1. Metrický prostor

1.1. Definice. Metrickým prostorem budeme nazývat libovolnou množinu X prvků, které nazýváme body, pokud na množině X je dána tzv. *vzdálenost*, což je jakákoliv jednoznačná nezáporná reálná funkce $\varrho(x, y)$, která je definována pro každou dvojici x, $y \in X$ a která splňuje tyto tři podmínky:

1) $\varrho(x, y) = 0$, když a jen když $x = y$;
2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x) \quad \forall x, y \in X \quad$ (*symetrie*);
3) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X \quad$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Metrický prostor se obvykle označuje symbolem

$$\mathcal{X} = (X, \varrho).$$

V případech, kdy to nemůže vést k nedorozumění, se metrický prostor označuje stejným symbolem jako množina jeho bodů, tj. symbolem X.

Uvedeme příklady metrických prostorů. V této kapitole se omezíme pouze na ty prostory $\mathcal{X} = (X, \varrho)$, kde množina X není lineární prostor.

1.2. Příklad. Položíme-li pro prvky libovolné množiny

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{v případě } x = y, \\ 1 & \text{v případě } x \neq y, \end{cases}$$

dostaneme metrický prostor. Lze jej nazvat *prostorem izolovaných bodů.*

1.3. Příklad. Množina $\mathbb{Q}^1$ racionálních čísel se vzdáleností

$$\varrho(x, y) = |x - y| \tag{1.1}$$

tvoří metrický prostor Q^1. Platnost prvních dvou axiomů metriky je zřejmá; důkaz trojúhelníkové nerovnosti je také snadný:

$$\varrho(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = \varrho(x, y) + \varrho(y, z).$$

1.4. Příklad. Nechť $X = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}^1$ je uzavřený interval. Zavedeme-li na X metriku vztahem (1.1), dostaneme metrický prostor.

1.4. Příklad. Mějme libovolnou turistickou mapu, kde vzdálenost $\varrho(A, B)$ libovolných dvou bodů měříme přiložením měřítka. Trojúhelníková nerovnost

$$\varrho(A, C) \leq \varrho(A, B) + \varrho(B, C)$$

plyne z toho, že délka libovolné strany trojúhelníka není větší než součet délek dvou zbývajících stran.

2. Lineární prostor

2.1. Definice. Nechť $\mathcal{L}$ je neprázdná množina prvků $x, y, z, \ldots$ a nechť je splněno těchto osm podmínek:

I. Ke každým dvěma prvkům x, $y \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen třetí prvek ležící v $\mathcal{L}$, který je nazývaný jejich *součet* a označovaný $x + y$, přičemž platí tyto čtyři axiomy:

1. $x + y = y + x$ (*komutativnost*),
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*asociativnost*),
3. v $\mathcal{L}$ existuje takový prvek (značíme jej θ), že $x + \theta = x$ pro všechny prvky $x \in \mathcal{L}$ (*existence nulového prvku*),
4. ke každému prvku $x \in \mathcal{L}$ existuje prvek, který značíme $-x$, že $x + (-x) = \theta$ (*existence opačného prvku*). Přitom místo $x + (-x) = \theta$ píšeme prostě $x - x = \theta$. Podobně budeme místo $x + (-y)$ prostě psát $x - y$.

II. Ke každému číslu α nějakého číselného tělesa T a ke každému prvku $x \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen prvek $\alpha x \in \mathcal{L}$ (tzv. *součin prvku x a čísla α*), přičemž platí tyto dva axiomy:

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \alpha, \beta \in T,\ x \in \mathcal{L}$,
2. $1 \cdot x = x, \quad 1 \in T,\ x \in \mathcal{L}$.

III. Obě operace (tj. *sčítání prvků* a *násobení prvku číslem*) jsou svázány těmito dvěma *distributivními zákony*:

1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \alpha, \beta \in T,\ x \in \mathcal{L}$,
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \alpha \in T,\ x, y \in \mathcal{L}$.

Množinu $\mathcal{L}$ potom nazýváme *lineárním* nebo *vektorovým prostorem* nad číselným tělesem T. Podle toho, zda čísly $\alpha, \beta, \ldots$ rozumíme komplexní čísla, resp. reálná čísla, mluvíme krátce o *komplexním*, resp. *reálném lineárním prostoru*. Prvky lineárního prostoru $\mathcal{L}$ často nazýváme *body* nebo *vektory*, kdežto čísla $\alpha, \beta, \ldots$ nazýváme *skaláry*. Všude, kde nebude uvedeno něco jiného, budou naše úvahy platit pro reálné lineární prostory.

Lineární prostor (ať už reálný či komplexní) lze stručně charakterizovat jako komutativní aditivní grupu, na které je definováno násobení skalárem tak, že jsou splněny axiomy II.1, II.2 a III.1, III.2.

V teorii grup se dokazuje, že jak nulový prvek θ, tak opačný prvek $-x$ k libovolnému prvku x existuje pouze jeden. Obě tvrzení vzhledem k jejich důležitosti dokážeme:

2.2. Tvrzení. *V lineárním prostoru existuje právě jeden nulový prvek θ.*

Důkaz. Existence nulového prvku θ je zaručena axiomem I.3. Abychom dokázali jeho jednoznačnost, předpokládejme, že existuje ještě prvek $\theta^* \in \mathcal{L}$ s vlastností

$$x + \theta^* = x \quad \forall x \in \mathcal{L}.$$

Odtud

$$\theta + \theta^* = \theta.$$

Naopak podle axiomu I.3 platí

$$\theta^* + \theta = \theta^*.$$

Vzhledem k axiomu I.1 platí $\theta + \theta^* = \theta^* + \theta$, takže z obou vztahů plyne $\theta^* = \theta$. $\square$

