B) Linearita $p(x,y)$ implikuje

$$\max_{\overline{T}} |p| = \max_{i=1,2,3} |p(P_i)| \,. \tag{17.8}$$

Položíme-li

$$p^*(\xi,\eta) = p(x^*(\xi,\eta), y^*(\xi,\eta)),$$

kde $x = x^*(\xi,\eta),\ y = y^*(\xi,\eta)$ je transformace (17.6), dostaneme ze (17.8)

$$\max_{\overline{T}} |p| = \max_{\overline{T}_0} |p^*| \,. \tag{17.9}$$

Věta 17.11 implikuje ($\mathcal{L}$ je zde trojrozměrný prostor polynomů nanejvýš 1. stupně na $\overline{T}_0$)

$$\max_{\overline{T}_0} |p^*| \le C_2 \|p^*\|_{L_2(T_0)} \,, \tag{17.10}$$

kde konstanta C závisí pouze na $\overline{T}_0$.

Protože

$$\|p\|^2_{L_2(T)} = \int_T [p(x,y)]^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{T_0} [p^*(\xi,\eta)]^2 |J_T| \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = |J_T| \cdot \|p^*\|^2_{L_2(T_0)} \,,$$

podle (17.7) platí

$$\|p^*\|_{L_2(T_0)} = \frac{1}{\sqrt{|J_T|}} \|p\|_{L_2(T)} \le \frac{C}{h_T \sqrt{\sin \vartheta_T}} \|p\|_{L_2(T)} \,, \tag{17.11}$$

kde jsme zahrnuli $\sqrt{2}$ do konstanty C. Ze vztahů (17.9) – (17.11) plyne odhad (17.5). $\square$

Abychom dostali nerovnost typu (17.4), vynásobme nerovnost (17.5) výrazem $C^{-1} h_T \sqrt{\sin \vartheta_T}$, takže

$$C^{-1} h_T \sqrt{\sin \vartheta_T} \max_{[x,y] \in \overline{T}} |p(x,y)| \le \|p\|_{L_2(T)}.$$

Protože

$$\|p\|_{L_2(T)} = \sqrt{\int_T [p(x,y)]^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y} \le \max_{[x,y] \in \overline{T}} |p(x,y)| \sqrt{\mathrm{meas}_2\, T},$$

dostáváme nerovnost (17.4) ve tvaru

$$C^{-1} h_T \sqrt{\sin \vartheta_T} \max_{[x,y] \in \overline{T}} |p(x,y)| \le \|p\|_{L_2(T)} \le \sqrt{\mathrm{meas}_2\, T} \max_{[x,y] \in \overline{T}} |p(x,y)|, \tag{17.12}$$

kde tedy pro konstanty C_1 a C_2 platí

$$C_1 = C^{-1} h_T \sqrt{\sin \vartheta_T}, \quad C_2 = \sqrt{\mathrm{meas}_2\, T}.$$

Veličina $\max_{[x,y] \in \overline{T}} |p(x,y)|$ je identická s normou $\|p\|_{C^0(\overline{T})}$ a lze ji v tomto případě interpretovat jako normu na trojrozměrném lineárním prostoru všech polynomů dvou proměnných, jejichž stupeň je nanejvýš roven jedné.

V teorii metody konečných prvků má všem zásadní význam nerovnost (17.5) a ne z ní odvozená nerovnost (17.12).

17.14. Konečný prvek jako lineární prostor. Hovoříme-li o *konečném prvku*, máme na mysli tyto tři skutečnosti:

1. Geometrický útvar. V aplikacích metody konečných prvků v dvojrozměrných problémech to bývá nejčastěji trojúhelník.

2. Funkce jednoznačně zadaná konečným počtem hodnot. V případě trojúhelníků jsou to polynomy stupně nanejvýš n, kde n je pevně dané. Každý polynom (nanejvýš) n-tého stupně lze jednoznačně určit celkovým počtem $N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ hodnot. To proto, že polynom (nanejvýš) n-tého stupně dvou proměnných je lineární kombinací mononomů tvaru

$$x^i y^j, \quad \text{kde } 0 \leq i + j \leq n, \tag{17.13}$$

kterých je celkem N:

$$p(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + \cdots + a_{N-1}xy^{n-1} + a_Ny^n.$$

Je-li $a_2 = \cdots = a_N$, vidíme, že polynom (nanejvýš) n-tého stupně dvou proměnných obsahuje jako speciální případ konstantu, je-li $a_4 = \cdots = a_N$, vidíme, že polynom (nanejvýš) n-tého stupně dvou proměnných obsahuje jako speciální případ polynom prvního stupně, atd.

3. Parametry. Hodnoty, které jednoznačně určují polynom $p(x,y)$ (nanejvýš) n-tého stupně, se v metodě konečných prvků volí jako funkční hodnoty, případně derivace předepsané v některých bodech uvažovaného geometrického útvaru (tj. trojúhelníka, je-li geometrickým útvarem trojúhelník). Tyto hodnoty pak nazýváme *parametry* a volíme je obvykle tak, aby hodnota polynomu $p(x,y)$ byla v libovolném bodě strany trojúhelníka T určena pouze parametry, které jsou předepsány v bodech této strany.

Takto zadaný polynom potom uvažujeme pouze v bodech $[x,y] \in \overline{T}$. Každý takový polynom je jednoznačně určen N-ticí parametrů $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ a protože tyto N-tice tvoří N-rozměrný lineární prostor, je množina všech takových polynomů N-rozměrným lineárním prostorem, ve kterém je sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem definováno přirozeným způsobem (viz Příklad 2.18).

Každý takový lineární prostor nazýváme *konečný prvek*. Je jednoznačně určen geometrickým útvarem, typem funkce a parametry.

17.15. Příklady trojúhelníkových prvků. Ukážeme zde, jak v případech různých n lze zadat N parametrů, aby byly splněny výše kladené požadavky na parametry. (Důkaz, že tomu tak skutečně je, bude uveden v kurzu *Numerické metody III.*) Symboly P_1, P_2, P_3 budou značit vrcholy trojúhelníka $\overline{T}$, symbol P_0 jeho těžiště a symboly Q_1, Q_2, Q_3 půlicí body stran.

