1 Výroková logika

Příklad:

Existuje ostrov poctivců (P), lhářů (L) a normálních lidí (N). Poctivci vždy mluví pravdu, lháři vždy lžou a normální lidi někdy mluví pravdu a někdy lžou.

Dva obyvatelé A, B. Každý z nich je buď P nebo L.
A prohlásí: Alespoň jeden z nás je lhář.
Co jsou A a B?

Řešení:

A	B	
P	P	×
P	L	
L	P	×
L	L	×

A je poctivec
B je lhář

Příklad:

Obyvatelé ostrova jsou rozděleni do kast: P - nejvyšší kasta, N - střední kasta, L - nejnižší kasta.

Dva obyvatelé A a B, každý z některé kasty.
A prohlásí: Jsem z nižší kasty než B.
B prohlásí: To není pravda.
Co jsou A a B?

Řešení:

A	B	
P	P	×
P	N	×
P	L	×
N	P	×
N	N	
N	L	×
L	P	×
L	N	×
L	L	×

A i B jsou normální.

Příklad:

Dva obyvatelé A, B. Je známo, že jeden z nich je P a jeden N.
Na otázku: Je B normální? A odpoví: *Ano* nebo *Ne*.
Ví se, že z odpovědi lze poznat, co jsou A a B.

Řešení:

A	B	Ano	Ne
P	N		×
N	P		

$\Rightarrow$ A je N a B je P.

Příklad:

Dva obyvatelé A, B. Každý z nich je buď P nebo L.
Na otázku, jestli jste oba poctivci A odpoví: *Ano* nebo *Ne*. Podle této odpovědi však nelze určit A a B.
Na další otázku: Jste oba stejného typu? A odpoví *Ano* nebo *Ne*. Podle této odpovědi lze však určit, co jsou A a B. Co jsou A a B?

Řešení:

A	B	Ano	Ne
P	P		×
P	L	×	
L	P		×
L	L		×

$\Rightarrow$ *Ano.*

A	B	Ano	Ne
P	P		×
L	P		×
L	L	×	

$\Rightarrow$ *Ne.*

A i B, jsou lháři.

Příklad:

Na ostrově byl spáchán zločin. Obviněný (jeden z pachatelů) byl postaven před soud.
Obviněný je lhář a je nevinen (to soud neví). Soud prokázal: Skutečný pachatel je lhář.
Obviněný smí učinit jediné prohlašení. Co řekne, aby přesvědčil soud o své nevině?

Řešení:

Obviněný prohlásí: Jsem vinen.

	Typ	Vinen	
1	P	ano	×
2	P	ne	×
3	N	ano	×
4	N	ne	
5	L	ano	×
6	L	ne	

1,3 - z nálezu soudu odpadají; 2,5 - z výroku obviněného; 4,6 - nevinen

Příklad:

Nějaký muž obviněný z loupeže byl postaven před soud.
Žalobce: Je-li obžalovaný vinen, potom měl společníka.
Obhájce: To není pravda.
Prospěl tím obhájce svému klientovi?

Řešení:
Obhájce tvrdil, že prohlášení žalobce je nepravdivé, tedy je pravdivé tvrzení: Obžalovaný je vinen, ale neměl společníka. Tedy obhájce svému klientovi neprospěl.

Příklad:

Ostrov P a L. Jistý obyvatel vyslovil následující 2 tvrzení:
1. Půjdu do kina.
2. Jestliže půjdu do kina, pak půjdu také do kavárny.
Byl tento obyvatel P nebo L?

Řešení:
Kdyby byl L, pak oba jeho výroky by byly nepravdivé. Výrok 2 by byl nepravdivý, čili bylo tedy pravdivé tvrzení: Půjdu do kina, ale nepůjdu do kavárny. Pak by výrok 1 byl pravdivý, což není možné. Jde tedy o P.

Příklad:

Dva obyvatelé A, B a jejich tvrzení:
A: B je lhář.
B: A je poctivec.
Co jsou A a B?

Řešení:
Je-li A poctivec, mluví pravdu, takže B je lhář, čili nemluví pravdu, takže A je lhář, což nelze.
Je-li A lhář, nemluví pravdu, takže B je poctivec a tedy mluví pravdu, takže A je poctivec, což nelze.
Je to paradox? NE. K takové události nemohlo nikdy dojít.

Příklad:

Důkaz existence sněžného muže.

1. Sněžný muž existuje.
2. Oba výroky v tomto rámečku jsou nepravdivé

Řešení:
Kdyby výrok 2 byl pravdivý, byly by výroky 1 a 2 nepravdivé, kdy zejména výrok 2 by byl nepravdivý, což není současně možné.
Tedy výrok 2 musí být nepravidivý, takže alespoň 1 z výroků 1 a 2 musí být pravdivý. Ovšem výrok 2 je nepravidvý. Tedy musí být pravdivý výrok 1, takže sněžný muž existuje.

Ovšem je třeba si uvědomit, že 2 je nepodložený výrok (není výrok) a tudíž, nemá smysl dokazovat z těchto tvrzení existenci.

Příklad:

Jiný důkaz existence sněžného muže. Dialog:
1. Jestliže se nemýlím, tak sněžný muž existuje.
2. To je samozřejmé.
1. Tedy můj výrok je pravdivý.
2. Jistě že, samozřejmě.
1. Tedy se nemýlím a jak bylo řečeno, pokud se nemýlím, pak sněžný muž existuje, čili sněžný muž existuje.

Zde je nutné si opět uvědomit, že 5. výrok hovoří ohledně pravdivosti výroku 1.

Příklad:

Zkoumejme lib. zobrazení $\psi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.
Prvky $\{0,1\}^n$ jsou lib. n-tice $(i_1, \dots, i_n)$, kde $i_1, \dots, i_n \in \{0,1\}$.
Vezmeme prvotní formule $p_1, \dots, p_n$. Pak n-tici $(i_1, \dots, i_n)$, lze chápat jako pravdivostní ohodnocení v: $\{p_1, \dots, p_n\} \to \{0,1\}$ dané předpisem $v(p_1) = i_1, \dots, v(p_n) = i_n$. Můžeme krátce psát $v = (i_1, \dots, i_n)$.
Buď A výroková formule obsahující prvotní formule $p_1, \dots, p_n$.
Definujeme zobrazení $\varphi_A : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ předpisem: pro každé $v = (i_1, \dots, i_n)$ položme $\varphi_A(v) = \bar{v}(A)$, kde $\bar{v}(A)$ je rozšíření v na výrokové formule.