2.3. Tvrzení. *V lineárním prostoru ke každému prvku x existuje právě jeden opačný prvek $-x$.*

Důkaz. Existence opačného prvku $-x$ je zaručena axiomem I.4. Abychom dokázali jeho jednoznačnost, zvolme $x \in \mathcal{L}$ libovolně, ale pevně, zaveďme označení $\overline{x} := -x$ a předpokládejme, že existuje ještě prvek $\overline{x}^* \in \mathcal{L}$ s vlastností

$$x + \overline{x}^* = \theta.$$

S pomocí tohoto vztahu a axiomů I.1, I.2 a I.3 postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \overline{x} = \overline{x} + \theta = \overline{x} + (x + \overline{x}^*) = (\overline{x} + x) + \overline{x}^* = \\ = (x + \overline{x}) + \overline{x}^* = \theta + \overline{x}^* = \overline{x}^* + \theta = \overline{x}^*, \end{aligned}$$

což jsme potřebovali dokázat. □

Někteří (často i renomovaní) autoři jako Taylor [Ta], či Kufner, John, Fučík [KFJ] připojují k osmi axiomům z Definice 1 ještě devátý axiom, který v našem uspořádání je nejvhodnější zařadit do skupiny II:

II.3. $0 \cdot x = \theta \quad 0 \in T \quad \forall x \in \mathcal{L}.$

Dokážeme nyní, že axiom II.3 (jehož tvrzení je pro teorii lineárních prostorů velmi závažné) není v koncepci Definice 2.1 nezávislým axiomem, ale tvrzením, které plyne z Definice 2.1:

2.4. Věta. *Nechť $0 \in T$ je nula (nulový prvek) číselného tělesa T a θ nulový prvek lineárního prostoru $\mathcal{L}$. Potom pro každý prvek $x \in \mathcal{L}$ platí $0 \cdot x = \theta$.*

Důkaz. Zvolme $x \in \mathcal{L}$ libovolně, ale pevně. Pomocí axiomu II.2, vztahu $1 = 1 + 0$ a axiomu III.1 dostaneme

$$x = 1 \cdot x = (1 + 0)x = x + 0 \cdot x$$

a podle axiomu I.3 platí

$$x + \theta = x.$$

Tyto vztahy dávají

$$x + 0 \cdot x = x + \theta. \tag{2.1}$$

K oběma stranám tohoto vztahu přičtěme opačný prvek $-x$ zleva:

$$-x + (x + 0 \cdot x) = -x + (x + \theta).$$

Podle axiomu I.2

$$(-x + x) + 0 \cdot x = (-x + x) + \theta.$$

Pomocí axiomu I.1 a pak I.4 odtud dostáváme

$$\theta + 0 \cdot x = \theta + \theta.$$

Na levé straně užijeme nejprve axiom I.1 a potom axiom I.3, takže levá strana se rovná $0 \cdot x$; pravá strana je podle axiomu I.3 rovna θ. Dostáváme tedy výsledek $0 \cdot x = \theta$, což jsme chtěli dokázat. □

2.5. Poznámka (první zákon o krácení). Kdybychom znali první zákon o krácení
$$x + y = x + z \quad \Rightarrow \quad y = z, \tag{2.2}$$
potom by tvrzení $0 \cdot x = \theta$ vyplynulo přímo z (2.1).

Důkaz (2.2) je však snadný: k oběma stranám vztahu stojícího na levé straně implikace (2.2) připočteme $-x$, takže dostaneme:
$$(x + y) - x = (x + z) - x.$$
Obě strany získaného vztahu nyní upravujeme podobně jako jsme upravovali obě strany vztahu (2.1):
$$(x + y) - x = x + (y - x) = x + (-x + y) = (x - x) + y = \theta + y = y + \theta = y.$$
Zcela stejně dostaneme $(x + z) - x = z$. Tedy $y = z$, což jsme chtěli dokázat.

Pomocí Věty 2.4 můžeme odvodit v lineárním prostoru $\mathcal{L}$ konkrétní tvar opačného prvku $-x$ k libovolnému prvku $x \in \mathcal{L}$:

2.6. Věta. *Nechť $x \in \mathcal{L}$ je libovolný prvek. Potom pro jeho opačný prvek platí $-x = (-1) \cdot x$.*

Důkaz. Užijeme-li axiomy II.2 a III.1 v tomto pořadí a pak Větu 2.4, dostaneme
$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = \theta,$$
takže $(-1) \cdot x$ je podle axiomu II.4 opačný prvek k prvku x. □

Nyní dokážeme, že Definice 2.1 je ekvivalentní s touto definicí lineárního prostoru:

2.7. Definice. Nechť $\mathcal{L}$ je neprázdná množina prvků $x, y, z, \ldots$ a nechť je splněno těchto sedm podmínek:

I. Ke každým dvěma prvkům x, $y \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen třetí prvek ležící v $\mathcal{L}$, který je nazývaný jejich *součet* a označovaný $x + y$, přičemž platí tyto čtyři axiomy:

1. $x + y = y + x \quad$ (*komutativnost*),
2. $x + (y + z) = (x + y) + z \quad$ (*asociativnost*),

II. Ke každému číslu α nějakého číselného tělesa T a ke každému prvku $x \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen prvek $\alpha x \in \mathcal{L}$ (tzv. *součin prvku x a čísla* α), přičemž platí tyto dva axiomy:

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \alpha, \beta \in T,\ x \in \mathcal{L}$,
2. $1 \cdot x = x, \quad 1 \in T,\ x \in \mathcal{L}$.

3*. V $\mathcal{L}$ existuje takový prvek Θ, že pro libovolný prvek $x \in \mathcal{L}$ platí $0 \cdot x = \Theta$, kde $0 \in T$ je nula (nulový prvek) tělesa T.

III. Obě operace (tj. *sčítání prvků* a *násobení prvku číslem*) jsou svázány těmito dvěma *distribučními zákony*:

1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \alpha, \beta \in T,\ x \in \mathcal{L}$,
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \alpha \in T,\ x, y \in \mathcal{L}$.

