je-li* $f(x) \ge 0$ *měřitelná funkce daná na množině* E *a* $k \ge 0$ *konečné číslo, potom*

$$\int_E k f(x)\,\mathrm{d}x = k \int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

31.19. Věta (Totální aditivnost integrálu). *Nechť měřitelná množina* E *je sjednocením konečně nebo spočetně mnoha navzájem disjunktních měřitelných množin* E_k,

$$E = \bigcup_k E_k \quad (E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \ne j).$$

Pro každou nezápornou měřitelnou funkci $f(x)$ *danou na množině* E *bude*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

32. Integrovatelné funkce libovolného znaménka

Nechť $f(x)$ je měřitelná funkce daná na měřitelné množině E. Zaveďme funkce

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{pro } f(x) < 0, \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{pro } f(x) < 0. \end{cases}$$

Tyto funkce jsou měřitelné a nezáporné, takže existují oba integrály

$$\int_E f_+(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_E f_-(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Platí

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)\,.$$

Je proto přirozené dohodnout se nazývat rozdíl

$$\int_E f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f_-(x)\,\mathrm{d}x \tag{*}$$

integrálem funkce $f(x)$. Protože „rozdíl“ $+\infty - (+\infty)$ nemá smysl, má symbol $(*)$ smysl tehdy a jen tehdy, když alespoň jedna z funkcí $f_+(x)$ a $f_-(x)$ je integrovatelná.

32.1. Definice. Je-li alespoň jedna z funkcí $f_+(x)$ nebo $f_-(x)$ integrovatelná na množině E, potom nazýváme (konečný nebo nekonečný) rozdíl

$$\int_E f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f_-(x)\,\mathrm{d}x$$

Lebesgueovým integrálem funkce $f(x)$ na množině E a značíme symbolem

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{32.1}$$

32.2. Definice. Funkce $f(x)$ se nazývá integrovatelnou (L) nebo integrace schopnou na množině E, jestliže integrál $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je konečný.

32.3. Poznámka. Množina všech integrovatelných funkcí se obvykle značí písmenem L, takže fakt integrovatelnosti funkce $f(x)$ můžeme také zapsat takto: $f(x) \in L$, resp. $L(E)$, chceme-li vyznačit množinu, přes kterou integrujeme.

32.4. Věta. *Aby měřitelná funkce $f(x)$ byla integrovatelná, je nutné a stačí, aby byla integrovatelnou funkce $|f(x)|$. Je-li tato podmínka splněna, potom*

$$\left|\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

32.5. Důsledky. I. *Integrovatelná funkce je skoro všude konečná.*
II. *Je-li* $\operatorname{meas} E = 0$, *potom na E je integrovatelná každá funkce $f(x)$ a platí*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

III. *Funkce integrovatelná na množině E je integrovatelná i na každé její měřitelné podmnožině.*
IV. *Nechť funkce $f(x)$ a $F(x)$ jsou měřitelné na množině E a nechť $|f(x)| \le F(x)$. Je-li funkce $F(x)$ integrovatelná, tak je integrovatelná i funkce $f(x)$.*

32.6. Věta. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou ekvivalentní. Z existence jednoho z integrálů $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_E g(x)\,\mathrm{d}x$ plyne existence druhého a jejich rovnost.*

32.7. Věta (konečná aditivnost integrálu). *Nechť množina E je sjednocením konečného počtu navzájem disjunktních měřitelných množin*

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \quad (E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \ne j).$$

Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na každé z množin E_k, tak je integrovatelná i na jejich sjednocení a platí

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

V případě spočetně mnoha množin neplyne z integrovatelnosti funkce $f(x)$ na každé množině její integrovatelnost na jejich sjednocení, jak ukazuje tento příklad.

32.8. Příklad. Nechť funkce $f(x)$ je dána na $(0,1\rangle$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} -n & \text{pro } \frac{1}{n+1} < x \le \frac{2n+1}{2n(n+1)} \\ n & \text{pro } \frac{2n+1}{2n(n+1)} < x \le \frac{1}{n} \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)\,.$$

Funkce $f(x)$ je integrovatelná na každém polosegmentu $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\rangle$, přičemž

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{2n+1}{2n(n+1)}} n\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2n+1}{2n(n+1)}}^{\frac{1}{n}} n\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Přitom na sjednocení $(0,1\rangle$ těchto polosegmentů není funkce $f(x)$ integrovatelná, protože (věta 32.4)

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty\,.$$

Platí však následující věty o totální aditivnosti integrálu.

