6. Konvergentní posloupnosti. Uzavřené a otevřené množiny

6.1. Definice. *Otevřenou koulí* $S(x_0, r)$ v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ budeme nazývat množinu bodů $x \in \mathcal{X}$, které vyhovují podmínce

$$\varrho(x, x_0) < r\,.$$

Pevný bod x_0 se nazývá *středem* a číslo r *poloměrem* této koule.

Uzavřenou koulí $S[x_0, r]$ v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ budeme nazývat množinu bodů $x \in \mathcal{X}$, které vyhovují podmínce

$$\varrho(x, x_0) \le r\,.$$

Otevřenou kouli poloměru ε se středem x_0 budeme také nazývat ε-*okolím* bodu x_0 a značit symbolem $O_\varepsilon(x_0)$. $\square$

6.2. Definice. Bod x nazýváme *vnitřním bodem množiny* M, existuje-li okolí $O_\varepsilon(x)$ tohoto bodu, které je celé obsažené v množině M. Množinu, jejíž všechny body jsou vnitřní, nazýváme *otevřenou.*

6.3. Definice. Bod x_0 metrického prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ se nazývá *hromadným bodem* množiny $M \subset X$, jestliže jeho *libovolné* okolí obsahuje alespoň jeden bod množiny M různý od bodu x_0.

Bod x náležející množině M se nazývá *izolovaným bodem* této množiny, jestliže existuje okolí $O_\varepsilon(x)$, které neobsahuje žádné body z M různé od x.

6.3a. Poznámka. 1) Samotný hromadný bod x_0 může, ale nemusí náležet množině M.

2) Jestliže x_0 je hromadným bodem množiny M, potom každé okolí $O_\varepsilon(x_0)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny M.

3) Jestliže bod x_0 náleží množině M, ale není jejím hromadným bodem, tak je *izolovaným* bodem množiny M.

6.4. Příklad. Hromadný bod může, ale nemusí náležet množině M. Například, je-li M množina racionálních čísel náležejících segmentu $\langle 0, 1\rangle$, potom každý bod tohoto segmentu je hromadným bodem množiny M.

6.5. Definice. a) Nechť $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots\}$ je posloupnost bodů v metrickém prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$. Říkáme, že *tato posloupnost konverguje k bodu* $x \in \mathcal{X}$, jestliže každé ε-okolí $O_\varepsilon(x)$ bodu x obsahuje všechny body x_n počínaje od některého indexu $N(\varepsilon)$, tj. jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že okolí $O_\varepsilon(x)$ obsahuje všechny body x_n, kde $n \ge N(\varepsilon)$. Bod x se nazývá *limita posloupnosti* $\{x_n\}$.

b) Tuto definici lze vyslovit také takto: Posloupnost $\{x_n\}$ metrického prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže pro číselnou posloupnost $\{\varrho(x, x_n)\}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x, x_n) = 0\,,$$

tj. jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že $\varrho(x, x_n) < \varepsilon$ pro všechna $n \ge N(\varepsilon)$. $\square$

6.5a. Poznámka. V případě normovaného prostoru $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ má část a) Definice 6.5 tento tvar: Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů v normovaném prostoru $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$. Říkáme, že *tato posloupnost konverguje k bodu* $x \in \mathcal{L}$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že

$$\|x_n - x\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon). \tag{6.1}$$

Bod x se nazývá *limita posloupnosti* $\{x_n\}$.

Tato definice se liší od definice limity posloupnosti známé ze základů matematické analýzy pouze tím, že místo absolutní hodnoty vystupuje v (6.1) norma $\|\cdot\|$.

6.6. Tvrzení. *Žádná posloupnost nemůže mít dvě různé limity.*

Důkaz. Nechť x a y jsou dvě limity posloupnosti $\{x_n\}$, tj.

$$\lim_{\varrho\to\infty}(x_n, x) = 0, \qquad \lim_{\varrho\to\infty}(x_n, y) = 0.$$

Potom podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y) \to 0,$$

takže (vzhledem k tomu, že prvky x, y jsou pevné) $\varrho(x, y) = 0$, což je ekvivalentní se vztahem $x = y$. $\square$

6.7. Tvrzení. *Jestliže posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k bodu x, potom každá její podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ (tj. posloupnost vybraná z posloupnosti $\{x_n\}$) konverguje k témuž bodu x.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom (podle Definice 6.5) existuje $N(\varepsilon)$ tak, že $x_n \in O_\varepsilon(x)$ pro všechna $n \geq N(\varepsilon)$. Potom také (protože $\{n_k\} \subset \{n\}$) $x_{n_k} \in O_\varepsilon(x)$ pro všechna $n_k \geq N(\varepsilon)$, což znamená, že $\lim\limits_{n_k\to\infty} \varrho(x_{n_k}, x) = 0$. $\square$

6.8. Věta. *Aby bod $x_0 \in X$ byl hromadným bodem množiny $M \subset X$, je nutné a stačí, aby z této množiny bylo možno vydělit posloupnost různých bodů $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ takovou, že*

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x_0) = 0.$$

Věta 6.8 dovoluje říci Definici 6.3 v jiném tvaru:

6.9. Definice. Bod $x_0 \in X$ se nazývá hromadným bodem množiny $M \subset X$, jestliže z této množiny je možno vydělit posloupnost různých bodů $\{x_n\}$ takovou, že

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x_0) = 0.$$

S pomocí pojmu „hromadný bod“ zavedeme pojem *uzavřená množina.*

6.10. Definice. 1. Množina všech hromadných bodů množiny M metrického prostoru $\mathcal{X}$ se nazývá *derivací množiny* M a značí se M'.

2. Je-li $M' \subset M$, potom množinu M nazýváme *uzavřenou.* (Jinými slovy: Uzavřenou nazýváme takovou množinu, která obsahuje všechny svoje hromadné body.)

3. Množinu $M \cup M'$ nazýváme *uzávěrem* množiny M a značíme symbolem $\overline{M}$.

6.10a. Poznámka. Uzavřená množina může obsahovat izolované body. Uzavřenou množinu, která neobsahuje izolované body, nazýváme *dokonalá množina.*

6.11. Příklady. Uvažujme metrický prostor $R^1 = (\mathbb{R}, \varrho(x,y) = |x-y|)$.
1. $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \subset \mathbb{R}^1$, $M' = \{0\}$; M je neuzavřená.
2. $M = (a,b)$, $M' = \langle a,b \rangle$; M je neuzavřená.
3. $M = \langle a,b \rangle$, $M' = \langle a,b \rangle$; M je dokonalá (uzavřená, bez izolovaných bodů).
4. $M = \mathbb{R}$, $M' = \mathbb{R}$; tedy množina všech reálných čísel je dokonalá.
5. $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0\}$, $M' = \{0\}$; M je uzavřená.
6. $M = \mathbb{Q}$ (množina všech racionálních čísel), $M' = \mathbb{R}$, tedy $\mathbb{Q}$ je neuzavřená.
7. $M = \emptyset$, $M' = \emptyset$ - prázdná množina je dokonalá.
8. $M =$ konečná množina, $M' = \emptyset$; každá konečná množina je uzavřená.

Platí tyto důležité věty:

6.12. Věta. *Aby množina M byla uzavřená, je nutné a stačí, aby byla rovna svému uzávěru:*

$$M = \overline{M}\,.$$

6.13. Věta. *a) Sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.*

b) Průnik libovolné množiny (konečné či nekonečné) uzavřených množin je uzavřená množina.

6.13a. Poznámka. Sjednocení nekonečné množiny uzavřených množin nemusí být uzavřená množina. Například mějme množiny

$$F_n = \left\langle \tfrac{1}{n}, 1 \right\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Všechny F_n jsou uzavřené, ale jejich sjednocení

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1\rangle$$

není uzavřená množina.

6.14. Poznámka. *Každý metrický prostor je uzavřený (v sobě).* Vysvětleme tento na první pohled překvapivý fakt na případě metrického prostoru

$$\mathcal{X} = (X = (0,1\rangle,\ \varrho(x,y) = |x-y|). \tag{6.2}$$

Každý bod intervalu $X = (0,1\rangle$ (polootevřeného, je-li uvažován jako podmnožina množiny $\mathbb{R}$ reálných čísel) se dá vyjádřit jako limita posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ navzájem různých bodů. Protože $x_0 = 0 \notin X$, pro množinu $M = X$ platí vzhledem k Definicím 6.9 a 6.10, že $M' = M$ (a ne $M' \supset M$). Tedy množina $M = X$ je uzavřená v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ (je v něm dokonce dokonalá).

Můžeme to říci ještě jinak: Žádná posloupnost $\{x_n\} \subset X$, která v $\mathbb{R}$ konverguje k prvku $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$ (jako např. posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$), není v prostoru (6.2) konvergentní. Tedy $X' = X$.

V případě otevřených množin platí tato věta:

6.15. Věta. *a) Sjednocení libovolné množiny (konečné či nekonečné) otevřených množin je otevřenou množinou.*

b) Průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.

6.15a. Poznámka. Průnik nekonečné množiny otevřených množin nemusí být otevřenou množinou: Mějme např. systém množin

$$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

Všechny G_n jsou otevřené, ale jejich průnik je uzavřená množina

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}\,.$$

Z části a) Věty 6.15 plyne tento důsledek týkající se struktury otevřených množin v $\mathbb{R}^1$:

6.16. Důsledek. *Libovolná množina v $\mathbb{R}^1$, která se dá vyjádřit ve tvaru sjednocení otevřených intervalů, je otevřená.*

6.17. Příklady.

1. Každý interval (a, b) je otevřená množina.
2. Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je otevřená (víme, že je také uzavřená).
3. Prázdná množina $\emptyset$ je otevřená (víme, že je také uzavřená).
4. Segment $\langle a, b\rangle$ není otevřenou množinou, protože jeho konce nejsou vnitřními body.

6.18. Definice. Nechť A a B jsou dvě množiny v metrickém prostoru $\mathcal{X}$. Množinu A nazýváme *hustou* v B, jestliže $\overline{A} \supseteq B$. Speciálně, množina A se nazývá *všude hustou v $\mathcal{X}$*, jestliže $\overline{A} = \mathcal{X}$. (Například, množina racionálních čísel je všude hustá na číselné přímce $\mathbb{R}$.)

6.19. Definice. Metrický prostor $\mathcal{X}$, který obsahuje všude hustou *spočetnou* množinu, se nazývá *separabilní.*

6.20. Příklady separabilních metrických prostorů. a) Prostor izolovaných bodů,který je uveden v příkladu 1.2, je separabilní, právě když je vytvořen ze spočetně mnoha bodů. V tomto prostoru totiž uzávěr $\overline{M}$ libovolné množiny M je totožný s množinou M.

Všechny metrické prostory uvedené v příkladech b) – f) jsou separabilní. Pro každý z těchto prostorů uvádíme všude hustou množinu; detaily důkazů přenecháváme čtenáři:

b) V metrickém prostoru R^1 je všude hustou množinou množina racionálních čísel.

c) V metrickém prostoru R^n_p je všude hustou množinou množina n-rozměrných vektorů $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s racionálními souřadnicemi.

d) V metrickém prostoru R^n_∞ je všude hustou množinou množina n-rozměrných vektorů $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s racionálními souřadnicemi.

e) V metrických prostorech $C^0\langle a,b\rangle$ a $C_2^0\langle a,b\rangle$ je všude hustou množinou množina polynomů s racionálními koeficienty.

f) V metrickém prostoru l_2 je všude hustou množinou množina všech posloupností $\{x_n\}$, kde x_n jsou racionální čísla, přičemž počet čísel x_n různých od nuly je pouze konečný a pro různé posloupnosti obecně různý.

6.21. Příklad neseparabilního metrického prostoru. Metrický prostor M^∞ všech ohraničených posloupností uvedený v příkladu 3.12 není separabilní: Platí totiž, že všechny posloupnosti vytvořené z nul a jedniček tvoří množinu mohutnosti kontinua (tj. nespočetnou množinu). Vzdálenost dvou takových od sebe různých bodů prostoru M^∞, definovaná podle (3.20) vztahem

$$\varrho(x,y) = \sup_{1\le n\le\infty} |x_n - y_n|,$$

se rovná jedné. Kolem každého z těchto bodů sestrojíme otevřenou kouli o poloměru $\frac{1}{2}$. Tyto koule jsou disjunktní. Je-li nějaká množina A všude hustá v M^∞, potom každá ze sestrojených koulí musí obsahovat alespoň jeden bod množiny A, takže množina A nemůže být spočetná.

7. Struktura otevřených a uzavřených ohraničených množin na přímce $\mathbb{R}^1$

7.1. Věta. *Každá neprázdná ohraničená otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^1$ je vyjádřitelná ve tvaru sjednocení konečného počtu nebo spočetné množiny navzájem disjunktních intervalů, jejichž konce nenáležejí množině G:*

$$G = \bigcup_k (\lambda_k, \mu_k) \quad (\lambda_k \notin G,\ \mu_k \notin G).$$

7.2. Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^1$ je otevřená množina. Jestliže interval (a,b) je obsažen v G, ale jeho konce této množině nenáležejí,

$$(a,b) \subset G, \quad a \notin G, \quad b \notin G,$$

pak budeme tento interval nazývat *vytvořujícím intervalem* množiny G.