Množinu $\mathcal{L}$ potom nazýváme *lineárním* nebo *vektorovým prostorem* nad číselným tělesem T. Podle toho, zda čísly $\alpha, \beta, \ldots$ rozumíme komplexní čísla, resp. reálná čísla, mluvíme krátce o *komplexním*, resp. *reálném lineárním prostoru.* Prvky lineárního prostoru $\mathcal{L}$ často nazýváme *body* nebo *vektory*, kdežto čísla $\alpha, \beta, \ldots$ nazýváme *skaláry.*

2.8. Věta. *Definice 2.1 a Definice 2.7 jsou ekvivalentní, přičemž* $\Theta = \theta$.

Důkaz. Vzhledem k Větě 2.4 splňuje lineární prostor $\mathcal{L}$ z Definice 1 všechny podmínky Definice 2.7, přičemž $\Theta = \theta$.

Zbývá dokázat, že lineární prostor z Definice 2.7 je grupa s nulovým prvkem Θ. Co se týče axiomu I.3, dokážeme jej takto:

$$x + \Theta = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0)x = 1 \cdot x = x.$$

Nyní dokážeme, že prvek $(-1) \cdot x$ splňuje axiom I.4:

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = \Theta.$$

Jak v případě axiomu I.3, tak axiomu I.4 hraje prvek Θ roli nulového prvku. $\square$

Z hlediska počtu nezávislých axiomů je Definice 2.7 lineárního prostoru optimální.

2.9. Tvrzení. *Platí*

$$-(\alpha x) = (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x).$$

Důkaz. Podle Věty 2.6 a axiomů II.1 a II.2

$$-(\alpha x) = (-1) \cdot (\alpha x) = (-1 \cdot \alpha) \cdot x = (\alpha) \cdot x,$$

což je první z dokazovaných vztahů. Podobně

$$(-1 \cdot \alpha) \cdot x = (\alpha \cdot (-1)) \cdot x = \alpha \cdot ((-1) \cdot x) = \alpha \cdot (-x). \qquad \square$$

2.10. Tvrzení. *Pro libovolné prvky* $x\,, y \in \mathcal{L}$ *existuje právě jeden prvek* $z \in \mathcal{L}$ *tak, že* $z + y = x$*; tento prvek se nazývá rozdílem prvků* x *a* y *a značí se* $z = x - y$.

Důkaz. Položme $z = x + (-y)$, tj. definujeme z a ukážeme, že tento prvek splňuje Tvrzení 2.10. S pomocí axiomů I.2, I.1, I.4 a I.3 (v tomto pořadí) dostaneme

$$z + y = (x + (-y)) + y = x + ((-y) + y) = x + (y + (-y)) = x + \theta = x.$$

Kdyby existoval ještě jeden prvek z^* vyhovující podmínce Tvrzení 10 (tj. $z^* + y = x$), potom

$$z^* = z^* + \theta = z^* + (y + (-y)) = (z^* + y) + (-y) = x + (-y) = z. \qquad \square$$

2.11. Tvrzení. *Vztah $x = y$ je ekvivalentní se vztahem $x - y = \theta$.*

Důkaz. a) Jestliže $x = y$, potom

$$x - y = x + (-y) = y + (-y) = \theta.$$

b) Jestliže naopak $x - y = \theta$, potom

$$y = y + (x - y) = [y + (-y)] + x = x + \theta = x. \qquad \square$$

2.12. Tvrzení. *Platí*

$$\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y; \quad (\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x.$$

Důkaz. a) Podle III.2, Věty 2.6 a Tvrzení 2.9

$$\lambda(x - y) = \lambda[x + (-y)] = \lambda x + \lambda(-y) = \lambda x + (-\lambda y) = \lambda x - \lambda y.$$

b) Podobně, podle III.1, Věty 2.6 a Tvrzení 2.9

$$(\lambda - \mu)x = \lambda x + (-\mu)x = \lambda x + (-\mu x) = \lambda x - \mu x. \qquad \square$$

2.13. Tvrzení. *Platí $\lambda\theta = \theta$.*

Důkaz. Skutečně,

$$\lambda\theta = \lambda(0 \cdot x) = (\lambda \cdot 0)x = 0 \cdot x = \theta. \qquad \square$$

2.14. Tvrzení. *Pokud $\lambda x = \theta$ a $\lambda \neq 0$, potom $x = \theta$.*

Důkaz. Skutečně,

$$x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right)x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\theta = \theta. \qquad \square$$

2.15. Tvrzení (druhý zákon o krácení). *Pokud $\lambda x = \lambda y$ a $\lambda \neq 0$, potom $x = y$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Tvrzení 2.14, Tvrzení 2.12 a Tvrzení 2.11. $\square$

2.16. Tvrzení. *Pokud $\lambda x = \theta$ a $x \neq \theta$, potom $\lambda = 0$.*

Důkaz. Skutečně, kdyby bylo $\lambda \neq 0$, potom by podle Tvrzení 2.14 bylo $x = \theta$. $\square$

2.17. Tvrzení (třetí zákon o krácení). *Pokud $\lambda x = \mu x$ a $x \neq \theta$, potom $\lambda = \mu$.*

Důkaz. $\lambda x = \mu x \Rightarrow \lambda x - \mu x = \theta \Rightarrow (\lambda - \mu)x = \theta \Rightarrow \lambda - \mu = 0.$ $\square$

2.18. Příklad. Lineární prostory, které se nejčastěji studují ve funkcionální analýze a používají v aplikované funkcionální analýze, jsou prostory funkcí. V těchto prostorech je sčítání prvků a násobení prvku skalárem definováno přirozeným způsobem: Nechť $\mathcal{F} = \{f, g, h, \dots\}$ je neprázdná množina funkcí definovaných na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, tj.

$$f = f(t), \quad t = (t_1, \dots, t_N) \in \Omega.$$

Součet $f + g$ funkcí f, g a násobek $\lambda \cdot f$ funkce f skalárem λ definujeme takto:

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad (\lambda \cdot f)(t) = \lambda \cdot f(t) \quad \forall t \in \Omega.$$

V této množině je nulovým prvkem funkce, která je identicky rovna nule, tj.

$$\theta(t) = 0 \quad \forall t \in \Omega,$$

a opačnou funkcí k funkci f funkce

$$(-f)(t) = (-1) \cdot f(t) = -f(t) \quad \forall t \in \Omega.$$

Je-li $\mathcal{F}$ např. množina spojitých funkcí na $\overline{\Omega}$, potom při takto zavedeném sčítání funkcí a násobení funkce skalárem je $\mathcal{F}$ lineární prostor, protože jak $f + g$, tak $\lambda \cdot f$ jsou funkce spojité na $\overline{\Omega}$, takže všech osm axiomů Definice 2.1 je splněno. Podobně množina ohraničených funkcí na Ω či množina riemannovsky integrovatelných funkcí na Ω jsou lineární prostory.