32.9. Věta. *Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na množině E, která je vyjádřitelná ve tvaru sjednocení spočetné množiny navzájem disjunktních měřitelných množin,*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad (E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j),$$

potom

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{32.2}$$

32.10. Věta. *Nechť měřitelná množina E je vyjádřitelná ve tvaru sjednocení spočetně mnoha navzájem disjunktních měřitelných množin E_k. Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na každé množině E_k a jestliže*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty\,,$$

potom funkce $f(x)$ je integrovatelná na množině E a platí rovnice (32.2).

32.11. Poznámka. Jak je vidět z příkladu 32.8, nelze zaměnit podmínky věty 32.10 podmínkou konvergence řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

32.12. Věta. *Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na množině E a k je konečná konstanta, potom funkce $kf(x)$ je také integrovatelná na E a platí*

$$\int_E kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

32.13. Důsledek. *Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na množině E a $\varphi(x)$ měřitelná a ohraničená na této množině, pak jejich součin $\varphi(x)f(x)$ je integrovatelná funkce na E.*

32.14. Věta. *Je-li každá z funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$ integrovatelná na množině E, potom je integrovatelná i funkce $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, přičemž*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_E f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

32.15. Věta (absolutní spojitost integrálu). *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na množině E. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každou měřitelnou množinu $e \subset E$ s mírou $\operatorname{meas} e < \delta$ platí*

$$\left|\int_e f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\,.$$

33. Limitní přechod za znakem integrálu

33.1. Věta (Lebesgue). *Nechť na měřitelné množině E je dána posloupnost měřitelných funkcí* $|\{f_n(x)\}$*, která konverguje na této množině téměř všude k funkci* $F(x)$*. Existuje-li taková integrovatelná funkce* Φ*, že pro všechna* n *i* $x \in E$ *platí*

$$|f_n(x)| \leq \Phi(x)\,,$$

potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E F(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

33.2. Důsledek. *V podmínkách věty je*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi(x) f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \varphi(x) F(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde $\varphi(x)$ *je libovolná měřitelná ohraničená funkce.*

34. Základní vlastnosti kvadraticky integrovatelných funkcí

V této a několika následujících kapitolách budeme uvažovat velmi důležitou třídu funkcí – funkce s integrovatelným kvadrátem. Kvůli jednoduchosti budeme předpokládat, že všechny uvažované funkce jsou zadány na nějakém segmentu $E = \langle a, b\rangle$.

Případ, kdy funkce jsou definovány na libovolné měřitelné množině $E_0 \subset E = \langle a, b\rangle$, může být převeden na předchozí případ, když každou uvažovanou funkci dodefinujeme nulou v bodech množiny $E - E_0$.

34.1. Definice. Měřitelná funkce $f(x)$ se nazývá *kvadraticky integrace schopnou funkcí*, jestliže

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x < +\infty\,.$$

Množinu všech kvadraticky integrovatelných funkcí značíme obvykle[2] L_2.

34.2. Věta. *Každá funkce, která je kvadraticky integrovatelná, je integrovatelná, tj.* $L_2 \subset L$.

Tato věta plyne z evidentní nerovnosti

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}(1 + f^2(x))\,.$$

Stejně tak z nerovnosti

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$$

plyne

34.3. Věta. *Součin dvou funkcí kvadraticky integrovatelných je integrovatelná funkce.*

Odtud v důsledku rovnosti

$$(f \pm g)^2 = f^2 \pm 2fg + g^2$$

plyne

[2] Někdy, aby se zdůraznilo o jaký interval (a, b) se jedná, píše se $L_2(a, b)$.

34.4. Věta. *Součet a rozdíl funkcí, které patří do L_2, náleží do L_2.*

Nakonec uveďme zcela zřejmou skutečnost, že současně s $f(x)$ do L_2 patří i všechny funkce tvaru $kf(x)$, kde k je konečné reálné číslo.

