$\mathcal{P}$. Úvod

$\mathcal{P}$.A. Některé poznatky z analýzy a funkcionální analýzy

$\mathcal{P}$.1. Definice. Říkáme, že ohraničená oblast Ω má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$, jestliže v téměř všech bodech $\partial\Omega$ existuje *vnější* normála k Ω a jestliže se $\partial\Omega$ skládá z konečného počtu hladkých částí.

Poznámka. V případě hranice $\partial\Omega$ z definice $\mathcal{P}$.1 jsou vyloučeny řezy (viz Obr. $\mathcal{P}$.1 pro $\dim\Omega = 2$); nejsou však vyloučeny body vratu (viz Obr. $\mathcal{P}$.2 opět pro $\dim\Omega = 2$). Oblast Ω může také být vícenásobně souvislá.

Obr. $\mathcal{P}$.1 a Obr. $\mathcal{P}$.2a a $\mathcal{P}$.2b

$\mathcal{P}$.2. Věta (Green). *Nechť ohraničená dvojrozměrná oblast Ω má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$ bez bodů vratu. Nechť P, Q jsou funkce spojité v $\overline{\Omega}$, které mají spojité a ohraničené první derivace v Ω. Nechť hranice $\partial\Omega$ je orientována tak, že při jejím probíhání ve směru orientace máme oblast Ω po levé ruce. Potom*

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y, \qquad (\mathcal{P}.1)$$

kde integrály jsou brány v Riemannově smyslu.

$\mathcal{P}$.3. Věta (divergenční tvar Greenovy věty). *Nechť jsou splněny předpoklady věty $\mathcal{P}$.2. Položíme-li $P = -P_2$, $Q = P_1$, potom*

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} (P_1 n_1 + P_2 n_2)\,\mathrm{d}s, \qquad (\mathcal{P}.2)$$

kde (n_1, n_2) je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$.

Náčrt důkazu. Platí (zhruba řečeno v první rovnosti)

$$\int_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \left(P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (P_1 \sin\alpha - P_2\cos\alpha)\,\mathrm{d}s, \qquad (\mathcal{P}.3)$$

kde α je úhel, který svírá tečna k $\partial\Omega$ (orientovaná shodně s $\partial\Omega$) s kladným směrem osy x. Nechť ω je úhel, který svírá vnější normála k $\partial\Omega$ s kladným směrem osy x. Potom v bodě $[x, y]$ platí (viz Obr. $\mathcal{P}$.3)

$$\alpha = \omega + \frac{\pi}{2},$$

takže

$$\cos\alpha = -\sin\omega, \quad \sin\alpha = \cos\omega\,. \tag{$\mathcal{P}$.4}$$

Dosazením ($\mathcal{P}$.4) do ($\mathcal{P}$.3) a kombinací získaného vztahu s ($\mathcal{P}$.1), kde v levé straně užijeme značení $P = -P_2$, $Q = P_1$, dostaneme vztah ($\mathcal{P}$.2). $\square$

Obr. $\mathcal{P}$.3

$\mathcal{P}$.4. Označení. V dalším budeme též značit

$$x_1 := x, \quad x_2 := y \quad (\text{resp. } x_3 = z).$$

Místo $\iint_\Omega$ budeme psát $\int_\Omega$ a místo $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ jenom $\mathrm{d}x\,(\equiv \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2)$. Vztah ($\mathcal{P}$.2) má potom tvar

$$\sum_{k=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial P_k}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{2}\int_{\partial\Omega} P_k n_k\,\mathrm{d}s\,. \tag{$\mathcal{P}$.5}$$

$\mathcal{P}$.5. Věta (důsledek Greenovy věty). *Nechť jsou splněny předpoklady věty $\mathcal{P}$.2. Potom platí*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\varphi n_j\,\mathrm{d}s - \int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,. \tag{$\mathcal{P}$.6}$$

Důkaz. Položme v ($\mathcal{P}$.5) $P_j = u\varphi$ a $P_i = 0$, kde $i \neq j$, a užijme pravidlo pro derivování součinu. $\square$

$\mathcal{P}$.6. Poznámka. Vztah ($\mathcal{P}$.6) se dá také dokázat v případě trojrozměrné oblasti Ω. V tomto případě pak symbol $\int_{\partial\Omega} u\varphi n_j\,\mathrm{d}s$ znamená plošný integrál přes plošnou hranici $\partial\Omega$.

$\mathcal{P}$.7. Definice (reálného lineárního prostoru). Množina S prvků $x, y, z, \ldots$ se nazývá *reálným lineárním prostorem* – stručně *RLP*, jsou-li splněny následující podmínky:

I. K libovolným dvěma prvkům $x, y \in S$ je jednoznačně přiřazen třetí prvek $x + y \in S$, který se nazývá jejich součtem, přičemž

1) $x + y = y + x$ (*komutativní zákon*),

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*asociativní zákon*),

3) existuje takový prvek $\theta \in S$, že $x + \theta = x$ pro všechny prvky $x \in S$ (*existence nulového prvku*);

4) ke každému $x \in S$ existuje takový prvek $-x \in S$, že $x + (-x) = \theta$ (*existence opačného prvku*).

II. Ke každému reálnému číslu $\alpha \in R^1$ a každému prvku $x \in S$ je definován prvek $\alpha x \in S$ (tzv. *násobek prvku $x \in S$ reálným číslem $\alpha \in R^1$*), přičemž

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad (\alpha, \beta \in R^1)$,

2) $1 \cdot x = x$.

III. Obě operace (tj. sčítání prvků a násobení prvku reálným číslem) jsou spojeny těmito dvěma distribučními zákony:

1) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

RLP budeme stručně nazývat *lineál*.

$\mathcal{P}$.8. Definice (normy). Nechť M je lineál. Je-li každému prvku $u \in M$ přiřazeno číslo $\|u\|$ s vlastnostmi

$$\|u\| \geq 0, \text{ přičemž } \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta \text{ v } M, \tag{$\mathcal{P}$.7}$$

$$\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\| \quad \text{pro každé reálné } \alpha, \tag{$\mathcal{P}$.8}$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in M, \tag{$\mathcal{P}$.9}$$

potom $\|u\|$ nazýváme *normou* prvku $u \in M$. Lineál M, na němž je definována norma, nazýváme *lineární normovaný prostor* – stručně LNP.

$\mathcal{P}$.9. Definice (B–prostoru). Úplný lineární normovaný prostor nazýváme Banachovým prostorem.