3. Normovaný prostor

V lineárním prostoru kromě operace sčítání prvků a operace násobení prvku skalárem se zavádí ještě nějakým způsobem operace limitního přechodu. Nejvhodnější způsob, jak to udělat, je zavést v lineárním prostoru normu.[1]

3.1. Definice. Lineární prostor $\mathcal{L}$ se nazývá *normovaný*, jestliže každému prvku $x \in \mathcal{L}$ je přiřazeno reálné nezáporné číslo $\|x\|$, které se nazývá *norma* prvku x, přičemž platí:

1. $\|x\| = 0$, když a jen když $x = \theta$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Protože se zabýváme pouze lineárními prostory, budeme normované lineární prostory stručně nazývat *normovanými prostory.*

Snadno je vidět, že každý lineární normovaný prostor je současně metrickým prostorem; stačí položit

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|.$$

Platnost prvního a druhého axiomu metrického prostoru bezprostředně vyplývá z první vlastnosti normy; třetí axiom snadno pomocí trojúhelníkové nerovnosti pro normu a asociativnosti součtu (viz Definici 2.1, axiom I.2):

$$\begin{aligned}\varrho(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \le \\ \le \|x - y\| + \|y - z\| = \varrho(x, y) + \varrho(y, z).\end{aligned}$$

Uvedeme některé příklady normovaných prostorů.

---

[1] Později ukážeme, že existují lineární prostory, ve kterých nelze normu zavést, tj. které nelze normovat.

3.2. Příklad. Reálná osa $\mathbb{R}^1$, tj. množina všech reálných čísel s obvyklými aritmetickými operacemi sčítání a násobení, je lineárním prostorem. Prostor $\mathbb{R}^1$ se stane normovaným prostorem, který budeme značit R^1, jestliže pro každé číslo $x \in \mathbb{R}^1$ položíme $\|x\| := |x|$. Důkaz trojúhelníkové nerovnosti:

$$\|x+y\| = |x+y| \leq |x| + |y| = \|x\| + \|y\|.$$

3.3. Příklad. Množina všech uspořádaných n-tic reálných, popř. komplexních čísel $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde sčítání n-tic a násobení n-tic konstantou je definováno vztahy

$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

je lineárním prostorem, který budeme nazývat *n-rozměrným prostorem.* Nulový prvek je dán vztahem

$$\theta = (0, 0, \dots, 0)$$

a pro opačný prvek platí

$$-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

Jde-li o n-tice reálných čísel a jsou-li multiplikativní konstanty také reálná čísla, budeme mluvit o *reálném n-rozměrném prostoru* a používat označení $\mathbb{R}^n$. Jde-li však o n-tice komplexních čísel a jsou-li skaláry také komplexní čísla, budeme mluvit o *komplexním n-rozměrném prostoru* a používat označení $\mathbb{C}^n$. Reálný n-rozměrný prostor je tedy reálným lineárním prostorem a komplexní n-rozměrný prostor komplexním lineárním prostorem.

Normu v reálném n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ s prvky $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ definujeme obvykle předpisem

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}; \tag{3.1}$$

je to tzv. *euklidovská* norma. Tím dostáváme normovaný prostor R_2^n. Vztah

$$\varrho_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

definuje v prostoru $\mathbb{R}^n$ euklidovskou metriku. Příslušný metrický prostor budeme značit stejným symbolem jako normovaný prostor, tj. R_2^n.

Dokažme trojúhelníkovou nerovnost pro euklidovskou normu (3.1). Užijeme k tomu Cauchy-Buňakovského nerovnost, jejíž důkaz lze najít v Poznámce 4.7:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 . \tag{3.2}$$

Uvažujme v $\mathbb{R}^n$ body

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Podle (3.2) platí

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \right)^2,$$

odkud po odmocnění dostáváme Minkowského nerovnost (pro $p = 2$)

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \tag{3.3}$$

Odtud vzhledem k (3.1)

$$\|a + b\|_2 \leq \|a\|_2 + \|b\|_2.$$

3.4. Příklad. V lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$ lze definovat normu také předpisem

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|; \tag{3.4}$$

v tomto případě vzniklý normovaný prostor značíme symbolem R_1^n. Další důležitý normovaný prostor R_∞^n vznikne, když v $\mathbb{R}^n$ zavedeme normu předpisem

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|. \tag{3.5}$$

Normy (3.4), (3.5) definují v lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$ metriky

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad \varrho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$$

Vzniklé metrické prostory značíme stejně jako korespondující normované prostory, tj. symboly R_1^n a R_∞^n.

V komplexním n-rozměrném prostoru $\mathbb{C}^n$ lze zavést normu vztahem

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

nebo kteroukoliv z norem (3.4), (3.5).

Dokažme trojúhelníkovou nerovnost pro normu (3.4):

$$\|x+y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \le \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

V případě normy (3.5) postupujeme při důkazu trojúhelníkové nerovnosti takto: Nechť k_0 je ten z indexů $1, \dots, n$, pro který v případě zvolených prvků x, $y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|x+y\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k + y_k| = |x_{k_0} + y_{k_0}|.$$

Platí

$$|x_{k_0} + y_{k_0}| \le |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \le \max_{1\le k\le n} |x_k| + \max_{1\le k\le n} |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Spojením získaných vztahů dostaneme hledanou trojúhelníkovou nerovnost pro normu (3.5).