7.3. Věta. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^1$ je neprázdná ohraničená otevřená množina a (a,b) interval obsažený v G. V tomto případě se najde mezi vytvořujícími intervaly množiny G takový, který obsahuje v sobě interval (a,b).*

Při popisu struktury uzavřených ohraničených množin v $\mathbb{R}^1$ budeme potřebovat pojem *komplement množiny.*

7.4. Definice. Nechť E a S jsou dvě bodové množiny. Je-li $E \subset S$, potom množina $S - E$ se nazývá *komplementem* (*doplňkem*) *množiny E do množiny S* a značí se

$$C_S E\,.$$

Speciálně, množina $C_{\mathbb{R}}E$, kde $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, se prostě nazývá *komplementem* množiny E a značí se

$$CE\,.$$

7.5. Věta. *Je-li množina G otevřená, potom její komplement CG je uzavřená množina.*

7.6. Věta. *Je-li množina F uzavřená, potom její komplement CF je otevřená množina.*

7.7. Příklad. Každá ze vzájemně komplementárních množin Z a $\emptyset$ je současně uzavřená a otevřená.

7.8. Definice. Nechť E je neprázdná ohraničená množina a nechť $a = \inf E$, $b = \sup E$. Segment $S = \langle a, b \rangle$ se nazývá *nejmenším segmentem* obsahujícím množinu E.

7.9. Věta. *Je-li S nejmenší segment obsahující ohraničenou* uzavřenou *množinu F, potom množina*

$$C_S F = \langle a, b \rangle - F$$

je otevřená.

Nyní můžeme přejít ke studiu struktury *uzavřených* ohraničených množin. Nechť F je taková množina a S nejmenší segment, obsahující F. Jak víme, množina $C_S F$ je otevřená. Je-li tato množina neprázdná, tak je na ní možno užít větu 7.1. Proto platí následující věta.

7.10. Věta. *Neprázdná ohraničená uzavřená množina F je buď segmentem, nebo se získá z nějakého segmentu odebráním konečného počtu nebo spočetné množiny navzájem disjunktních intervalů, jejichž konce náležejí množině F.*

Vytvořující intervaly množiny $C_S F$ se nazývají *doplňkovými* intervaly množiny F.

Protože dokonalá množina je uzavřená, tak i pro ni platí věta 7.10. Zbývá vyjasnit, jaké požadavky je třeba položit na doplňkové intervaly uzavřené množiny, aby byla dokonalá. Odpověď na tuto otázku dává následující věta.

7.11. Věta. *Nechť F je neprázdná ohraničená* uzavřená *množina a $S = \langle a, b \rangle$ nejmenší segment obsahující F. Potom*

1. *Bod x_0, který je společným koncem dvou doplňkových intervalů, je izolovaným bodem množiny F.*
2. *Je-li bod a (nebo b) koncem jednoho z doplňkových intervalů množiny F, tak je izolovaným bodem množiny F.*
3. *Žádné jiné izolované body (kromě uvedených v částech 1 a 2) množina F nemá.*

Z této věty plyne následující věta:

7.12. Věta. *Každá neprázdná ohraničená* dokonalá *množina P je buď segmentem nebo se získá z některého segmentu odebráním konečného počtu nebo spočetné množiny navzájem disjunktních intervalů, které nemají společné koncové body ani jeden s druhým, ani s původním segmentem. Obráceně, každá množina, získaná tímto způsobem, je dokonalá.*

Příklad velmi zajímavé dokonalé množiny v $\mathbb{R}^1$ je tzv. *Cantorovo diskontinuum* P_0 (viz [Že1, str. 38–43]).

8. Struktura otevřených a uzavřených ohraničených množin v $\mathbb{R}^n$ $(2 \leq n \leq 3)$

Struktura otevřených dvojrozměrných množin je složitější než u jednorozměrných. Neexistuje zde pojem odpovídající „vytvořujícímu intervalu". Následující věta udává, jaká je struktura otevřených množin (není to však jednoznačně určené vyjádření otevřené množiny).

8.1. Věta (Struktura dvojrozměrných otevřených množin). *Každá neprázdná otevřená dvojrozměrná množina je sjednocení nekonečné spočetné množiny uzavřených čtverců, jejichž strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami a které navzájem nemají žádné vnitřní body.*

Důkaz. Uvažujme dvě soustavy přímek

$$x = m, \quad y = n \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

Tyto přímky rozdělují celou rovinu na spočetnou množinu čtverců se stranami rovnými jedné. Každému čtverci přiřadíme jeho hranici, takže dostaneme soustavu uzavřených čtverců s navzájem disjunktními vnitřky. Tyto čtverce nazveme čtverci 1. řádu. Čtverce 2. řádu dostaneme pomocí dvou soustav přímek tvaru

$$x = \frac{m}{2}, \quad y = \frac{n}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

čtverce 3. řádu dostaneme pomocí dvou soustav přímek tvaru

$$x = \frac{m}{4}, \quad y = \frac{n}{4} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

a obecně čtverce k-tého řádu $(k = 1, 2, 3, \dots)$ dostaneme pomocí dvou soustav přímek tvaru

$$x = \frac{m}{2^{k-1}}, \quad y = \frac{n}{2^{k-1}} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

Všechny takto sestrojené čtverce jsou uzavřené, jejich strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, dva čtverce jednoho a téhož řádu mají disjunktní vnitřky, každý čtverec řádu k má stranu délky 2^{1-k} a sestává ze čtyř čtverců řádu $k+1$ a konečně množina všech těchto čtverců je spočetná.

Uvažujme libovolnou neprázdnou dvojrozměrnou množinu G. Je-li M_0 libovolný bod této množiny, potom lze najít posloupnost do sebe vzájemně vložených uzavřených čtverců $\{Q^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, (kde $Q^{(j)}$ je čtverec j-tého řádu), které obsahují bod M_0,[1]

$$Q^{(1)} \supset Q^{(2)} \supset Q^{(3)} \supset \dots \tag{8.1}$$

Protože M_0 je vnitřním bodem množiny G a strana čtverce $Q^{(n)}$ s rostoucím n konverguje k nule, tak všechny čtverce $Q^{(n)}$, počínaje od některého z nich, jsou

[1] Tato konstrukce nemusí být jednoznačná: může se stát, že bod M_0 se vyskytne buď na společné straně dvou čtverců téhož řádu (potom vybereme jeden z těchto dvou čtverců), nebo je společným vrcholem čtyř čtverců téhož řádu (potom vybereme jeden z těchto čtyř čtverců).

obsaženy v G. Tedy *existují* uzavřené čtverce výše sestrojené sítě, které jsou obsaženy v G. Berouce toto v úvahu, označíme symbolem $\mathcal{T}_1$ množinu všech uzavřených čtverců 1. řádu, které jsou obsaženy v G, symbolem $\mathcal{T}_2$ množinu všech uzavřených čtverců 2. řádu, které jsou obsaženy v G, ale neleží ani v jednom čtverci systému $\mathcal{T}_1$, symbolem $\mathcal{T}_3$ množinu všech uzavřených čtverců 3. řádu, které jsou obsaženy v G, ale neleží ani v jednom čtverci systémů $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$, atd.

Každý ze systémů $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, ... je nanejvýš spočetný, takže i jejich sjednocení $\mathcal{T}$ je nanejvýš spočetné. Očíslujme všechny čtverce systému $\mathcal{T}$; nechť to jsou čtverce $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ Dokážeme, že

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k. \tag{8.2}$$

Z konstrukce systému $\mathcal{T}$ přímo plyne, že

$$G \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k. \tag{8.3}$$

Dokážeme nyní opačnou inkluzi: Nechť $M_0 \in G$ je libovolný, ale pevně zvolený bod. Z úvahy spojené s (8.1) plyne, že existují uzavřené čtverce původní sítě, které jsou obsaženy v G a obsahují bod M_0. Nechť $\mathcal{P}$ je množina řádů těchto čtverců. $\mathcal{P}$ je neprázdná množina přirozených čísel, takže v ní existuje nejmenší číslo. Nechť m je toto číslo. Potom existuje uzavřený čtverec Q_α řádu m, který obsahuje M_0 a je obsažen v G. Tento čtverec není obsažen v žádném uzavřeném čtverci původní sítě, který by obsahoval M_0, byl obsažen v G a měl řád menší než m, protože jinak by číslo m nebylo nejmenším číslem množiny $\mathcal{P}$. Tedy čtverec Q_α náleží do systému $\mathcal{T}_m$, takže

$$M_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k.$$

Vzhledem k libovolnosti bodu m_0 jsme dokázali inkluzi

$$G \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k. \tag{8.4}$$

Z inkluzí (8.3) a (8.4) plyne rovnost (8.2). Zbývá dokázat, že na pravé straně (8.2) je skutečně spočetně, a ne konečně mnoho čtverců Q_k. To je však snadné: Sjednocení konečného počtu uzavřených čtverců je uzavřená množina a na levé straně rovnosti (8.2) je otevřená množina G.

Jediná neprázdná množina v $\mathbb{R}^2$, která je současně otevřenou i uzavřenou, je celá rovina $\mathbb{R}^2$; ale kdyby $G = \mathbb{R}^2$, potom G nemůže být sjednocením konečného počtu uzavřených čtverců, takže tato poslední možnost se také vylučuje. $\square$

Věta 8.1 bude mít zásadní význam pro vybudování teorie Lebesgueovy míry dvojrozměrných množin. Tato věta bude doplněna následující větou (která je samozřejmá vzhledem k tomu, že věty o komplementech množin uvedené v kap. 8 platí také v $\mathbb{R}^n$):

8.2. Věta. *Nechť $F \subset \mathbb{R}^2$ je libovolná ohraničená uzavřená množina. Potom*

$$F = D - C_D F, \tag{8.5}$$

kde D je libovolný otevřený obdélník obsahující množinu F.

Poznamenejme, že pojem *uzavřené* množiny byl podrobně probrán v kap. 6. Výsledky uvedené ve Větách 8.1 a 8.2 se snadno zobecní z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$.

9. Úplné metrické prostory

Číselná přímka $\mathbb{R}^1$ je nejjednodušším příkladem tak zvaných úplných metrických prostorů, jejichž základní vlastnost probereme spolu s příklady v této kapitole.

9.1. Definice. Posloupnost $\{x_n\}$ bodů metrického prostoru $\mathcal{X}$ budeme nazývat *cauchyovskou* (nebo *fundamentální*), jestliže splňuje Cauchyovo kritérium, tj. jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové kladné celé číslo $N(\varepsilon)$, že

$$\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall m,\, n \geq N(\varepsilon).$$

9.2. Tvrzení. *Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.*

Důkaz. Skutečně, jestliže $\{x_n\}$ konverguje k x (tj. $\varrho(x_n, x) \to 0$), potom ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové celé kladné $N(\varepsilon)$, že $\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $n > N(\varepsilon)$. Potom podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \varrho(x_m, x) + \varrho(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall m,\, n \geq N(\varepsilon). \quad \square$$

Naopak definujeme:

9.3. Definice. Jestliže v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ libovolná cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ konverguje (tj. existuje $x \in \mathcal{X}$ tak, že $\varrho(x_n, x) \to 0$, když $n \to \infty$), potom nazýváme tento prostor *úplný.*

9.4. Příklad. V prostoru izolovaných bodů uvedeném v příkladě 1.2 jsou cauchyovské pouze stacionární posloupnosti, tj. takové, v nichž se od určitého indexu stále opakuje tentýž bod. Každá taková posloupnost ovšem konverguje, tj. tento prostor je úplný.

9.5. Příklad. Úplnost prostoru $R^1 = (\mathbb{R}^1, \varrho(x,y) = |x-y|)$, tj. úplnost množiny všech reálných čísel, je známa z matematické analýzy.

9.6. Příklad. Úplnost euklidovského prostoru R_2^n, kde

$$R_2^n = \left(\mathbb{R}^n, \varrho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}\right),$$

plyne snadno z úplnosti prostoru R^1: Nechť $\{x_n^{(p)}\}$ je cauchyovská posloupnost bodů

$$x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)}) \in R^n, \quad p = 1, 2, \dots$$

To znamená, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2 \tag{*}$$

pro všechna přirozená čísla p, q větší než $N(\varepsilon)$. Odtud dostáváme pro k-té souřadnice $(k = 1, 2, \dots, n)$ tyto nerovnosti

$$|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \varepsilon,$$

platné pro všechna přirozená čísla p, $q > N(\varepsilon)$, takže $\{x_k^{(p)}\}$ je cauchyovská posloupnost **reálných** čísel, tedy konvergentní. Položme

$$x_k = \lim_{p\to\infty} x_k^{(p)}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{**}$$

Nechť $p \to \infty$ v (*); potom podle (**) je $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2$. Vzhledem k libovolnosti $\varepsilon > 0$ odtud plyne $\lim\limits_{q\to\infty} \varrho(x^{(q)}, x) = 0$. Tím je úplnost prostoru R^n dokázána. $\square$

9.7. Příklad. Úplnost prostorů R_1^n a R_∞^n, kde

$$R_1^n = \left(\mathbb{R}^n, \varrho_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|\right), \quad R_\infty^n = \left(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty(x,y) = \max_{1\le k\le n}|x_k - y_k|\right),$$

lze ukázat obdobně.

9.8. Příklad. Dokážeme úplnost prostoru $C^0\langle a, b\rangle$, pro jehož metriku platí

$$\varrho_{C^0[a,b]}(f,g) = \max_{a\le t\le b}|f(t) - g(t)|. \tag{9.1}$$

Nechť $\{x_n(t)\}$ je nějaká cauchyovská posloupnost v prostoru $C^0\langle a, b\rangle$. Vzhledem k (9.1) to znamená, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $N(\varepsilon)$, že

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \tag{9.2}$$

pro všechna přirozená čísla m, $n > N(\varepsilon)$ a pro všechna čísla $t \in \langle a, b\rangle$.