1. $n = 1$; potom $N = 3$ a trojice parametrů je tvaru

$$p(P_i) \quad (i = 1, 2, 3).$$

K této trojici parametrů náleží polynom $p(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y$, jehož koeficienty a_1, a_2, a_3 určíme řešením soustavy tří lineárních algebraických rovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 &= p(P_1), \\ a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 &= p(P_2), \\ a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 &= p(P_3), \end{aligned}$$

kde x_i, y_i jsou souřadnice vrcholu P_i.

2. $n = 2$; potom $N = 6$ a šestice parametrů je tvaru

$$p(P_i),\ p(Q_i) \quad (i = 1, 2, 3).$$

3a. $n = 3$; potom $N = 10$ a deset parametrů obvykle volíme tvaru

$$p(P_i) \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad \frac{\partial p}{\partial x}(P_j),\ \frac{\partial p}{\partial y}(P_j) \quad (j = 1, 2, 3).$$

3b. Chceme-li v případě $n = 3$ zadat jako parametry pouze funkční hodnoty, potom kromě parametrů $p(P_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ volíme dalších šest parametrů ve tvaru funkčních hodnot v bodech, které dělí strany trojúhelníka na třetiny.

17.16. Příklad obdélníkového prvku. Nechť $\overline{D}$ je obdélník se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami a vrcholy $P_1, \ldots, P_4$. V tomto případě budeme při daném n uvažovat jako typy funkcí lineární kombinace mononomů tvaru

$$x^i y^j \quad (i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, n). \tag{17.14}$$

V případě $n = 1$ to budou bilineární polynomy (tj. lineární v každé proměnné, je-li druhá proměnná pevné číslo)

$$p(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy.$$

Parametry jsou v tomto případě čtyři a jsou to funkční hodnoty $p(P_1), \ldots, p(P_4)$ bilineárního polynomu ve vrcholech obdélníka $\overline{D}$.

17.17. Příklad čtyřstěnného prvku. Analogií trojúhelníka ve třech dimenzích je čtyřstěn. Polynom $p(x, y, z)$ tří proměnných je lineární kombinací mononomů tvaru

$$x^i y^j z^k \quad (0 \le i + j + k \le n). \tag{17.15}$$

Příslušný polynom $p(x, y, z)$ má celkem $N = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$ koeficientů $a_1, \ldots, a_N$, k jejichž určení je zapotřebí N parametrů. V nejjednodušším případě $n = 1$ jde o čtyři parametry, za které volíme funkční hodnoty $p(P_i)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ ve vrcholech čtyřstěnu.

17.18. Analytický význam konečných prvků. Tento význam vysvětlíme v případě trojúhelníkových prvků. Mějme uzavřenou oblast $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí. Tuto oblast ztriangulujme, tj. rozdělme na konečný počet trojúhelníků tak, že libovolné dva trojúhelníky $\overline{T}_i$, $\overline{T}_j$ jsou buď disjunktní, nebo mají společný vrchol, nebo společnou stranu. Zvolme typ konečného prvku a na každém prvku zvolme příslušné uzlové body. To znamená, že uzlové body na společné straně dvou trojúhelníků budou totožné. Na každém trojúhelníku zadejme příslušných N parametrů tak, že ve společných uzlových bodech dvou nebo více trojúhelníků budou parametry totožné. (Případ uzlového bodu společného více než dvěma trojúhelníkům nastává, když uzlový bod je společným vrcholem několika trojúhelníků.) Z vlastnosti **3** uvedené v 17.14 pak plyne, že takto zadaným parametrům přísluší na $\overline{\Omega}$ funkce, která náleží do $C^0(\overline{\Omega})$ a je po uzavřených trojúhelnících $\overline{T}_i$ dané triangulace uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ polynomem (nanejvýš) n-tého stupně.

Poznamenejme, že v případě **3a** uvedeném v Příkladě 17.15 budou parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ globální funkce f spojité nejen ve vnitřních bodech každého trojúhelníka dané triangulace, ale i ve společných vrcholech jednotlivých trojúhelníků (protože tyto hodnoty jsou přímo zadány jako parametry.)

18. Funkcionály a lineární funkcionály

18.1. Definice. Číselnou funkci $f(x)$ definovanou na některém normovaném prostoru $\mathcal{R} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ budeme nazývat *funkcionálem*. Funkcionál $f(x)$ se nazývá *lineární*, jestliže

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

kde x, $y \in \mathcal{R}$ a α, β jsou libovolné skaláry.

18.2. Definice. a) Funkcionál $f(x)$ se nazývá *spojitý v bodě* x_0, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové okolí $U = U_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$ bodu x_0, ve kterém je funkcionál $f(x)$ definován a platí

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in U. \tag{18.1}$$

Trochu jinými slovy: Funkcionál $f(x)$ se nazývá *spojitý v bodě* x_0, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta(\varepsilon) > 0$, že pro všechny body $x \in \mathcal{L}$ splňující

$$\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$$

platí

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{18.1a}$$

Funkcionál f se nazývá *spojitý v normovaném prostoru* $\mathcal{R}$, je-li spojitý v každém bodě $x \in \mathcal{R}$. Stejně se definuje spojitost v bodě a spojitost v $\mathcal{R}$ lineárního funkcionálu.

b) Funkcionál $f(x)$ se nazývá *rovnoměrně spojitý v normovaném prostoru* $\mathcal{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta(\varepsilon) > 0$, že z nerovnosti

$$\|x_1 - x_2\| < \delta(\varepsilon), \quad x_1, x_2 \in \mathcal{R}$$

plyne, že

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{18.1b}$$

c) Funkcionál $f(x)$ se nazývá *lipschitzovsky spojitý v normovaném prostoru* $\mathcal{R}$, jestliže existuje konstanta $L > 0$ tak, že

