4.18. Příklad (nemetrizovatelný lineární prostor). V posledních dvou příkladech kapitoly 4 uvedeme příklady lineárních prostorů, ve kterých nelze definovat ani normu, ani metriku, natož skalární součin. Uvažujme rovinu (t, s), kde na vodorovnou osu t nanášíme čas (např. v sekundách) a na svislou osu s polohu (např. v metrech). Grafem rovnoměrného přímočarého pohybu je pak přímka o směrnici c, což je rychlost tohoto pohybu. Nejobecnější rovnice takového pohybu je $s = s_0 + c \cdot t$, kde s_0 je počáteční poloha. Podobně $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ je obecná rovnice rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu, kde s_0 je počáteční poloha, v_0 počáteční rychlost a a zrychlení tohoto pohybu.

Např., známe-li pouze graf pohybu $s = ct$, můžeme rychlost c zjistit pouze tím způsobem, že vypočteme směrnici této přímky pomocí změření souřadnic (t_1, s_1), (t_2, s_2) dvou libovolných bodů této přímky:

$$c = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Pojem úhlu mezi dvěma přímkami v rovině (t, s) nemá smysl, takže nemůžeme určit tangentu úhlu přímky $s = ct$ s vodorovnou osou t. Podobně v rovině (t, s) nelze hovořit o vzdálenosti mezi dvěma body (t_1, s_1), (t_2, s_2), protože každá z obou souřadnic t, s má jiný fyzikální rozměr. *Stručně: Rovina (t, s) nemá vlastnosti euklidovské roviny; vzdálenost a úhel tam nemají smysl – v takové rovině má však smysl pojem rovnoběžnosti přímek či směrnice přímky.*

4.19. Příklad. Podobně, měříme-li závislost nějaké délkové veličiny na jiné délkové veličině a v rovině (x, y) nanášíme každou z těchto veličin v jiném měřítku, pracujeme v neeuklidovském dvojrozměrném lineárním prostoru. Pojem vzdálenost dvou bodů a úhel mezi přímkami nemá v tomto prostoru opět smysl.

4.20. Poznámka. Rovinu (t, s) z Příkladu 14.18 můžeme také interpretovat jinak, totiž jako grafické zobrazení funkcí typu $s = s(t)$. Potom ovšem funkce $s(t)$ náleží jak do prostoru $C^0\langle a, b\rangle$, tak prostoru $C_2^0\langle a, b\rangle$, kde $\langle a, b\rangle$ je nějaký interval na ose t.

5. Hölderova nerovnost. Minkowského nerovnost

5.1. Lemma. *Nechť čísla $p > 1$, $q > 1$ splňují vztah*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{5.1}$$

Potom pro $a > 0$, $b > 0$ platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{5.2}$$

Důkaz. V rovině (ξ, η) uvažujme křivku danou rovnicí

$$\eta = \xi^{p-1}. \tag{5.3}$$

Z (5.1) plyne

$$q = \frac{p}{p-1}, \tag{5.4}$$

takže $q-1 = 1/(p-1)$, což nám umožňuje přepsat (5.3) na tvar

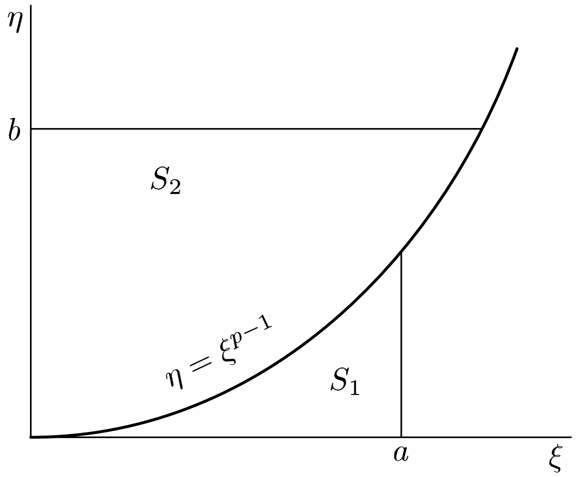
$$\xi = \eta^{q-1}. \tag{5.5}$$

Nechť S_1 je obrazec (křivočarý trojúhelník) ohraničený úsečkami OA, AA_1 a obloukem OA_1, kde (viz Obr. 5.1)