$\mathcal{P}$.10. Definice (skalárního součinu). Říkáme,že na lineálu M je definován skalární součin, je-li ke každé dvojici $u, v \in M$ přiřazeno reálné číslo (u, v) s těmito vlastnostmi:

$$(u, v) = (v, u)\,, \tag{$\mathcal{P}$.10}$$

$$(c_1u_1 + c_2u_2, v) = c_1(u_1, v) + c_2(u_2, v), \quad c_1, c_2 \in R^1, \tag{$\mathcal{P}$.11}$$

$$(u, u) \geq 0\,, \tag{$\mathcal{P}$.12}$$

$$(u, u) = 0 \;\Leftrightarrow\; u = \theta \text{ v } M\,. \tag{$\mathcal{P}$.13}$$

Lineál M, na němž je definován skalární součin, se nazývá *unitární prostor*.

$\mathcal{P}$.11. Definice (H–prostoru). Úplný unitární prostor se nazývá *Hilbertovým prostorem*.

$\mathcal{P}$.12. Poznámka. Příkladem Banachova prostoru je prostor $L_2(\Omega)$; obecněji každý Hilbertův prostor s normou $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

$\mathcal{P}$.13. Definice ($C^\infty(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} u$, $C_0^\infty(\Omega)$). Nechť Ω je ohraničená oblast s po částech hladkou hranicí. Nechť $N = \dim \Omega$ a nechť $C^\infty(R^N)$ je lineál funkcí $u(x)$, kde $x = [x_1, \ldots, x_N]$, které jsou spojité včetně derivací všech řádů v celém prostoru R^N. Symbolem $C^\infty(\overline{\Omega})$ budeme značit lineál, který dostaneme restrikcí funkcí z $C^\infty(R^N)$ na uzavřenou oblast $\overline{\Omega}$. Uzávěr množiny těch bodů oblasti Ω, v nichž je $u(x) \neq 0$, nazýváme *nosičem* funkce $u(x)$ a značíme $\operatorname{supp} u$. Označme dále symbolem $C_0^\infty(\Omega)$ lineál všech funkcí s kompaktním nosičem v oblasti Ω, tj. množinu těch funkcí z $C^\infty(\overline{\Omega})$, pro něž platí $u(x) \equiv 0$ v určitém okolí hranice $\partial\Omega$ (v obecném případě různém pro různé funkce z $C_0^\infty(\Omega)$). Pro každé $u \in C_0^\infty(\Omega)$ je $\operatorname{supp} u$ uzavřená množina a $\operatorname{supp} u \subset \Omega$, takže $\operatorname{supp} u$ má od hranice $\partial\Omega$ určitou kladnou vzdálenost.

$\mathcal{P}$**.14. Příklad (funkce z $C_0^\infty(\Omega)$).** Je-li $N = 2$ a je-li Ω čtverec definovaný nerovnostmi $-2 < x_1 < 2$, $-2 < x_2 < 2$, je příkladem funkce s kompaktním nosičem v Ω funkce

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x_1^2-x_2^2)} & \text{pro } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ 0 & \text{jinde v } \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$.14}$$

Přímým výpočtem se snadno dokáže, že funkce ($\mathcal{P}$.14) má v Ω derivace všech řádů, takže je předně $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. (Pro názornost je na Obr. $\mathcal{P}$.4 nakreslen řez plochy ($\mathcal{P}$.14) rovinou $x_2 = 0$.) Dále $\operatorname{supp} u$ je uzavřený kruh se středem v počátku souřadnic a poloměrem rovným jedné; jeho vzdálenost od hranice $\partial\Omega$ čtverce $\overline{\Omega}$ je zřejmě kladná (rovná jedné; viz Obr. $\mathcal{P}$.5).

Obr. $\mathcal{P}$.4 a Obr. $\mathcal{P}$.5

$\mathcal{P}$**.15. Věta (Schwarzova nerovnost).** *Nechť M je unitární prostor. Potom pro libovolné prvky $u, v \in M$ platí*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| .$$

$\mathcal{P}$**.16. Definice (husté množiny v LNP).** Nechť S je lineární normovaný prostor. Říkáme, že množina $M \subset S$ je hustá v S, jestliže pro každý prvek $u \in S$ lze najít posloupnost $\{u_n\} \subset M$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$.

$\mathcal{P}$**.17. Věta.** *Nechť ohraničená oblast Ω má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$ bez bodů vratu. Potom lineál $C_0^\infty(\Omega)$ je hustý v $L_2(\Omega)$, tj., podle definice $\mathcal{P}$.16, pro každý prvek $u \in L_2(\Omega)$ lze najít posloupnost $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ takovou, že*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0 .$$

Místo důkazu je na Obr. $\mathcal{P}$.6 uveden příklad v jedné dimensi ($\Omega = (a, b)$, kde plnou čarou je nakreslena po částech konstantní funkce u a čárkovaně jedna z funkcí u_n).

$\mathcal{P}$**.18. Věta.** *Nechť $u_n \to u$ v $L_2(\Omega)$ a $v \in L_2(\Omega)$. Potom $(u_n, v) \to (u, v)$.*

Důkaz. Z ($\mathcal{P}$.11) a ze Schwarzovy nerovnosti plyne

$$|(u_n, v) - (u, v)| = |(u_n - u, v)| \leq \|u_n - u\| \cdot \|v\|.$$

Protože podle předpokladu věty $\|u_n - u\| \to 0$, jde pravá strana získané nerovnosti k nule. $\square$

Obr. $\mathcal{P}$.6

$\mathcal{P}$.19. Věta. *Nechť množina M je hustá v $L_2(\Omega)$ a nechť $(u, v) = 0$ $\forall v \in M$, kde $u \in L_2(\Omega)$ je pevný prvek. Potom $u = 0$ v $L_2(\Omega)$.*

Důkaz. Podle definice husté množiny (viz definici $\mathcal{P}$.16) lze najít posloupnost $\{u_n\} \subset M$ takovou, že $\lim u_n = u$ v $L_2(\Omega)$. Podle předpokladu vět je $(u_n, u) = 0$. Odtud a z věty $\mathcal{P}$.18 plyne, že $\lim(u_n, u) = (u, u) = 0$. Tento výsledek a vztah ($\mathcal{P}$.13) implikují, že $u = 0$ v $L_2(\Omega)$. $\square$

$\mathcal{P}$.B. **Přechod od okrajového problému eliptické PDR k variační formulaci**

Uvažujme tento okrajový problém Poissonovy rovnice:

$$-\Delta u = f \quad \text{v } \Omega\,, \tag{$\mathcal{P}$.15}$$

$$u = \mathring{u} \quad \text{na } \Gamma_1\,, \tag{$\mathcal{P}$.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{na } \Gamma_2\,, \tag{$\mathcal{P}$.17}$$

kde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega \quad (\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset)$$

a $f\,, \mathring{u}\,, q$ jsou dané funkce. Přitom

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \tag{$\mathcal{P}$.18}$$

je derivace funkce u podle jednotkové vnější normály $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2)$.