3.5. Příklad. V n-rozměrném lineárním prostoru (jak $\mathbb{R}^n$, tak $\mathbb{C}^n$) je možné také definovat normu vektoru x vztahem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \ge 1). \tag{3.6}$$

V případě $\mathbb{R}^n$ tak dostaneme normovaný prostor R_p^n. Normy $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$ a prostory R_1^n, R_2^n, R_∞^n jsou speciálními případy normy $\|x\|_p$ a prostoru R_p^n pro $p = 1$, $p = 2$ a $p = \infty$. Dokázat, že výraz $\|x\|_p$ daný vztahem (3.6) splňuje první dva axiomy normy, je snadné, ale důkaz trojúhelníkové nerovnosti je komplikovaný. Tento důkaz je totožný s důkazem Minkowského nerovnosti pro obecné $p \ge 1$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}; \tag{3.7}$$

je uveden v kapitole 5. Z (3.7) dostáváme vzhledem k (3.6) hledanou trojúhelníkovou nerovnost

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

3.5a. Poznámka. Platí

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.8}$$

Tím je vysvětleno, proč v Příkladu 3.5 tvrdíme, že norma $\|x\|_\infty$ je speciálním případem normy $\|x\|_p$. Abychom vztah (3.8) dokázali, zvolme $x \in \mathbb{R}^n$ libovolně, ale pevně, a pišme vztah (3.6) ve tvaru

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\le j\le n} |x_j| \left(\sum_{k=1}^{n} |A_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

kde

$$A_k = \frac{x_k}{\max\limits_{1\leq j\leq n} |x_j|}.$$

Protože $|A_k| \leq 1$ $(k = 1, \dots, n)$, přičemž pro alespoň jeden index (označme jej k_0) platí $|A_{k_0}| = 1$, dostáváme

$$\lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |A_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Odtud plyne vztah (3.8).

3.6. Příklad (jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$ při různých normách). Uveďme, jak bude vypadat jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$ daná vztahem

$$\|x\|_p = 1, \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{3.9}$$

v případech $p = 1$, $p = 2$ a $p = \infty$. Pro $p = 2$ je to klasická kružnice s poloměrem $r = 1$, pro $p = \infty$ je to čtverec s vrcholy $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$, $(1; -1)$ a pro $p = 1$ čtverec s vrcholy $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$.

Uvažujeme-li vztah (3.9) pro p spojitě se měnící od $p = 1$ do $p = \infty$, potom graf této „kružnice“ se bude spojitě deformovat od čtverce odpovídajícímu normě $\|x\|_1$ (přes kružnici odpovídající normě $\|x\|_2$) do čtverce odpovídajícímu normě $\|x\|_\infty$.

3.7. Příklad (jednotková koule v $\mathbb{R}^3$ při různých normách). Uvedeme, jak vypadá jednotková koule v $\mathbb{R}^3$ daná vztahem

$$\|x\|_p = 1, \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{3.10}$$

v případech $p = 1$, $p = 2$ a $p = \infty$. Pro $p = 2$ je to klasická kulová plocha s poloměrem $r = 1$, pro $p = \infty$ je to povrch krychle s vrcholy $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ a pro $p = 1$ povrch pravidelného osmistěnu s vrcholy $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(-1; 0; 0)$, $(0; -1; 0)$, $(0; 0; -1)$, $(0; 0; 1)$.

Uvažujeme-li vztah (3.10) pro p spojitě se měnící od $p = 1$ do $p = \infty$, potom graf této „kulové plochy“ se bude spojitě deformovat od osmistěnu odpovídajícímu normě $\|x\|_1$ (přes kouli odpovídající normě $\|x\|_2$) do krychle odpovídající normě $\|x\|_\infty$.

3.8. Příklad. Množina všech spojitých reálných funkcí reálné proměnné na segmentu $\langle a, b\rangle$ (popř. spojitých komplexních funkcí reálné proměnné) s běžnými operacemi sčítání funkcí a násobení funkce číslem (viz Příklad 2.18) je reálný (popř. komplexní) lineární prostor, který je jedním z nejdůležitějších v matematické analýze. Značíme jej $C^0\langle a, b\rangle$.

Definujeme-li v lineárním prostoru $C^0\langle a, b\rangle$ normu vztahem

$$\|f\|_{C^0[a,b]} = \max_{a\leq t\leq b} |f(t)|, \tag{3.11}$$

dostaneme normovaný prostor, který budeme značit stejným symbolem $C^0\langle a, b\rangle$ jako výchozí lineární prostor. Důkaz, že vztah (3.11) definuje skutečně normu, je snadný. Omezíme se na trojúhelníkovou nerovnost: Zvolme funkce $f, g \in C^0\langle a, b\rangle$ libovolně, ale pevně. Nechť $t_0 \in \langle a, b\rangle$ je číslo, které v případě zvolené dvojice splňuje vztah

$$\max_{a \le t \le b} |f(t) + g(t)| = |f(t_0) + g(t_0)|.$$

Platí

$$|f(t_0) + g(t_0)| \le |f(t_0)| + |g(t_0)| \le \max_{a \le t \le b} |f(t)| + \max_{a \le t \le b} |g(t)|.$$

Spojením získaných vztahů dostáváme vzhledem k (3.11)

$$\|f + g\|_{C^0[a,b]} \le \|f\|_{C^0[a,b]} + \|g\|_{C^0[a,b]}.$$

Metrika korespondující normě (3.11) má tvar

$$\varrho_{C^0[a,b]}(f, g) = \max_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)|.$$

Příslušný metrický prostor opět označujeme symbolem $C^0\langle a, b\rangle$.