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{R}. \tag{18.1c}$$

18.2a. Poznámka. Stejně jako Větu 12.2 můžeme dokázat toto tvrzení: *Funkcionál f je spojitý v bodě $x_0 \in \mathcal{R}$, když a jen když $f(x_n) \to f(x_0)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$ konvergující v $\mathcal{R}$ k bodu x_0*, tj.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Limita na levé straně je v $\mathbb{R}^1$, na pravé straně v $\mathcal{R}$. $\square$

18.2b. Poznámka. a) *Funkcionál f rovnoměrně spojitý v $\mathcal{R}$ je spojitý v $\mathcal{R}$.*

To je vidět okamžitě: Nechť bod x_2 je pevný a x_1 proměnný a položme $x_0 = x_2$ a $x = x_1$. Potom (18.1b) přejde v (18.1a).

b) *Funkcionál f lipschitzovsky spojitý v $\mathcal{R}$ je rovnoměrně spojitý v $\mathcal{R}$.*

Skutečně: Pro $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon/L$ z (18.1c) plyne (18.1b).

18.2c. Příklady lipschitzovsky spojitých funkcionálů a funkcí.

1. Funkcionál $f(x) = \|x\|$ je lipschitzovsky spojitý na normovaném prostoru $\mathcal{R}$: Z trojúhelníkových nerovností

$$\|x\| = \|y + x - y\| \leq \|y\| + \|x - y\|, \quad \|y\| = \|x + y - x\| \leq \|x\| + \|x - y\|$$

plyne $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$, takže v tomto případě je $L = 1$.

2. Připomeňme si *Lagrangeovu větu* z matematické analýzy: *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f'(x)$ existuje v (a, b). Potom existuje bod $c \in (a, b)$ (tj. $a < c < b$) tak, že*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Přechodem k absolutním hodnotám dostaneme

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |b - a|.$$

Je-li navíc $|f'(x)| \leq L$ pro $x \in (a, b)$, potom

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \langle a, b\rangle.$$

3. Zobecníme předchozí výsledek: Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť má v podintervalech (x_{i-1}, x_i) ohraničenou derivaci, tj.

$$|f'(x)| \leq L \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

kde $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Potom

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leq |\alpha - \beta| \quad \forall \alpha, \beta \in \langle a, b\rangle.$$

Tvrzení dokážeme v případě, že $\alpha \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $\beta \in \langle x_{i+1}, x_{i+2}\rangle$. Platí

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leq |f(\alpha) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(\beta)| \leq$$
$$\leq L(|\alpha - x_i| + |x_i - x_{i+1}| + |x_{i+1} - \beta|) = L|\alpha - \beta|.$$

Speciálním případem jak tohoto výsledku, tak prvního příkladu je funkce $f(x) = |x|$, která nemá derivaci v bodě $x = 0$.

4. Zobecněme výsledek příkladu 2 na případ funkce tří proměnných. Platí: *Nechť funkce $f(x, y, z)$ je definovaná a spojitá v ohraničené uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ a nechť má spojité parciální derivace 1. řádu uvnitř oblasti Ω. Nechť $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ jsou takové dva vnitřní body oblasti Ω, že úsečka $\overline{P_0P_1}$ leží celá v Ω. Potom existuje takový bod $P_2(x_0 + \vartheta(x_1 - x_0), y_0 + \vartheta(y_1 - y_0), z_0 + \vartheta(z_1 - z_0))$ $(0 < \vartheta < 1)$, že platí*

$$f(P_1) - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_2)(x_1 - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_2)(y_1 - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_2)(z_1 - z_0).$$

Nechť navíc platí

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right|, \ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right|, \ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right| \leq L \quad \forall P \in \Omega$$

a oblast Ω je konvexní. Potom

$$|f(P_1) - f(P_0)| \leq L(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| + |z_1 - z_0|) = L\|P_1 - P_0\|_1 \quad \forall P_0, P_1 \in \Omega.$$

Z kap. 17 plyne, že $\|P_1 - P_0\|_1 \leq C_2\|P_1 - P_0\|_2$, takže

$$|f(P_1) - f(P_0)| \leq C_2L\|P_1 - P_0\|_2,$$

což je klasická Lipschitzova podmínka pro funkce více proměnných.

18.3. Věta. *Je-li lineární funkcionál $f(x)$ spojitý v libovolném jednom bodě $x_0 \in \mathcal{R}$, potom je spojitý všude v $\mathcal{R}$.*

Důkaz. Nechť je lineární funkcionál spojitý v bodě $x = x_0$. To je rovnocenné podle Poznámky 18.2a tomu, že

$$f(x_n) \to f(x_0) \quad \text{pro } x_n \to x_0.$$

Nechť dále $y_n \to y$. Potom

$$f(y_n) = f(y_n - y + x_0 + y - x_0) = f(y_n - y + x_0) + f(y) - f(x_0). \tag{18.2}$$

Avšak $y_n - y + x_0 \to x_0$. Odtud podle předpokladu dokazované věty plyne

$$f(y_n - y + x_0) \to f(x_0).$$

Tedy podle (18.2)

$$f(y_n) \to f(x_0) + f(y) - f(x_0) = f(y),$$

což jsme chtěli dokázat. □

Stačí tedy ověřovat spojitost lineárního funkcionálu v jednom bodě, např. v bodě $x = \theta$.