Násobme ($\mathcal{P}$.15) libovolnou hladkou funkcí v, pro kterou platí

$$v = 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \tag{$\mathcal{P}$.19}$$

a integrujme přes Ω:

$$-\int_\Omega v \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega v f \,\mathrm{d}x\,. \tag{$\mathcal{P}$.20}$$

Upravme integrál na levé straně ($\mathcal{P}$.20) pomocí Greenovy věty $\mathcal{P}$.3:

$$-\int_\Omega v\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big) \,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_\Omega \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{\partial\Omega} v\Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}n_2\Big)\,\mathrm{d}s + \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Podle ($\mathcal{P}$.18), ($\mathcal{P}$.19) a ($\mathcal{P}$.17) platí

$$\int_{\partial\Omega} v\Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}n_2\Big)\,\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_2} vq\,\mathrm{d}s\,.$$

Tedy vztah ($\mathcal{P}$.20) může být psán ve tvaru

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega vf\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} vq\,\mathrm{d}s\,. \qquad (\mathcal{P}.21)$$

Dospíváme tak k problému: Najít funkci u, která splňuje ($\mathcal{P}$.16) a vyhovuje integrálnímu vztahu ($\mathcal{P}$.21) pro každou "dostatečně hladkou" funkci v splňující ($\mathcal{P}$.19).

Tato formulace problému má velké slabiny: Nevíme, jak má být funkce u hladká; podobně to nevíme o funkci v. Jedno je jisté: Vztah ($\mathcal{P}$.21) klade menší požadavky na hladkost funkce u než okrajový problém ($\mathcal{P}$.15) – ($\mathcal{P}$.17), protože v ($\mathcal{P}$.21) vystupují nejvýše první derivace funkce u, a to ještě v integrandu.

Vysvětleme ještě jinak naše nesnáze: Později dokážeme, že řešení u problému ($\mathcal{P}$.21) minimalizuje na jisté množině funkcí kvadratický funkcionál

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big\{ \Big(\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial x_2}\Big)^2 \Big\}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega wf\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_2} wq\,\mathrm{d}s\,.$$

Problém je, jaká to má být množina. Zřejmě to bude podmnožina nějakého úplného prostoru (jinak totiž nemáme zaručeno, že minimalizující prvek existuje – je to analogie minima kvadratické funkce na množině reálných čísel, tj. na úplném prostoru). Tento úplný prostor nyní zkonstruujeme.

1. Prostor $W_2^k(\Omega)$

1.1. Definice (multiindexové značení derivací). Nechť $N = \dim\Omega$. Multiindexem rozumíme N-rozměrný vektor, jehož složky jsou nezáporná celá čísla,

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad \alpha_1 \ge 0, \dots, \alpha_N \ge 0\,. \qquad (1.1)$$

Celé číslo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$$

nazýváme délkou multiindexu. Symbol $D^\alpha u$ definovaný vztahem

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \qquad (1.2)$$

pak nazýváme derivací v multiindexovém značení.

Příklad. Pro $N = 2,\ \alpha = (3,0)$ je

$$D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \quad \Big(\text{a ne zbytečně komplikovaně } \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3 \partial x_2^0}\Big);$$

pro $N = 2,\ \alpha = (2,1)$ je

$$D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2}\,.$$

1.2. Definice. Nechť k je celé nezáporné číslo. Každé dvojici $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ přiřazujeme číslo $(u,v)_{k,\Omega}$ dané vztahem

$$(u,v)_{k,\Omega} := \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \,\mathrm{d}x\,, \tag{1.3}$$

kde sumace přes $|\alpha| \le k$ znamená, že je třeba vyčerpat všechny navzájem různé vektory tvaru (1.1), pro něž platí $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N \le k$.

Příklad. V případě $N = 2,\ k = 2$ je třeba vyčerpat všechny dvojrozměrné multiindexy

$$\begin{gathered}(0,0),\\ (1,0), (0,1),\\ (2,0), (1,1), (0,2),\end{gathered}$$

takže z (1.2) a (1.3) dostaneme

$$\begin{aligned}(u,v)_{2,\Omega} = {} & \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x + \\ & + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

1.3. Lemma. *Vztah* (1.3) *definuje na lineálu* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *skalární součin.*

Důkaz. První dvě vlastnosti ($\mathcal{P}$.10) a ($\mathcal{P}$.11) skalárního součinu plynou z vlastností integrálů a derivací:

$$\int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega D^\alpha v D^\alpha u \,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_\Omega D^\alpha (a u_1 + b u_2) D^\alpha v \,\mathrm{d}x = a \int_\Omega D^\alpha u_1 D^\alpha v \,\mathrm{d}x + b \int_\Omega D^\alpha u_2 D^\alpha v \,\mathrm{d}x\,.$$

Co se týče třetí vlastnosti ($\mathcal{P}$.12), je podle (1.3)

$$(u,u)_{k,\Omega} := \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \,\mathrm{d}x\,. \tag{1.4}$$

Zároveň je vidět, že vztah $(u,u)_{k,\Omega} = 0$ platí právě tehdy, když každý ze sčítanců v (1.4) je roven nule; odtud zejména plyne

$$\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x = 0,$$

čili $u(x) \equiv 0$ v Ω (protože $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$), takže i čtvrtá vlastnost ($\mathcal{P}$.13) je splněna. $\square$

1.4. Definice. Zavedeme-li v lineálu $C^\infty(\overline{\Omega})$ skalární součin $(u,v)_{k,\Omega}$ daný vztahem (1.3), dostaneme unitární prostor, který označíme $S_2^k(\Omega)$. Normu v $S_2^k(\Omega)$ zavedeme obvyklým způsobem

$$\|u\|_{k,\Omega} := \sqrt{(u,u)_{k,\Omega}} \quad \forall u \in S_2^k(\Omega) \tag{1.5}$$

a vzdálenost (metriku) vztahem

$$\varrho(u,v) := \|u-v\|_{k,\Omega} \quad \forall u,v \in S_2^k(\Omega)\,. \tag{1.6}$$

Poznámka. Unitární prostor $S_2^k(\Omega)$ je také lineárním normovaným prostorem a metrickým prostorem.