3.9. Příklad. Zaveďme na lineárním prostoru $C^0\langle a, b\rangle$ normu

$$\|f\|_{C_2^0[a,b]} = \left(\int_a^b [f(t)]^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.12}$$

Tento normovaný prostor budeme značit $C_2^0\langle a, b\rangle$ a nazývat *prostorem spojitých funkcí s kvadratickou normou.* V tomto případě je splnění prvních dvou axiomů vzdálenosti zřejmé; trojúhelníková nerovnost pak vyplývá ze *Schwarzovy nerovnosti* (což je integrální tvar Cauchy-Buňakovského nerovnosti), která zní (viz Poznámku 4.9)

$$\left|\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b y^2(t)\,\mathrm{d}t}. \tag{3.13}$$

S pomocí (3.13) nalezneme

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x(t) + y(t))^2\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (x(t))^2\,\mathrm{d}t + \int_a^b (y(t))^2\,\mathrm{d}t + 2\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t \le \\
&\le \int_a^b (x(t))^2\,\mathrm{d}t + \int_a^b (y(t))^2\,\mathrm{d}t + 2\left|\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \\
&\le \int_a^b (x(t))^2\,\mathrm{d}t + \int_a^b (y(t))^2\,\mathrm{d}t + 2\sqrt{\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b y^2(t)\,\mathrm{d}t} = \\
&= \left(\sqrt{\int_a^b (x(t))^2\,\mathrm{d}t} + \sqrt{\int_a^b (y(t))^2\,\mathrm{d}t}\right)^2.
\end{aligned}$$

Odmocněním dostáváme Minkowského nerovnost v integrálním tvaru pro $p = 2$:

$$\sqrt{\int_a^b (x(t) + y(t))^2\,\mathrm{d}t} \le \sqrt{\int_a^b (x(t))^2\,\mathrm{d}t} + \sqrt{\int_a^b (y(t))^2\,\mathrm{d}t}. \tag{3.14}$$

Odtud vzhledem k (3.12) dostáváme trojúhelníkovou nerovnost

$$\|f+g\|_{C_2^0[a,b]} \le \|f\|_{C_2^0[a,b]} + \|g\|_{C_2^0[a,b]}.$$

Odpovídající metrika má tvar

$$\varrho_{C_2^0[a,b]}(x,y) = \left(\int_a^b (x(t)-y(t))^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}. \tag{3.15}$$

Výsledek tohoto příkladu lze získat snadněji s pomocí výsledků kap. 4 takto: Snadno se ověří, že výraz $(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ splňuje axiomy skalárního součinu z Definice 4.1. Tedy podle Věty 4.5 je $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ norma, jejíž trojúhelníková nerovnost má v tomto případě tvar Minkowského nerovnosti (3.14).

3.10. Příklad. Prostor l_2 všech posloupností $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, které splňují podmínku

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty, \tag{3.16}$$

se stane lineárním normovaným prostorem, definujeme-li, že součet dvou prvků

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \quad \text{a} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$$

z l_2 je roven

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots)$$

a že součin čísla α a prvku $x \in l_2$ je dán vztahem

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots).$$

Nulovým prvkem $\theta \in l_2$ je nulová posloupnost a opačným prvkem k prvku x je posloupnost

$$-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n, \dots).$$

Skutečnost, že součet dvou posloupností splňujících podmínku (3.16) také vyhovuje této podmínce, plyne z elementární nerovnosti

$$|a_k + b_k|^2 \le 2|a_k|^2 + 2|b_k|^2.$$

Normu v l_2 definujeme vztahem

$$\|x\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}. \tag{3.17}$$

Že norma (3.17) splňuje první dva axiomy normy, je zřejmé. Dokažme trojúhelníkovou nerovnost: Přejděme v Minkowského nerovnosti

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}$$

k limitě pro $n \to \infty$; dostaneme

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(y_k + x_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2\right)^{1/2}. \tag{3.18}$$

Podle (3.16) je pravá strana nerovnosti (3.18) konečná. Pomocí (3.17) můžeme (3.18) přepsat na tvar

$$\|x + y\|_{l_2} \leq \|x\|_{l_2} + \|y\|_{l_2},$$

což je hledaná trojúhelníková nerovnost.

Metrika korespondující normě (3.17) má tvar

$$\varrho_{l_2}(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2}.$$

3.11. Příklad. Lineární prostor c sestává ze všech konvergentních posloupností. Lineární prostor c_0 sestává z posloupností $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ reálných čísel, které splňují podmínku

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

Sčítání prvků a násobení prvku skalárem se definují v prostorech c a c_0 stejně jako v Příkladu 3.10 a norma je v těchto prostorech dána vztahem

$$\|x\| = \max_{1 \leq n \leq \infty} |x_n|. \tag{3.19}$$

3.12. Příklad. Množina M^{∞} všech ohraničených posloupností $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ reálných (popř. komplexních) čísel s týmiž operacemi jako v Příkladech 3.10 a 3.11 je lineární prostor. Normu v něm můžeme zavést vztahem

$$\|x\| = \sup_{1 \leq n \leq \infty} |x_n|. \tag{3.20}$$

Je třeba poznamenat, že v (3.20) nelze nahradit symbol sup symbolem max: Uvažujme např. posloupnost $\{x_n\}$, kde

$$x_n = \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Potom $\sup |x_n| = \sup x_n = \frac{1}{2}$, kdežto $\max |x_n|$ neexistuje.

4. Skalární součin. Unitární prostor

Obecný lineární prostor nad číselným tělesem T jsme značili $\mathcal{L}$. Je-li $T = \mathbb{R}$ (těleso reálných čísel), budeme značit reálný lineární prostor symbolem $\mathcal{R}$; je-li $T = \mathbb{C}$ (těleso komplexních čísel) budeme značit komplexní lineární prostor symbolem $\mathcal{C}$.

4.1. Definice. *Skalárním součinem v reálném lineárním prostoru* $\mathcal{R}$ nazýváme reálnou funkci (x, y), která je definována pro každou dvojici prvků $x,\ y \in \mathcal{R}$ a splňuje tyto podmínky ($x, x_1, x_2, y \in \mathcal{R}$, λ_1, λ_2 jsou reálná čísla):

1. $(x, y) = (y, x)$ (*symetrie*);
2. $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y)$ (*linearita*);
3. $(x, x) \geq 0$, přičemž $(x, x) = 0$, když a jen když $x = \theta$.

Poznámka. Linearita skalárního součinu je ekvivalentní současné platnosti aditivity a homogenity skalárního součinu, kde

2a. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (*aditivita*);

2b. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ (*homogenita*);

Místo podmínky 2 se v definici skalárního součinu někdy uvádějí podmínky 2a, 2b.