Připomeňme si nyní **Cauchy-Bolzanovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí:** Aby posloupnost funkcí $\{x_n(t)\}$ měla limitní funkci, kterou označíme $x(t)$, a konvergovala k $x(t)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ **stejnoměrně**, je nutné a stačí aby ke každému $\varepsilon > 0$ existoval index $N(\varepsilon)$ (který nezávisí na $x \in \langle a, b\rangle$) tak, že nerovnost (9.2) platí pro všechna přirozená čísla m, $n > N(\varepsilon)$ a pro všechna čísla $t \in \langle a, b\rangle$.

Dále platí tato **věta A:** Nechť funkce $x_n(t)$ $(n = 1, 2, \dots)$ jsou definovány a spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pokud tyto funkce konvergují na $\langle a, b\rangle$ k funkci $x(t)$ **stejnoměrně**, potom i funkce $x(t)$ je na $\langle a, b\rangle$ spojitá.

Těchto dvou vět nyní využijeme: Podle CB-kritéria existuje na $\langle a, b\rangle$ funkce $x(t)$, ke které konverguje posloupnost funkcí $\{x_n(t)\}$ stejnoměrně, a podle věty A je tato funkce $x(t)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$. Tedy cauchyovská posloupnost $\{x_n(t)\}$ má v $C^0\langle a, b\rangle$ limitu, takže prostor $C^0\langle a, b\rangle$ je úplný.

9.9. Příklad. Dokážeme úplnost prostoru l_2, pro jehož metriku platí

$$\varrho(x,y) \equiv \varrho_{l_2}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2.$$

Nechť $\{x^{(n)}\} \subset l_2$ je cauchyovská posloupnost, kde

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots)\,.$$

To znamená, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že

$$\varrho^2(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2 \quad \text{pro } n > N(\varepsilon),\ m > N(\varepsilon). \tag{9.3}$$

Ze vztahu (9.3) plyne, že pro každý index k platí

$$(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2,$$

tj. pro každé přirozené číslo k je posloupnost reálných čísel $\{x_k^{(n)}\}$ cauchyovská, tedy konvergentní. Nechť

$$x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}\,.$$

Položme $x := (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$. Dokážeme, že platí vztahy (9.4) a (9.5) (čímž dokážeme úplnost prostoru l_2), kde

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty, \quad \text{tj. } x \in l_2, \tag{9.4}$$

přičemž

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x^{(n)}, x) = 0\,. \tag{9.5}$$

Z nerovnosti (9.3) plyne, že pro libovolné pevné přirozené číslo M je

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2\,.$$

V tomto součtu je konečný počet sčítanců a my můžeme, považujeme-li přirozené číslo n za pevné, přejít k limitě pro $m \to \infty$. Dostaneme

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(n)} - x_k)^2 \le \varepsilon^2\,.$$

Tato nerovnost platí pro libovolné přirozené číslo M. Považujeme-li součty

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(n)} - x_k)^2$$

za částečné součty, potom takto sestrojená řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)} - x_k)^2$$

je konvergentní a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)} - x_k)^2 \leq \varepsilon^2. \tag{9.6}$$

S pomocí nerovnosti $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, kde položíme $a = x_k^{(n)}$, $b = x_k - x_k^{(n)}$ (takže $a + b = x_k$), plyne z konvergence řad

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)})^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_k^{(n)})^2$$

konvergence řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$. Tím je dokázáno tvrzení (9.4).

Dále, protože číslo ε můžeme zvolit libovolně malé, nerovnost (9.6) znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x^{(n)}, x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)} - x_k)^2} = 0\,,$$

tj. $x^{(n)} \to x$ v metrice prostoru l_2. Tím je tvrzení (9.5) dokázáno.

9.10. Příklad. Dokážeme, že prostor $C_2^0\langle a, b\rangle$ není úplný. Mějme např. posloupnost spojitých funkcí na segmentu $\langle -1, 1\rangle$ (tj. pro jednoduchost $a = -1$, $b = 1$)

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}, \\ nt & \text{pro } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{pro } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{9.7}$$

Tato posloupnost je cauchyovská v prostoru $C_2^0\langle -1, 1\rangle$, protože

$$\int_{-1}^{1} [\varphi_n(t) - \varphi_m(t)]^2 \, \mathrm{d}t \leq \frac{2}{\min(m, n)}\,;$$

nekonverguje však k žádné funkci prostoru $C_2^0\langle -1, 1\rangle$. Skutečně, nechť f je nějaká funkce z prostoru $C_2^0\langle -1, 1\rangle$ a ψ funkce definovaná vztahem

$$\psi(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } t < 0, \\ 1 & \text{pro } t \geq 0. \end{cases} \tag{9.8}$$

Z integrálního tvaru Minkowského nerovnosti (platné zřejmě i pro funkce po částech spojité) plyne

$$\left\{\int_{-1}^{1} [f(t) - \psi(t)]^2 \, \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\int_{-1}^{1} [f(t) - \varphi_n(t)]^2 \, \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_{-1}^{1} [\varphi_n(t) - \psi(t)]^2 \, \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Vzhledem k spojitosti funkce f je integrál na levé straně této nerovnosti kladný. Dále zřejmě je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} [\varphi_n(t) - \psi(t)]^2 \, \mathrm{d}t = 0. \tag{9.9}$$

Proto integrál $\int_{-1}^{1} [f(t) - \varphi_n(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ nemůže konvergovat k nule pro $n \to \infty$.

Poznamenejme, že neúplnost prostoru $C_2^0\langle a, b\rangle$ plyne jednodušeji ze vztahu (9.9) a jednoznačnosti limity v $L_2(-1, 1)$.

9.11. Příklad. Metrický prostor M^∞ všech ohraničených posloupností je úplný. Toto tvrzení ať si dokáže čtenář za cvičení sám.

V případě, že metrický prostor je definován na lineárním prostoru a metrika je indukována normou, definujeme:

9.12. Definice. a) Úplný normovaný prostor se krátce nazývá *Banachův* prostor. b) Úplný unitární prostor se krátce nazývá *Hilbertův* prostor.

9.13. Poznámka (úplnost a uzavřenost). Někdy se (nesprávně) klade otázka, jaký je rozdíl mezi úplností a uzavřeností. **Úplnost** se týká **pouze** metrických prostorů a souvisí s cauchyovskými posloupnostmi; existují úplné i neúplné metrické prostory. **Uzavřenost** je pojem, který se týká každé množiny metrického prostoru (která je buď uzavřená nebo ne); přitom uzavřenost souvisí s konvergentními posloupnostmi. Každý metrický prostor je, jak již víme, uzavřený (v sobě).

9.14. Poznámka. Je zajímavé, že cauchyovskou posloupnost nelze definovat pomocí okolí (takže tento pojem je „netopologický“).

Je třeba zdůraznit, že požadavek „$\forall m, n \geq N(\varepsilon)$“ je silný, takže není vždy splněn. Na druhé straně dá v některých případech chvíli přemýšlení než dokážeme, že jej nelze splnit. Uvedeme v tomto směru dva příklady.

9.15. Příklad. Pro posloupnost $\{\varphi_n(t)\}$ funkcí (9.7) platí $\{\varphi_n(t)\} \subset C^0\langle -1, 1\rangle$. Dokažme, že tato posloupnost *není* cauchyovská v normě prostoru $C^0\langle -1, 1\rangle$.

Nechť přirozená čísla m, n splňují nerovnost $m < n$ a nechť jsou jinak libovolná. Potom výraz $|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|$ nabývá svého maxima v bodech $t = -\frac{1}{n}$ a $t = \frac{1}{n}$, takže

$$\max_{-1\leq t\leq 1} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| = \varphi_n(\tfrac{1}{n}) - \varphi_m(\tfrac{1}{n}) = 1 - \tfrac{m}{n}.$$

Vidíme, že zvolíme-li $n = km$, kde $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, potom

$$\max_{-1\leq t\leq 1} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| = 1 - \tfrac{1}{k}.$$

Tedy zvolíme-li $\varepsilon < 1$, potom lze najít takové $k \in \mathbb{N}$, že $1 - \frac{1}{k} > \varepsilon$, takže při *každém* N všechny dvojice $\varphi_m(t)$, $\varphi_n(t)$, kde $m > N$ a $n = km$, nesplňují podmínku

$$\max_{-1\leq t\leq 1} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \varepsilon.$$

Tedy posloupnost $\{\varphi_n(t)\}$ funkcí (9.7) není v normě prostoru $C^0\langle -1, 1\rangle$ cauchyovská.

Tento výsledek se dal očekávat, protože funkce (9.7) konvergují bodově (s výjimkou bodu $t = 0$) k nespojité funkci (9.8). Stejnoměrně tato posloupnost nekonverguje k žádné funkci.

9.16. Příklad. Mějme posloupnost $\{x_n(t)\}$ funkcí $x_n(t) = t^n$ spojitých pro všechna $t \in \mathbb{R}^1$. Dokažme, že tato posloupnost *není* cauchyovská v normě prostoru $C^0\big\langle 0,1\big\rangle$.

Předpokládejme, že $m < n$. Potom můžeme zvolit $n = 2m$, takže

$$\max_{0\le t\le 1} |x_n(t) - x_m(t)| = \max_{0\le t\le 1} |t^{2m} - t^m|.$$

Zaveďme substituci $s = t^m$ a hledejme maximum funkce $|s^2 - s|$ a bod s_0, ve kterém toto maximum nastává. Platí $(s^2 - s)' = 2s - 1$, takže $s_0 = \frac{1}{2}$. Odtud

$$(t_0)^m = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \tfrac{1}{\sqrt[m]{2}}.$$

Tedy pro *libovolné* m platí

$$\max_{0\le t\le 1} |t^{2m} - t^m| = |(\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{4}.$$

Vidíme, že pro $\varepsilon < \frac{1}{4}$ nelze najít $N(\varepsilon)$ tak, aby

$$\max_{0\le t\le 1} |t^n - t^m| < \varepsilon \quad \forall m, n > N(\varepsilon),$$

takže posloupnost $\{t^n\}$ není v normě prostoru $C^0\big\langle 0,1\big\rangle$ cauchyovská.

Tento výsledek se dal očekávat, protože funkce $x_n(t) = t^n$ konvergují na intervalu $\langle 0,1\rangle$ bodově k nespojité funkci

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in \langle 0,1), \\ 1 & \text{pro } t = 1. \end{cases}$$

Stejnoměrně tato posloupnost nekonverguje na intervalu $\langle 0,1\rangle$ k žádné funkci.

Je třeba poznamenat, pro libovolné $\delta > 0$ posloupnost funkcí $x_n(t) = t^n$ stejnoměrně konverguje k nule na intervalu $\big\langle 0, 1-\delta\big\rangle$.

10. Zúplnění metrického prostoru

Každý metrický prostor, je-li neúplný, se dá doplnit na úplný metrický prostor. Tomuto procesu se říká *zúplnění.* Před vyslovením příslušné definice a věty zavedeme ještě pojem *podprostoru metrického prostoru.*

10.1. Definice. Nechť $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ je libovolný metrický prostor. Metrický prostor $\mathcal{M} = (M, \varrho)$ s toutéž metrikou ϱ uvažovanou pouze na množině $M \subset X$ se nazývá *podprostorem* metrického prostoru $\mathcal{X}$.

10.2. Definice. Nechť $\mathcal{X}$ je libovolný metrický prostor. Úplný metrický prostor $\mathcal{X}^*$ se nazývá *zúplněním*[2] prostoru $\mathcal{X}$, jestliže:

1) $\mathcal{X}$ je podprostorem prostoru $\mathcal{X}^*$;[3]

2) prostor $\mathcal{X}$ je hustý v prostoru $\mathcal{X}^*$.[4]

Například prostor všech reálných čísel je zúplněním (úplným obalem) prostoru všech racionálních čísel.

---

[2]Tento výraz je překladem ruského výrazu "popolněnije"; někdy se též užívá termín *úplný obal.*

[3]To znamená: Je-li $x \in \mathcal{X}$, potom je $x \in \mathcal{X}^*$; je-li ϱ metrika prostoru $\mathcal{X}$ a ϱ_1 metrika prostoru $\mathcal{X}^*$, potom pro body x, $y \in \mathcal{X}$ platí $\varrho(x,y) = \varrho_1(x,y)$.

[4]To znamená, že $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}^*$, kde $\overline{\mathcal{X}}$ je uzávěr prostoru $\mathcal{X}$ v prostoru $\mathcal{X}^*$. (Množina B je hustá v množině A, je-li $\overline{B} \supset A$.)

10.3. Definice. Říkáme, že vzájemně jednoznačné zobrazení $y = f(x)$ metrického prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ na metrický prostor $\mathcal{Y} = (Y, \varrho^*)$ je *izometrické*, jestliže

$$\varrho(x_1, x_2) = \varrho^*(f(x_1), f(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Samotné metrické prostory $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$, mezi kterými je možno stanovit izometrické zobrazení, se nazývají *izometrickými* mezi sebou.

Izometrie dvou prostorů $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ značí, že metrické vztahy mezi jejich elementy jsou jedny a tytéž a rozdíl může být pouze v kvalitě jejich elementů, což je z metrického hlediska nepodstatné. V dalším proto budeme považovat izometrické prostory za totožné.

10.4. Věta. *Každý metrický prostor $\mathcal{X}$ má zúplnění a všechna jeho zúplnění jsou izometrická.*[5]

Důkaz je dlouhý a komplikovaný; odkazujeme na [Že1], str. 132 – 134.

11. Podprostory normovaných prostorů

V Definici 10.1 jsme zavedli pojem podprostoru metrického prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$. Této definici vyhovuje každý metrický prostor (M, ϱ), kde $M \subset X$.

Definice podprostoru normovaného prostoru bude komplikovanější, protože množina prvků normovaného prostoru tvoří lineární prostor a je přirozené požadovat, aby podmnožina tohoto lineárního prostoru byla v případě podprostoru opět lineárním prostorem. Navíc v případě lineárních či normovaných prostorů a jejich [podprostorů hovoříme o dimenzi. S tímto pojmem začneme výklad této kapitoly.