34.5. Věta (Buňakovského nerovnost). *Jestliže $f(x) \in L_2$ a $g(x) \in L_2$, potom*

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \le \left[\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right] \cdot \left[\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right]. \tag{34.1}$$

Důkaz. Uvažujme kvadratický trojčlen

$$\psi(u) = Au^2 + 2Bu + C$$

s reálnými koeficienty A, B, C, přičemž $A > 0$. Je-li tento trojčlen nezáporný při všech reálných hodnotách u, potom

$$B^2 \le AC\,. \tag{34.2}$$

Skutečně, kdyby tomu tak nebylo, potom

$$\psi\Big(-\frac{B}{A}\Big) = \frac{1}{A}(AC - B^2) < 0\,.$$

Položme nyní

$$\psi(u) = \int_a^b [uf(x) + g(x)]^2\,\mathrm{d}x = u^2\int_a^b f^2\,\mathrm{d}x + 2u\int_a^b fg\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2\,\mathrm{d}x.$$

Tento trojčlen je nezáporný, a proto jeho koeficienty splňují nerovnost (34.2), což je v tomto případě nerovnost (34.1).[3] □

34.6. Důsledek. *Jestliže $f(x) \in L_2$, potom*

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}\,. \tag{34.3}$$

Důkaz. Položíme-li $g(x) \equiv 1$ v (34.1) a nahradíme-li $f(x)$ výrazem $|f(x)|$, dostaneme nerovnost (34.3). □

34.7. Věta (Cauchyova nerovnost). *Jestliže $f(x) \in L_2$ a $g(x) \in L_2$, potom*

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) + g(x)]^2\,\mathrm{d}x} \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Důkaz. Odmocníme-li obě strany Buňakovského nerovnosti (34.1), nalezneme

$$\int_a^b fg\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

[3] Předpokládáme, že $\int_a^b f^2\,\mathrm{d}x > 0$. V případě $\int_a^b f^2\,\mathrm{d}x = 0$ by funkce $f(x)$ byla ekvivalentní nule a nerovnost (34.1) by degenerovala v triviální totožnost $0 = 0$.

Násobíme-li tuto nerovnost dvěma a přičteme-li k oběma stranám výraz

$$\int_a^b f^2\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2\,\mathrm{d}x,$$

dostaneme

$$\int_a^b (f+g)^2\,\mathrm{d}x \le \left(\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}\right)^2.$$

Odtud již plyne tvrzení věty. $\square$

Cauchyova nerovnost dovoluje uvažovat množinu L_2 z nového hlediska. Konkrétně, jestliže přiřadíme každé funkci $f(x) \in L_2$ číslo

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}\,,$$

tak bude platit:

I. $\|f\| \ge 0$, přičemž $\|f\| = 0$ tehdy a jen tehdy, když $f(x) \sim 0$.

II. $\|kf\| = |k| \cdot \|f\|$ a mimo jiné $\|-f\| = \|f\|$.

III. $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$.

Číslo $\|f\|$ se nazývá *normou* funkce $f(x)$. Analogie mezi $\|f\|$ a absolutní hodnotou $|x|$ reálného čísla bije do očí. Tato analogie je zdrojem řady důležitých a krásných konstrukcí.

Zhruba řečeno, základní význam absolutní hodnoty v matematické analýze spočívá v tom, že s její pomocí provádíme měření vzdáleností na číselné přímce:

$$\varrho(x,y) = |x-y|\,.$$

Zavedení normy dovoluje hledět i na množinu $L_2(a,b)$ jako na nějaký „prostor“, v kterém je také možno provádět měření, jestliže přijmeme číslo

$$\varrho(f,g) = \|f-g\|$$

za vzdálenost mezi prvky f a g množiny L_2.

Jestliže se dohodneme považovat ekvivalentní funkce za totožné, potom vzdálenost $\varrho(f,g)$ bude mít vlastnosti, na které jsme zvyklí:

1. $\varrho(f,g) \ge 0$, přičemž $\varrho(f,g) = 0$, když a jen když $f = g$.
2. $\varrho(f,g) = \varrho(g,f)$.
3. $\varrho(f,g) \le \varrho(f,h) + \varrho(h,g)$.

Jestliže na některé množině A, jejíž prvky jsou zcela libovolného původu, je zadána jakákoliv funkce $\varrho(x,y)$, která je definována pro všechny dvojice x, $y \in A$, potom množinu A nazýváme *metrickým prostorem.*

To znamená, že L_2 je metrický prostor. Jako první tento způsob nazírání na L_2 začal rozvíjet D. Hilbert; to je také důvod, proč se L_2 nazývá *Hilbertovým prostorem* (i když písmeno L v symbolu L_2 je užíváno na počest Lebesguea; proto tento prostor budeme také nazývat *Lebesgueovým prostorem*).

35. Konvergence podle středu

Pojem normy dovoluje zavést v Hilbertově prostoru L_2 pojem limity pomocí téměř stejných výrazů jako v případě číselné přímky.