4.1.* Definice. *Skalárním součinem v komplexním lineárním prostoru* $\mathcal{C}$ nazýváme komplexní funkci (x, y), která je definována pro každou dvojici prvků $x,\ y \in \mathcal{C}$ a splňuje tyto podmínky ($x, x_1, x_2, y \in \mathcal{C}$, λ_1, λ_2 jsou komplexní čísla):

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (*antisymetrie*);
2. $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y)$ (*linearita*);
3. $(x, x) \geq 0$, přičemž $(x, x) = 0$, když a jen když $x = \theta$.

4.2. Tvrzení. *Skalární součin v komplexním lineárním prostoru má také tyto vlastnosti:*

a) $(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{\lambda}(x, y_1) + \overline{\mu}(x, y_2)$*;*

b) $(x, \theta) = (\theta, y) = 0$.

Důkaz. a) Podle axiomů 1 a 2 Definice 4.1* a vlastností komplexních čísel platí:

$$\begin{gathered}(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{(\lambda y_1 + \mu y_2, x)} = \overline{(\lambda y_1, x) + (\mu y_2, x)} = \\ = \overline{(\lambda y_1, x)} + \overline{(\mu y_2, x)} = \overline{\lambda}\,\overline{(y_1, x)} + \overline{\mu}\,\overline{(y_2, x)} = \overline{\lambda}(x, y_1) + \overline{\mu}(x, y_2).\end{gathered}$$

b) Platí

$$(x, 0 \cdot y) = 0 \cdot (x, y) = 0. \qquad \square$$

4.3. Definice. Lineární prostor, v němž je definován skalární součin, se nazývá *unitární prostor.*[2] V unitárních prostorech $\mathcal{R}$ a $\mathcal{C}$ se norma zavádí vztahem

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}\,. \tag{4.1}$$

Ukážeme, že z podmínek 1 – 3 skalárního součinu plyne, že všechny požadavky kladené na normu jsou přitom splněny.

Skutečně, splnění podmínek 1 a 2 z Definice 3.1 je zřejmé; platnost trojúhelníkové nerovnosti vyplyne ze Schwarzovy nerovnosti, kterou nyní dokážeme:

[2] V angličtině se užívá názvu „Euclidean space“, v češtině se také používá termínu „prostor se skalárním součinem“.

4.4. Věta (Schwarz). *Nechť $\mathcal{U}$ je unitární prostor ($\mathcal{U} = \mathcal{R}$ nebo $\mathcal{U} = \mathcal{C}$). Potom*

$$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{U}. \tag{4.2}$$

Důkaz. a) *Případ reálného unitárního prostoru $\mathcal{U}$*: Mějme tento kvadratický trojčlen reálné proměnné λ, který je podle třetí vlastnosti skalárního součinu nezáporný pro všechny hodnoty λ:

$$\begin{aligned} 0 \le \varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) &= \lambda^2 (x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y) = \\ &= \|x\|^2 \lambda^2 + 2(x,y)\lambda + \|y\|^2 . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Aby tato kvadratická nerovnost byla splněna pro všechna λ (a pro pevnou dvojici x, y, jinak libovolnou), musí mít $\varphi(\lambda)$ buď jeden dvojný reálný kořen, nebo dvojici komplexně sdružených kořenů,[3] tj. diskriminant tohoto kvadratického trojčlenu musí být nekladný:

$$4|(x,y)|^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \le 0 .$$

To je však jinak napsaná nerovnost (4.2).

b) *Případ komplexního unitárního prostoru $\mathcal{U}$*: Uvažujme vztah

$$\begin{aligned} 0 \le (x + \lambda y, x + \lambda y) &= (x,x) + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda(y,x) + \lambda \cdot \overline{\lambda}(y,y) = \\ &= \|x\|^2 + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda(y,x) + |\lambda|^2 \|y\|^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Podle třetího axiomu je tento výraz nezáporný pro libovolné λ. Předpokládejme, že $\|y\|^2 = (y,y) > 0$ (v opačném případě je $y = \theta$ a dokazovaná nerovnost je zřejmá) a položme

$$\lambda = -\frac{(x,y)}{\|y\|^2}.$$

Dosazením do pravé strany (4.4) potom dostaneme

$$\|x\|^2 - \frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2} - \frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2} + \frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2} \ge 0 ,$$

tj. $\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x,y)|^2 \ge 0$, což dokazuje (4.2). □

Poznamenejme, že postup v části b) důkazu Věty 4.4 lze užít i v části a) téhož důkazu. Postup užitý v části a) je však geometricky velmi názorný.

Vraťme se k důkazu trojúhelníkové nerovnosti a ostatních axiomů pro normu (4.1).

---

[3] To proto, že graf funkce $\varphi(\lambda)$ je parabola nad vodorovnou osou (kterou probíhá parametr λ), která má s vodorovnou osou společný nanejvýš jeden bod (případný bod dotyku paraboly s vodorovnou osou).

4.5. Věta. *Nechť pro unitární prostor platí buď $\mathcal{U} = \mathcal{R}$, nebo $\mathcal{U} = \mathcal{C}$. Potom výraz $\|x\|$ daný vztahem* (4.1) *splňuje všechny tři axiomy normy uvedené v Definici* 3.1.

Důkaz. a) Jak nezápornost výrazu $\|x\|$ daného vztahem (4.1), tak vlastnost 1 uvedená v Definici 3.1 plynou z vlastnosti 3 uvedené v Definicích 4.1 a 4.1*.

b) Vztah $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ je v případě $\mathcal{U} = \mathcal{R}$ zřejmý; dokážeme jej proto pouze v případě $\mathcal{U} = \mathcal{C}$:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \cdot \overline{\lambda}(x, x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

c) Z definice normy, faktu, že výraz $(x, y) + (y, x)$ je reálné číslo, a Věty 4.4 plyne:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + |(x, y) + (y, x)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Odmocněním dostáváme trojúhelníkovou nerovnost. □

4.6. Příklad (skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$). Jestliže $x, y \in \mathbb{R}^n$, potom definujeme

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k. \tag{4.5}$$

V tomto případě se axiomy Definice 4.1 snadno ověří.