18.4. Definice. Říkáme, že funkcionál $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^1$, kde $\mathcal{R} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$, je *ohraničený*, jestliže existuje takové číslo $M > 0$, že

$$|f(x)| \le M\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{R}. \tag{18.3}$$

18.5. Věta. *Lineární funkcionál $f(x)$ je spojitý, když a jen když je ohraničený.*

Důkaz. a) Předpokládejme, že lineární funkcionál $f(x)$ není ohraničený. Potom ke každému přirozenému číslu n lze najít takový prvek $x_n \in \mathcal{R}$, že

$$|f(x_n)| > n\|x\|. \tag{18.4}$$

Položme

$$y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}. \tag{18.5}$$

Potom $\|y_n\| = \frac{1}{n}$, tj. $\|y_n - \theta\| = \frac{1}{n}$, takže $y_n \to \theta$. Ale současně podle (18.5) a (18.4)

$$|f(y_n)| = \left| f\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right) \right| = \frac{1}{n\|x_n\|} |f(x_n)| > 1.$$

Protože $f(\theta) = 0$ pro každý lineární funkcionál, vidíme, že v bodě $x = \theta$ není funkcionál $f(x)$ spojitý. Negací dokázané implikace dostáváme, že každý spojitý funkcionál je ohraničený.

b) Nechť nyní číslo M, které splňuje podmínku (18.3), existuje. Potom pro libovolnou posloupnost $x_n \to \theta$ platí

$$|f(x_n)| \le M\|x_n\| \to 0,$$

tj. funkcionál $f(x)$ je spojitý v bodě $x = \theta$, a tedy (podle Věty 18.3) je spojitý ve všech bodech $x \in \mathcal{R}$. □

18.6. Definice. Veličinu

$$\|f\|_* = \sup_{x\neq\theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|. \tag{18.6}$$

nazýváme *normou* lineárního funkcionálu $f(x)$.

Poznamenejme, že norma lineárního funkcionálu daná vztahem (18.6) je nejmenší hodnota čísla M ze vztahu (18.3).

18.7. Příklad. Uvažujme normovaný prostor $R^1 = (\mathbb{R}^1, \|x\| = |x|)$ a v něm funkci $f(x) = kx$. Tato funkce je lineární funkcionál na R^1, protože

$$f(\alpha x + \beta y) = k(\alpha x + \beta y) = \alpha kx + \beta ky = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Platí

$$|f(x)| = |k| \cdot |x| = |k| \cdot \|x\|,$$

takže podle (18.6) je $\|f\|_* = |k|$. Pozor: lineární funkce $ax + b$ není lineární funkcionál.

18.8. Příklad. Nechť $R^{(n)}$ je n-rozměrný euklidovský prostor a $a \in R^{(n)}$ libovolný pevný vektor. Položme

$$f(x) = (x, a) \quad \forall x \in R^{(n)}\,,$$

kde (x, a) je skalární součin vektorů x a a. Je zřejmé, že $f(x)$ je lineární funkcionál:

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y, a) = \alpha(x, a) + \beta(y, a) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

pro všechny vektory x, $y \in R^{(n)}$ a všechna čísla α, β. Dále, podle Schwarzovy nerovnosti

$$|f(x)| = |(x, a)| \leq \|x\| \cdot \|a\|. \tag{18.9}$$

Odtud plyne, že funkcionál $f(x)$ je ohraničený, a proto spojitý. Ze vztahu (18.9) plyne

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|a\|\,.$$

Protože pravá strana této nerovnosti nezávisí na x, platí

$$\sup_{x\neq\theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|a\|\,,$$

tj. $\|f\|_* \leq \|a\|$. Ale položíme-li $x = a$, dostaneme:

$$|f(a)| = (a, a) = \|a\|^2 \Rightarrow \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Proto

$$\|f\|_* = \|a\|\,.$$

18.9. Příklad. Integrál

$$I(x) = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $a < b$ a $x(t)$ je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$, je lineární funkcionál na prostoru $C^0\langle a, b\rangle$. Jeho norma je rovna $b - a$. Skutečně

$$|I(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \max_{a\le t\le b} |x(t)|(b-a)\,,$$

přičemž pro $x = \text{const}$ nastává rovnost.

18.10. Příklad. Uvažujme obecnější příklad než je Příklad 18.9. Nechť $y_0(t)$ je nějaká pevná funkce z prostoru $C^0\langle a, b\rangle$. Položme

$$f(x) = \int_a^b x(t)y_0(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall x \in C^0\langle a, b\rangle\,.$$

Tento vztah definuje lineární funkcionál na $C^0\langle a, b\rangle$, protože

$$f(\alpha x + \beta y) = \int_a^b (\alpha x(t) + \beta y(t))y_0(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \alpha \int_a^b x(t)y_0(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b y(t)y_0(t)\,\mathrm{d}t = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

pro všechny funkce x, $y \in C^0\langle a, b\rangle$ a všechna čísla α, β. Tento funkcionál je ohraničený:

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)y_0(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \|x\| \int_a^b |y_0(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{18.7}$$

Tedy funkcionál $f(x)$ je lineární a ohraničený, takže je i spojitý.

Z (18.7) prozatím plyne, že

$$\|f\|_* \le \int_a^b |y_0(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{18.8}$$

Dokážeme, že

$$\|f\|_* = \int_a^b |y_0(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{18.9}$$

K tomu stačí dokázat, že

$$\|f\|_* \ge \int_a^b |y_0(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{18.10}$$

Za tím účelem zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně, ale pevně, a rozložme interval $\langle a, b\rangle$ na podintervaly body $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tak, aby oscilace funkce $y_0(t)$ (tj. rozdíl mezi její největší a nejmenší hodnotou) na každém z intervalů $\langle t_k, t_{k+1}\rangle$ byla menší než ε. Rozdělme všechny podintervaly do dvou skupin: do první skupiny patří všechny takové intervaly $\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_r'$, ve kterých funkce $y_0(t)$ nemění znaménko (tj. v každém je buď kladná, nebo záporná). Zbývající intervaly $\Delta_1'', \Delta_2'', \dots, \Delta_s''$. Protože funkce $y_0(t)$ mění v každém intervalu Δ_k'' $(k = 1, \dots, s)$ znaménko, existuje v každém intervalu Δ_k'' alespoň jeden bod, ve kterém je funkce $y_0(t)$ rovna nule. Odtud a z toho, že oscilace funkce $y_0(t)$ je na každém z intervalů $\langle t_k, t_{k+1}\rangle$ menší než ε, plyne, že

$$|y_0(t)| < \varepsilon \quad (t \in \Delta_k'';\ k = 1, 2, \dots, s). \tag{18.11}$$

Definujme nyní pomocnou funkci $\overline{x}(t) \in C^0\langle a, b\rangle$ takto: V intervalech první skupiny klademe

$$\overline{x}(t) = \operatorname{sgn} y_0(t) \quad (t \in \Delta'_j;\ j = 1, 2, \dots, r). \tag{18.12}$$

Na intervalech Δ''_k $(k = 1, 2, \dots, s)$ nechť je funkce $\overline{x}(t)$ lineární. Přitom, pokud je bod a (nebo b) koncem některého z intervalů Δ''_k, tak definujeme $\overline{x}(a) = 0$ (nebo $\overline{x}(b) = 0$).