Vzniká otázka: Existuje pro každé zobrazení $\psi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ výroková formule B s prvotními formulemi $p_1, \dots, p_n$ taková, že $\varphi_B = \psi$?

ANO. Mějme kupříkladu funkci $\psi : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ danou tabulkou:

p	q	r	ψ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

(p, q, r - prvotní formule)

Formule B pak bude tvaru:
$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$
$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

jiné řešení:
$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

Definice:

Literál je lib. prvotní formule p nebo její negace $\neg p$.

Elementární konjunkce je libovolná konjunkce konečného počtu literálů, tedy formule tvaru $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_n$, kde β_i jsou literály.

Elementární disjunkce je libovolná disjunkce konečného počtu literálů, tedy formule tvaru $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_n$, kde β_i jsou literály.

Formule A je v *disjunktivním normálním tvaru (DNT)*, jestliže A je disjunkcí konečného počtu elementárních konjunkcí.

Analogicky formule v *konjuntivním normálním tvaru (KNT)*.

Formule A je v *úplném disjunktivním normálním tvaru (ÚDNT)*, jestliže A je disjunkcí konečného počtu elementárních konjunkcí, přičemž každá prvotní formule, která se vyskytuje v A, se vyskytuje v každé elementární konjunkci.

Př.: $A = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$

Analogicky formule v *úplném konjuntivním normálním tvaru (ÚKNT)*.

Každá výroková formule A výjma kontradikce je logicky ekvivalentní nějaké formuli v úplném diskjunktivním normálním tvaru.

Každá výroková formule A výjma tautologie je logicky ekvivalentní nějaké formuli v úplném konjunktivním normálním tvaru.

Příklad:

K formuli $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ najděte logicky ekvivalentní formuli v úplném disjunktivním a úplném konjunktivním normálním tvaru.

p	q	r	$\neg p \Rightarrow q$	$\Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

úplný disjunktivní normální tvar:

$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$
$\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

úplný konjunktivní normální tvar:

$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Definice:

Řekneme, že A je *formulí s těsnými negacemi*, jestliže A obsahuje pouze logické spojky $\neg, \wedge, \vee$, přičemž negace $\neg$ je aplikována pouze na prvotní formule. Nebo-li, jestliže tedy je vytvořena z literálů jenom s použitím spojek $\wedge, \vee$.

Buď A formule s těsnými negacemi. Definujme $\tilde{A}$ jako formuli, která vznikne z A záměnou každého výskytu $\wedge$ spojkou $\vee$ a naopak a každého literálu tvaru p na $\neg p$ a naopak.

Příklad:

Ukažte, že pro každou výrokovou formuli A platí $\tilde{A} \sim \neg A$.

Důkaz:
Indukcí vzhledem k počtu logických spojek (ke složitosti A).

I.
Je-li $A = p$, kde p je prvotní formule, pak $\tilde{A} = \neg p$, $\neg A = \neg p$, takže také $\tilde{A} = \neg A$.
Je-li $A = \neg p$, kde p je prvotní formule, pak $\tilde{A} = p$, $\neg A = \neg\neg p$, takže také $\tilde{A} \sim \neg A$, neboť $p \sim \neg\neg p$.

II. (*indukční krok*)
Je-li $A = B \wedge C$, pak $\tilde{A} = \tilde{B} \vee \tilde{C}$. Podle indukčního předpokladu $\tilde{B} \sim \neg B$, $\tilde{C} \sim \neg C$, takže $\tilde{B} \vee \tilde{C} \sim (\neg B) \vee (\neg C) \sim \neg(B \wedge C)$, čili $\tilde{A} \sim \neg A$.
Je-li $A = B \vee C$, pak $\tilde{A} = \tilde{B} \wedge \tilde{C}$. Podle indukčního předpokladu $\tilde{B} \sim \neg B$, $\tilde{C} \sim \neg C$, takže $\tilde{B} \wedge \tilde{C} \sim (\neg B) \wedge (\neg C) \sim \neg(B \vee C)$, čili $\tilde{A} \sim \neg A$.

Definice:

Buď A formule s těsnými negacemi. Definujeme k ní duální formuli A^* jako formuli, která vznikne z A záměnou každého výskytu spojky $\wedge$ spojkou $\vee$ a naopak.

Příklad:

Ukažte, že pro dvě formule A, B s těsnými negacemi z $A \sim B$ plyne $A^* \sim B^*$.
Jde o *zákon duality*.

Důkaz:
Nechť $A \sim B$. Tedy pro každé pravdivostní ohodnocení u prvotních formulí platí $\bar{u}(A) = \bar{u}(B)$. Tzn. také, že pro každé pravdivostní ohodnocení u platí $\bar{u}(\neg A) = \bar{u}(\neg B)$. To ale říká, že $\neg A \sim \neg B$.

Vezměme nyní lib. pravdivostní ohodnocení v a zkoumejme hodnoty $\bar{v}(A^*)$, $\bar{v}(B^*)$.
Definujeme k tomu pravdivostní ohodnocení w tak, že pro každou prvotní formuli p bude $w(p)$ opačná hodnota oproti $v(p)$.
Pak je jasné, že $\bar{v}(A^*) = \bar{w}(\tilde{A})$, $\bar{v}(B^*) = \bar{w}(\tilde{B})$. Neboť víme, že $\tilde{A} \sim \neg A$, $\tilde{B} \sim \neg B$, máme $\bar{w}(\tilde{A}) = \bar{w}(\neg A)$, $\bar{w}(\tilde{B}) = \bar{w}(\neg B)$.
Dále jelikož $\neg A \sim \neg B$, máme $\bar{w}(\neg A) = \bar{w}(\neg B)$. Celkem dostáváme $\bar{v}(A^*) = \bar{v}(B^*)$.
Tudíž $A^* \sim B^*$.