$$O = [0,0],\ A = [a,0],\ A_1 = [a, a^{p-1}],$$

a S_2 křivočarý trojúhelník ohraničený úsečkami OB, BB_1 a obloukem OB_1, kde (viz Obr. 5.1)

$$B = [0,b],\ B_1 = [b^{q-1}, b].$$



Obr. 5.1

Pokud

$$b = a^{p-1} \quad \text{čili} \quad a = b^{\frac{1}{p-1}} = b^{q-1}, \tag{5.6}$$

potom

$$ab = S_1 + S_2.$$

Pokud (5.6) neplatí, tak $ab < S_1 + S_2$. Tedy vždy

$$ab \le S_1 + S_2. \tag{5.7}$$

Platí

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1}\,\mathrm{d}\xi = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b \eta^{q-1}\,\mathrm{d}\eta = \frac{b^q}{q}.$$

Odtud a z (5.7) plyne (5.2). Zajímavé na tomto důkazu je, že algebraický výsledek je zde získán pouze pomocí matematické analýzy. □

5.2. Věta (diskrétní Hölderova nerovnost). *Nechť čísla* $p > 1$, $q > 1$ *splňují vztah* (5.1). *Potom*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.8}$$

Důkaz. Položme

$$a = \frac{|x_k|}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}}, \quad b = \frac{|y_k|}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}}},$$

dosaďme tyto výrazy do (5.2) a získanou nerovnost sečtěme od $k = 1$ do $k = n$. Na pravé straně vznikne výraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, který je vzhledem k (5.1) roven jedné. Vynásobíme-li vzniklý vztah výrazem v jmenovateli na levé straně, dostaneme (5.8). $\square$

Ve Větách 5.3 – 5.5 je užit symbol $L_p(\Omega)$. Značí množinu funkcí, pro které

$$\int_\Omega |f(X)|^p \,\mathrm{d}X < \infty,$$

přičemž $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathrm{d}X = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ a integrál je brán v Lebesgueově smyslu. Protože Lebesgueův integrál bude probírán později (včetně prostorů $L_p(\Omega)$, kde $p \geq 1$), poznamenejme alespoň, že *funkce integrovatelná v Riemannově smyslu je integrovatelná i v Lebesgueově smyslu a oba integrály se sobě rovnají.* S tímto poznatkem v této kapitole vystačíme: můžeme si pod uvedenými integrály představovat pouze Riemannovy integrály.

5.3. Věta (Hölderova nerovnost). *Nechť čísla $p > 1$, $q > 1$ splňují vztah (5.1) a $f \in L_p(\Omega)$, $g \in L_q(\Omega)$. Potom $f \cdot g \in L_1(\Omega)$ a platí*

$$\Big| \int_\Omega f(X)g(X) \,\mathrm{d}X \Big| \leq \int_\Omega \Big| f(X)g(X) \Big| \,\mathrm{d}X \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g), \tag{5.9}$$

kde

$$\mathcal{N}_p(f) = \Big(\int_\Omega |f(X)|^p \,\mathrm{d}X \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \mathcal{N}_q(g) = \Big(\int_\Omega |g(X)|^q \,\mathrm{d}X \Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.10}$$

Důkaz. Postupujeme podobně jako v předchozím důkazu: Položíme

$$a = \frac{|f(X)|}{\mathcal{N}_p(f)}, \quad b = \frac{|g(X)|}{\mathcal{N}_q(g)}.$$

a dosadíme tyto výrazy do (5.2). Dostaneme

$$\frac{|f(X)|}{\mathcal{N}_p(f)} \cdot \frac{|g(X)|}{\mathcal{N}_q(g)} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(X)|^p}{[\mathcal{N}_p(f)]^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(X)|^q}{[\mathcal{N}_q(g)]^q} \tag{5.11}$$

pro všechna $X \in \Omega$, kde jsou funkce f a g definovány, tj. pro téměř všechna $X \in \Omega$. Integrujeme-li (5.11) přes Ω, dostaneme (5.9), protože platí (5.1). $\square$

5.4. Důsledek (Schwarzova nerovnost v $L_2(\Omega)$). *Pro u, $v \in L_2(\Omega)$ platí*

$$|(u,v)_{0,\Omega}| \leq \|u\|_{0,\Omega} \cdot \|v\|_{0,\Omega} \,.$$

Důkaz. Stačí položit v Hölderově nerovnosti $p = q = 2$. $\square$

5.5. Věta (zobecněná Hölderova nerovnost). *Nechť čísla $p_i > 1$ $(i = 1, \dots, n)$ splňují vztah*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1. \tag{5.12}$$