Poznámka. Pro $k=0$ dostáváme skalární součin, normu a metriku prostoru $L_2(\Omega)$, tj.

$$(u,v)_{0,\Omega} = (u,v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall u,v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{atd.} \tag{1.7}$$

1.5. Věta. a) *Posloupnost $\{u_n\}$ konverguje v prostoru $S_2^k(\Omega)$ k prvku u právě tehdy, konverguje-li posloupnost $\{u_n\}$ a posloupnosti derivací $\{D^\alpha u_n\}$, kde $|\alpha| \le k$, k funkci u a k jejím derivacím $D^\alpha u$ v prostoru $L_2(\Omega)$.*

b) *Posloupnost $\{u_n\}$ je v prostoru $S_2^k(\Omega)$ cauchyovská právě tehdy, jsou-li všechny posloupnosti $\{D^\alpha u_n\}$, $|\alpha| \le k$, cauchyovské v prostoru $L_2(\Omega)$.*

Důkaz. a) Z (1.5) a (1.3) plyne, že pro $u \in S_2^k(\Omega)$ je

$$\|u\|^2_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)}\,. \tag{1.8}$$

Konvergence v prostoru $S_2^k(\Omega)$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{v } S_2^k(\Omega),$$

tedy znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|^2_{k,\Omega} = \lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Odtud plyne první tvrzení věty.

b) Je-li posloupnost $\{u_n\}$ cauchyovská v $S_2^k(\Omega)$, potom podle (1.8) platí

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_m - u_n\|^2_{k,\Omega} = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u_m - D^\alpha u_n\|^2_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Odtud plyne druhé tvrzení věty. $\square$

Dá se ukázat příkladem, že prostor $S_2^k(\Omega)$ není úplný. S pomocí věty 1.5b a faktu, že prostor $L_2(\Omega)$ je úplný (tj. každá cauchyovská posloupnost má v $L_2(\Omega)$

limitu), lze však prostor $S_2^k(\Omega)$ "zúplnit". Získaný úplný prostor označíme $W_2^k(\Omega)$ a ukážeme, že má vlastnosti požadované v sekci $\mathcal{P}$.B.

Uvažujme libovolnou posloupnost $\{u_n\}$ cauchyovskou v $S_2^k(\Omega)$. Jsou možné tyto dva případy:

a) Posloupnost $\{u_n\}$ je v prostoru $S_2^k(\Omega)$ konvergentní,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{v } S_2^k(\Omega),$$

tj. existuje $u \in S_2^k(\Omega)$, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{k,\Omega} = 0\,.$$

Podle věty 1.5a konverguje v $L_2(\Omega)$ posloupnost $\{u_n\}$ a posloupnosti $\{D^\alpha u_n\}$ příslušných derivací k funkci u a k jejím derivacím $D^\alpha u$.

b) Posloupnost $\{u_n\}$ není v prostoru $S_2^k(\Omega)$ konvergentní. Podle věty 1.5b je však každá z posloupností $\{D^\alpha u_n\}$ ($|\alpha| \le k$) cauchyovská v $L_2(\Omega)$, a protože $L_2(\Omega)$ je úplný prostor, má v něm každá z těchto posloupností určitou limitu, kterou označíme $u^{(\alpha)}$,

$$\lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n = u^{(\alpha)} \quad \text{v } L_2(\Omega), \quad |\alpha| \le k\,. \tag{1.9}$$

Pro $|\alpha| = 0$ označíme příslušnou limitu symbolem u:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{v } L_2(\Omega)\,. \tag{1.10}$$

O funkcích $u^{(\alpha)}$, $1 \le |\alpha| \le k$, nemůžeme tvrdit že jsou derivacemi limitní funkce u, protože o funkci u zatím víme jen to, že patří do $L_2(\Omega)$. O funkcích $u^{(\alpha)}$ však ukážeme, že mají všechny vlastnosti derivací $D^\alpha u$ funkce $u \in S_2^k(\Omega)$, které se projeví, když tyto derivace vystupují v integrálních vztazích.

1.6. Lemma. *Nechť $u \in S_2^k(\Omega)$. Potom pro $1 \le |\alpha| \le k$ platí*

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,. \tag{1.11}$$

Důkaz. Podle věty $\mathcal{P}$.5 (důsledek Greenovy věty) pro každé j, kde $1 \le j \le N$, platí (zde $N = 2$)

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\varphi n_j \,\mathrm{d}s - \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x\,,$$

protože $\varphi = 0$ na $\partial\Omega$. Tím je vztah (1.11) dokázán v případě $|\alpha| = 1$.

Protože $D^\alpha \varphi = 0$ na $\partial\Omega$ pro $|\alpha| \ge 0$, dostaneme vztah (1.11) v obecném případě opakováním užitého postupu. Např., pro $\alpha = (1,1)$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \varphi n_2 \,\mathrm{d}s - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} n_1 \,\mathrm{d}s + \int_\Omega u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \,\mathrm{d}x\,,$$

což je vztah (1.11) pro $\alpha = (1,1)$. Jak se postupuje v obecném případě, je již zřejmé. $\square$

1.7. Věta. *Limitní funkce $u \in L_2(\Omega)$, $u^{(\alpha)} \in L_2(\Omega)$, které vystupují ve vztazích* (1.9) a (1.10) *splňují vztahy*

$$\int_\Omega \varphi u^{(\alpha)} \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ 1 \le |\alpha| \le k. \tag{1.12}$$

Důkaz. Protože $u_n \in S_2^k(\Omega)$ pro každé $n = 1, 2, \dots$, platí podle lemmatu 1.6 pro $1 \le |\alpha| \le k$

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u_n \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Přejděme v tomto vztahu k limitě

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi D^\alpha u_n \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x. \tag{1.13}$$

Podle (1.9), (1.10) a věty $\mathcal{P}$.18 implikuje (1.13) vztah (1.12). $\square$

1.8. Věta. *Funkce $u^{(\alpha)}$ jsou jednoznačně určeny funkcí u (ve smyslu prostoru $L_2(\Omega)$).*

Důkaz. Předpokládejme, že dvě posloupnosti $\{u_n\}$, $\{\widetilde{u}_n\}$ cauchyovské v $S_2^k(\Omega)$ mají tutéž limitu v $L_2(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \widetilde{u}_n = u \quad \text{v } L_2(\Omega). \tag{1.14}$$

Označme

$$\widetilde{u}^{(\alpha)} := \lim_{n\to\infty} D^\alpha \widetilde{u}_n \quad \text{v } L_2(\Omega), \quad 1 \le |\alpha| \le k \tag{1.15}$$

a zjistěme, jaký je vztah mezi $\widetilde{u}^{(\alpha)}$ a $u^{(\alpha)}$ (viz (1.9)).