35.1. Definice. Prvek f prostoru L_2 se nazývá *limitou* posloupnosti $\{f_n\}$ prvků tohoto prostoru, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $N = N(\varepsilon)$, že pro všechna $n > N$ je $\|f_n - f\| < \varepsilon$.

Tuto skutečnost budeme označovat tím, že budeme říkat, že posloupnost $\{f_n\}$ *konverguje* k prvku f, nebo že prvek f_n se *blíží* k f a zapisovat obvyklým způsobem

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f\,, \quad f_n \to f\,.$$

Zde musíme upozornit čtenáře na hluboký rozdíl vztahů

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{a} \quad f_n \to f\,.$$

První znamená, že při pevném x *číselná* posloupnost $\{f_n(x)\}$ v obvyklém smyslu konverguje k číselné limitě $f(x)$. Druhý vztah znamená, že posloupnost prvků prostoru L_2 konverguje k prvku $f \in L_2$ ve smyslu právě uvedené definice 35.1. V obyčejných termínech teorie funkcí vztah $f_n \to f$ znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Tento nový druh konvergence posloupnosti funkcí se nazývá *konvergence podle středu.*

35.2. Věta. *Jestliže posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje podle středu k funkci $f(x)$, potom k této funkci konverguje i podle míry.*

Důkaz. Nechť $\sigma > 0$ a

$$A_n(\sigma) = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}\,.$$

Potom

$$\int_a^b (f_n - f)^2 \,\mathrm{d}x \geq \int_{A_n(\sigma)} (f_n - f)^2 \,\mathrm{d}x \geq \sigma^2 \operatorname{meas} A_n(\sigma)\,,$$

a protože σ je pevně zvoleno, tak $\operatorname{meas} A_n(\sigma) \to 0$, a to značí, že $f_n \Longrightarrow f$. □

35.3. Důsledek. *Jestliže posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje podle středu k funkci $f(x)$, potom je z ní možno vydělit podposloupnost $\{f_{n_k}(x)\}$ konvergující k $f(x)$ téměř všude.*

Tento důsledek je možno získat pouhým srovnáním právě dokázané věty 35.2 s Rieszovou větou z hlavy IV (viz větu 22.5). Můžeme jej však dokázat bez jakéhokoliv užití konvergence podle míry: Jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n - f)^2 \,\mathrm{d}x = 0\,,$$

potom lze najít takové indexy $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, že

$$\int_a^b (f_{n_k} - f)^2 \,\mathrm{d}x < \frac{1}{2^k}\,.$$

Potom nekonečná řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (f_{n_k} - f)^2 \, \mathrm{d}x$$

konverguje, takže podle důsledku 31.18 téměř všude na $\langle a, b \rangle$ platí

$$f_{n_k}(x) \to f(x) .$$

Poznamenejme, že konvergence podle středu posloupnosti $\{f_n(x)\}$ k funkci $f(x)$ neimplikuje konvergenci $\{f_n(x)\}$ k $f(x)$ téměř všude. To lze ilustrovat příkladem.

Podobně, konvergence $f_n(x) \to f(x)$ v každém bodě $x \in \langle a, b \rangle$ neimplikuje konvergenci podle středu, jak ukazuje následující příklad.

35.4. Příklad. Nechť na $\langle 0, 1 \rangle$ je dána posloupnost $\{f_n(x)\}$ vztahy

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{pro } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{pro ostatní body } \langle 0, 1 \rangle. \end{cases}$$

Potom zřejmě pro libovolné $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 ,$$

ale přitom

$$\int_0^1 f_n^2(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 \, \mathrm{d}x = n \to +\infty .$$

Avšak: $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow f_n \to f$.

35.5. Věta (Jednoznačnost limity). *Posloupnost $\{f_n\} \subset L_2$ může mít pouze jednu limitu.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f_n \to f$, $f_n \to g$. Potom

$$\|f - g\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - g\| ,$$

a protože pravá strana této nerovnosti konverguje k nule a levá je konstantní a nezáporná, tak $\|f - g\| = 0$. Odtud $f - g = 0$ a $f = g$, což jsme chtěli dokázat.