Odhadneme nyní zdola hodnotu

$$f(\overline{x}) = \int_a^b \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t.$$

Platí

$$\int_a^b \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{r} \int_{\Delta'_j} \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{s} \int_{\Delta''_k} \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t. \tag{18.13}$$

Vzhledem k (18.12) platí

$$\int_{\Delta'_j} \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\Delta'_j} |y_0(t)|\ \mathrm{d}t. \tag{18.14}$$

Dále

$$\begin{aligned} \int_{\Delta''_k} \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t &\geq - \int_{\Delta''_k} |\overline{x}(t)| \cdot |y_0(t)|\ \mathrm{d}t \geq \\ &\geq - \max_{t \in \Delta''_k} |\overline{x}(t)| \int_{\Delta''_k} |y_0(t)|\ \mathrm{d}t = - \int_{\Delta''_k} |y_0(t)|\ \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{18.15}$$

Konečně

$$\sum_{j=1}^{r} \int_{\Delta'_j} |y_0(t)|\ \mathrm{d}t = \int_a^b |y_0(t)|\ \mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{s} \int_{\Delta''_k} |y_0(t)|\ \mathrm{d}t. \tag{18.16}$$

Z (18.11) a (18.13) – (18.16) plyne

$$\int_a^b \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t \geq \int_a^b |y_0(t)|\ \mathrm{d}t - 2 \sum_{k=1}^{s} \int_{\Delta''_k} |y_0(t)|\ \mathrm{d}t > \int_a^b |y_0(t)|\ \mathrm{d}t - 2\varepsilon(b - a).$$

Protože $\|\overline{x}\| = 1$, platí

$$\|f\|_* \geq \frac{|f(\overline{x})|}{\|\overline{x}\|} = f(\overline{x}) = \int_a^b \overline{x}(t) y_0(t)\ \mathrm{d}t > \int_a^b |y_0(t)|\ \mathrm{d}t - 2\varepsilon(b - a). \tag{18.17}$$

Necháme-li v (18.17) konvergovat ε k nule, dostaneme hledanou nerovnost (18.10). Tedy vzhledem k opačné nerovnosti (18.8) pro normu $\|f\|_*$ funkcionálu f platí vztah (18.9).

18.15. Příklad. V prostoru l_2 můžeme definovat lineární funkcionál stejným způsobem jako jsme to udělali v euklidovském prostoru R_2^n: vybereme v l_2 nějaký pevný prvek $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ a položíme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n\,. \tag{18.18}$$

Řada (18.18) konverguje pro libovolný prvek $x \in l_2$:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} = \|x\| \cdot \|a\|\,. \tag{18.19}$$

V případě $x = a$ nerovnost (18.19) přechází v rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,.$$

Odtud

$$\|f\|_* = \|a\|\,.$$

19. Adjungovaný prostor

V případě lineárních funkcionálů je možno definovat operaci sčítání funkcionálů a operaci násobení funkcionálu číslem stejným způsobem jako v případě funkcí n proměnných (viz Příklad 2.18); jediný rozdíl je v tom, že v Příkladě 2.18 byla jako definiční obor funkcí uvažována množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, kdežto v případě lineárních funkcionálů je definičním oborem celý lineární, resp. normovaný prostor:

19.1. Definice. Nechť f_1 a f_2 jsou jsou dva spojité lineární funkcionály na některém normovaném prostoru $\mathcal{R}$ (ne nutně úplným). Jejich součtem nazýváme takový funkcionál $f = f_1 + f_2$, že

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}\,.$$

Součinem spojitého lineárního funkcionálu f_1 a čísla α se nazývá takový funkcionál $f = \alpha f_1$, že

$$f(x) = \alpha f_1(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}\,.$$

Je zřejmé, že součet $f_1 + f_2$ a součin αf_1 jsou spojité lineární funkcionály.

Snadno se ověří, že takto definované operace sčítání spojitých lineárních funkcionálů a jejich násobení číslem vyhovují všem axiomům lineárního prostoru. Kromě toho norma spojitého lineárního funkcionálu definovaná vztahem (18.6) vyhovuje všem požadavkům kladeným na normu v Definici 3.1. Skutečně,

1. $\|f\|_* > 0$ pro každý funkcionál $f \not\equiv 0$; $\|f\|_* = 0$, když a jen když $f \equiv 0$,
2. $\|\alpha f\|_* = |\alpha| \cdot \|f\|_*$,
3. $\|f_1 + f_2\|_* = \sup\limits_{x\neq\theta} \frac{|f_1(x)+f_2(x)|}{\|x\|} \le \sup\limits_{x\neq\theta} \frac{|f_1(x)|}{\|x\|} + \sup\limits_{x\neq\theta} \frac{|f_2(x)|}{\|x\|} = \|f_1\|_* + \|f_2\|_*\,.$

Tedy množina všech spojitých lineárních funkcionálů na nějakém normovaném prostoru $\mathcal{R}$ je sama normovaným prostorem. Tento prostor se nazývá *adjungovaný* k $\mathcal{R}$ a značí se $\mathcal{R}^*$.