11.1. Lineární závislost. Prvky $x, y, \dots, w$ lineárního prostoru se nazývají *lineárně závislé*, jestliže existují takové konstanty $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, z nichž aspoň jedna je různá od nuly, že[6]

$$\alpha x + \beta y + \dots + \lambda w = \theta. \tag{11.1}$$

V opačném případě se tyto prvky nazývají *lineárně nezávislé.* Jinak řečeno, prvky $x, y, \dots, w$ jsou lineárně nezávislé, jestliže z rovnosti (11.1) plyne, že

$$\alpha = \beta = \dots = \lambda.$$

Nekonečný systém prvků $x, y, \dots$ prostoru $\mathcal{L}$ se nazývá *lineárně nezávislý*, jestliže prvky každé konečné podmnožiny množiny $\{x, y, \dots\}$ jsou lineárně nezávislé.

Jestliže v prostoru $\mathcal{L}$ lze najít n lineárně nezávislých prvků, ale libovolné $n + 1$ prvky jsou již lineárně závislé, říkáme, že prostor $\mathcal{L}$ má *dimenzi* (*rozměr*) n. Jestliže v prostoru $\mathcal{L}$ lze nalézt nekonečný systém lineárně nezávislých prvků, říkáme, že *prostor $\mathcal{L}$ má nekonečnou dimenzi. Bází v n-rozměrném prostoru $\mathcal{L}$* nazýváme libovolný systém n lineárně nezávislých prvků. Prostory R^n v reálném případě a C^n v komplexním případě mají, jak lze snadno ověřit, dimenzi n.

---

[5] Nebo trochu obšírněji: Každý metrický prostor $\mathcal{X}$ má zúplnění, přičemž toto zúplnění je určeno jednoznačně až na taková izometrická zobrazení, která zobrazují každý bod $x \in \mathcal{X}$ na tento bod $x \in \mathcal{X}$.

[6] Výraz $\alpha x + \beta y + \dots + \lambda w$ nazýváme lineární kombinací prvků $x, y, \dots, w$.

V lineární algebře se vyšetřují lineární prostory konečné dimenze. Zde se však naopak budeme především zabývat prostory nekonečné dimenze, které mají zásadní význam z hlediska matematické analýzy. Ponecháváme čtenáři, aby se ověřil, že každý z prostorů uvedených v příkladech 3.8 až 3.12 má nekonečnou dimenzi (jedná se zde o prostory $C^0\langle a,b\rangle$, $C_0^0\langle a,b\rangle$, l_2, c, c_0 a M^∞).

11.2. Podprostory lineárního prostoru. Neprázdná podmnožina $\mathcal{L}^*$ lineárního prostoru $\mathcal{L}$ se nazývá *podprostor* prostoru $\mathcal{L}$, jestliže sama tvoří lineární prostor vzhledem k operacím sčítání prvků a násobení prvku skalárem, které jsou definovány v prostoru $\mathcal{L}$.

Jinak řečeno, $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$ je podprostor, jestliže

$$x, y \in \mathcal{L}^* \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \mathcal{L}^*$$

pro libovolná čísla α, β.

V každém lineárním prostoru $\mathcal{L}$ existuje podprostor, který se skládá pouze z nulového prvku θ a nazývá se *nulový podprostor*. Také celý prostor $\mathcal{L}$ lze považovat za podprostor prostoru $\mathcal{L}$. Podprostor různý od prostoru $\mathcal{L}$ a obsahující aspoň jeden nenulový prvek se nazývá *vlastní podprostor*.

11.3. Příklady. a) Nechť $\mathcal{L}$ je libovolný lineární prostor a x jeho nenulový prvek. Množina prvků $\{\lambda x\}$, kde λ probíhá všechna čísla (reálná, popř. komplexní), tvoří podprostor o dimenzi 1. Tento podprostor je vlastní, jestliže dimenze prostoru $\mathcal{L}$ je větší než 1.

b) Mějme prostor $C^0\langle a,b\rangle$ a v něm množinu $P\langle a,b\rangle$ všech polynomů jedné proměnné. Zřejmě $P\langle a,b\rangle$ tvoří vlastní podprostor prostoru $C^0\langle a,b\rangle$, a to nekonečné dimenze. Množina $P_{k-1}\langle a,b\rangle$ všech polynomů stupně nanejvýš $k-1$ tvoří k-dimenzionální podprostor prostoru $C^0\langle a,b\rangle$.

c) Uvažujme prostory l_2, c_0, c a M^∞. Každý z těchto prostorů uvažovaný pouze jako lineární prostor je vlastním podprostorem prostoru následujícího.

11.4. Definice. Nechť $\{x_\alpha\}$ je libovolná neprázdná množina prvků lineárního prostoru $\mathcal{L}$. Potom v prostoru $\mathcal{L}$ existuje nejmenší podprostor (který může splývat s prostorem $\mathcal{L}$) obsahující množinu $\{x_\alpha\}$. Dále, *průnik libovolného systému* $\{\mathcal{L}_\gamma\}$ *podprostorů je opět podprostor.*[7] Průnik všech podprostorů obsahujících množinu $\{x_\alpha\}$ nazveme *podprostorem vytvořeným (generovaným) množinou* $\{x_\alpha\}$ nebo *lineárním obalem množiny* $\{x_\alpha\}$. Tento podprostor budeme označovat $L\{x_\alpha\}$. Je to minimální podprostor obsahující množinu $\{x_\alpha\}$.

11.5. Podprostory normovaného prostoru. V normovaném prostoru nás nejvíce zajímají *uzavřené lineární podprostory*, tj. podprostory obsahující všechny svoje hromadné body. V normovaném prostoru, který má konečnou dimenzi, je každý podprostor automaticky uzavřený. V případě prostoru o nekonečné dimenzi tomu tak není. Například v prostoru $C^0\langle a,b\rangle$ všech spojitých funkcí s normou (3.11) tvoří množina $P\langle a,b\rangle$ všech polynomů podprostor, který není uzavřený.[8]

[7] Opravdu, jestliže $\mathcal{L}^* = \bigcap_\gamma \mathcal{L}_\gamma$ a $x, y \in \mathcal{L}^*$, potom také $\alpha x + \beta y \in \mathcal{L}^*$ pro všechna čísla α, β.

[8] Podle Weierstrassovy věty (viz např. [Ja1]), která říká, že každá spojitá funkce na segmentu je limitou stejnoměrně konvergentní posloupnosti polynomů, je uzávěr podprostoru $P\langle a,b\rangle$ roven celému prostoru $C^0\langle a,b\rangle$.

Jiný příklad: Všechny posloupnosti, které obsahují jen konečný počet členů různých od nuly, tvoří podprostor prostoru M^∞. Avšak tento podprostor není uzavřený vzhledem k normě (3.20); do jeho uzávěru patří např. posloupnost $(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$.

Protože v dalším výkladu se budeme zabývat jenom uzavřenými podprostory, je vhodné poněkud změnit terminologii, kterou jsme zavedli v položce 11.2. *Podprostorem normovaného prostoru* budeme nazývat nyní jenom uzavřený podprostor; speciálně *podprostorem vytvořeným daným systémem prvků* $\{x_\alpha\}$ budeme nazývat nejmenší *uzavřený* podprostor obsahující $\{x_\alpha\}$. Takový podprostor budeme nazývat *lineárním uzávěrem systému* $\{x_\alpha\}$. Množinu prvků (nikoliv nutně uzavřenou), která obsahuje zároveň s prvky x a y také jejich libovolnou lineární kombinaci $\alpha x + \beta y$, budeme nazývat *lineární varietou.*

Systém prvků ležící v normovaném prostoru E budeme nazývat *úplným v prostoru* E, jestliže podprostor jím vytvořený je celý prostor E. Například podle Weierstrassovy věty je systém funkcí $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ úplný v prostoru $C^0\langle a, b\rangle$.

12. Spojitá zobrazení. Homeomorfizmus

12.1. Definice. Nechť $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ a $\mathcal{Y} = (Y, \varrho^*)$ jsou dva metrické prostory. Zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ prostoru $\mathcal{X}$ do prostoru $\mathcal{Y}$ se nazývá *spojité v bodě* $x_0 \in X$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze najít takové $\delta > 0$, že

$$\varrho^*(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

pro všechny body x takové, že

$$\varrho(x, x_0) < \delta.$$

Jinými slovy, zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je spojité v bodě x_0, jestliže k libovolnému okolí $O_\varepsilon(f(x_0))$ bodu $f(x_0)$ lze najít takové okolí $O_\delta(x_0)$ bodu x_0, že jeho obraz $f(O_\delta(x_0))$ leží uvnitř $O_\varepsilon(f(x_0))$:

$$f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0)). \tag{12.1}$$

Zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se nazývá *spojité*, jestliže je spojité ve všech bodech prostoru $\mathcal{X}$. $\square$

12.1a. Poznámka. Je-li $\mathcal{Y}$ číselná přímka, potom spojité zobrazení $\mathcal{X}$ do $\mathcal{Y}$ se nazývá *spojitou funkcí* na $\mathcal{X}$.

Stejně jako v případě zobrazení libovolných množin budeme říkat, že $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je zobrazení $\mathcal{X}$ **na** $\mathcal{Y}$, jestliže každý bod $y \in \mathcal{Y}$ má alespoň jeden vzor.

V analýze spolu s definicí spojitosti funkcí „v termínech okolí“ (čili „v $\varepsilon - \delta$ jazyku“) se užívá ekvivalentní definice spojitosti „v jazyku posloupností“. Analogická situace nastává i v případě spojitých zobrazení libovolných metrických prostorů:

12.2. Věta. *Aby zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ bylo spojité v bodě x, je nutné a stačí, aby v případě, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje v $\mathcal{X}$ k bodu x, posloupnost $\{f(x_n)\}$ konvergovala v $\mathcal{Y}$ k bodu $y = f(x)$.*

Důkaz. Jsou dva výroky: (A): $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je spojité v bodě x, (B): $x_n \to x \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(x)$. Máme dokázat: $(A) \;\Leftrightarrow\; (B)$.

a) Dokážeme nejprve dostatečnost této podmínky, tj. dokážeme implikaci $(B) \Rightarrow (A)$. Jestliže zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ není spojité v bodě x, potom existuje takové okolí $O_\varepsilon(y)$ bodu $y = f(x)$, že v libovolném okolí $O_\delta(x)$ se naleznou body, jejichž obrazy neleží v $O_\varepsilon(y)$. Položme $\delta_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ a vyberme v každé kouli $O_{1/n}(x)$ bod x_n tak, že $f(x_n) \notin O_\varepsilon(y)$. Potom posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x (symbolickým zápisem: $x_n \to x$), ale posloupnost $\{f(x_n)\}$ nekonverguje k $f(x)$, tj. podmínka věty není splněna, takže jsme dokázali: non $(A) \Rightarrow$ non (B). Negací této implikace dostáváme $(B) \Rightarrow (A)$, což jsme chtěli dokázat. (Všimněme si, že jsme v důkazu užili axiom výběru.)

b) Nyní dokážeme nutnost této podmínky, tj. implikaci $(A) \Rightarrow (B)$. To znamená, že předpokládáme, že

$$x_n \to x. \tag{12.2}$$

a současně, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon) > 0$ tak, že platí (12.1). Podle (12.2) k $\delta(\varepsilon) > 0$ existuje $N(\delta(\varepsilon))$ tak, že pro $n \geq N(\delta(\varepsilon))$ je

$$x_n \in O_{\delta(\varepsilon)}(x).$$

Tedy

$$f(x_n) \in f(O_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset O_\varepsilon(f(x)). \tag{12.3}$$

Inkluze $\subset$ v (12.3) platí podle (12.1). Ze vztahu (12.3) plyne, že $f(x_n) \to f(x)$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

12.2a. Poznámka. Konverguje-li posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathcal{X}$ k bodu x, znamená to, že $\varrho(x_n, x) \to 0$, a píšeme to také ve tvaru

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{v metrickém prostoru } \mathcal{X}. \tag{12.5}$$

Podobně zápis $\varrho^*(f(x_n), f(x)) \to 0$, který znamená, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje v $\mathcal{Y}$ k bodu $f(x)$, píšeme také ve tvaru

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \text{v metrickém prostoru } \mathcal{Y}. \tag{12.6}$$

Dosadíme-li do (12.6) za x z (12.5), dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n). \tag{12.7}$$

Vztah (12.7) říká: Je-li zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ spojité, potom lze zaměnit znak limitního přechodu a znak zobrazení f.

Pro spojitá zobrazení platí následující věta, která je analogií dobře známé věty z analýzy o spojitosti složené funkce.

12.3. Věta. *Nechť $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ jsou metrické prostory a $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ spojitá zobrazení. Potom zobrazení $z = \varphi(f(x))$ metrického prostoru $\mathcal{X}$ do metrického prostoru $\mathcal{Z}$ je spojité.*

12.4. Definice. a) Zobrazení f se nazývá *homeomorfizmus*, je-li vzájemně jednoznačné[9] a vzájemně spojité (tj. jak zobrazení f, tak k němu inverzní zobrazení f^{-1} jsou spojitá).

b) Metrické prostory $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ se nazývají *homeomorfní*, existuje-li mezi nimi homeomorfní zobrazení.

[9]Nechť A a B jsou dvě množiny. Pravidlo φ, které každému prvku a množiny A přiřazuje jeden a pouze jeden prvek b množiny B, přičemž každý prvek $b \in B$ je přiřazený jednomu a pouze jednomu $a \in A$, se nazývá *vzájemně jednoznačné přiřazení* mezi množinami A a B.