Příklad:

Ukažte, že výroková formule A obsahující prvotní formule $p_1 \dots p_k$ je logicky ekvivalentní nějaké výrokové formuli B obsahující pouze logické spojky $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, právě tehdy, když A je tautologie nebo v ÚKNT formule A chybí elementární disjunkce $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_k$.

Důkaz:
Nechť $A \sim B$, kde ve formuli B jsou pouze $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$.

Je-li A tautologie, jsme hotovi.

Nechť tedy A není tautologie. Připusťme, že $A \sim C$, kde C je v ÚKNT a obsahuje elementární disjunkci $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_k$.
Uvažme pravdivostní ohodnocení v: $\{p_1, \dots, p_k\} \to \{0, 1\}$, takové, že $v(p_1) = v(p_2) = \dots = v(p_k) = 1$. Pak $\bar{v}(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_k) = 0$, tudíž $\bar{v}(C) = 0$.
Na druhé straně indukcí vzhledem ke složitosti B se snadno ukáže, že $\bar{v}(B) = 1$. To je ale spor s tím, že $C \sim A \sim B$.

Naopak je-li A tautologie obsahující prvotní formule $p_1, \ldots, p_k$, pak $A \sim p_1 \Rightarrow p_1$ nebo $A \sim (p_1 \Rightarrow p_1) \wedge (p_2 \Rightarrow p_2) \wedge \ldots \wedge (p_k \Rightarrow p_k)$.
Není-li A tautologie a je-li $A \sim C$, kde C je formule prvotních formulí $p_1, \ldots, p_k$ v ÚKNT neobsahující elementární disjunkci $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_k$, pak každá elementární disjunkce ve formuli C je tvaru $p_{i1} \vee p_{i2} \vee \ldots \vee p_{i_s} \vee \neg p_{j_1} \vee \neg p_{j_2} \vee \ldots \vee \neg p_{j_t}$ pro jisté $i_1, \ldots, i_s, j_1, \ldots, j_t \in \{1, \ldots, k\}$, přičemž $s \geq 1$, $t \geq 0$.
Je-li $t = 0$, pak tato elementarní disjunkce neobsahuje $\neg$.
Je-li $t \geq 1$, pak tato elementární disjunkce je logicky ekvivalentní formuli $(p_{j_1} \wedge p_{j_2} \wedge \ldots \wedge p_{j_t}) \Rightarrow (p_{i1} \vee p_{i2} \vee \ldots \vee p_{i_s})$, která neobsahuje spojku $\neg$.

Tímto způsobem přejde formule C v logicky ekvivalentní formuli, která neobsahuje spojku $\neg$, ale pouze $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$.

Příklad:

Ukažte, že pro lib. formule A, B, C platí:
a) $A \Leftrightarrow A \sim B \Leftrightarrow B$
b) $A \Leftrightarrow B \sim B \Leftrightarrow A$
c) $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C) \sim (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$
d) $A \sim A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow B)$
e) $A \Leftrightarrow (\neg B) \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$

Důkaz:
a) plyne z toho, že obě formule $A \Leftrightarrow A$, $B \Leftrightarrow B$ jsou tautologie
b) zřejmé z definice ekvivalence
c) ověříme tabulkou:

A	B	C	$B \Leftrightarrow C$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Můžete se pokusit dokázat toto také pomocí nepřímé metody.

d) plyne z toho, že $(B \Leftrightarrow B)$ je tautologie
e) opět tabulkou

A	B	$A \Leftrightarrow \neg B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Příklad:

Ukažte, že výroková formule A obsahující pouze logické spojky $\Leftrightarrow$ je tautologie, právě když počet všech výskytů každé prvotní formule v A je sudý.

Důkaz:
Nechť A je formule obsahující logické spojky $\Leftrightarrow$. Pak z (c) plyne, že ve formuli A lze měnit, případně vynechat uzávorkování. (b) umožňuje měnit pořadí prvotních formulí v A. (d) umožňuje vynechávat nebo přidávat dvojice ze stejných prvotních formulí.

Předpokládejme nyní, že ne každá prvotní formule má ve formuli A sudý počet výskytů.
Nechť $p_{i1}, \ldots, p_{it}$ jsou všechny různé prvotní formule, které mají v A lichý počet výskytů.
Pak odtud dostáváme $A \sim p_{i1} \Leftrightarrow (p_{i2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow p_{it})$.
Zvolíme pravdivostní ohodnocení v prvotních formulí tak, že $v(p_{i1}) = 0$, $v(p_{i2}) = \ldots = v(p_{it}) = 1$.
Pak $\bar{v}(p_{i2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow p_{it}) = 1$, takže $\bar{v}(p_{i1} \Leftrightarrow (p_{i2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow p_{it})) = 0$, čili $\bar{v}(A) = 0$, a tedy A není tautologie. (spor)

Toto je v pořádku, je-li $t \geq 2$. Je-li $t = 1$, pak $A \sim p_{i1}$ a tedy $\bar{v}(A) = \bar{v}(p_{i1}) = 0$, čili A zase není tautologie.

Nechť naopak počet výskytů každé prvotní formule ve formuli A je sudý. Pak předchozí úvahy umožňují odvodit např. $A \sim p_1 \Leftrightarrow p_1$, takže A je tautologie.

Příklad:

Ukažte, že formule A obsahující pouze logické spojky $\Leftrightarrow$, $\neg$ je tautologie, právě když počet všech výskytů spojky $\neg$ a také počet všech výskytů každé prvotní formule ve formuli A je sudý.

Důkaz:
S použitím (b), (e) indukcí vzhledem ke složitosti formule A lze dokázat, že v případě, kdy počet výskytů spojky $\neg$ ve formuli je sudý, máme $A \sim C$, a v případě, že počet výskytů spojky $\neg$ ve formuli je lichý, máme $A \sim \neg C$, kde formule C obsahuje pouze spojku $\Leftrightarrow$ a počet výskytů každé prvotní formule v C je stejný jako v A.

Je-li počet výskytů spojky $\neg$ ve formuli A lichý, pak $A \sim \neg C$, kde C obsahuje pouze spojku $\Leftrightarrow$ a pro pravdivostní ohodnocení v takové, že $v(p) = 1$ pro všechny prvotní formule p, máme $\bar{v}(C) = 1$, takže $\bar{v}(\neg C) = \bar{v}(A) = 0$, čili A není tautologie.