Můžeme dát i jiný důkaz této věty: Jestliže $f_n \to f$ a $f_n \to g$, potom podle věty 35.2 posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje podle míry jak k $f(x)$, tak k $g(x)$, takže $f(x) \sim g(x)$ a ekvivalentní funkce jsme se dohodli považovat za jediný prvek prostoru L_2. □

35.6. Věta (Spojitost normy). *Jestliže $f_n \to f$, potom $\|f_n\| \to \|f\|$.*

Důkaz. Ze zřejmých nerovností

$$\|f_n\| \leq \|f\| + \|f_n - f\| , \quad \|f\| \leq \|f_n\| + \|f_n - f\|$$

plyne, že

$$\big| \|f_n\| - \|f\| \big| \leq \|f_n - f\|$$

a odtud plyne tvrzení věty. □

35.7. Důsledek. *Normy členů konvergentní posloupnosti $\{f_n\}$ jsou ohraničené.*

35.8. Definice. Posloupnost $\{f_n\}$ bodů prostoru L_2 se nazývá *cauchyovská* (konvergentní v sobě, fundamentální), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $N(\varepsilon)$, že pro $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$ platí

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon\,.$$

35.9. Věta. *Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ má limitu, potom je cauchyovská.*

Důkaz. Nechť $f_n \to f$. Zvolíme-li libovolné $\varepsilon > 0$, lze nalézt takové $N(\varepsilon)$, že při $n > N(\varepsilon)$ bude

$$\|f_n - f\| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Jestliže nyní $n > N(\varepsilon)$ a $m > N(\varepsilon)$, potom

$$\|f_n - f_m\| \le \|f_n - f\| + \|f - f_m\|\,,$$

což dokazuje tvrzení věty. □

Mnohem hlubší je obrácená věta:

35.10. Věta (Fischer). *Je-li posloupnost $\{f_n\} \subset L_2$ cauchyovská, potom je konvergentní.*

Důkaz. Větu dokážeme v případě libovolné ohraničené měřitelné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$; tedy platí i v případě $\mathbb{R}^1$. Nechť $\{f_n\} \subset L_2(\Omega)$ je libovolně zvolená cauchyovská posloupnost, tj.

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_{L_2(\Omega)} = 0\,, \tag{35.1}$$

což znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0(\varepsilon)$ tak, že $\|f_n - f_m\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon$ pro všechna $m, n \ge n_0(\varepsilon)$. Máme dokázat existenci takové funkce $f \in L_2(\Omega)$, že

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L_2(\Omega)} = 0\,. \tag{35.2}$$

Vztah (35.1) implikuje existenci posloupnosti $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ takových přirozených čísel, že

$$N_1 < N_2 < \dots$$

a

$$\|f_n - f_{N_k}\|_{L_2(\Omega)} < \frac{1}{2^k} \quad \forall n \ge N_k\,. \tag{35.3}$$

Položme

$$g_k := f_{N_k}\,, \tag{35.4}$$

$$h_n := \sum_{j=n}^{\infty} |g_{j+1} - g_j|\,. \tag{35.5}$$

Zřejmě

$$g_n \in L_2(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \tag{35.6}$$

$$\|g_{n+1} - g_n\|_{L_2(\Omega)} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \tag{35.7}$$

vztah (35.7) platí vzhledem k (35.3).

Protože norma je spojitý funkcionál, můžeme psát podle (35.5), trojúhelníkové nerovnosti a (35.7), že

$$\begin{aligned}\|h_n\|_{L_2(\Omega)} &= \Big\|\Big(\sum_{j=n}^{\infty}|g_{j+1}-g_j|\Big)\Big\|_{L_2(\Omega)} = \Big\|\lim_{r\to\infty}\Big(\sum_{j=n}^{r}|g_{j+1}-g_j|\Big)\Big\|_{L_2(\Omega)} = \\ &= \lim_{r\to\infty}\Big\|\Big(\sum_{j=n}^{r}|g_{j+1}-g_j|\Big)\Big\|_{L_2(\Omega)} \le \lim_{r\to\infty}\sum_{j=n}^{r}\|g_{j+1}-g_j\|_{L_2(\Omega)} < \sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{2^j}\,;\end{aligned} \tag{35.8}$$

odtud

$$\|h_n\|_{L_2(\Omega)} < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

což implikuje

$$h_n \in L_2(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{35.9}$$

Položme

$$A_n := \{X \in \Omega : |g_n(X)| = +\infty\}, \quad B_n := \{X \in \Omega : h_n(X) = +\infty\},$$
$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)\,.$$

Měřitelná funkce je téměř všude konečná; odtud podle (35.6) a (35.9) plyne measA_n = meas$B_n = 0$. Tudíž

$$\mathrm{meas}E = 0\,. \tag{35.10}$$

Podle (35.5)

$$h_n(X) = |g_{n+1}(X) - g_n(X)| + h_{n+1}(X) \quad \forall X \in \Omega\,.$$

Tedy

$$h_n(X) \ge h_{n+1}(X) \quad \forall X \in \Omega \setminus E,$$
$$h_{n+1}(X) - h_n(X) = -|g_{n+1}(X) - g_n(X)| \le g_{n+1}(X) - g_n(X) \quad \forall X \in \Omega.$$