Stejným postupem jako jsme získali (1.12) dostaneme ze vztahů (1.14) a (1.15)

$$\int_\Omega \varphi \widetilde{u}^{(\alpha)} \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ 1 \le |\alpha| \le k. \tag{1.16}$$

Odečtěme (1.16) od (1.12) (pro libovolný multiindex α, $1 \le |\alpha| \le k$). Dostaneme

$$\int_\Omega (u^{(\alpha)} - \widetilde{u}^{(\alpha)}) \varphi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.17}$$

Protože lineál $C_0^\infty(\Omega)$ je hustý v $L_2(\Omega)$ (viz větu $\mathcal{P}$.17), plyne z (1.17) podle věty $\mathcal{P}$.19

$$\widetilde{u}^{(\alpha)} = u^{(\alpha)} \quad \text{v } L_2(\Omega)$$

pro každý multiindex α ($1 \le |\alpha| \le k$), což jsme chtěli dokázat. $\square$

1.9. Definice. Funkce $u^{(\alpha)}$ nazveme *zobecněnými derivacemi funkce* u a budeme je značit (stejně jako klasické derivace) symbolem $D^\alpha u$ (viz (1.2)).

Nahradíme-li $u^{(\alpha)}$ v (1.12) symbolem $D^\alpha u$, dostaneme vztah, který je formálně totožný se vztahem (1.11). (Vztah (1.12) ovšem platí pro širší množinu funkcí.) To je hlavní důvod zavedení definice 1.9. Že tato definice má dobrý smysl, plyne z věty 1.8, kterou nyní můžeme vyslovit takto: *Zobecněné derivace funkce u jsou touto funkcí jednoznačně určeny.*

Přidáme-li k prvkům prostoru $S_2^k(\Omega)$ (tj. k prvkům lineálu $C^\infty(\overline{\Omega})$) všechny limitní prvky, dostaneme množinu, kterou označíme U_k a o které lze snadno dokázat, že je to lineál.

Dále lze bez obtíží dokázat, že vztahem

$$(u,v)_{k,\Omega} := \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \,\mathrm{d}x \qquad u \in U_k,\ v \in U_k \tag{1.18}$$

je na lineálu U_k definován skalární součin, který je rozšířením skalárního součinu z definice 1.2 na prvky z lineálu U_k, a že příslušný unitární prostor je *úplný*, tj. že je Hilbertovým prostorem.

1.10. Definice. Hilbertův prostor, jehož prvky jsou prvky lineálu U_k a v němž je skalární součin definován vztahem (1.18), budeme nazývat *Sobolevovým prostorem* $W_2^k(\Omega)$. Norma je v tomto prostoru definována standardně vztahem

$$\|u\|_{k,\Omega} := \sqrt{(u,u)_{k,\Omega}} \quad \forall u \in W_2^k(\Omega)\,. \tag{1.19}$$

1.11. Věta. *Lineál $C^\infty(\overline{\Omega})$ je v prostoru $W_2^k(\Omega)$ hustý.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z konstrukce prostoru $W_2^k(\Omega)$. $\square$

Lze ukázat, že *prostor $W_2^k(\Omega)$ je separabilní.* Příkladem spočetné množiny husté v $W_2^k(\Omega)$ je množina všech polynomů v N proměnných s racionálními koeficienty.

Často potřebujeme vědět, zdali daná funkce náleží do $W_2^k(\Omega)$. K odpovězení takové otázky dobře poslouží následující kritérium:

1.12. Věta. *Nechť Ω je ohraničená N-rozměrná oblast s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$, která nemá body vratu. Nechť funkce $u \in L_2(\Omega)$ má zobecněné derivace $D^\alpha u$ pro všechna $|\alpha| \le k$, které náležejí do $L_2(\Omega)$. Potom $u \in W_2^k(\Omega)$.*

Důkaz spočívá v konstrukci posloupnosti funkcí $\{u_n\} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$, pro kterou platí

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{k,\Omega} = 0\,.$$

Tato konstrukce je velmi komplikovaná a přesahuje rámec tohoto kursu. Proto ji nebudeme provádět a odkazujeme na [KJF, důkaz věty 5.5.9].

S pomocí věty 1.12 nyní dokážeme několik důležitých výsledků.

1.13. Definice. Říkáme, že funkce $f(x_1,\dots,x_N)$ je po částech spojitá v ohraničené oblasti Ω, jestliže existuje konečný počet oblastí $\Omega_1,\dots,\Omega_m$ s vlastnostmi

$$\overline{\Omega}=\bigcup_{j=1}^{m}\overline{\Omega}_j\,,\quad \Omega_r\cap\Omega_s=\emptyset\quad (r\neq s;\ r,s=1,\dots,m), \tag{1.20}$$

ve kterých je funkce $f(x_1,\dots,x_N)$ spojitá.