Je-li počet výskytů spojky $\neg$ ve formuli A sudý, avšak je-li počet výskytů nějaké prvotní formule ve formuli A lichý, pak máme $A \sim C$, kde C obsahuje pouze spojku $\Leftrightarrow$, a počet výskytů uvedené prvotní formule ve formuli C je rovněž lichý.
Z jednoho z minulých příkladů víme, že pak C, a tudíž ani A nejsou tautologie.

Naopak, je-li počet všech výskytů spojky $\neg$ a také počet všech výskytů každé prvotní formule ve formuli A sudý, pak máme $A \sim C$, kde C obsahuje pouze spojku $\Leftrightarrow$ a počet všech výskytů každé prvotní formule ve formuli C je sudý.
Z minulých příkladů pak C a tutíž také A jsou tautologie.

Příklad:

Najděte výrokovou formuli A obsahující prvotní formule p, q, r takovou, aby platilo:

$p \wedge A \sim p \wedge q$
$p \vee A \sim p \vee r$

Řešení:
Pro každé pravdivostní ohodnocení v má platit $\bar{v}(p \wedge A) = \bar{v}(p \wedge q)$ a $\bar{v}(p \vee A) = \bar{v}(p \vee r)$.

2 Predikátová logika

Příklad:

Jazyk s jedním binárním predikátovým symbolem r.
Vypište všechny podformule formule: $(\forall x)(\forall y)(r(x,y) \Rightarrow (\exists z)(r(y,z) \wedge r(z,x)))$ a vyznačte v nich všechny volné výskyty proměnných.

Řešení:

$r(y,z)$	y, z
$r(x,y)$	x, y
$r(z,x)$	z, x
$r(y,z) \wedge r(z,x)$	x, y, z
$(\exists z)(r(y,z) \wedge r(z,x))$	y, x
$(r(x,y) \Rightarrow (\exists z)(r(y,z) \wedge r(z,x)))$	y, x
$(\forall y)(r(x,y) \Rightarrow (\exists z)(r(y,z) \wedge r(z,x)))$	x
$(\forall x)(\forall y)(r(x,y) \Rightarrow (\exists z)(r(y,z) \wedge r(z,x)))$	-

Příklad:

Mějme jazyk s rovností a s jedním binárním predikátovým symbolem $\leq$. Realizace tohoto jazyka jsou neprázdné množiny opatřené jednou binární relací. Příklady takových realizací mohou být uspořádané množiny $\mathcal{M} = (M, \leq)$. Napište v tomto jazyce formule $\varphi(x), \psi(x)$ s jednou volnou proměnnou x takové, aby pro každou uspořádanou množinu $\mathcal{M} = (M, \leq)$ a pro každý prvek $a \in M$ platilo:

$\mathcal{M} \models \varphi[a]$ právě když a je maximální prvek v $\mathcal{M}$.
$\mathcal{M} \models \psi[a]$ právě když a je minimální prvek v $\mathcal{M}$.

Řešení:
Formule $\varphi(x)$ bude: $(\forall y)((x \leq y) \Rightarrow (x = y))$
Formule $\psi(x)$ bude: $(\forall z)((z \leq x) \Rightarrow (z = x))$

Příklad:

Mějme jazyk elementární aritmetiky a jeho standardní realizaci $\mathbb{N}_0$. Napište formuli $\eta(x,y,z)$ s volnými proměnnými x, y, z takovou, aby pro každá $m,n,k \in \mathbb{N}_0$ platilo: $\mathbb{N}_0 \models \eta[m,n,k]$ právě když $|m-n| \geq k$.

Řešení:
$\eta(x,y,z) = (\exists w)(w + (y+z) = x) \vee (\exists u)(u + (x+z) = y)$

Příklad:

Napište v tomto jazyce formuli $\chi(x,y,z)$ s volnými proměnnými x, y, z takovou, aby pro každé $m,n,k \in \mathbb{N}_0$ platilo: $\mathbb{N}_0 \models \chi[m,n,k]$ právě když $k \geq 1$ a $m \equiv n \; (mod\, k)$.

Řešení:
$\chi(x,y,z) = (\exists t)(z = S(0) + t) \wedge (\exists u)((x = z \cdot u + y) \vee (y = z \cdot u + x))$

Příklad:

Mějme jazyk s rovností a s jedním binárním predikátovým symbolem $\subseteq$. Buď A neprázdná množina. Značme $\mathcal{P}(A)$ realizaci tohoto jazyka, jejímž universem je množina 2^A všech podmnožin A a symbol $\subseteq$ je interpretován množinovou inkluzí.
Napište formule $\alpha(x), \beta(x)$ takové, aby pro libovolnou podmnožinu $B \subseteq A$ platilo:
$\mathcal{P}(A) \models \alpha[B]$ právě když $B = A$
$\mathcal{P}(A) \models \beta[B]$ právě když $B = \emptyset$

Řešení:
$\alpha(x) = (\forall s)(s \subseteq x)$
$\beta(x) = (\forall t)(x \subseteq t)$

Příklad:

Napište formuli $\gamma(x)$ takovou, aby pro libovolnou podmnožinu $B \subseteq A$ platilo: $\mathcal{P}(A) \models \gamma[B]$ právě když $|B| = 1$.

Řešení:
$\gamma(x) = \neg\beta(x) \wedge (\forall z)((z \subseteq x) \Rightarrow ((z = x) \vee \beta(z)))$

Příklad:

Ukažte, že pro lib. dvě formule φ, ψ jazyka L je $(\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)$ logicky platnou fomulí.