Jestliže $x, y \in \mathbb{C}^n$, potom definujeme

$$(x, y) = x_1 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + \cdots + x_n \overline{y}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k. \tag{4.6}$$

Také v tomto případě se axiomy Definice 4.1* snadno ověří.

4.7. Poznámka (Cauchy-Buňakovského nerovnost v $\mathbb{R}^n$). Z Věty 4.4 (kde vystupuje vztah (4.2)) a vztahů (4.1) a (4.5) plyne

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}. \tag{4.7}$$

4.8. Příklad (skalární součin v $C_2^0\langle a, b\rangle$). Skalární součin v $C_2^0\langle a, b\rangle$ je definován vztahem

$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t. \tag{4.8}$$

V tomto případě se axiomy Definice 4.1 snadno ověří.

Zobecníme-li prostor $C_2^0\langle a, b\rangle$ na případ komplexních funkcí reálné proměnné t, potom skalární součin definujeme vztahem

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g}(t) \, \mathrm{d}t. \tag{4.9}$$

Také v tomto případě se axiomy Definice 4.1 snadno ověří.

4.9. Poznámka (Schwarzova nerovnost). Z Věty 4.4 a vztahů (4.1) a (4.8) plyne

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}. \tag{4.10}$$

4.10. Charakteristická vlastnost unitárních prostorů. Nechť $\mathcal{R}$ je normovaný prostor. Chceme vědět, jaké doplňující podmínky musí splňovat norma definovaná v prostoru $\mathcal{R}$, aby prostor $\mathcal{R}$ byl unitární, tj. aby v něm norma byla definována nějakým skalárním součinem. Jinak řečeno, chceme vědět, jak je třeba charakterizovat unitární prostory v třídě všech normovaných prostorů. Takovou charakteristiku dává tato věta:

4.11. Věta. *Normovaný prostor je unitární, když a jen když pro libovolné dva prvky $f, g \in \mathcal{R}$ platí rovnost*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)\,. \tag{4.11}$$

Důkaz. Nutnost. Nechť $\mathcal{R}$ je unitární prostor. Podle definice normy pomocí skalárního součinu platí

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 &= (f+g, f+g) + (f-g, f-g) = \\ &= (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) + \\ &+ (f,f) - (f,g) - (g,f) + (g,g) = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)\,.\end{aligned}$$

Dostatečnost podmínky (4.12) se dokazuje obtížněji, a proto odkazujeme čtenáře na [KF2, str. 186-188]. □

4.12. Poznámka. Vztah (4.11) je zobecněním známé vlastnosti rovnoběžníku v rovině: *Součet druhých mocnin délek úhlopříček rovnoběžníku se rovná součtu druhých mocnin délek jeho stran.* Vzhledem k tomu, že $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$, plyne uvedená vlastnost z dvojího užití kosinové věty a následného součtu výsledků.

4.13. Příklad. Mějme prostor R_p^n, v němž je norma definována vztahem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Pro $p \geq 1$ platí všechny axiomy normy, ale unitárním prostorem bude prostor R_p^n pouze pro $p = 2$. Skutečně, mějme v prostoru R_p^n dva vektory

$$f = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0), \quad g = (1, -1, 0, 0, \ldots, 0).$$

Potom

$$f + g = (2, 0, 0, \ldots, 0), \quad f - g = (0, 2, 0, \ldots, 0).$$

Odtud

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f+g\|_p = \|f-g\|_p = 2\,,$$

takže rovnoběžníková identita (4.11) v případě $p \neq 2$ neplatí.

4.14. Příklad. Mějme prostor $C^0\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ všech spojitých funkcí definovaných na segmentu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Položme

$$f(t) = \cos t, \quad g(t) = \sin t.$$

Platí

$$\|f\| = \|g\| = 1$$

a

$$\|f + g\| = \max_{0 \le t \le \pi/2} |\cos t + \sin t| = \sqrt{2}\,,$$

$$\|f - g\| = \max_{0 \le t \le \pi/2} |\cos t - \sin t| = 1\,.$$

Odtud

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 \neq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)\,.$$

Normu v prostoru $C^0\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ tedy nelze definovat pomocí žádného skalárního součinu. Zobecněním tohoto příkladu se snadno dokáže, že ani prostor $C^0\langle a, b\rangle$ všech spojitých funkcí definovaných na libovolném segmentu $\langle a, b\rangle$ není unitárním prostorem.

4.15. Úhel mezi vektory. Na střední škole jsme si ve fyzice definovali, že práce L, kterou vykoná konstantní síla $\mathbf{F}$ po přímé dráze $\mathbf{s}$ je dána vztahem

$$L = Fs\cos\varphi, \tag{4.12}$$

kde F, resp. s, je velikost síly $\mathbf{F}$, resp. dráhy $\mathbf{s}$, a kde φ je úhel, který svírají vektory $\mathbf{F}$ a $\mathbf{s}$. V případě, když $\varphi = \frac{\pi}{2}$, jsme říkali, že síla $\mathbf{F}$ po dráze $\mathbf{s}$ žádnou práci nekoná, protože v tomto případě je podle (4.12) $L = 0$. Později jsme se dozvěděli, že práce L je skalárním součinem vektoru síly $\mathbf{F}$ a vektoru dráhy $\mathbf{s}$. Tyto výsledky a vztahy můžeme v případě unitárního prostoru zobecnit takto:

4.16. Definice. Úhel φ mezi dvěma libovolnými prvky x, y unitárního prostoru $\mathcal{U}$ definujeme vztahem

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \tag{4.13}$$

čili

$$\varphi = \arccos\frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \tag{4.14}$$

Pokud $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tj. pokud $(x, y) = 0$, potom říkáme, že prvky x, y jsou *ortogonální.*

4.17. Příklad. Není obtížné dokázat, že libovolné dva prvky nekonečného systému funkcí

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\} \tag{4.15}$$

jsou k sobě ortogonální v prostoru $C_2^0\langle -\pi, \pi\rangle$ i v prostoru $C_2^0\langle c, c + 2\pi\rangle$, kde c je libovolné pevné reálné číslo. Tento výsledek je jedním ze základních nástrojů teorie Fourierových řad, které jste probírali ve 3. semestru.