Poslední vztah implikuje

$$g_n(X) - h_n(X) \le g_{n+1}(X) - h_{n+1}(X) \quad \forall X \in \Omega \setminus E. \tag{35.11}$$

Dále platí podle (35.5)

$$\begin{aligned} g_n + h_n &= g_n + |g_{n+1} - g_n| + \sum_{j=n+1}^{\infty}|g_{j+1} - g_j| = \\ &= g_n + |g_{n+1} - g_n| + h_{n+1} \ge g_{n+1} + h_{n+1}\,,\end{aligned}$$

protože $|g_{n+1} - g_n| \ge g_{n+1} - g_n$. Tedy

$$g_{n+1}(X) + h_{n+1}(X) \le g_n(X) + h_n(X) \quad \forall X \in \Omega \setminus E. \tag{35.12}$$

Definujme funkce

$$G_n(X) = \begin{cases} g_n(X) - h_n(X), & \text{if } X \in \Omega \setminus E, \\ 0, & \text{if } X \in E, \end{cases} \tag{35.13}$$

$$H_n(X) = \begin{cases} g_n(X) + h_n(X), & \text{if } X \in \Omega \setminus E, \\ 0, & \text{if } X \in E. \end{cases} \tag{35.14}$$

Vztahy (35.6) a (35.9) implikují

$$G_n, H_n \in L_2(\Omega)\,. \tag{35.15}$$

Protože $h_j(X) \geq 0\ \forall j \in \mathbb{N}$, platí

$$g_{n+1}(X) - h_{n+1}(X) \leq g_{n+1}(X) + h_{n+1}(X) \quad \forall X \in \Omega \setminus E. \tag{35.16}$$

Ze vztahů (35.11) – (35.14) a (35.16) plyne

$$G_1(X) \leq G_n(X) \leq G_{n+1}(X) \leq H_{n+1}(X) \leq H_n(X) \leq H_1(X) \quad \forall X \in \Omega \setminus E\,. \tag{35.17}$$

Tedy pro každý bod $X \in \Omega \setminus E$ je posloupnost čísel $\{G_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená a neklesající; tedy má limitu. Položíme

$$f(X) := \lim_{n\to\infty} G_n(X) \quad \forall X \in \Omega \setminus E\,. \tag{35.18}$$

Podle (35.15) a (35.17) platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechny body $X \in \Omega \setminus E$

$$|G_n(X)|^2 \leq (|G_1(X)| + H_1(X))^2 \in L_1(\Omega)\,. \tag{35.19}$$

Protože druhá mocnina je spojitá funkce, máme podle (35.18)

$$[f(X)]^2 = [\lim_{n\to\infty} G_n(X)]^2 = \lim_{n\to\infty} [G_n(X)]^2 \quad \forall X \in \Omega \setminus E\,. \tag{35.20}$$

Podle (35.19), (35.18) a Lebesgueovy věty o limitním přechodu za znakem integrálu (viz Větu 33.1) dostáváme, že $\|f\|_{L_2(\Omega)} < \infty$; odtud

$$f \in L_2(\Omega)\,. \tag{35.21}$$

Kromě toho, podle (35.17) a (35.18),

$$G_n(X) \leq f(X) \leq H_n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{35.22}$$

Vztah (35.22) plyne z těchto úvah: Zvolme $n \in \mathbb{N}$ libovolně. Potom podle (35.17)

$$G_n(X) \leq G_{n+r}(X) \leq H_{n+r}(X) \leq H_n(X) \quad \forall r \in \mathbb{N},\ X \in \Omega \setminus E.$$

Nyní stačí přejít k limitě pro $r \to \infty$ a užít (35.18).