12.5. Příklad. a) Ukažme, že intervaly $X = \langle 0, 1\rangle \subset \mathbb{R}^1$ a $Y = \langle A, B\rangle \subset \mathbb{R}^1$ jsou homeomorfní: Lineární (a tedy spojitá) funkce

$$y = f(x) = (B - A)x + A$$

zobrazuje X na Y ($Y = f(X)$) a k ní inverzní funkce

$$x = f^{-1}(y) = \tfrac{1}{b-A}(y - A)$$

je také lineární (a tedy spojitá) a zobrazuje Y na X ($Y = f(X)$).

b) Ukažme, že interval $X = (-1, 1) \subset \mathbb{R}^1$ je homeomorfní s celou číselnou přímkou $Y = \mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$: Funkce

$$y = f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}, \quad x \in (-1, 1)$$

je spojitá a má obor hodnot $Y = (-\infty, \infty)$. K ní inverzní funkce

$$x = f^{-1}(y) = \tfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} y, \quad y \in (-\infty, \infty)$$

je také spojitá a má obor hodnot $X = (-1, 1)$.

12.6. Příklad. Ukážeme, že izometrické zobrazení (viz Definici 10.3) je speciálním případem homeomorfizmu: Z uvedené definice plyne

$$\varrho(x_n, x) = \varrho^*(f(x_n), f(x)) \quad \forall x_n, x \in X, \tag{12.8}$$

$$\varrho(f^{-1}(y_n), f^{-1}(y)) = \varrho^*(y_n, y) \quad \forall y_n, y \in Y, \tag{12.9}$$

Pokud $x_n \to x$, tak podle (12.8) $f(x_n) \to f(x)$; pokud $y_n \to y$, tak podle (12.9) $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$. Tedy podle Věty 12.2 jsou obě zobrazení spojitá.

Samotné metrické prostory $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$, mezi kterými je možno stanovit izometrické zobrazení, se nazývají *izometrickými* mezi sebou.

Izometrie dvou prostorů $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ značí, že metrické vztahy mezi jejich elementy jsou jedny a tytéž a rozdíl může být pouze v kvalitě jejich elementů, což je z metrického hlediska nepodstatné. Izometrické prostory se proto považují za totožné (v teorii metrických prostorů).

12.7. Příklad. a) Uvažujme normovaný prostor $R^1 = (\mathbb{R}^1, \|x\| = |x|)$ a v něm dva intervaly $S_1 = \langle a, b\rangle$, $S_2 = \langle a + c, b + c\rangle$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}^1$ jsou pevná čísla. Vzájemně jednoznačné a vzájemně spojité zobrazení $f : S_1 \to S_2$ je tvaru $f(x) = x + c$, kde $x \in S_1$. Intervaly $S_1 = \langle a, b\rangle$, $S_2 = \langle a + c, b + c\rangle$ jsou z metrického hlediska nerozlišitelné.

b) Příklad z části a) lze zobecnit takto: Uvažujme normovaný prostor R^n_p a v něm libovolnou množinu M_1. Definujme $M_2 = f(x) = x + x_0$, kde $x \in M_1$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je libovolný pevný bod. Množiny M_1, M_2 jsou izometrické; tzn. z metrického hlediska nerozlišitelné.

13. Banachův princip pevného bodu (BPPB)

Řadu problémů souvisejících s existencí a jednoznačností řešení rovnic různého typu lze převést na otázku existence a jednoznačnosti pevného bodu nějakého zobrazení odpovídajícího metrického prostoru do tohoto prostoru. Mezi různými kritérii existence a jednoznačnosti pevného bodu zobrazení tohoto druhu můžeme za jedno z nejjednodušších a zároveň nejdůležitějších kritérií považovat tzv. *Banachův princip pevného bodu* (stručně BPPB); někdy též nazývaný *princip kontraktivních zobrazení.*

13.1. Definice. Nechť $\mathcal{X}$ je metrický prostor. Zobrazení A prostoru $\mathcal{X}$ do prostoru $\mathcal{X}$ se nazývá *kontraktivní* (nebo *kontrakce*), existuje-li takové číslo $0 < \alpha < 1$, že pro libovolné dva body x, $y \in \mathcal{X}$ platí nerovnost

$$\varrho(Ax, Ay) \leq \alpha\varrho(x, y). \tag{13.1}$$

13.2. Poznámka. Místo $A(x)$, $A(A(x)), \dots$ zde po řadě píšeme $Ax, A^2x, \dots$

13.3. Věta. *Každé kontraktivní zobrazení je spojité.*

Důkaz. Jestliže $x_n \to x$, potom podle (13.1) také platí $Ax_n \to Ax$. Tvrzení Věty 13.3 nyní plyne z Věty 12.2. $\square$

13.4. Definice. Bod x se nazývá *pevný bod zobrazení A*, jestliže $Ax = x$. Jinak řečeno, pevné body jsou řešení rovnice $Ax = x$.

13.5. Věta (BPPB). *Každé kontraktivní zobrazení definované v úplném metrickém prostoru $\mathcal{X}$ má právě jeden pevný bod.*

Důkaz. Nechť $x_0 \in \mathcal{X}$ je libovolný bod. Položme $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$, atd.; obecně nechť $x_n = Ax_{n-1} = A^nx_0$.

1. Ukážeme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská: předpokládáme-li pro určitost, že $m \geq n$, dostaneme podle (13.1)

$$\varrho(x_n, x_m) = \varrho(A^nx_0, A^mx_0) \leq \alpha^n\varrho(x_0, A^{m-n}x_0) = \alpha^n\varrho(x_0, x_{m-n}) \leq$$
$$\leq \alpha^n[\varrho(x_0, x_1) + \varrho(x_1, x_2) + \dots + \varrho(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \leq$$
$$\leq \alpha^n\varrho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}) = \alpha^n\varrho(x_0, x_1)\frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \leq \alpha^n\varrho(x_0, x_1)\frac{1}{1 - \alpha}\,.$$

Protože $\alpha < 1$, je pro dostatečně velká přirozená čísla n tento výraz libovolně malý. Tedy posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská.

2. Vzhledem k úplnosti prostoru $\mathcal{X}$ posloupnost $\{x_n\}$, která je cauchyovská, má v tomto prostoru limitu. Položme

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{v } \mathcal{X}, \text{tj.} \ \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0.$$

Potom vzhledem k Větám 13.3 a 12.2 platí

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x\,.$$

Existence pevného bodu je tedy dokázána. Dokážeme ještě jeho *jednoznačnost*: jestliže

$$Ax = x, \quad Ay = y,$$

potom z nerovnosti (13.1) plyne nerovnost

$$\varrho(x, y) \leq \alpha\varrho(x, y),$$

odkud vzhledem k tomu, že $\alpha < 1$, plyne $\varrho(x, y) = 0$, tj. $x = y$. $\square$

14. Některé aplikace BPPB

BPPB lze použít k důkazu vět o existenci a jednoznačnosti řešení pro rovnice různých typů. Kromě důkazu existence a jednoznačnosti řešení rovnice $Ax = x$ dává BPPB také praktickou metodu přibližného výpočtu tohoto řešení (nazývanou *metoda postupných aproximací*).

14A. Nejjednodušší aplikace BPPB

14.1. Příklad. Nechť funkce f, která je definována na segmentu $\langle a, b\rangle$, splňuje na tomto segmentu Lipschitzovu podmínku

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le K|x_2 - x_1|$$

s konstantou $K < 1$ a zobrazuje segment $\langle a, b\rangle$ do segmentu $\langle a, b\rangle$. Potom f je kontraktivní zobrazení a podle věty 13.5 posloupnost

$$x_0,\, x_1 = f(x_0),\, x_2 = f(x_1), \dots,\, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

konverguje k jedinému kořenu rovnice $x = f(x)$.

14.2. Příklad. Nechť A je zobrazení n-rozměrného prostoru do tohoto prostoru definované soustavou lineárních rovnic

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Je-li A kontraktivní zobrazení, můžeme k řešení rovnice $x = Ax$ použít metodu postupných aproximací.

Za jakých podmínek bude zobrazení A kontraktivní? Odpověď na tuto otázku závisí na volbě metriky v prostoru. Uvedeme tři varianty:

a) V prostoru R_0^n, kde

$$\varrho(x, y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|\,,$$

platí

$$\varrho(y', y'') = \max_{1\le i\le n} |y_i' - y_i''| = \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_j'') \right| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j' - x_j''| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1\le j\le n} |x_j' - x_j''| = \left(\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \varrho(x', x'')\,.$$

Odtud plyne tato podmínka kontraktivnosti:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \le \alpha < 1 \quad (i = 1, \dots, n). \tag{14.1}$$

b) V prostoru R_1^n, kde

$$\varrho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

platí

$$\varrho(y',y'') = \sum_{i=1}^{n} |y'_i - y''_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x'_j - x''_j) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x'_j - x''_j| \le \left(\max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \varrho(x',x'') \,.$$

Odtud plyne podmínka kontraktivnosti:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \le \alpha < 1 \quad (j = 1, \dots, n). \tag{14.2}$$

c) V prostoru R^n, kde

$$\varrho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,,$$

platí na základě Cauchy-Buňakovského nerovnosti

$$\varrho^2(y',y'') = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x'_j - x''_j) \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \varrho^2(x',x'') \,.$$

Odtud plyne tato podmínka kontraktivnosti:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \le \alpha < 1 \,. \tag{14.3}$$

Je-li tedy splněna alespoň jedna z podmínek (14.1) – (14.3),[10] existuje právě jeden takový bod $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, že

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \,,$$

[10] Z kterékoli z podmínek (14.1) – (14.3) speciálně plyne, že

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} \ne 0 \,.$$

přičemž postupné aproximace konvergující k tomuto řešení mají tvar

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}),$$

kde

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i$$

a za $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ lze vzít libovolný bod prostoru R^n.

Každá z podmínek (14.1) – (14.3) *stačí* k tomu, aby zobrazení $y = Ax$ bylo kontraktivní. Pokud jde o podmínku (14.1), lze dokázat, že je také nutnou podmínkou pro kontraktivnost zobrazení $y = Ax$ z prostoru R_0^n do prostoru R_0^n.

14B. Věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic

Pro analýzu jsou důležité aplikace BPPB v jiných prostorech než n-rozměrných. S jeho pomocí lze snadno dokázat věty o existenci a jednoznačnosti pro některé typy diferenciálních rovnic a integrálních rovnic.

a) Počáteční (Cauchyova) úloha pro diferenciální rovnici y'=f(x,y)

14.3. Věta (Picard). *Mějme diferenciální rovnici*

$$y' = f(x, y) \tag{14.4}$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0, \tag{14.5}$$

přičemž funkce f je definovaná a spojitá v nějaké rovinné oblasti G,[11] *která obsahuje bod $[x_0, y_0]$ a splňuje v této oblasti Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné y:*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \,.$$

Potom v nějakém intervalu $|x - x_0| \le d$ existuje právě jedno řešení $y = \varphi(x)$ rovnice (14.4)*, které splňuje počáteční podmínku* (14.5)*.*

Důkaz. Rovnice (14.4) se v tomto důkazu přepíše na tvar

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \tag{14.6}$$

zintegruje se v intervalu $\langle x_0, x \rangle$ a užije se počáteční podmínka (14.5) napsaná pro funkci φ, tj. $\varphi(x_0) = y_0$. Dostaneme integrální rovnici

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, \mathrm{d}t. \tag{14.7}$$

[11] *Oblast v metrickém prostoru $\mathcal{X}$* znamená otevřenou souvislou množinu v tomto prostoru. *Rovinnou oblastí* rozumíme oblast v prostoru R^2.

Užijeme-li větu o derivaci integrálu jako funkce horní meze, dostaneme z (14.7) rovnici (14.6); položíme-li v (14.7) $x = x_0$, dostaneme $\varphi(x_0) = y_0$. Tedy integrální rovnice (14.7) je ekvivalentní s počátečním problémem (14.4), (14.5).

Nechť G^* je taková ohraničená oblast obsahující bod $[x_0, y_0]$, že $\overline{G^*} \subset G$. Vzhledem k spojitosti funkce f existuje taková konstanta K, že platí $|f(x,y)| \le K$ pro všechny body $[x,y] \in G^*$. Zvolme nyní takové číslo $d > 0$, aby platily tyto podmínky:

1. Jestliže $|x - x_0| \le d$, $|y - y_0| \le Kd$, potom $[x,y] \in G^*$.
2. $Ld < 1$.

Označme symbolem C^* metrický prostor spojitých funkcí $\psi(x)$ definovaných v intervalu $|x - x_0| \le d$ (tj. intervalu $\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$ a takových, že $|\psi(x) - y_0| \le Kd$, s metrikou

$$\varrho(\psi_1, \psi_2) = \max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \,.$$

Platí $C^* \subset C^0\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$. Nechť posloupnost $\{\psi_n\} \subset C^*$ je konvergentní v $C^0\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$, tj. existuje funkce $\psi \in C^0\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$ tak, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové $N(\varepsilon)$, že

$$\max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\psi_n(x) - \psi(x)| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Protože $\{\psi_n\} \subset C^*$, pro každou funkci ψ_n platí, že

$$|\psi_n(x) - d| \le Kd \quad \forall x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle.$$

Tedy

$$\max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\psi(x) - d| \le \max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\psi_n(x) - \psi(x)| + \\ + \max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\psi_n(x) - d| < \varepsilon + Kd \,.$$

Vzhledem k libovolnosti $\varepsilon > 0$ odtud plyne

$$\max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d\rangle} |\psi(x) - d| \le Kd \,,$$

což znamená, že $\psi(x) \in C^*$. Protože prostor $C^0\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$ je úplný, získaný výsledek znamená, že C^* je úplný metrický prostor.[12]

Nechť $\psi = A\varphi$ je zobrazení definované vztahem

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, \mathrm{d}t \,,$$

[12]Nechť $\mathcal{X}$ je libovolný metrický prostor. Říkáme, že množina $M \subset \mathcal{X}$ je *uzavřená*, jestliže limita x každé posloupnosti $\{x_n\} \subset M$, která je konvergentní v $\mathcal{X}$, náleží do M, tj. $x \in M$. Z této definice plyne, že každý metrický prostor je uzavřený a že každá uzavřená podmnožina úplného metrického prostoru tvoří úplný metrický prostor. (To jsme také dokázali v případě prostoru C^*: ukázali jsme, že C^* je uzavřená podmnožina úplného metrického prostoru $C^0\langle x_0 - d, x_0 + d\rangle$, takže C^* je úplný metrický prostor.)

kde $|x-x_0| \leq d$. Dokážeme, že toto zobrazení převádí úplný prostor C^* do prostoru C^* a je v něm kontraktivní: Nechť $\varphi \in C^*$, $|x-x_0| \leq d$. Potom

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t \right| \leq Kd,$$

a tedy $\psi = A\varphi \in C^*$. Kromě toho je

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))|\,\mathrm{d}t \leq$$

$$\leq Ld \max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d \rangle} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = Ld\varrho(\varphi_1, \varphi_2)\,,$$

a tedy platí

$$\varrho(\psi_1, \psi_2) = \max_{x \in \langle x_0 - d, x_0 + d \rangle} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq Ld\varrho(\varphi_1, \varphi_2)\,.$$

Protože $Ld < 1$, plyne odtud, že zobrazení A je kontraktivní.