Důkaz:
Máme ukázat, že pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka L a pro každé ohodnocení proměnných e platí $\mathcal{M} \models ((\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi))[e]$.
Jestliže $\mathcal{M} \not\models (\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi)[e]$, pak jsme hotovi.
Předpokládejme tedy dále $\mathcal{M} \models (\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi)[e]$. To znamená, že existuje prvek $m \in M$, takový, že $\mathcal{M} \models (\varphi \Rightarrow \psi)[e(x/m_0)]$.
Jestliže $\mathcal{M} \not\models (\forall x)\varphi[e]$, pak $\mathcal{M} \models ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)[e]$ a jsme znovu hotovi.
Předpokládejme tedy dále také, že $\mathcal{M} \models (\forall x)\varphi[e]$. To znamená, že pro každý prvek $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models \varphi[e(x/m)]$. Tím spíše tedy $\mathcal{M} \models \varphi[e(x/m_0)]$ se závěrem předchozích úvah dává $\mathcal{M} \models \psi[e(x/m_0)]$. To znamená, že $\mathcal{M} \models (\exists x)\psi[e]$. Takže $\mathcal{M} \models ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)[e]$.
Závěrem opět dostáváme $\mathcal{M} \models ((\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi))[e]$.

Příklad:

Ukažte, že jsou-li φ, ψ libovolné dvě formule jazyka L a je-li x proměnná, která nemá volný výskyt ve formuli ψ, pak platí $(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \sim (\exists x)\varphi \Rightarrow \psi$ (tyto dvě formule jsou logicky ekvivalentní).

Důkaz:
Máme dokázat, že v lib. realizaci $\mathcal{M}$ jazyka L při libovolném ohodnocení proměnných e máme $\mathcal{M} \models (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi)[e]$ právě když $\mathcal{M} \models ((\exists x)\varphi \Rightarrow \psi)[e]$.
Předpokládejme nejprve, že $\mathcal{M} \models (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi)[e]$. To znamená, že pro každé $m \in M$ (universum M) máme $\mathcal{M} \models (\varphi \Rightarrow \psi)[e(x/m)]$.
Jestliže $\mathcal{M} \not\models (\exists x)\varphi[e]$, pak $\mathcal{M} \models ((\exists x)\varphi \Rightarrow \psi)[e]$ a jsme hotovi.
Předpokládejme tedy dále, že $\mathcal{M} \models (\exists x)\varphi[e]$. To znamená, že existuje prvek $m_0 \in M$ takový, že $\mathcal{M} \models \varphi[e(x/m_0)]$. Toto spolu s předchozím poznatkem ukazuje, že pro tento prvek m_0 máme $\mathcal{M} \models \psi[e(x/m_0)]$. Jelikož ale nemá volný výskyt ve ψ, pravdivost ψ nezávisí na ohodnocení x, takže poslední poznatek znamená také, že $\mathcal{M} \models \psi[e]$. Odtud plyne, že $\mathcal{M} \models ((\exists x)\varphi \Rightarrow \psi)[e]$ a jsme hotovi.
Předpokládejme naopak, že $\mathcal{M} \models ((\exists x)\varphi \Rightarrow \psi)[e]$. To znamená, že nastává jedna z následujících možností:

- Buďto $\mathcal{M} \not\models (\exists x)\varphi[e]$. To znamená, že pro každý prvek $m \in M$ máme, že $\mathcal{M} \not\models \varphi[e(x/m)]$. To ale znamená, že při každém $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models (\varphi \Rightarrow \psi)[e(x/m)]$, takže platí $\mathcal{M} \models (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi)[e]$ a jsme hotovi.

- Nebo teda $\mathcal{M} \models \psi[e]$. Jelikož však x není volná ve ψ, znamená to, že také pro každý prvek $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models \psi[e(x/m)]$.
  Odtud plyne, že $\mathcal{M} \models (\varphi \Rightarrow \psi)[e(x/m)]$ při každém $m \in M$, čili celkem to dává, že $\mathcal{M} \models (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi)[e]$ a jsme hotovi.

Příklad:

Podobně řeště úlohu pro $(\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi) \sim (\forall x)\varphi \Rightarrow \psi$.

Příklad:

Ukažte, že pro lib. formule φ, ψ platí: $\vdash (\exists x)(\neg\varphi) \to ((\forall x)\varphi \to \psi)$.

Důkaz:

$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	dosazením do tautologie $p \to \neg\neg p$
$\vdash (\forall x)\varphi \to (\forall x)(\neg\neg\varphi)$	distribuce kvantifikátoru $\forall$
$\vdash \neg(\forall x)(\neg\neg\varphi) \to \neg(\forall x)\varphi$	obrácení implikace
$\vdash \neg(\forall x)\varphi \to ((\forall x)\varphi \to \psi)$	dosazení do tautologie $\neg p \to (p \to q)$
$\vdash \neg(\forall x)(\neg\neg\varphi) \to ((\forall x)\varphi \to \psi$	složení implikací
$\vdash (\exists x)(\neg\varphi) \to ((\forall x)\varphi \to \psi)$	zkratka $\exists$

Příklad:

Ukažte, že pro lib. formule φ, ψ platí: $\vdash ((\forall x)\varphi \to (\exists x)\psi) \to (\exists x)(\varphi \to \psi)$.

Důkaz:

$\vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	první výrokový axiom
$\vdash (\exists x)\psi \to (\exists x)(\varphi \to \psi)$	distribuce kvantifikatoru $\exists$
$\vdash (\neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$	dosazení do tautologie
$\vdash (\exists x)(\neg\varphi) \to (\exists x)(\varphi \to \psi)$	distribuce kvantifikatoru $\exists$
$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	dosazení do tautologie
$\vdash (\forall x)(\neg\neg\varphi) \to (\forall x)\varphi$	distribuce kvantifikatoru $\forall$
$\vdash \neg(\forall x)\varphi \to \neg(\forall x)(\neg\neg\varphi)$	obracení implikace
$\vdash \neg(\forall x)\varphi \to (\exists x)(\neg\varphi)$	zkratka $\exists$
$\vdash \neg(\forall x)\varphi \to (\exists x)(\varphi \to \psi)$	složení implikací

dosazením do tautologie $(q \to r) \to (((\neg p) \to r) \to ((p \to q) \to r))$ odvodíme:

$$\vdash ((\exists x)\psi \to (\exists x)(\varphi \to \psi)) \to ((\neg(\forall x)\varphi \to (\exists x)(\varphi \to \psi)) \to (((\forall x)\varphi \to (\exists x)\psi) \to (\exists x)(\varphi \to \psi)))$$

odtud dvojím užitím pravidla odloučení plyne dokazovaná formule.