Vztahy (35.22) implikují

$$G_n(X) - g_n(X) \le f(X) - g_n(X) \le H_n(X) - g_n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

tento výsledek může být psán vzhledem k (35.13), (35.14) ve tvaru

$$-h_n(X) \le f(X) - g_n(X) \le h_n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Avšak to znamenená, že

$$|f(X) - g_n(X)| \le h_n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall X \in \Omega \setminus E. \tag{35.23}$$

Podle (35.23) a (35.8)

$$\|f - g_n\|_{L_2(\Omega)} \le \|h_n\|_{L_2(\Omega)} < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2 \cdot 2^{-n}\,.$$

Z tohoto výsledku a vztahů (35.3), (35.4) plyne

$$\|f - f_n\|_{L_2(\Omega)} \le \|f - g_j\|_{L_2(\Omega)} + \|g_j - f_n\|_{L_2(\Omega)} \le 3 \cdot 2^{-j} \to 0 \quad \text{for } n \to \infty,$$

což dokazuje (35.2). Fischerova věta je dokázána. □

Předchozí úvahy také implikují: *Existuje podposloupnost posloupnosti* $\{f_n\} \subset L_2(\Omega)$ (*definovaná zde pomocí* (35.4)) *která konverguje k funkci* $f \in L_2(\Omega)$ *téměř všude v* Ω.

Vlastnost Hilbertova prostoru L_2 vyjádřená ve větě 35.10 se nazývá *úplnost* tohoto prostoru. Čtenář možná postřehl, že věty 35.9 a 35.10 jsou analogií známého Bolzano-Cauchyova příznaku konvergence. Bolzano-Cauchyův příznak je jedna z forem spojitosti číselné přímky $\mathbb{R}^1$. Tuto vlastnost je možno vyjádřit libovolným z následujících tvrzení:

A. Jsou-li body přímky $\mathbb{R}^1$ rozděleny na dvě třídy X a Y tak, že každý bod třídy X leží nalevo od každého bodu třídy Y, potom buď v třídě X je nejpravější bod, nebo v třídě Y je nejlevější bod.

B. Shora ohraničená množina má supremum.

C. Monotonně rostoucí a shora ohraničená posloupnost (proměnná) má konečnou limitu.

D. Je-li $\{d_n\}$ posloupnost do sebe vložených segmentů, jejichž délky konvergují k nule, potom existuje bod, který náleží všem segmentům.

E. Bolzano-Cauchyův příznak: cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ má konečnou limitu.

Stačí odebrat z přímky $\mathbb{R}^1$ jediný bod, aby všechny tyto věty přestaly platit.

Z vět **A, B, C, D, E** pouze poslední, tj. **E**, je zformulována bez pomoci pojmu o *pořádku* bodů na přímce. Proto je přirozené, aby právě ona byla přenesena jako charakteristika spojitosti prostoru na případ prostorů složitějších než číselná přímka.

35.11. Definice. Množina $A \subset L_2$ se nazývá *všude hustá* v L_2, jestliže každá funkce náležející do L_2 je limitou (ve smyslu konvergence podle středu) nějaké posloupnosti funkcí množiny A.

35.12. Poznámka. Snadno vidíme, že aby množina $A = \{g\}$ byla všude hustá v L_2, je nutné a stačí, aby ke každé funkci $f \in L_2$ a každému $\varepsilon > 0$ bylo možno najít takovou funkci $g \in A$, že $\|f - g\| < \varepsilon$.

35.13. Věta. *Každá ze tříd funkcí*
M – třída měřitelných ohraničených funkcí,
C – třída spojitých funkcí,
P – třída polynomů,
S – třída stupňovitých funkcí
je všude hustá v $L_2(a,b)$. Jestliže pro základní segment platí $\langle a,b\rangle = \langle -\pi,\pi\rangle$, potom je všude hustá i třída
T – třída trigonometrických polynomů.

Důkaz. Dokážeme pouze první dvě tvrzení. Důkazy zbývajících tvrzení nalezne čtenář v [Na].

A) Nechť $f(x) \in L_2(a,b)$. K libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ najdeme (vzhledem k absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu – viz větu 32.15) takové $\delta > 0$, že vztahy $e \subset \langle a,b\rangle$, $\operatorname{meas} e < \delta$ implikují

$$\int_e f^2(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon^2 .$$

Podle věty 23.1 ke každému $\delta > 0$ lze najít takovou měřitelnou ohraničenou funkci $g(x)$, že $\operatorname{meas}\{x \in E\colon f(x) \neq g(x)\} < \delta$, přičemž je možno předpokládat, že $g(x) = 0$ v bodech množiny $\{x \in E\colon f(x) \neq g(x)\}$. Tedy

$$\|f-g\|^2 = \int_a^b (f-g)^2\,\mathrm{d}x = \int_{\{x\in E\colon f(x)\neq g(x)\}} (f-g)^2\,\mathrm{d}x = \int_{\{x\in E\colon f(x)\neq g(x)\}} f^2\,\mathrm{d}x < \varepsilon^2 ,$$

tj.

$$\|f-g\| < \varepsilon .$$

Tím je věta dokázána pro třídu M.