Tedy jsou splněny obě podmínky BPPB. Podle tohoto principu má rovnice $\varphi = A\varphi$, tj. rovnice (14.7), právě jedno řešení v prostoru C^*. $\square$

Porovnejte zde uvedený důkaz Picardovy věty s důkazem provedeným v [ČŽ] a všimněte si, o co kratší a pružnější je důkaz užívající BPPB.

Stejně jako v [ČŽ] postupné aproximace $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ konvergující k přesnému řešení počátečního problému (14.4), (14.5) mají tvar

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

kde např. $\varphi_0 = y_0$.

b) Cauchyova úloha pro soustavu diferenciálních rovnic

Podobně jako v části se dokáže věta o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{14.8}$$

s počátečními podmínkami

$$\varphi_i(x_0) = y_{0i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{14.9}$$

přičemž funkce f_i jsou definované a spojité v nějaké oblasti G prostoru R^{n+1}, obsahující bod $[x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n}]$, a splňují v této oblasti Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnným $y_1, \ldots, y_n$:

$$|f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)})| \leq L \max_{1 \leq j \leq n} |y_j^{(1)} - y_j^{(2)}|\,.$$

Dokazuje se (viz [Že1, str. 140 – 141], že za těchto podmínek existuje v nějakém intervalu $|x - x_0| \leq d$ právě jedno řešení počátečního problému (14.8), (14.9), tj. právě jeden systém funkcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, který splňuje rovnice (14.8) a počáteční podmínky (14.9).

Postupné aproximace $\varphi_{0i}, \varphi_{1i}, \ldots, \varphi_{mi}, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ konvergující k přesnému řešení počátečního problému (14.8), (14.9) mají tvar

$$\varphi_{mi} = \varphi_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_{m-1,1}(t), \ldots, \varphi_{m-1,n}(t))\,\mathrm{d}t \quad (i = 1, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots),$$

kde např. $\varphi_{0j} = y_{0j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

14C. Použití BPPB pro integrální rovnice

a) Fredholmova rovnice. Použijeme nyní BPPB k důkazu existence a jednoznačnosti řešení *Fredholmovy lineární integrální rovnice druhého druhu*, tj. rovnice

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y + \varphi(x)\,, \tag{14.11}$$

kde K (tzv. *jádro*) a φ jsou dané funkce, f je hledaná funkce a λ je libovolný reálný parametr. Uvidíme, že BPPB lze použít při dostatečně malých hodnotách parametru λ.

Předpokládejme, že K je spojitá funkce ve čtverci $\langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle$, a tedy ohraničená, tj.

$$|K(x, y)| \leq M \quad \forall [x, y] \in \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle,$$

a že φ je spojitá funkce na segmentu $\langle a, b\rangle$. Nechť $g = Af$ je zobrazení úplného prostoru $C^0\langle a, b\rangle$ do prostoru $C^0\langle a, b\rangle$ definované vztahem

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y + \varphi(x)\,.$$

Platí

$$\varrho(g_1, g_2) = \max_{x \in \langle a, b\rangle} |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| M (b - a) \max_{x \in \langle a, b\rangle} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Pro $|\lambda| < [M(b - a)]^{-1}$ je tedy zobrazení A kontraktivní.

Na základě BPPB docházíme k závěru, že pro každou hodnotu parametru λ, pro kterou platí $|\lambda| < [M(b - a)]^{-1}$, má Fredholmova rovnice (14.11) právě jedno řešení, které je spojité. Postupné aproximace $f_0, f_1, f_2, \ldots$ konvergující k tomuto řešení mají tvar

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y + \varphi(x)\,,$$

kde za $f_0(x)$ lze vzít libovolnou spojitou funkci.

b) Nelineární integrální rovnice. BPPB lze také použít pro *nelineární integrální rovnici* tvaru

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y))\,\mathrm{d}y + \varphi(x)\,, \tag{14.12}$$

kde funkce φ je spojitá na segmentu $\langle a, b\rangle$, jádro K v množině $\langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle \times (-\infty, +\infty)$ a kromě toho splňuje v této množině Lipschitzovu podmínku vzhledem k svému „funkcionálnímu“ argumentu:

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \le L|z_1 - z_2|.$$

V tomto případě pro zobrazení $g = Af$ úplného prostoru $C^0\langle a, b\rangle$ do prostoru $C^0\langle a, b\rangle$, které je definováno vztahem

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y))\,\mathrm{d}y + \varphi(x)\,, \tag{14.13}$$

platí nerovnost

$$\max_{x\in\langle a,b\rangle} |g_1(x) - g_2(x)| \le |\lambda|L(b-a) \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f_1(x) - f_2(x)|,$$

kde $g_1 = Af_1$, $g_2 = Af_2$. Pro $|\lambda| < [L(b-a)]^{-1}$ je tedy zobrazení A kontraktivní.

c) Volterrova integrální rovnice. Mějme konečně *integrální rovnici Volterrova typu*

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y + \varphi(x)\,, \tag{14.14}$$

kde φ je spojitá funkce na segmentu $\langle a, b\rangle$ a jádro K je spojité na čtverci $\langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle$. Na rozdíl od Fredholmovy rovnice je zde integrál funkcí horní meze x. Tuto rovnici lze formálně považovat za zvláštní případ Fredholmovy rovnice, definujeme-li pro $y > x$ jádro K rovností

$$K(x, y) = 0.$$

Zatímco u Fredholmovy integrální rovnice jsme se museli omezit na malé hodnoty parametru λ, můžeme u Volterrových rovnic použít BPPB a metody postupných aproximací pro *všechny* hodnoty parametru λ. Přesněji řečeno, jde o *toto zobecnění BPPB*:

14.5. Věta. *Nechť A je takové spojité zobrazení úplného metrického prostoru $\mathcal{X}$ do prostoru $\mathcal{X}$, že některá jeho mocnina $B = A^n$ je kontraktivní; potom rovnice*

$$Ax = x \tag{14.15}$$

má právě jedno řešení.

Důkaz. Nechť x je pevný bod zobrazení B, tj. $Bx = x$, a označme $Ax = x_0$. Platí

$$Ax = ABx = \cdots = AB^k x = A\underbrace{A\ldots A}_{kn}x = B^k Ax = B^k x_0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Vzhledem ke kontraktivnosti zobrazení B konverguje posloupnost $\{B^k x_0\}_{k=1}^{\infty}$ pro libovolné $x_0 \in \mathcal{X}$ k pevnému bodu x zobrazení B. Platí tedy (14.15).

Jednoznačnost pevného bodu v (14.15) plyne z toho, že každý bod, který je pevným bodem zobrazení A, je také pevným bodem zobrazení A^n, a to může mít pouze jeden pevný bod. $\square$

Ukážeme nyní, že některá mocnina zobrazení

$$Af(x) = \lambda \int_a^x K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y + \varphi(x)$$

je kontraktivním zobrazením. Nechť $f_1,\ f_2 \in C^0\langle a,b\rangle$. Potom

$$|Af_1(x) - Af_2(x)| = |\lambda| \cdot \left| \int_a^x K(x,y)[f_1(y) - f_2(y)] \,\mathrm{d}y \right| \leq$$

$$\leq |\lambda| M (x-a) \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f_1(x) - f_2(x)|,$$

kde je

$$M = \max_{x,y \in \langle a,b\rangle} |K(x,y)|.$$

Odtud

$$|A^2 f_1(x) - A^2 f_2(x)| = |\lambda| \cdot \left| \int_a^x K(x,y)[Af_1(y) - Af_2(y)] \,\mathrm{d}y \right| \leq$$

$$\leq |\lambda|^2 M^2 \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f_1(x) - f_2(x)| \int_a^x (y-a) \,\mathrm{d}y =$$

$$= |\lambda|^2 M^2 \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f_1(x) - f_2(x)| \frac{(x-a)^2}{2}$$

a obecně

$$|A^n f_1(x) - A^n f_2(x)| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} m \leq |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} m,$$

kde $m = \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f_1(x) - f_2(x)|$.

Pro každou hodnotu parametru λ lze zřejmě zvolit číslo n tak velké, aby platila nerovnost

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1\,.$$

Potom bude zobrazení A^n kontraktivní. Volterrova rovnice (14.14) má tedy pro libovolnou hodnotu parametru λ jediné řešení.

15. Kompaktní množiny v metrických prostorech

15.1. Definice. Množina M v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\} \subset M$ je možno vybrat podposloupnost, která konverguje k některému bodu $x \in \mathcal{X}$.[13]

Například, podle Bolzano-Weierstrassovy věty každá ohraničená množina na číselné přímce je kompaktní. Je zřejmé, že libovolná podmnožina kompaktní množiny je také kompaktní.

S pojmem kompaktnosti je těsně spojen pojem totální ohraničenosti, který nyní zavedeme.

15.2. Definice. Nechť M je nějaká množina v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ a $\varepsilon > 0$ nějaké číslo. Množinu $A \subset \mathcal{X}$ nazýváme *ε-sítí množiny M*, jestliže ke každému bodu $x \in M$ lze najít alespoň jeden takový bod $a \in A$, že

$$\varrho(x, a) \le \varepsilon.$$

(Množina A nemusí být nutně podmnožinou množiny M, ba dokonce nemusí mít s množinou M ani jeden společný bod; existuje-li však nějaká ε-síť množiny M, je možno sestrojit 2ε-síť $B \subset M$.)

Například body v rovině s celočíselnými souřadnicemi tvoří $(\sqrt{2}/2)$-síť.

15.3. Definice. Množina M se nazývá *totálně ohraničená*, jestliže k *libovolnému* číslu $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť této množiny.

Zřejmě totálně ohraničená množina musí nutně být ohraničená,[14] protože jestliže se pro M nalezne ε-síť, která sestává z n bodů, potom průměr množiny M není větší než $(n+1)\varepsilon$. Ohraničená množina však nemusí být totálně ohraničená, jak plyne z příkladu 15.6.

Někdy bývá užitečná tato zřejmá skutečnost: *Je-li množina M totálně ohraničená, potom její uzávěr $\overline{M}$ je také totálně ohraničený.*

15.4. Věta. *Je-li metrický prostor $\mathcal{X}$ totálně ohraničený, potom je separabilní.*

Důkaz. Sestrojme v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ k libovolnému přirozenému číslu n konečnou $(1/n)$-síť A_n. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je spočetná množina, která je hustá v $\mathcal{X}$. $\square$

15.5. Příklad. V n-rozměrném euklidovském prostoru *splývá totální ohraničenost s ohraničeností.* Jestliže totiž můžeme sestrojit takovou dostatečně velkou krychli,[15] že daná množina je částí této krychle, a jestliže takovou krychli rozložíme na krychličky s hranou délky ε, potom vrcholy těchto krychliček budou tvořit konečnou $(\sqrt{n}/2)\varepsilon$-síť v původní krychli, a tedy tím spíše v libovolné množině ležící uvnitř této krychle.

[13]Někteří autoři v definici kompaktnosti požadují $x \in M$. V takovém případě dále definují: Množina $M \subset \mathcal{X}$ se nazývá *prekompaktní*, je-li její uzávěr $\overline{M}$ kompaktní.

[14]Podmnožina M metrického prostoru $\mathcal{X}$ se nazývá *ohraničená*, jestliže její průměr je konečný.

[15]Přesněji *nadkrychli.*

15.6. Příklad. Jednotková kulová plocha S v prostoru l_2 je příkladem ohraničené, ale nikoliv totálně ohraničené množiny.[16] Na ploše S uvažujme body tvaru

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$e_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Vzdálenost mezi libovolnými dvěma takovými body e_n a e_m ($n \neq m$) se rovná $\sqrt{2}$. Na základě tohoto faktu nyní dokážeme, že na ploše S neexistuje konečná ε-síť pro žádné číslo $\varepsilon < \sqrt{2}/2$.