19.2. Věta. *Adjungovaný prostor je vždy úplný.*

Důkaz. Nechť $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost spojitých lineárních funkcionálů. Podle definice cauchyovské posloupnosti ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $N(\varepsilon) > 0$ tak, že $\|f_n - f_m\|_* < \varepsilon$ pro $n, m > N(\varepsilon)$. Potom pro libovolné $x \in \mathcal{R}$ $(x \neq \theta)$ podle Definice 18.6 a poznámky k ní

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_* \|x\| < \varepsilon \|x\|\,, \tag{*}$$

tj. (vzhledem k úplnosti číselné přímky $\mathbb{R}^1$) číselná posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje pro libovolné $x \in \mathcal{R}$. Položme

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x);$$

dokážeme, že $f(x)$ je spojitý lineární funkcionál:

1. linearita: $f(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} [\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)] = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

2. Vraťme se k nerovnosti (*), tj.

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \|x\| \tag{*}$$

a přejděme v ní k limitě pro $m \to \infty$. Protože absolutní hodnota je spojitá funkce, pro levou stranu platí podle Věty 12.2:

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |\lim_{m\to\infty} (f_n(x) - f_m(x))| = |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)|.$$

Pravá strana na m nezávisí, takže dostáváme výsledek

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\|x\|. \tag{**}$$

Odtud plyne podle Definice 18.4, že pro každé n je lineární funkcionál $f - f_n$ ohraničený, takže je podle Věty 18.5 spojitý. Potom je však také spojitý lineární funkcionál $f = f_n + (f - f_n)$.

Podělme nerovnost (**) výrazem $\|x\|$, kde $\overline{x} \neq \theta$, a přejděme k supremu. Potom podle Definice 18.6 dostáváme:

$$\|f_n - f\|_* \leq \varepsilon.$$

To znamená, že $\lim\limits_{m\to\infty} \|f_n - f\|_* = 0$ čili $f_n \to f$ v $\mathcal{R}^*$, takže každá cauchyovská posloupnost $\{f_n\} \subset \mathcal{R}^*$ je v $\mathcal{R}^*$ konvergentní. $\square$

Zdůrazněme ještě jednou, že tato věta platí nezávisle na tom, je-li výchozí normovaný prostor $\mathcal{R}$ úplný nebo ne. Pro úplnost adjungovaného prostoru $\mathcal{R}^*$ je podstatná úplnost prostoru, ve kterém leží hodnoty spojitého lineárního funkcionálu f, tj. úplnost číselné přímky $\mathbb{R}^1$.

19.3. Příklad. Nechť E je n-rozměrný prostor s bází $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Potom pro funkcionál f platí

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i\,, \tag{19.2}$$

kde

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,, \quad f_i := f(e_i)\,.$$

Tedy funkcionál f je definován n čísly $f_1, \ldots, f_n$, což jsou jeho hodnoty na bázových vektorech, takže prostor adjungovaný s n-rozměrným prostorem je také n-rozměrný.

Výraz pro normu v adjungovaném prostoru E^* závisí na tom, jak je definována norma v prostoru E.

a) Nechť $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$. Podobně jako v Příkladu 18.8 lze dokázat, že

$$\|f\|_* = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2}\,,$$

tj. adjungovaný prostor k euklidovskému prostoru je také euklidovský.

b) Nechť $\|x\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Potom

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right) \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right)\|x\|\,.$$

Norma $\|f\|_*$ nemůže být menší než $\sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|$, protože položíme-li

$$x_i = \begin{cases} +1 & \text{v případě } f_i > 0, \\ -1 & \text{v případě } f_i < 0, \\ 0 & \text{v případě } f_i = 0, \end{cases}$$

bude platit

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^{n} |f_i| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right) \|x\| .$$

c) Jestliže $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p > 1$, potom $\|f\|_* = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, přičemž

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Plyne to z Hölderovy nerovnosti

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

a z toho, že při $x_i \geq 0$, $f_i = x_i^{p-1}$ nastává rovnost.

19.4. Příklad. Uvažujme prostor c_0 všech nulových posloupností $x = \{x_n\}$ (viz příklad 74.9) s normou

$$\|x\| = \sup_{1 \leq n \leq \infty} |x_n| .$$

Za chvíli dokážeme, že lineární funkcionál v prostoru c_0 je dán vztahem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| < \infty . \tag{19.3}$$

Odtud plyne

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \cdot |x_i| \leq \max_{1 \leq n \leq \infty} |x_n| \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| .$$

Tedy

$$\|f\|_* \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| . \tag{19.4}$$

Nyní dokážeme, že v (19.4) nastává znaménko rovnosti: Jestliže

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i| = a ,$$

potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $N = N(\varepsilon) > 0$, že

$$\sum_{i=1}^{N} |f_i| > a - \varepsilon .$$

Položme nyní

$$x_n = \begin{cases} +1, & \text{jestliže } f_n > 0 \text{ a } n \leq N, \\ -1, & \text{jestliže } f_n < 0 \text{ a } n \leq N, \\ 0, & \text{jestliže } f_n = 0 \text{ a } n \leq N, \\ 0, & \text{jestliže } n > N. \end{cases}$$

Potom

$$|f(x)| = \sum_{n=1}^{N} |f_n| > a - \varepsilon \,,$$

odkud plyne, že $\|f\|_* = a$.

Nyní dokážeme, že v prostoru c_0 mají všechny funkcionály tvar (19.3). Položme

$$e_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots),$$

tj. e_n označuje posloupnost, v které na n-tém místě stojí jednička a na ostatních místech nuly.

Nechť je zadán lineární funkcionál $f(x)$; jeho hodnotu $f(e_n)$ označíme f_n. Jestliže

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots), \tag{19.5}$$

potom

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \,.$$

Dokážeme, že pro každý lineární ohraničený funkcionál na c_0 platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$. Kdyby bylo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| = \infty$, potom ke každému H by bylo možné najít takové N, že

$$\sum_{n=1}^{N} |f_n| > H \,.$$

Sestrojme prvek x takto:

$$x_n = \begin{cases} +1, & \text{jestliže } f_n > 0 \text{ a } n \leq N, \\ -1, & \text{jestliže } f_n < 0 \text{ a } n \leq N, \\ 0, & \text{jestliže } f_n = 0 \text{ a } n \leq N, \\ 0, & \text{jestliže } n > N. \end{cases}$$

Norma tohoto prvku je rovna jedné, takže

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^{N} f_i x_i = \sum_{i=1}^{N} |f_i| > H = H\|x\| \,,$$

což je ve sporu s předpokladem o ohraničenosti funkcionálu $f(x)$.