1.14. Lemma. *Nechť Ω je ohraničená N-rozměrná oblast s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$, která nemá body vratu. Nechť funkce $w\in C^0(\overline{\Omega})$ má po částech spojité a ohraničené první derivace v Ω. Nechť podoblasti $\Omega_1,\dots,\Omega_m$, ve kterých jsou derivace $\partial w/\partial x_r$ $(r=1,\dots,N)$ spojité, mají po částech hladké hranice $\partial\Omega_1,\dots,\partial\Omega_m$, které nemají body vratu. Potom $w\in W_2^1(\Omega)$, přičemž zobecněné první derivace $\partial w/\partial x_r$, které náležejí do $L_2(\Omega)$, jsou v každé podoblasti Ω_j $(j=1,\dots,m)$ rovny klasickým derivacím $\partial w/\partial x_r$ $(r=1,\dots,N)$.*

Důkaz. Nechť $\vec{n}(\Omega_j)$ je jednotková vnější normála podoblasti Ω_j $(j=1,\dots,m)$ a $n(\Omega_j)_1,\dots,n(\Omega_j)_N$ její složky. Protože

$$\vec{n}(\Omega_p)=-\vec{n}(\Omega_q) \tag{1.21}$$

na společné části hranic uzavřených oblastí $\overline{\Omega}_p$, $\overline{\Omega}_q$ (viz Obr. 1.1), dostaneme pomocí věty $\mathcal{P}.5$ (tj. důsledku Greenovy věty) pro funkci

$$g_r(x)=\frac{\partial w}{\partial x_r}(x),\quad x\in\Omega_j\quad (j=1,\dots,m),$$

kde $\partial w/\partial x_r$ je klasická derivace, postupně tyto vztahy:

$$\int_\Omega g_r\varphi\,\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_j}\frac{\partial w}{\partial x_r}\varphi\,\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{m}\left(\int_{\partial\Omega_j}w\varphi n(\Omega_j)_r\,\mathrm{d}s-\int_{\Omega_j}w\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\,\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\int_{\partial\Omega}w\varphi n_r\,\mathrm{d}s-\int_\Omega w\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega w\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\,\mathrm{d}x\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

kde n_r označuje r-tou složku jednotkové vnější normály k $\partial\Omega$. (Třetí rovnost plyne z toho, že ve vnitřku Ω se podle (1.21) křivkové integrály na společných částech hranic $\partial\Omega_p$, $\partial\Omega_q$ ruší - viz Obr. 1.1.) Tedy $g_1,\dots,g_N$ jsou první zobecněné derivace funkce w.

Protože počet m podoblastí $\Omega_1,\dots,\Omega_m$ je konečný, plyne z ohraničenosti a spojitosti derivací $\partial w/\partial x_r$ v Ω_j $(j=1,\dots,m)$

$$\int_\Omega g_r^2\,\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_j}\left(\frac{\partial w}{\partial x_r}\right)^2\mathrm{d}x<\infty\quad (r=1,\dots,N).$$

Tedy $g_r\in L_2(\Omega)$. $\square$

Obr. 1.1 a Obr. 1.2

V Důsledku 1.16 uvedeme funkce, které vyhovují podmínkám Lemmatu 1.14 a které se užívají v metodě konečných prvků. Tím se ukáže význam věty 1.12 a lemmatu 1.14 pro náš kurs. Nejprve však musíme zavést v definici 1.15 pojem triangulace oblasti.

1.15. Definice. Nechť ohraničená oblast $\Omega \subset R^2$ má polygonální hranici. Množina

$$\mathcal{T} = \{\overline{T}_1, \overline{T}_2, \dots, \overline{T}_p\}$$

sestávající z konečného počtu uzavřených trojúhelníků $\overline{T}_j$ se nazývá triangulací oblasti $\overline{\Omega}$, jestliže splňuje tyto dvě podmínky:

a) platí

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{p} \overline{T}_j \ :$$

b) libovolné dva trojúhelníky $\overline{T}_i, \overline{T}_j \in \mathcal{T}$ jsou buď disjunktní, nebo mají společný vrchol, nebo společnou stranu (viz Obr. 1.2).

1.16. Důsledek. *Nechť $\mathcal{T}$ je triangulace ohraničené uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Nechť funkce $w \in C^0(\overline{\Omega})$ je polynomem na každém trojúhelníku triangulace $\mathcal{T}$. Potom $w \in W_2^1(\Omega)$. Kromě toho, ve vnitřku T_j každého trojúhelníka $\overline{T}_j \in \mathcal{T}$ je zobecněná derivace $\partial w/\partial x_i$ rovna klasické derivaci $\partial w/\partial x_i$ $(i = 1, 2)$.*

1.17. Poznámka. Konstrukce polynomů generujících funkce z $C^0(\overline{\Omega})$ budou uvedeny v kapitolách 8, 9 a 13.

Zobecněním Důsledku 1.16 je tato věta:

1.18. Věta. *Nechť $\mathcal{T}$ je triangulace ohraničené uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Nechť funkce $w \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$, kde $k \geq 1$, je polynomem na každém trojúhelníku triangulace $\mathcal{T}$. Potom $w \in W_2^k(\Omega)$. Kromě toho, ve vnitřku T_j každého trojúhelníka $\overline{T}_j \in \mathcal{T}$ jsou zobecněné derivace $D^\alpha w$, kde $|\alpha| = k$, rovny klasickým derivacím $D^\alpha w$ $(|\alpha| = k)$. Zobecněné derivace $D^\alpha w$, kde $|\alpha| \leq k - 1$ jsou rovny klasickým derivacím na celé oblasti $\overline{\Omega}$.*

1.19. Poznámka. Konstrukce polynomů generujících funkce z $C^{k-1}(\overline{\Omega})$, kde $k \geq 2$, budou uvedeny v kapitole 18.

1.20. Poznámka. Lze snadno ukázat (plyne to téměř z definice): Je-li $u \in W_2^k(\Omega)$, potom

a) $u \in W_2^s(\Omega)$ pro každé s splňující podmínku $0 \le s \le k$;

b) zobecněné derivace $D^\alpha u$ ($|\alpha| < k$) patří do prostoru $W_2^{k-|\alpha|}(\Omega)$, přičemž platí tatáž pravidla pro derivování jako pro funkce z lineálu $C^\infty(\overline{\Omega})$:

$$D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u \,,$$

kde $\alpha + \beta$ je součet multiindexů α a β (které se sčítají jako vektory), apod.

1.21. Poznámka. Lemma 1.14 ukazuje na rozdíl mezi klasickou derivací a zobecněnou derivací: zatímco klasická derivace je definována bodově, tj. v jednotlivých bodech, zobecněná derivace je definována na celé oblasti, přičemž na množině míry nula nemusí být vůbec definována.