Potom pro $f_i \in L_{p_i}(\Omega)$ $(i = 1, \dots, n)$ platí

$$f_1 f_2 \dots f_n \in L_1(\Omega),$$

$$\int_\Omega |f_1(X) f_2(X) \dots f_n(X)| \, \mathrm{d}X \leq \mathcal{N}_{p_1}(f_1) \mathcal{N}_{p_2}(f_2) \dots \mathcal{N}_{p_n}(f_n). \tag{5.13}$$

Mimo jiné, když $f_1, \dots, f_n \in L_n(\Omega)$, potom

$$f_1 f_2 \dots f_n \in L_1(\Omega),$$

$$\int_\Omega |f_1(X) f_2(X) \dots f_n(X)| \, \mathrm{d}X \leq \mathcal{N}_n(f_1) \mathcal{N}_n(f_2) \dots \mathcal{N}_n(f_n).$$

Důkaz. Větu dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 2$ byla dokázána ve Větě 5.3. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n - 1$.

Abychom mohli využít náš indukční předpoklad, položme

$$\frac{1}{p} := \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} \quad \text{čili} \quad p = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2} \tag{5.14}$$

a dokažme, že pro funkci $f = f_1 f_2$ platí $f \in L_p(\Omega)$. Za tím účelem položme

$$g_1 := |f_1|^p, \quad g_2 := |f_2|^p \tag{5.15}$$

a definujme čísla r_1, r_2 vztahy

$$p r_1 = p_1, \quad p r_2 = p_2 \quad \text{čili} \quad r_1 = \frac{p_1}{p} = \frac{p_1 + p_2}{p_2}, \quad r_2 = \frac{p_2}{p} = \frac{p_1 + p_2}{p_1}, \tag{5.16}$$

Z posledních dvou vztahů (5.16) plyne, že $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$. Dále, protože $f_1 \in L_{p_1}(\Omega)$, $f_2 \in L_{p_2}(\Omega)$, z (5.15) a prvních dvou vztahů (5.16) plyne, že $g_1 \in L_{r_1}(\Omega)$, $g_2 \in L_{r_2}(\Omega)$, takže funkce g_1, g_2 splňují všechny předpoklady Hölderovy nerovnosti a platí

$$g_1 g_2 = |f_1 f_2|^p \in L_1(\Omega),$$

$$\int_\Omega |f_1 f_2|^p \, \mathrm{d}X = \int_\Omega |g_1 g_2| \, \mathrm{d}X \leq \mathcal{N}_{r_1}(g_1) \mathcal{N}_{r_2}(g_2) < \infty. \tag{5.17}$$

Tedy $f = f_1 f_2 \in L_p(\Omega)$. Předpoklad (5.12) přepišme na tvar

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_3} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$$

a aplikujme indukční předpoklad na funkce

$$f \in L_p(\Omega), f_3 \in L_{p_3}(\Omega), \ldots, f_n \in L_{p_n}(\Omega).$$

Dostaneme

$$\int_\Omega |(f_1 f_2) f_3 \ldots f_n| \,\mathrm{d}X \leq \mathcal{N}_p(f_1 f_2)\mathcal{N}_{p_3}(f_3) \ldots \mathcal{N}_{p_n}(f_n). \tag{5.18}$$

Věta 5.5 bude dokázána, jestliže ukážeme, že

$$\mathcal{N}_p(f_1 f_2) \leq \mathcal{N}_{p_1}(f_1)\mathcal{N}_{p_2}(f_2). \tag{5.19}$$

Z (5.17) a (5.15), (5.16) plyne

$$[\mathcal{N}_p(f_1 f_2)]^p = \int_\Omega |f_1 f_2|^p \,\mathrm{d}X \leq \mathcal{N}_{r_1}(|f_1|^p)\mathcal{N}_{r_2}(|f_2|^p) =$$

$$= \Big(\int_\Omega |f_1|^{pr_1} \,\mathrm{d}X\Big)^{\frac{1}{r_1}} \Big(\int_\Omega |f_2|^{pr_2} \,\mathrm{d}X\Big)^{\frac{1}{r_2}} = \Big(\int_\Omega |f_1|^{p_1} \,\mathrm{d}X\Big)^{\frac{p}{p_1}} \Big(\int_\Omega |f_2|^{p_2} \,\mathrm{d}X\Big)^{\frac{p}{p_2}}.$$