Příklad:

Ukažte, že pro lib. formule φ, ψ platí: $\vdash (\exists x)(\varphi \to \psi) \to ((\forall x)\varphi \to (\exists x)\psi)$.

Důkaz:

$\vdash (\forall x)\varphi \to \varphi$	axiom substituce
$(\forall x)\varphi \vdash \varphi$	pravidlo odloučení
$\vdash \varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$	dosazení do tautologie
$(\forall x)\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$	pravidlo odloučení
$(\forall x)\varphi \vdash (\exists x)(\varphi \to \psi) \to (\exists x)\psi$	distribuce kvantifikátoru $\exists$
$(\exists x)(\varphi \to \psi), (\forall x)\varphi \vdash (\exists x)\psi$	pravidlo odloučení
$(\exists x)(\varphi \to \psi) \vdash (\forall x)\varphi \to (\exists x)\psi$	věta o dedukci (poznámka za větou)
$\vdash (\exists x)(\varphi \to \psi) \to ((\forall x)\varphi \to (\exists x)\psi)$	věta o dedukci (poznámka za větou)

Příklad:

V jazyce s rovností a jedním binárním predikátovým symbolem r platí:
$\vdash (\forall x)(\neg r(x,x)) \to (\forall x)(\forall y)(r(x,y) \to \neg(x=y))$.

Důkaz:

$\vdash y = x \to (r(x,y) \to r(x,x))$	třetí axiom rovnosti
$\vdash x = y \to y = x$	symetrie rovnosti
$\vdash x = y \to (r(x,y) \to r(x,x))$	složení implikací

dosazením do tautologie $(p \to (q \to r)) \to (\neg r \to (q \to \neg p))$ dostanem
$\vdash (x = y \to (r(x,y) \to r(x,x))) \to (\neg r(x,x) \to (r(x,y) \to \neg(x=y)))$

$\vdash \neg r(x,x) \to (r(x,y) \to \neg(x=y))$	pravidlo odloučení
$\vdash \neg r(x,x) \to (\forall y)(r(x,y) \to \neg(x=y))$	pravidlo zavedení $\forall$
$\vdash (\forall x)(\neg r(x,x)) \to (\forall x)(\forall y)(r(x,y) \to$ $\to \neg(x=y))$	distribuce kvantifikatoru $\forall$

Příklad:

Ukažte, že v jazyce s rovností a s jedním binárním predikátovým symbolem r platí:
$\vdash (\forall x)(\forall y)(\neg(x=y) \to r(x,y)) \to (\forall x)(\forall y)(r(x,y) \to r(y,x))$

Důkaz:

$\vdash (\forall x)(\forall y)(\neg(x=y) \to r(x,y)) \to$ $\to (\neg(x=y) \to (r(x,y))$	dvojí použití axiomu substituce a složení implikací
$(\forall x)(\forall y)(\neg(x=y) \to r(x,y)) \vdash \neg(x=y) \to$ $\to r(x,y)$	pravidlo odloučení
$(\forall x)(\forall y)(\neg(x=y) \to r(x,y)) \vdash \neg(y=x) \to$ $\to r(y,x)$	instance předchozí formule
$\vdash y = x \to (r(x,y) \to r(y,x))$	užití axiomů rovnosti a výrokové logiky

Dosazením do tautologie $(a \to (b \to c)) \to ((\neg a \to c) \to (b \to c))$; formuli $y = x$ za a, $r(x,y)$ za b, $r(y,x)$ za c, obdržíme dokazatelnou formuli, z níž potom užitím pravidla odloučení s využitím předchozích formulí dostaneme

$(\forall x)(\forall y)(\neg(x=y) \to r(x,y)) \vdash r(x,y) \to$ $\to r(y,x)$	dvojí užití pravidla zobecnení
$(\forall x)(\forall y)(\neg(x=y) \to r(x,y)) \vdash (\forall x)(\forall y)$ $(r(x,y) \to r(y,x))$	
$\vdash (\forall x)(\forall y)(\neg(x=y) \to r(x,y)) \to$ $\to (\forall x)(\forall y)(r(x,y) \to r(y,x))$	věta o dedukci

Příklad:

Mějme modifikovaný systém predikátové logiky, v němž oproti původnímu systému chybí axiomy kvantifikátoru a místo pravidla zobecnění se používá pravidlo zavedení univerzálního kvantifikátoru. Ukažte, že tento systém je ekvivalentní původnímu systému (tedy, že v obou systémech jsou dokazatelné ty samé formule.)

Důkaz:
V původním systému jsme pravidlo zobecnění $\forall$ získali jako odvozené pravidlo. Naopak je třeba v modifikovaném systému odvodit nejprve axiomy kvantifikátoru:

Nechť φ, ψ jsou formule a nechť proměnná x nemá volný výskyt ve formuli φ. Máme ukázat, že pak je v tom modifikovaném systému dokazatelná formule $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$. Vezměme axiom substituce $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$. Dosazením do tautologie $(a \to (b \to c)) \to ((a \wedge b) \to c)$ formule $(\forall x)(\varphi \to \psi)$ za a, φ za b, ψ za c a užitím pravidla odloučení obdržíme formuli $(\forall x)(\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to \psi$. Užitím pravidla zavedení $\forall$ odtud získáme formuli $((\forall x)(\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to (\forall x)\psi$. Dosazením do tautologie $((e \wedge f) \to g) \to (e \to (f \to g))$ formule $(\forall x)(\varphi \to \psi)$ za e, φ za f a $(\forall x)\psi$ za g a užitím pravidla odloučení obdržíme formuli $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$.
Dále musíme v modifikovaném systému odvodit pravidlo zobecnění. Pro libovolnou formuli φ a libovolnou proměnnou x máme být schopni získat formuli $(\forall x)\varphi$. Vezmeme jakoukoliv uzavřenou formuli η. Zobecněním do tautologie $a \to (b \to a)$. Pořídíme formuli $\varphi \to ((\eta \vee \neg\eta) \to \varphi)$, odtud s použitím pravidla odloučení spolu s formulí φ získáme $(\eta \vee \neg\eta) \to \varphi)$. Pravidlem zavedení univerzálního kvantifikátoru $\forall$ pak dostaneme $(\eta \vee \neg\eta) \to (\forall x)\varphi$, a poněvadž $\eta \vee \neg\eta$ je tautologie, pravidlem odloučení dostaneme $(\forall x)\varphi$.