2. Stopy funkcí z prostoru $W_2^k(\Omega)$. Prostor $W_0^{k,2}(\Omega)$. Friedrichsova nerovnost a Poincaréova nerovnost

2.1. Definice. Řekneme, že Ω je *oblast s lipschitzovskou hranicí*, je-li ohraničená (v obecném případě může být vícenásobně souvislá) a existují-li kladné konstanty α, β, konečný počet m kartézských soustav souřadnic $x_1^{(r)}, \dots, x_N^{(r)}$ ($r = 1, \dots, m$) a m funkcí $a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})$ *spojitých* v $(N-1)$-rozměrných otevřených krychlích $K^{(r)}$ (tj. intervalech v případě $N = 2$),

$$K^{(r)} = \{[x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}] : \ |x_j^{(r)}| < \alpha, \ j = 1, \dots, N-1\} \,, \tag{2.1}$$

tak, že

a) každý bod x hranice $\partial\Omega$ lze vyjádřit alespoň v jednom z uvažovaných m systémů souřadnic ve tvaru

$$x = [x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})] \,; \tag{2.2}$$

b) body $x = [x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}, x_N^{(r)}]$, pro něž platí

$$|x_j^{(r)}| < \alpha \quad (j = 1, \dots, N-1)$$

a

$$a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) < x_N^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) + \beta \,, \tag{2.3}$$

resp.

$$a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) - \beta < x_N^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) \tag{2.4}$$

leží v Ω, resp. vně $\overline{\Omega}$;

c) každá z funkcí $a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})$ ($r = 1, \dots, m$) je na krychli $K^{(r)}$ lipschitzovská, tj. existuje konstanta L taková, že pro každé dva body $[x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}]$, $[y_1^{(r)}, \dots, y_{N-1}^{(r)}]$ z této krychle platí

$$\begin{aligned} &|a_r(y_1^{(r)}, \dots, y_{N-1}^{(r)}) - a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})| \le \\ &\le L\sqrt{(y_1^{(r)} - x_1^{(r)})^2 + \dots + (y_{n-1}^{(r)} - x_{N-1}^{(r)})^2} \,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Obr. 2.1

Na Obr. 2.1 je nakreslena dvojrozměrná oblast s lipschitzovskou hranicí a jeden z kartézských systémů. Je zřejmé, že některé body hranice $\partial\Omega$ jsou vyjádřeny ve tvaru (2.2) ve dvou sousedních systémech souřadnic.

2.2. Poznámka. Ve dvojrozměrném případě každá ohraničená (obecně vícenásobně souvislá) oblast Ω, která má po částech hladkou hranici a nemá body vratu, je oblastí s lipschitzovskou hranicí. Samotný pojem zavedený v definici 2.1 však zahrnuje pro $N = 2$ oblasti s hranicemi obecnějších vlastností (které se však v aplikacích většinou nevyskytují).

Vzhledem k dostatečné obecnosti se v případě $N = 2$ omezíme na ohraničené oblasti, které mají po částech hladké hranice bez bodů vratu, a takové oblasti budeme pro stručnost nazývat oblastmi s lipschitzovskou hranicí.

2.3. Definice. a) Nechť $N = 2$ a nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$. Nechť $S_1, \ldots, S_m$ jsou hladké části $\partial\Omega$ a

$$x_1 = \varphi_j(t), \quad x_2 = \psi_j(t), \quad t \in <a_j, , b_j>$$

je parametrické vyjádření S_j. Je-li na S_j dána funkce $v(\varphi_j(t), \psi_j(t))$ měřitelná na $<a_j, , b_j>$, definujeme

$$\int_{S_j} v(x_1, x_2)\, \mathrm{d}s := \int_{a_j}^{b_j} v(\varphi_j(t), \psi_j(t)) \sqrt{[\dot{\varphi}_j(t)]^2 + [\dot{\psi}_j(t)]^2}\, \mathrm{d}t\,, \tag{2.6}$$

kde integrál na pravé straně (2.6) bereme v Lebesgueově smyslu. (Pro spojité a ohraničené funkce $v(x_1, x_2)$ je tato definice shodná s běžnou definicí křivkového integrálu prvního druhu v Riemannově smyslu.)

b) Je-li mimoto integrál

$$\int_{S_j} [v(x_1, x_2)]^2\, \mathrm{d}s \equiv \int_{a_j}^{b_j} [v(\varphi_j(t), \psi_j(t))]^2 \sqrt{[\dot{\varphi}_j(t)]^2 + [\dot{\psi}_j(t)]^2}\, \mathrm{d}t$$

konečný, řekneme, že funkce $v(x_1, x_2)$ je na S_j integrovatelná s kvadrátem (v Lebesgueově smyslu). Je-li funkce $v(x_1, x_2)$ integrovatelná s kvadrátem na S_j pro všechna $j = 1, \ldots, m$, řekneme, že je integrovatelná s kvadrátem na hranici $\partial\Omega$ a klademe

$$\int_{\partial\Omega} v^2 \, \mathrm{d}s := \sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} v^2 \, \mathrm{d}s \,. \tag{2.7}$$

c) Definujeme-li pro všechny funkce u, v integrovatelné s kvadrátem na hranici $\partial\Omega$ skalární součin

$$(u, v)_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} uv \, \mathrm{d}s \,, \tag{2.8}$$

dostaneme (jak lze bez obtíží dokázat) Hilbertův prostor, který označíme $L_2(\partial\Omega)$. Norma je v tomto prostoru definována standardně vztahem

$$\|u\|_{L_2(\partial\Omega)} := \sqrt{(u, u)_{\partial\Omega}} \quad \forall u \in L_2(\partial\Omega) \,. \tag{2.9}$$

2.4. Věta (o stopách). *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom existuje právě jeden lineární ohraničený operátor*

$$\gamma : \; W_2^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega) \,, \tag{2.10}$$

který zobrazuje prostor $W_2^1(\Omega)$ do prostoru $L_2(\partial\Omega)$ tak, že platí

$$(\gamma v)(x) = v(x) \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \forall x \in \partial\Omega \,. \tag{2.11}$$

Důkaz věty 2.4 je uveden v [Ne, str. 15-16].

2.5. Poznámka. a) Linearita operátoru (2.10) znamená

$$\gamma(c_1 u + c_2 v) = c_1 \gamma u + c_2 \gamma v \,, \quad c_1, c_2 \in R^1, \quad u, v \in W_2^1(\Omega) \,. \tag{2.12}$$

Ohraničenost operátoru (2.10) znamená

$$\|\gamma v\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in W_2^1(\Omega) \,, \tag{2.13}$$

kde konstanta C je závislá pouze na oblasti Ω.

b) Funkce $\gamma u \in L_2(\partial\Omega)$ se obvykle nazývá *stopa* funkce $u \in W_2^1(\Omega)$ na hranici $\partial\Omega$. Pokud nemůže dojít k nedorozumění, místo γu píšeme stručně u.

c) Z vlastnosti (2.11) plyne, že stopa funkce $u \in W_2^1(\Omega)$ je rozšířením pojmu "hodnota funkce u na hranici $\partial\Omega$", který má smysl v případě funkce spojité na $\overline{\Omega}$ (a tím spíš v případě $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$).