Množina prvků tvaru (19.5) je všude hustá v prostoru c_0. Proto *lineární spojitý funkcionál je jednoznačně definován svými hodnotami na této množině.* Tedy

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i \, .$$

Tím jsme dokázali, že na prostoru c_0 všechny lineární funkcionály mají tvar (19.3).

Adjungovaný prostor k prostoru c_0 sestává z posloupností $(f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$, které splňují podmínku $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$.

19.5. Příklad. Nechť normovaný prostor sestává z posloupností

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$$

s normou $\|x\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

Je možné dokázat, že adjungovaným prostorem je prostor ohraničených posloupností s normou $\|f\|_* = \sup\limits_{1 \le n \le \infty} |f_n|$.

Ve všech příkladech uvedených pro n-rozměrné prostory adjungovaný prostor byl (jako lineární prostor) totožný s původním. Jak ukazují příklady 19.4 a 19.5 v případě nekonečné dimenze tomu tak nemusí být. Uvedeme nyní příklad, kdy oba prostory jsou totožné v případě nekonečné dimenze.

19.6. Příklad. Prostor l_2 sestává z posloupností

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \qquad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

a norma je v něm dána vztahem $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2}$. Dokážeme toto tvrzení: Funkcionály na prostoru l_2 mají tvar

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i \tag{19.6}$$

a pro jejich normu platí

$$\|f\|_* = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2} \, . \tag{19.7}$$

Každému funkcionálu je přiřazena posloupnost $(f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$ jeho hodnot na prvcích $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ definovaných stejně jako v Příkladě 19.4.

Je-li funkcionál ohraničen, potom $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 < \infty$. Abychom to dokázali, předpokládejme opak, tj. předpokládejme, že ke každému H existuje takové N, že

$$\sum_{i=1}^{N} f_i^2 = U \geq H.$$

Aplikujeme-li funkcionál (19.6) na prvek

$$x = (f_1, f_2, \dots, f_N, 0, \dots), \quad \|x\| = \sqrt{U},$$

dostaneme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i^2 = U \geq \sqrt{H}\|x\|,$$

což je ve sporu s ohraničeností funkcionálu.

Protože funkcionál f je lineární, snadno nalezneme jeho hodnoty na prvcích tvaru $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$; na ostatních prvcích prostoru l_2 hodnoty f nalezneme ze spojitosti; dohromady dostaneme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i,$$

tj. platí (19.6). Výraz (19.7) pro normu se stanoví pomocí Schwarzovy nerovnosti.

19.7. Příklad. Prostor l_p, kde $p > 1$, je prostor posloupností

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Prostor adjungovaný k prostoru l_p je prostor l_q, kde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Důkaz je analogický předcházejícím důkazům. Užívá se při něm Hölderova nerovnost. V případě $p = 1$ je adjungovaným prostorem prostor M^{∞}.

20. Hahn – Banachova věta o prodloužení lineárních funkcionálů a věta o dostatečném počtu lineárních funkcionálů

77.1. Věta (Hahn-Banach). *Každý spojitý lineární funkcionál $f(x)$ definovaný na lineárním podprostoru G normovaného prostoru E lze prodloužit na celý prostor E se zachováním normy, tj. na E lze sestrojit takový spojitý lineární funkcionál $F(x)$, že*

$$F(x) = f(x) \quad \forall x \in G, \tag{20.1}$$

$$\|F\|_{*,E} = \|f\|_{*,G}. \tag{20.2}$$

Důkaz Hahn-Banachovy věty je dosti komplikovaný a lze jej nalézt např. v [Že1].

Závažným důsledkem Hahn–Banachovy věty je následující *věta o dostatečném počtu funkcionálů*, která zaručuje existenci spojitého lineárního funkcionálu, který je různý od nuly v předem daném prvku.

20.2. Věta (o dostatečném počtu funkcionálů). *Nechť $x_0 \neq \theta$ je libovolný prvek v normovaném prostoru $\mathcal{R}$ a $M > 0$ libovolné číslo. Potom na $\mathcal{R}$ existuje takový spojitý lineární funkcionál $f(x)$, že*

$$\|f\|_{*,\mathcal{R}} = M\,, \tag{20.3}$$

přičemž

$$f(x_0) = \|f\|_{*,\mathcal{R}}\|x_0\|\,. \tag{20.4}$$

20.2a. Poznámka. Někdy se Věta 20.2 formuluje takto: *Nechť $x_0 \neq \theta$ je libovolný prvek v normovaném prostoru $\mathcal{R}$. Potom na $\mathcal{R}$ existuje takový lineární funkcionál $f(x)$, že*

$$\|f\|_* = 1; \quad f(x_0) = \|x_0\|,$$

tj. na prvku x_0 se realizuje znak rovnosti v normativní nerovnosti pro funkcionál f: $|f(x)| \leq \|f\|_*\|x\|$.

Důkaz Věty 20.2. Položme

$$f(tx_0) = tM\|x_0\|\,, \quad t \in R^1\,. \tag{20.5}$$

Vztah (20.5) definuje lineární funkcionál na jednorozměrném podprostoru $X_1 = \{tx_0\colon\, t \in R^1\} \subset \mathcal{R}$. Protože

$$|f(tx_0)| = |t|M\|x_0\| = M\|tx_0\|, \quad t \in R^1\,,$$

platí

$$\|f\|_{*,X_1} = M\,. \tag{20.6}$$

Z (20.6) podle Hahn-Banachovy věty plyne (20.3). Položíme-li $t = 1$ v (20.5), dostaneme (20.4). $\square$

Geometrický význam Věty 20.2 je tento: V Banachově prostoru lze každým bodem x_0 vést nadrovinu, která je tečná k nadkouli $\|x\| = \|x_0\|$.