Přejdeme-li v tomto výsledku k p-té odmocnině, dostaneme (5.19). Tedy z (5.18) plyne (5.13). $\square$

5.6. Věta (Minkowského nerovnost). *Pro $p \geq 1$ platí*

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.20}$$

Důkaz. Pro $p = 1$ je Minkowského nerovnost zřejmá (absolutní hodnota součtu není větší než součet absolutních hodnot sčítanců).

Nechť tedy $p > 1$. Vyjděme z identity

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1}(|a| + |b|) = (|a| + |b|)^{p-1}|a| + (|a| + |b|)^{p-1}|b|,$$

pišme v ní a_k místo a a b_k místo b a sečtěme takto vzniklé rovnosti podle k od 1 do n; dostaneme

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p = \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|b_k|.$$

Aplikujeme-li nyní Hölderovu nerovnost (5.8) na oba součty na pravé straně a využijeme-li vztahu $(p-1)q = p$, dostaneme

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \leq \left[\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p\right]^{\frac{1}{q}} \left[\Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Položíme-li

$$A = \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p, \tag{*}$$

potom můžeme poslední nerovnost napsat ve tvaru

$$A \leq A^{-\frac{1}{q}} \left[\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \right].$$

Násobme obě strany této nerovnosti výrazem $A^{-\frac{1}{q}}$. Dostaneme

$$A^{1-\frac{1}{q}} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Protože $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, dostáváme odtud s užitím (*)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

odkud ihned plyne nerovnost (5.20), protože $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$. □

5.7. Věta (Minkowského nerovnost v integrálním tvaru). *Nechť* $p \geq 1$. *Potom pro libovolné funkce* f *a* g, *pro něž integrály na pravé straně* (5.21) *mají smysl,*[1] *platí*

$$\left[\int_\Omega |f(X) + g(X)|^p \, \mathrm{d}X \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_\Omega |f(X)|^p \, \mathrm{d}X \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\Omega |g(X)|^p \, \mathrm{d}X \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{5.21}$$

Důkaz probíhá analogicky jako důkaz Věty 5.6; pouze místo Hölderovy nerovnosti (5.8) užijeme Hölderovu nerovnost (5.9). □

5.8. Příklad. Nechť l_p je lineární prostor, jehož prvky jsou všechny posloupnosti reálných (resp. komplexních) čísel

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

pro něž platí podmínka

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty, \tag{5.22}$$

kde $p \geq 1$ je dané číslo. Definujme normu $\|x\|_{l_p}$ v lineárním prostoru l_p vztahem

$$\|x\|_{l_p} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \tag{5.23}$$

[1] Nerovnost (5.21) platí pro všechny funkce $f, g \in L_2(\Omega)$.

a prověřme všechny tři axiomy normy. Podle Minkowského nerovnosti (5.20) pro libovolné přirozené číslo n platí

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Protože řady

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p$$

podle předpokladu (5.22) konvergují, dostaneme po limitním přechodu pro $n \to \infty$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Vzhledem k (5.23) můžeme napsat tuto nerovnost ve tvaru trojúhelníkové nerovnosti

$$\|x+y\|_{l_p} \le \|x\|_{l_p} + \|y\|_{l_p}.$$

Zbývající dva axiomy se ověří v případě normy (5.23) snadno.

5.9. Příklad. Na lineárním prostoru $C^0\langle a,b\rangle$ zaveďme normu předpisem

$$\|f\|_{C^0_p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.24}$$

Dostaneme tak normovaný prostor $C^0_p\langle a,b\rangle$. Ověřme, že (5.24) skutečně splňuje všechny tři axiomy normy. Platnost prvních dvou axiomů je evidentní; co se týče trojúhelníkové nerovnosti, podle Věty 5.7 platí

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

čili podle (5.24)

$$\|f+g\|_{C^0_p[a,b]} \le \|f\|_{C^0_p[a,b]} + \|g\|_{C^0_p[a,b]},$$

což jsme chtěli dokázat.