Příklad:

Ukažte, že pro libovolnou formuli φ a libovolné proměnné x, y platí:
$\vdash (\exists x)(\forall y)\varphi \to (\forall y)(\exists x)\varphi$

Důkaz:

$\vdash (\forall y)\varphi \to \varphi$	axiom substituce
$\vdash (\exists x)(\forall y)\varphi \to (\exists x)\varphi$	pravidlo distribuce kvantifikátoru $\exists$
$\vdash (\exists x)(\forall y)\varphi \to (\forall y)(\exists x)\varphi$	pravidlo zavedení $\forall$

Jiný důkaz:

$\vdash \varphi \to (\exists x)\varphi$	duální formule v axiomu substituce
$\vdash (\forall y)\varphi \to (\forall y)(\exists x)\varphi$	distribuce $\forall$
$\vdash (\exists x)(\forall y)\varphi \to (\forall y)(\exists x)\varphi$	pravidlo zavedení $\exists$

Definice:

Formule φ jazyka L se nazývá *otevřená*, neobsahuje-li žádný kvantifikátor. Řekneme, že φ jazyka L je v *prenexním tvaru*, má-li tvar $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_nx_n)\psi$, kde $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou vzájemně různé proměnné, každý z $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ je některý z kvantifikátorů $\forall$, $\exists$ a ψ je otevřená formule jazyka L. Pak ψ se nazývá *otevřené jádro* formule φ a předcházející posloupnost kvantifikátorů je *prefix*. Každá formule jazyka L je logicky ekvivalentní některé formuli v prenexním tvaru.

1. Je-li ξ lib. formule a je-li x lib. proměnná, pak

   $\neg(\forall x)\xi \sim (\exists x)(\neg\xi)$
   $\neg(\exists x)\xi \sim (\forall x)(\neg\xi)$

2. Je-li Q kterýkoliv z kvantifikátorů $\forall$, $\exists$, je-li $\Box$ kterákoliv ze spojek $\wedge$, $\vee$ a jsou-li ξ, η jakékoliv dvě formule a je-li x proměnná, která se nevyskytuje ve formuli η, pak

   $(Qx)\xi\Box\eta \sim (Qx)(\xi\Box\eta)$
   $\eta\Box(Qx)\xi \sim (Qx)(\eta\Box\xi)$

3. Je-li ξ lib. formule, je-li x lib. proměnná a je-li y proměnná, která se nevyskytuje v ξ, pak

   $(\forall x)\xi \sim (\forall y)\xi_x[y]$
   $(\exists x)\xi \sim (\exists y)\xi_x[y]$

4. Je-li ξ lib. formule, je-li x proměnná, která nemá volný výskyt v ξ, pak

   $(\forall x)\xi \sim \xi$
   $(\exists x)\xi \sim \xi$

Převod formule φ do prenexního tvaru:

Přepíšeme formuli φ tak, aby obsahovala z logických spojek pouze $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Dále postupujeme indukcí vzhledem ke složitosti. Je-li φ atomická formule, pak je v prenexním tvaru. Je-li φ formule tvaru $\neg\rho$, pak převedeme ρ na prenexní tvar a pak použijeme opakovaně (1). Je-li φ tvaru $\sigma \wedge \tau$ nebo $\sigma \vee \tau$, převedeme σ a τ na prenexní tvar. Je-li třeba použijeme (3) k přeznačení proměnných, které jsou v prefixech a pak opakovaně aplikujeme (2). Je-li φ tvaru $(\forall x)\chi$ nebo $(\exists x)\chi$, převedeme χ na prenexní tvar a podle okolností použijem (4).

Příklad:

Mějme jazyk s jedním unárním predikátovým symbolem p a se dvěma binárními predikátovými symboly r, s. K formuli $(\forall x)(p(x) \rightarrow (\forall y)(r(x,y) \rightarrow \neg(\forall z)s(y,z)))$ najděte logicky ekvivalentní formuli v prenexním tvaru.

Řešení:

$(\forall x)(\neg p(x) \vee (\forall y)(\neg r(x,y) \vee \neg(\forall z)s(y,z)))$
$(\forall x)(\neg p(x) \vee (\forall y)(\neg r(x,y) \vee (\exists z)\neg s(y,z)))$ (1)
$(\forall x)(\neg p(x) \vee (\forall y)(\exists z)(\neg r(x,y) \vee \neg s(y,z)))$ (2)
$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\neg p(x) \vee \neg r(x,y) \vee \neg s(y,z))$ 2x(2)

Příklad:

Mějme jazyk s rovností a jedním binárním predikátovým symbolem $\leq$.
K formuli $(\forall x)(\exists y)(x \leq y \wedge \neg(x = y)) \wedge \neg(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$ najděte logicky ekvivalentní formuli v prenexním tvaru.

Řešení:

$(\forall x)(\exists y)(x \leq y \wedge \neg(x = y)) \wedge (\forall x)(\exists y)\neg(x \leq y)$ (1)
$(\forall z)(\exists p)(z \leq p \wedge \neg(z = p)) \wedge (\forall x)(\exists y)\neg(x \leq y)$ (3)
$(\forall z)(\exists p)(\forall x)(\exists y)(z \leq p \wedge \neg(z = p)) \wedge \neg(x \leq y)$ 4x(2)

Příklad:

Mějme jazyk s rovností, konstantou 1 a jedním binárním funkčním symbolem $\cdot$.
K formuli $(\forall x)(\exists y)(x \cdot y = 1) \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot z = y \cdot z \rightarrow x = y)$ najděte logicky ekvivalentní formuli v prenexním tvaru.