Skutečně, je

$$\varrho(e_i, e_k) = \sqrt{2} \quad (i \neq k). \tag{15.1}$$

Zvolme bod b tak, že

$$\varrho(e_i, b) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \eta \quad (0 < \eta < \tfrac{\sqrt{2}}{2}). \tag{15.2}$$

Bod e_i nechť je pevný, bod e_k libovolný. Podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho(e_i, e_k) \leq \varrho(e_i, b) + \varrho(e_k, b),$$

čili vzhledem k (15.1)

$$\sqrt{2} \leq \varrho(e_i, b) + \varrho(e_k, b). \tag{15.3}$$

Do (15.3) dosaďme (15.2):

$$\sqrt{2} \leq \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \eta + \varrho(e_k, b).$$

Odtud

$$\varrho(e_k, b) \geq \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \eta \quad \forall k \neq i,$$

což jsme potřebovali dokázat. $\square$

Následující věta uvádí do souvislosti pojmy kompaktnost, úplnost a totální ohraničenost.

[16] *Jednotková kulová plocha v prostoru l_2* je množina všech takových bodů $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1$.

15.7. Věta. *Aby množina M, která leží v metrickém prostoru $\mathcal{X}$, byla kompaktní, je nutné a je-li $\mathcal{X}$ úplný, pak také stačí, aby byla totálně ohraničená.*

Důkaz. Nutnost. Předpokládejme, že množina M není totálně ohraničená, tj. předpokládejme, že pro některé $\varepsilon_0 > 0$ neexistuje v prostoru $\mathcal{X}$ konečná ε_0-síť množiny M. Zvolme libovolně bod $x_1 \in M$. V množině M lze najít alespoň jeden takový bod (označme jej x_2), že $\varrho(x_1, x_2) > \varepsilon_0$ (jinak by bod x_1 byl ε_0-sítí množiny M). Dále lze zřejmě v množině M najít takový bod x_3, že

$$\varrho(x_1, x_3) > \varepsilon_0, \quad \varrho(x_2, x_3) > \varepsilon_0,$$

protože jinak by dvojice bodů x_1, x_2 byla ε_0-sítí v M. Jsou-li body $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nalezeny v M tak, že splňují

$$\varrho(x_i, x_j) > \varepsilon_0 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, k),$$

potom nalezneme takový bod $x_{k+1} \in M$, že

$$\varrho(x_i, x_{k+1}) > \varepsilon_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Tato konstrukce vede k sestrojení nekonečné posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, která nemá žádný hromadný bod, protože $\varrho(x_i, x_j) > \varepsilon_0$ pro $i \neq j$. Potom však množina M není kompaktní, což jsme měli dokázat.

Dostatečnost. Nechť prostor $\mathcal{X}$ je úplný a množina $M \subset \mathcal{X}$ totálně ohraničená. Dokážeme, že z každé posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ lze vybrat konvergentní podposloupnost. Položme

$$\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = \tfrac{1}{2},\ \ldots\ , \varepsilon_k = \tfrac{1}{k},\ \ldots$$

a sestrojme v M pro každé ε_k odpovídající ε_k-síť:

$$a_1^{(k)},\ a_2^{(k)},\ \ldots,\ a_{N_k}^{(k)}.$$

Opišme kolem každého z bodů, které tvoří 1-síť množiny M, kouli poloměru 1. Protože tyto koule pokrývají celou množinu M a jejich počet je konečný, potom alespoň jedna z nich (nazvěme ji S_1) obsahuje nějakou nekonečnou podposloupnost $\{x_n^{(1)}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$. Dále, okolo každého z bodů, které tvoří $\frac{1}{2}$-síť množiny M, opišme kouli poloměru $\frac{1}{2}$. Protože počet těchto koulí je opět konečný, potom alespoň jedna z nich (nazvěme ji S_2) obsahuje nekonečnou podposloupnost $\{x_n^{(2)}\}$ posloupnosti $\{x_n^{(1)}\}$. Dále nalezneme kouli S_3 poloměru $\frac{1}{3}$, která obsahuje nekonečnou podposloupnost $\{x_n^{(3)}\}$ posloupnosti $\{x_n^{(2)}\}$, atd.

Vyberme nyní z posloupností

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots,$$
$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

„diagonální" podposloupnost

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots;$$

tato podposloupnost je cauchyovská, protože všechny její členy, počínaje od $x_n^{(n)}$, leží uvnitř koule S_n poloměru $\frac{1}{n}$. Protože prostor $\mathcal{X}$ je úplný, má tato podposloupnost limitu $x \in \mathcal{X}$. $\square$

Často bývá vhodné následující zobecnění věty 15.7:

15.8. Věta. *Aby množina M, která leží v metrickém prostoru $\mathcal{X}$, byla kompaktní, je nutné a je-li $\mathcal{X}$ úplný, pak také stačí, aby pro každé $\varepsilon > 0$ existovala v $\mathcal{X}$ kompaktní ε-síť množiny M.*

Důkaz. Nutnost podmínky je zřejmá, dokážeme její dostatečnost. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno a nechť A je kompaktní $\frac{\varepsilon}{2}$-síť množiny M. Vyberme v A konečnou $\frac{\varepsilon}{2}$-síť množiny A. Je zřejmé, že tato síť bude tvořit konečnou ε-síť množiny M; odtud plyne podle věty 15.7, že množina M je kompaktní.

16. Arzelova věta a její aplikace

Použití vět 15.7 a 15.8, které dávají nutné a postačující podmínky kompaktnosti, není v různých dílčích případech vždy jednoduché. Pro množiny ležící v tom či jiném speciálním metrickém prostoru bývají formulovány speciální kritéria kompaktnosti, které jsou mnohem vhodnější pro praktické užití.

V analýze jedním z nejdůležitějších metrických prostorů je prostor $C^0\langle a, b\rangle$. Pro množiny tohoto prostoru nejdůležitějším a nejčastěji užívaným kritériem kompaktnosti je tzv. *Arzelova věta.* Abychom ji mohli vyslovit, potřebuje nejprve zavést dva pojmy:

16.1. Definice. a) Nechť Φ je množina funkcí φ, které jsou definovány na segmentu $\langle a, b\rangle$. Jestliže existuje takové číslo K, že pro všechny funkce $\varphi \in \Phi$ platí

$$|\varphi(x)| < K$$

pro všechna čísla $x \in \langle a, b\rangle$, potom řekneme, že funkce z množiny Φ jsou *stejnoměrně ohraničené.*[17]

b) Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna čísla $x_1 \in \langle a, b\rangle$, $x_2 \in \langle a, b\rangle$ ($\varrho(x_1, x_2) < \delta$) a pro všechny funkce $\varphi \in \Phi$ platí

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon,$$

potom řekneme, že funkce z množiny Φ jsou *rovnomocně spojité.*[18]

16.2. Věta (Arzelova věta). *Aby množina $\Phi \subset C^0\langle a, b\rangle$ byla kompaktní*[19] *v prostoru $C^0\langle a, b\rangle$, je nutné a stačí, aby funkce z množiny Φ byly stejnoměrně ohraničené a rovnomocně spojité.*

Důkaz. Nutnost. Nechť množina Φ je kompaktní v prostoru $C^0\langle a, b\rangle$. Potom podle věty 15.7 ke každému kladnému ε existuje konečná $\frac{1}{3}\varepsilon$-síť $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\} \subset \Phi$ množiny Φ. Každá z funkcí φ_i je jakožto funkce spojitá na segmentu $\langle a, b\rangle$ *ohraničená:*

$$|\varphi_i(x)| \le K_i \quad \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Položme $K = \max_i K_i + \frac{1}{3}\varepsilon$. Podle definice $\frac{1}{3}\varepsilon$-sítě pro každou funkci $\varphi \in \Phi$ platí, že existuje alespoň jedna funkce φ_i tak, že

$$\varrho(\varphi, \varphi_i) = \max_{x \in \langle a,b\rangle} |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \le \tfrac{\varepsilon}{3}\,.$$

[17] Někdy se též říká *stejně ohraničené.*
[18] Někdy se též říká *stejně spojité.*
[19] V jiné terminologii *prekompaktní.*

Je tedy
$$|\varphi(x)| \le |\varphi_i(x)| + \tfrac{\varepsilon}{3} \le K_i + \tfrac{\varepsilon}{3} \le K.$$
Proto jsou funkce z množiny Φ stejnoměrně ohraničené.

Protože dále každá z funkcí φ_i, které tvoří $\frac{1}{3}\varepsilon$-síť, je spojitá, a tedy stejnoměrně spojitá na segmentu $\langle a,b\rangle$, existuje ke každému číslu $\frac{1}{3}\varepsilon$ takové číslo $\delta_i > 0$, že
$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad \text{jestliže } |x_1 - x_2| < \delta_i\,.$$
Položme $\delta = \min\limits_i \delta_i$. K libovolné funkci $\varphi \in \Phi$ najděme takovou funkci φ_i, že $\varrho(\varphi,\varphi_i) < \frac{1}{3}\varepsilon$; potom pro $|x_1 - x_2| < \delta$ platí
$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$
Stejnoměrná spojitost funkcí z množiny Φ je tím dokázána.

Postačitelnost. Nechť funkce z množiny Φ jsou stejnoměrně ohraničené a rovnomocně spojité. K tomu, abychom dokázali kompaktnost množiny Φ v prostoru $C^0\langle a,b\rangle$, stačí podle věty 15.7 dokázat, že pro libovolné číslo $\varepsilon > 0$ existuje v prostoru $C^0\langle a,b\rangle$ konečná ε-síť množiny Φ. Nechť
$$|\varphi(x)| \le K \quad \forall x \in \langle a,b\rangle$$
pro všechny funkce $\varphi \in \Phi$ a nechť číslo $\delta > 0$ je zvoleno tak, že
$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \tfrac{1}{5}\varepsilon, \quad \text{jestliže } |x_1 - x_2| < \delta$$
pro všechny funkce $\varphi \in \Phi$.

Interval $\langle a,b\rangle$ na ose x rozdělíme body $x_0, x_1, \dots, x_n$, pro něž platí $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, na intervaly délky menší než δ a těmito body vedeme kolmice k ose x. Interval $\langle -K, K\rangle$ na ose y rozdělíme body $y_0, y_1, \dots, y_m$, pro něž platí $-K = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = K$, na intervaly délky menší než $\frac{1}{5}\varepsilon$ a dělicími body vedeme kolmice k ose y. Takto jsme rozdělili obdélník $\langle a,b\rangle \times \langle -K,K\rangle$ v obdélníky s vodorovnou stranou menší než δ a svislou stranou menší než $\frac{1}{5}\varepsilon$. Nyní každé funkci $\varphi \in \Phi$ přiřadíme lomenou čáru $\psi(x)$, která má vrcholy ve vhodných uzlech $[x_k, y_l]$ sestrojené sítě tak, aby v bodech x_k se funkce $\psi(x)$ lišila od funkce $\varphi(x)$ o méně než $\frac{1}{5}\varepsilon$ (zřejmě taková lomená čára existuje).

Protože podle konstrukce
$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \tfrac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \tfrac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \tfrac{\varepsilon}{5},$$
platí
$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \tfrac{3}{5}\varepsilon.$$
Protože mezi body x_k a x_{k+1} je funkce $\psi(x)$ lineární, je
$$|\psi(x_k) - \psi(x)| < \tfrac{3}{5}\varepsilon \quad \forall x \in \langle x_k, x_{k+1}\rangle.$$
Nechť nyní x je libovolný bod segmentu $\langle a,b\rangle$ a x_k je ten ze zvolených dělicích bodů, který je k bodu x nejblíže zleva. Potom
$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| \le \varepsilon.$$
Tedy lomené čáry $\psi(x)$ tvoří ε-síť množiny Φ. Jejich počet je zřejmě konečný, takže množina Φ je totálně ohraničená. $\square$

Abychom se vyhnuli pojmu kompaktnosti, formulovali jsme v [Že1] právě dokázanou Arzelovu větu v této formě: *Z každé posloupnosti stejnoměrně ohraničených a rovnomocně spojitých funkcí na segmentu $\langle a,b\rangle$ lze vybrat posloupnost funkcí, která stejnoměrně konverguje na segmentu $\langle a,b\rangle$.*

S pomocí této věty je v [Že1, str.47-48] dokázána tato existenční věta pro počáteční problém diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$:

16.3. Věta (Peano). *Mějme diferenciální rovnici*

$$y' = f(x, y)\,.$$

Je-li funkce $f(x,y)$ spojitá v nějaké uzavřené oblasti $\overline{G}$, potom každým vnitřním bodem $[x_0, y_0] \in G$ této oblasti prochází alespoň jedna integrální křivka této rovnice.

16.4. Poznámka. Protože na rozdíl od Picardovy věty ve větě 16.3 nepředpokládáme, že funkce $f(x,y)$ splňuje Lipschitzovu podmínku, nemáme zaručenu jednoznačnost řešení; zaručena je pouze jeho existence.

17. Normované prostory konečné dimenze

17.1. Tvrzení. *Lineární prostor $X(n)$ dimenze n je izomorfní*[20] *s množinou vektorů n-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, a proto můžeme považovat prvky uvažovaného prostoru $X(n)$ za n-tice čísel.*

Důkaz. Nechť $e_1, e_2, \dots, e_n$ je nějaká báze prostoru $X(n)$. Jak známo, každý prvek $x \in X(n)$ může být jednoznačně vyjádřen ve tvaru

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n\,.$$

Přiřadíme-li prvku x vektor $\overline{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, stanovíme tím vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi $X(n)$ a $\mathbb{R}^n$, která je lineárním izomorfizmem, protože platí

$$x \leftrightarrow \overline{x},\ y \leftrightarrow \overline{y} \quad \Rightarrow \quad \alpha x + \beta y \leftrightarrow \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}\,.$$

Proto můžeme považovat $X(n)$ za vektorový prostor. $\square$

Následující věta je zobecněním Bolzano-Weierstrassovy věty, podle které každá ohraničená množina v $\mathbb{R}^1$ je kompaktní. Důkaz lze nalézt např. v [Že1, str. 169 – 170].