21. Druhý adjungovaný prostor

Protože množina $\mathcal{R}^*$ lineárních funkcionálů na nějakém normovaném prostoru $\mathcal{R}$ tvoří opět normovaný prostor, můžeme mluvit o prostoru $\mathcal{R}^{**}$ lineárních funkcionálů na $\mathcal{R}^*$, tj. o druhém adjungovaném prostoru k prostoru $\mathcal{R}$, atd. Především poznamenejme, že každý prvek z $\mathcal{R}$ definuje nějaký lineární funkcionál na $\mathcal{R}^*$. Skutečně, nechť

$$\psi_{x_0}(f) = f(x_0)\,,$$

kde $x_0 \in \mathcal{R}$ je nějaký pevný prvek a f probíhá celý adjungovaný prostor $\mathcal{R}^*$. Takovým způsobem je je každému $f \in \mathcal{R}^*$ přiřazeno nějaké číslo $\psi_{x_0}(f)$. Přitom

$$\psi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x_0) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha\psi_{x_0}(f_1) + \beta\psi_{x_0}(f_2)\,,$$

$$|\psi_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leq \|f\|_*\|x_0\|\,,$$

tj. $\psi_{x_0}(f)$ je ohraničený lineární funkcionál na $\mathcal{R}^*$.

Spolu se zápisem $f(x)$ budeme užívat symetričtější značení

$$\langle f, x\rangle\,, \tag{21.1}$$

které připomíná zápis skalárního součinu. Při pevném $f \in \mathcal{R}^*$ můžeme uvažovat tento výraz jako funkcionál na $\mathcal{R}$ a při pevném $x \in \mathcal{R}$ jako funkcionál na $\mathcal{R}^*$.

Odtud plyne, že pro každý prvek $x \in \mathcal{R}$ je norma definována dvěma způsoby: 1. jeho norma se definuje jako norma prvku z $\mathcal{R}$; 2. jeho norma se definuje jako norma lineárního funkcionálu na $\mathcal{R}^*$, tj. jako norma prvku z $\mathcal{R}^{**}$. Nechť $\|x\|$ označuje normu x jako prvku z $\mathcal{R}$ a $\|x\|_{**}$ normu x jako prvku z $\mathcal{R}^{**}$. Ukážeme, že platí

$$\|x\| = \|x\|_{**}\,. \tag{21.2}$$

Nechť $f \in \mathcal{R}^*$ je libovolný funkcionál. Potom

$$|\langle f, x\rangle| \le \|f\|_*\|x\|\,, \quad \|x\| \ge \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|f\|_*};$$

protože levá strana poslední nerovnosti nezávisí na f, plyne odtud

$$\|x\| \ge \sup_{f\in\mathcal{R}^*} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|f\|_*} = \|x\|_{**}\,. \tag{21.3}$$

Ale podle Věty 20.2 (o dostatečném počtu funkcionálů) lze ke každému prvku $x \in \mathcal{R}$ najít takový spojitý lineární funkcionál $f_0 \in \mathcal{R}^*$, že

$$|\langle f_0, x\rangle| = \|f_0\|_*\|x\|\,.$$

Odtud a z (21.3) plyne

$$\|x\|_{**} \equiv \sup_{f\in\mathcal{R}^*} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|f\|_*} = \|x\|\,,$$

tj. platí vztah (21.2). Tím jsme dokázali tuto větu (co se týče pojmu *lineární varieta*, viz položku 11.5):

21.1. Věta. *Normovaný prostor $\mathcal{R}$ je izometrický s nějakou lineární varietou v $\mathcal{R}^{**}$.*

Protože jsme se dohodli nerozlišovat mezi sebou izometrické množiny, můžeme větu 21.1 také formulovat takto:

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^{**}\,.$$

V tom případě, když $\mathcal{R}^{**} = \mathcal{R}$, budeme normovaný prostor $\mathcal{R}$ nazývat *reflexivní*. Jestliže $\mathcal{R}^{**} \ne \mathcal{R}$, potom $\mathcal{R}$ se nazývá *nereflexivní*.

Euklidovské prostory R^n s konečnou dimenzí n a prostor l_2 jsou příklady reflexivních prostorů (pro ně dokonce platí $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$).

Prostor c_0 všech posloupností konvergujících k nule je příkladem úplného nereflexivního prostoru. Jak plyne z příkladu 19.4 adjungovaným prostorem k prostoru c_0 je prostor l_1 všech takových posloupností $\{f_n\}$, že $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < +\infty$; k němu je zase adjungován prostor M^{∞} všech ohraničených posloupností.

Prostor $C^0\langle a, b\rangle$ všech spojitých funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b\rangle$ je také nereflexivní. Důkaz tohoto tvrzení neuvádíme.[1]

Příkladem reflexivního prostoru, který není totožný s prostorem k němu adjungovaným, je prostor l_p pro $1 < p \neq 2$: protože $l_p^* = l_q$, kde $1/p + 1/q = 1$, je $l_p^{**} = l_q^* = l_p$.

Dá se dokázat toto tvrzení: buď je normovaný prostor reflexivní, tj.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{**} = \mathcal{R}^{****} = \dots,$$

$$\mathcal{R}^{*} = \mathcal{R}^{***} = \dots,$$

nebo jsou všechny prostory $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{R}^{**}$, ... různé. (Případ "buď" nevylučuje, že $\mathcal{R} = \mathcal{R}^* = \mathcal{R}^{**} = \dots$, tj, že všechny prostory $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{R}^{**}$, ... jsou stejné.)

[1] Lze dokázat dokonce toto silnější tvrzení: Neexistuje *žádný* normovaný prostor, pro nějž by prostor $C^0\langle a, b\rangle$ byl adjungovaným prostorem.