Řešení:

$\neg(\forall x)(\exists y)(x \cdot y = 1) \vee (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\neg(x \cdot z = y \cdot z) \vee x = y)$
$(\exists x)(\forall y)\neg(x \cdot y = 1) \vee (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\neg(x \cdot z = y \cdot z) \vee x = y)$ (1)
$(\exists u)(\forall v)\neg(u \cdot v = 1) \vee (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\neg(x \cdot z = y \cdot z) \vee x = y)$ (3)
$(\exists u)(\forall v)(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\neg(u \cdot v = 1) \vee \neg(x \cdot z = y \cdot z) \vee x = y)$ 5x(2)

Příklad:

Řekneme, že grupa G je divisibilní, splňuje-li podmínku: pro každé $a \in G$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $b \in G$ takové, že $a = b^n$. Mějme jazyk teorie grup. Speciálními axiomy $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $x \cdot 1 = x$, $1 \cdot x = x$, $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ zadávají teorii grup.
Modely této teorie jsou právě všechny grupy. Přidáme-li další speciální axiomy:

$(\forall x)(\exists y)(x = y \cdot y)$
$(\forall x)(\exists y)(x = y \cdot y \cdot y)$
$\vdots$
$(\forall x)(\exists y)(x = y^n)$

Jde tedy o nekonečnou posloupnost axiomů pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dostaneme teorii T, jejímiž modely jsou právě všechny divisibilní grupy.
Ukážeme, že tato teorie T není v jazyce teorie grup ekvivalentní žádné konečné teorii (ekv. teorie: axiomy z jedné jsou dokazatelné v druhé a naopak). Připusťme, že by v tomto jazyce existovala konečná teorie S ekvivalentní teorii T. Pak bychom pro každou formuli $\sigma \in S$ měli $T \vdash \sigma$ a pro každou formuli $\tau \in T$ bychom měli $S \vdash \tau$.
Z toho by plynula existence konečné podteorie $T' \subseteq T$ takové, že pro každou formuli $\tau \in T$ bychom měli $T' \vdash \tau$. Tedy konečná podteorie $T' \subseteq T$ by byla ekvivalentní s teorií T. Ukážeme, že toto není možné.
Nechť $n_1, \ldots, n_k$ jsou všechna přirozená čísla taková, že axiomy $(\forall x)(\exists y)(x = y^{n_1}) \ldots (\forall x)(\exists y)(x = y^{n_k})$ jsou obsaženy v T'. Nechť $p_1, \ldots, p_l$ jsou všechna prvočísla, která dělí alespoň jedno z prvočísel $n_1, \ldots, n_k$. Uvažme množinu čísel

$$\left\{ \; W = \frac{n}{p_1^{\varepsilon_1}, \ldots, p_l^{\varepsilon_l}} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z};\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Pak $W \subseteq \mathbb{Q}$ a je to grupa vzhledem ke sčítání čísel. Tato grupa W je modelem teorie T', neboť pro každé $a \in W$ platí, že $\frac{a}{n_1}, \ldots, \frac{a}{n_k} \in W$. Tato grupa W ale není divisibilní. Vezměme prvočíslo q různé od $p_1, \ldots, p_l$. Pak neexistuje číslo $c \in W$ takové, aby $1 = q \cdot c$, neboť $\frac{1}{q} \notin W$. Tedy W není model teorie T. Tedy teorie T a T' nejsou ekvivalentní.

Příklad:

Graf je dvojice $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \rho)$, kde $\mathcal{V} \neq \emptyset$ je množina vrcholů a $\rho \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ je ireflexivní a symetrická binární relace na $\mathcal{V}$. Existuje-li $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ a vzájemně různé vrcholy $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$ takové, že $v_1 \,\rho\, v_2$, $v_2 \,\rho\, v_3$, $\ldots$, $v_{n-1} \,\rho\, v_n$, $v_n \,\rho\, v_1$, říkáme, že v grafu $\mathcal{G}$ je kružnice délky n.
Mějme jazyk s rovností a s jedním binárním predikátovým symbolem r. Pak speciální axiomy:

$$\neg r(x, x) \qquad\qquad r(x, y) \to r(y, x)$$

zadávají teorii, jejímiž modely jsou právě všechny grafy. Přidáme-li další speciální axiomy:

$$\neg(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \neg(x_2 = x_3) \wedge r(x_1, x_2) \wedge r(x_1, x_3) \wedge r(x_2, x_3))$$

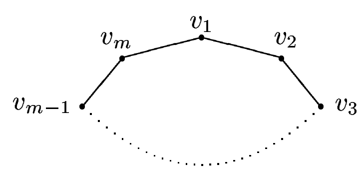
$$\cdot$$

$$\neg(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \neg(x_1 = x_4) \wedge \neg(x_2 = x_3) \wedge \neg(x_2 = x_4) \wedge \neg(x_3 = x_4) \wedge r(x_1, x_2) \wedge r(x_2, x_3) \wedge r(x_3, x_4) \wedge r(x_4, x_1))$$

$$\vdots$$

$$\neg(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)(\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \ldots \wedge \neg(x_1 = x_n) \wedge \neg(x_2 = x_3) \wedge \ldots \wedge \neg(x_2 = x_n) \wedge \ldots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n) \wedge r(x_1, x_2) \wedge r(x_2, x_3) \wedge \ldots \wedge r(x_{n-1}, x_n) \wedge r(x_n, x_1))$$

Jde o nekonečnou posloupnost pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, obdržíme teorii, jejímiž modely jsou právě všechny grafy bez kružnic. Označme β_n formuli v této posloupnosti odpovídající číslu $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že tato teorie T není ekvivalentní žádné konečné teorii v uvedeném jazyce.
Připusťme, že by končená teorie S ekvivalentní teorii T existovala. Stejně jako v minulém příkladu odtud vyplyne, že pak tedy existuje konečná podteorie $T' \subseteq T$ taková, že teorie T je ekvivalentní T'. Ukážeme, ale, že to není možné.
Nechť m je přirozené číslo takové, že pro všechny axiomy β_n obsažené v T' platí $n < m$.
Uvažme graf $\mathcal{G}_m$ s diagramem



Čili $\mathcal{G}_m$ je kružnicí délky m. Tedy $\mathcal{G}_m$ není model teorie T. Ale $\mathcal{G}_m$ splňuje všechny axiomy β_n pro $n < m$, neboť neobsahuje žádnou kružnici délky menší než m. Tudíž $\mathcal{G}_m$ je model teorie T'. Čili teorie T a T' nejsou ekvivalentní.