B) Nechť $f(x) \in L_2(a,b)$ a $\varepsilon > 0$. Najdeme takovou funkci $g(x) \in M$, že

$$\|f-g\| < \tfrac{\varepsilon}{2} .$$

Nechť $|g(x)| \le K$. Podle Luzinovy věty (viz větu 23.9) existuje taková spojitá funkce $\varphi(x)$, že

$$\operatorname{meas}\{x \in E\colon \varphi(x) \neq g(x)\} < \tfrac{\varepsilon^2}{16K^2} , \quad |\varphi(x)| \le K .$$

Pro tuto funkci bude

$$\|\varphi-g\|^2 = \int_a^b (\varphi-g)^2\,\mathrm{d}x = \int_{\{x\in E\colon \varphi(x)\neq g(x)\}} (\varphi(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x \le$$

$$\le 4K^2 \cdot \operatorname{meas}\{x \in E\colon \varphi(x) \neq g(x)\} < \tfrac{\varepsilon^2}{4} ,$$

odkud $\|\varphi - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$, takže $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. Tím je věta dokázána pro třídu C. $\square$

V mnohých problémech hraje vážnou roli pojem *slabé konvergence* posloupnosti funkcí.

35.14. Definice. Posloupnost funkcí $\{f_n(x)\} \subset L_2(a,b)$ se nazývá *slabě konvergentní* k funkci $f(x) \in L_2(a,b)$, jestliže rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x) f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

platí pro každou funkci $g \in L_2(a,b)$.

Podrobněji se tímto pojmem nebudeme zabývat; zde uvedeme pouze jednu větu.

35.15. Věta. *Jestliže posloupnost funkcí $\{f_n\} \subset L_2(a,b)$ konverguje podle středu k funkci $f \in L_2(a,b)$, potom k ní konverguje i slabě.*

Důkaz. Nechť $g \in L_2(a,b)$. Potom Buňakovského nerovnost implikuje

$$\left\{ \int_a^b g(x)[f_n(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \right\}^2 \le \left\{ \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \right\} \left\{ \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,\mathrm{d}x \right\},$$

odkud

$$\left| \int_a^b g f_n\,\mathrm{d}x - \int_a^b g f\,\mathrm{d}x \right| \le \|g\| \cdot \|f_n - f\| \to 0\,,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

36. Věta o substituci v Lebesgueově integrálu

Větu uvedeme v případě vícerozměrných integrálů (i když tyto budou definovány později).

36.1. Definice. Nechť zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je definováno vztahy

$$x_1 = f_1(\xi_1, \dots, \xi_N), \dots, x_N = f_N(\xi_1, \dots, \xi_N)\,.$$

Říkáme, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je *regulární* na množině $G \subset \mathbb{R}^N$, jestliže

a) G je otevřená množina;

b) derivace $\partial f_i / \partial \xi_j$ $(i, j = 1, \dots, N)$ jsou konečné a spojité v G;

c) Jakobián $J(\xi) = D(f_1, \dots, f_N)/D(\xi_1, \dots, \xi_N)$ je různý od nuly pro všechny body $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_N] \in G$. (V případě $N = 1$ pro Jakobián platí $J(\xi_1) = f_1'(\xi_1)$.)

36.2. Věta (o substituci v Lebesgueově integrálu). *Nechť zobrazení*

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

je injektivní a regulární v množině $G \subset \mathbb{R}^N$. Nechť $D = \mathbf{f}(G)$ a nechť $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$ je libovolná funkce měřitelná na D. Potom

$$\int_D F(X)\,\mathrm{d}X = \int_G F(\mathbf{f}(\xi)) |J(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \tag{36.1}$$

za předpokladu, že alespoň jeden z integrálů existuje. (*V* (36.1) *symbol X značí libovolný N-rozměrný bod množiny D.*)

36.3. Poznámka. V případě $N = 1$ je $D = (a,b) = (f(\alpha), f(\beta))$ a $G = (\alpha, \beta)$ a vztah (36.1) se zjednodušuje na tvar

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta F(f(t)) |f'(t)|\,\mathrm{d}t, \tag{36.2}$$

který opět platí za předpokladu, že alespoň jeden z integrálů existuje. (V (36.2) místo $\mathbf{f}$ píšeme f, místo x_1 pro jednoduchost x a místo ξ_1 skalární proměnnou t.)