17.2. Věta. *Aby množina E n-rozměrného normovaného prostoru $X(n)$ byla kompaktní, je nutné a stačí, aby byla ohraničená.*

Věta 17.1 má jednoduchý důsledek, který je pro teorii n-rozměrných normovaných prostorů zásadní. Formulujeme jej ve Větě 17.3.

17.3. *Každý normovaný prostor konečné dimenze je úplný.*

Důkaz. Nechť $\{x_\nu\} \subset X(n)$ je cauchyovská posloupnost. Dokážeme, že je ohraničená: Zvolme $\varepsilon = 1$. Potom existuje $N = N(1)$ tak, že $\|x_\nu - x_\mu\| < 1$ pro $\mu, \nu > N$. Platí

$$\|x_k\| \le K, \quad k = 1, \dots, N \quad (K = \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_{N+1}\|\}),$$

$$\|x_j\| = \|x_j + x_{N+1} - x_{N+1}\| \le \|x_{N+1}\| + \|x_j - x_{N+1}\| \le K + 1 \quad (j = N+1, N+2, \dots),$$

čímž je ohraničenost $\{x_\nu\}$ dokázána.

Podle Věty 17.2 existuje taková posloupnost přirozených čísel $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k < \cdots$, že

$$\lim_{k \to \infty} \|x_{\nu_k} - x_0\| = 0\,, \tag{17.1}$$

kde $x_0 \in X(n)$ je nějaký prvek $X(n)$. Protože posloupnost $\{x_\nu\}$ je cauchyovská, platí podle (17.1)

$$\|x_\nu - x_0\| \le \|x_\nu - x_{\nu_k}\| + \|x_{\nu_k} - x_0\| \to 0\,,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

[20] Lineární prostory $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}^*$ se nazývají *izomorfní*, existuje-li takové prosté zobrazení prostoru $\mathcal{L}$ na prostor $\mathcal{L}^*$, které zachovává operace, tj. když $x \leftrightarrow x^*,\ y \leftrightarrow y^*\ x, y \in \mathcal{L},\ x^*, y^* \in \mathcal{L}^*$, potom $\alpha x + \beta y \leftrightarrow \alpha x^* + \beta y^*$.

17.4. Důsledek. *Konečně dimenzionální lineární množina X_0 libovolného normovaného prostoru $\mathcal{R}$ je uzavřená.*

Důkaz. Nechť $\{x_k\} \subset X_0$ je konvergentní posloupnost v $\mathcal{R}$. Máme dokázat, že limita této posloupnosti (označme ji x) náleží do X_0.

Množina X_0 uvažovaná sama o sobě je lineární prostor konečné dimenze a jako podmnožina prostoru $\mathcal{R}$ je normovaným prostorem, jehož norma je indukována normou $\mathcal{R}$. Podle Věty 17.3 je X_0 úplným prostorem, takže každá cauchyovská posloupnost prvků z X_0 je konvergentní v X_0. Posloupnost $\{x_k\} \subset X_0$ konvergentní v $\mathcal{R}$ je cauchyovská v X_0, a tedy má limitu v X_0. □

17.5. Důsledek. *Nechť $\mathcal{R}$ je normovaný prostor a X_0 konečně dimenzionální lineární množina v $\mathcal{R}$. K libovolnému prvku $x \in \mathcal{R}$ existuje prvek $x_0 \in X_0$, který realizuje vzdálenost prvku x od X_0, tj. takový, že $\|x - x_0\| = \varrho(x, X_0)$.*

Důkaz. Pro každé $k = 1, 2, \dots$ lze najít v X_0 prvek x_k tak, že

$$\|x - x_k\| < \varrho(x, X_0) + \tfrac{1}{k}\,. \tag{17.2}$$

Posloupnost $\{x_k\}$ je ohraničená, protože

$$\|x_k\| \le \|x\| + \|x - x_k\| < \|x\| + \varrho(x, X_0) + 1 \quad (k = 1, 2, \dots);$$

proto podle Věty 17.2 z ní lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{k_j}\} : x_{k_j} \to x_0$. Odtud a z nerovnosti (17.2) plyne

$$\|x - x_0\| \le \varrho(x, X_0),$$

a protože $x_0 \in X_0$, platí i obrácená nerovnost. □

17.6. Příklad. Jako aplikaci Důsledku 17.5 uvažujme prostor $C^0\langle a, b\rangle$ a jeho n-rozměrný podprostor $\mathcal{P}_n\langle a, b\rangle$, který sestává ze všech algebraických polynomů, jejichž stupeň není větší než n. Podle Důsledku 17.5 k libovolné spojité funkci $x \in C^0\langle a, b\rangle$ existuje takový polynom $x_0 \in \mathcal{P}_n\langle a, b\rangle$, že

$$\max_{a \le t \le b} |x(t) - x_0(t)| = \|x - x_0\| = \varrho(x, \mathcal{P}_n)\,,$$

tj. existuje polynom, který nejlépe aproximuje funkci $x(t)$ ve srovnání se všemi ostatními polynomy, jejichž stupeň nepřevyšuje n.

Výsledek uvedený ve Větě 17.2 lze obrátit, tj. dokážeme, že libovolná ohraničená množina je v normovaném prostoru kompaktní pouze tehdy, když má daný prostor konečnou dimenzi: Nejprve dokážeme důležité lemma, které se někdy nazývá lemma o kvazikolmici.

17.7. Lemma. *Nechť $\mathcal{R}$ je normovaný prostor a $X_0 \ne \mathcal{R}$ jeho podprostor. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový normovaný prvek x_0 (tj. pro který $\|x_0\| = 1$), že*

$$\varrho(x_0, X_0) > 1 - \varepsilon\,.$$

Důkaz. Protože X_0 je uzavřená množina, která není totožná s $\mathcal{R}$, existuje takový prvek $\overline{x} \in \mathcal{R}$, že $\varrho(\overline{x}, X_0) = d > 0$. V X_0 lze nalézt takový prvek x', že

$$\|\overline{x} - x'\| < \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Položme

$$x_0 = \frac{\overline{x} - x'}{\|\overline{x} - x'\|} = \alpha(\overline{x} - x') \quad \left(\alpha = \frac{1}{\|\overline{x} - x'\|} > \frac{1 - \varepsilon}{d}\right).$$

Zřejmě $\|x_0\| = 1$. Kromě toho, jestliže $x \in X_0$, potom

$$\|x_0 - x\| = \|\alpha\overline{x} - \alpha x' - x\| = \alpha \left\|\overline{x} - \left(x' + \frac{x}{\alpha}\right)\right\| \ge \alpha d > \frac{1 - \varepsilon}{d} \cdot d = 1 - \varepsilon\,,$$

což jsme chtěli dokázat. □

17.8. Poznámka. Normovaný prvek $x_0 \in \mathcal{R}$, který má vlastnost $\varrho(x_0, X_0) = 1$, je ve známém smyslu kolmicí k X_0 (protože v euklidovském prostoru vektor x_0 mající tuto vlastnost je skutečně ortogonální k X_0). V souvislosti s tímto budeme nazývat dokázané lemma *lemmatem o kvazikolmici* (*skorokolmici*).

17.9. Věta (Riesz). *Aby každá ohraničená množina byla v normovaném prostoru $\mathcal{R}$ kompaktní, je nutné a stačí, aby $\mathcal{R}$ měl konečnou dimenzi.*

Důkaz. a) *Dostatečnost* podmínky plyne z Věty 17.2.

b) *Nutnost.* Uvažujme libovolný normovaný prvek $x_1 \in \mathcal{R}$ a označme symbolem X_1 lineární obal $\mathcal{L}(\{x_1\})$ tohoto prvku, tj. množinu prvků tvaru λx_1.

Za předpokladu, že $\mathcal{R}$ má nekonečnou dimenzi, platí $X_1 \neq \mathcal{R}$, a podle Lemmatu 17.7 existuje takový normovaný prvek $x_2 \in \mathcal{R}$, že $\varrho(x_2, X_1) > \frac{1}{2}$. Vytvoříme lineární obal prvků x_1 a x_2, který označíme X_2. Pokračujeme-li tímto způsobem dále, dospějeme k posloupnosti prvků $\{x_n\}$ a podprostorů $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$ takových, že

$$\|x_n\| = 1; \quad X_n = \mathcal{L}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}); \quad \varrho(x_{n+1}, X_n) > \tfrac{1}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{17.3}$$

Na základě (17.3) platí

$$\|x_n - x_m\| > \tfrac{1}{2} \quad (n > m;\ m, n = 1, 2, \ldots),$$

takže ani posloupnost $\{x_n\}$, ani její libovolná podposloupnost nejsou konvergentní. $\square$

Důkaz posledního obecného výsledku této kapitoly, který je uveden ve Větě 17.11, je velmi komplikovaný a proto odkazujeme na [Že1, str. 172 – 175]. Nejprve uvedeme definici ekvivalentních norem.

17.10. Definice. Nechť $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ jsou dva normované prostory definované na témže lineárním prostoru $\mathcal{L}$ normami $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Říkáme, že tyto normy jsou ekvivalentní, jestliže existují takové konstanty $C_1 > 0$ a $C_2 > 0$ (závisející na volbě norem $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$), že

$$C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in \mathcal{L}\,.$$

17.11. Věta. *Nechť n je libovolné přirozené číslo. Dvě libovolné normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ definované na témže lineárním prostoru $X(n)$ konečné dimenze n jsou ekvivalentní, tj. existují takové konstanty $C_1 > 0$ a $C_2 > 0$, že*

$$C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in X(n)\,. \tag{17.4}$$

17.12. Příklad. Místo zmíněného komplikovaného důkazu budeme platnost Věty 17.11 demonstrovat na důkazu ekvivalentnosti norem prostorů R_p^n, které jsou definovány na témže lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$ (viz Příklady 3.3, 3.4 a 3.5). Platí

$$R_p^n = \left(\mathbb{R}^n,\ \|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\right)$$

a v limitě pro $p \to \infty$

$$R_\infty^n = \Big(\mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|\Big).$$

Zvolme libovolně, ale pevně $p \geq 1$, $q \geq 1$. Analogicky jako v Poznámce 3.5a dostaneme

$$\|x\|_q \leq n^{\frac{1}{q}}\|x\|_\infty, \quad \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_q.$$

Odtud plyne tento řetěz nerovností

$$\|x\|_q \leq n^{\frac{1}{q}}\|x\|_\infty \leq n^{\frac{1}{q}}\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{q}}n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty \leq n^{\frac{1}{q}}n^{\frac{1}{p}}\|x\|_q,$$

který dává

$$\|x\|_q \leq n^{\frac{1}{q}}\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{q}}n^{\frac{1}{p}}\|x\|_q.$$

Odtud po vydělení výrazem $n^{\frac{1}{q}}$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_q.$$

Tedy v souladu s nerovnostmi (17.4)

$$C_1\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq C_2\|x\|_q,$$

kde $C_1 = 1/n^{\frac{1}{q}}$, $C_2 = n^{\frac{1}{p}}$.

Věta 17.11 má mnohostranné užití v matematické teorii numerických metod, zejména v teorii metody konečných prvků. Uvedeme alespoň jednu aplikaci z tohoto oboru.

17.13. Věta. *Nechť $p(x,y)$ je polynom nanejvýš prvního stupně a $\overline{T}$ trojúhelník s vrcholy $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Potom*

$$\max_{[x,y]\in\overline{T}} |p(x,y)| \leq \frac{C}{h_T\sqrt{\sin\vartheta_T}}\|p\|_{L_2(T)}\,, \tag{17.5}$$

kde h_T je nejdelší strana trojúhelníka $\overline{T}$, ϑ_T nejmenší úhel trojúhelníka T a C je konstanta nezávislá na $\overline{T}$ a polynomu $p(x,y)$.

Důkaz. A) Uvedeme nejprve několik pomocných výsledků. Nechť $\overline{T}_0$ je trojúhelník, který leží v kartézském souřadném systému (ξ, η) a má vrcholy $R_1(0,0)$, $R_2(1,0)$, $R_3(0,1)$. Transformace

$$x = x^*(\xi,\eta) \equiv x_1 + \overline{x}_2\xi + \overline{x}_3\eta, \quad y = y^*(\xi,\eta) \equiv y_1 + \overline{y}_2\xi + \overline{y}_3\eta, \tag{17.6}$$

kde

$$\overline{x}_i = x_i - x_1, \quad \overline{y}_i = y_i - y_1 \quad (i = 2,3),$$

zobrazuje vzájemně jednoznačně trojúhelník $\overline{T}_0$ na $\overline{T}$. Pro jakobián $J_T \equiv \overline{x}_2\overline{y}_3 - \overline{x}_3\overline{y}_2$ transformace (17.6) platí[21]

$$\tfrac{1}{2}h_T^2\sin\vartheta_T \leq |J_T| \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2}h_T^2. \tag{17.7}$$

[21] Podle věty o transformaci integrálu

$$\mathrm{mes}_2 T = \int_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{T_0} |J_T|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \tfrac{1}{2}|J_T|. \tag{*}$$

Na druhé straně,

$$\tfrac{1}{2}h_T^2\sin\vartheta_T \leq 2\mathrm{mes}_2 T \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2}h_T^2. \tag{**}$$

Druhá nerovnost (**) je evidentní. Dokážeme první: Nechť $a_T \leq b_T \leq c_T \equiv h_T$ jsou délky stran trojúhelníka T. Potom $2\mathrm{mes}_2 T = b_T h_T \sin\vartheta_T$. Protože $h_T < a_T + b_T$, platí $\frac{1}{2}h_T < b_T$. Odtud plyne (**). Vztahy (*), (**) implikují (17.7).