2.6. Věta (o hustotě stop). *Množina* $\gamma(W_2^1(\Omega)) := \{\gamma u: \; u \in W_2^1(\Omega)\}$ *není identická s celým prostorem* $L_2(\partial\Omega)$, *je však v* $L_2(\partial\Omega)$ *hustá.*

Co se týče důkazu věty 2.6, viz např. [KJF, důkaz věty 6.6.3].

Z linearity a ohraničenosti operátoru (2.10) plyne, že stopy dvou funkcí blízkých ve $W_2^1(\Omega)$ jsou blízké v $L_2(\partial\Omega)$. Podle (2.12) a (2.13) totiž platí

$$\|\gamma u - \gamma v\|_{L_2(\partial\Omega)} = \|\gamma(u-v)\|_{L_2(\partial\Omega)} \le C\|u-v\|_{1,\Omega}\,, \tag{2.14}$$

kde (podle poznámky 2.5) konstanta C je závislá pouze na Ω, takže když je hodnota $\|u-v\|_{1,\Omega}$ malá, je také hodnota $\|\gamma u - \gamma v\|_{L_2(\Omega)}$ malá. Z (2.14) navíc plyne

$$u_n \to u \text{ ve } W_2^1(\Omega) \;\Rightarrow\; \gamma u_n \to \gamma u \text{ v } L_2(\Omega)\,. \tag{2.15}$$

K důkazu (2.15) stačí v (2.14) položit $v = u_n$.

V prostoru $L_2(\Omega)$ nelze pojem stopy dobře zavést. Mimo jiné totiž neplatí analogie implikace (2.15), jak ukážeme v následujícím jednoduchém příkladě: Uvažujme na intervalu $\langle 0; 3\rangle$ posloupnost funkcí $u_n(x)$ definovaných vztahy

$$u_n(x) = \begin{cases} (1-nx)\cdot(-1)^{n+1} & \text{pro } x \in \left\langle 0; \frac{1}{n}\right\rangle, \\ 0 & \text{pro } x \in \left\langle \frac{1}{n}; 3-\frac{1}{n}\right\rangle, \\ [1+n(x-3)]\cdot(-1)^{n+1} & \text{pro } x \in \left\langle 3-\frac{1}{n}; 3\right\rangle. \end{cases} \tag{2.16}$$

První dva členy této posloupnosti jsou graficky znázorněny na Obr. 2.2.

Obr. 2.2

Snadno se přesvědčíme, ze posloupnost $\{u_n(x)\}$ konverguje v prostoru $L_2(0;3)$ k funkci $u(x) \equiv 0$:

$$\|u_n - 0\|^2_{L_2(0;3)} = \int_0^3 u_n^2 \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/n} (1-nx)^2 \,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{2}{3n}\Big[(1-nx)^3\Big]_0^{1/n} = \frac{2}{3n} \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty\,.$$

Avšak posloupnost stop funkcí $u_n(x)$ spojitých v intervalu $\langle 0; 3\rangle$, tj. posloupnost

$$1, -1, 1, -1, \dots \tag{2.17}$$

jejich hodnot v krajních bodech tohoto intervalu, není konvergentní.

V případě, že bychom místo posloupnosti (2.16) uvažovali např. posloupnost

$$v_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-nx)\cdot(-1)^{n+1} & \text{pro } x \in \langle 0; \frac{1}{n}\rangle, \\ 0 & \text{pro } x \in \left\langle \frac{1}{n}; 3-\frac{1}{n}\right\rangle, \\ \frac{1}{n}[1+n(x-3)]\cdot(-1)^{n+1} & \text{pro } x \in \left\langle 3-\frac{1}{n}; 3\right\rangle. \end{cases} \tag{2.18}$$

(grafy prvních dvou členů této posloupnosti jsou znázorněny na Obr. 2.3), snadno bychom zjistili, že tato posloupnost již konverguje k funkci $u(x) \equiv 0$ v prostoru $W_2^1(0;3)$. Místo posloupnosti (2.17) bychom dostali pro stopy funkcí $v_n(x)$ v krajních bodech intervalu $\langle 0; 3\rangle$ posloupnost

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots,$$

která konverguje k nulovým stopám limitní funkce $u(x) \equiv 0$.

Obr. 2.3

Je-li $u \in W_2^2(\Omega)$, potom podle poznámky 1.21 patří funkce u i její zobecněné derivace $\partial u/\partial x_j$ $(j = 1, \dots, N)$ do $W_2^1(\Omega)$. Z věty 2.4 pak plyne, že nejen funkce u, ale i funkce $\partial u/\partial x_j$ $(j = 1, \dots, N)$ mají stopu na hranici $\partial\Omega$. Protože hranice $\partial\Omega$ je podle předpokladu lipschitzovská, takže normála $\vec{n}$ existuje skoro všude na $\partial\Omega$, umožňuje pojem stopy zavést derivaci funkce $u \in W_2^2(\Omega)$ podle normály (či v daném směru) na hranici $\partial\Omega$. Jsou-li n_j směrové kosiny vnější normály $\vec{n}$, můžeme definovat

$$\gamma\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{j=1}^{N}\Big(\gamma\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)(x) n_j(x)\,, \quad u \in W_2^2(\Omega), \quad x \in \partial\Omega \tag{2.19}$$

či stručněji (viz Poznámku 2.5.b)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) n_j(x)\,, \quad u \in W_2^2(\Omega), \quad x \in \partial\Omega\,. \tag{2.19*}$$

Obdobně můžeme postupovat v případě prostorů $W_2^k(\Omega)$ ($k \geq 3$), kde můžeme navíc definovat $\partial^2 u/\partial n^2$, atd.

2.7. Definice. Symbolem $S_0^{k,2}(\Omega)$ budeme značit lineál $C_0^\infty(\Omega)$ opatřený skalárním součinem $(u,v)_{k,\Omega}$ – viz (1.3). Symbol $W_0^{k,2}(\Omega)$ bude značit "zúplnění" prostoru $S_0^{k,2}(\Omega)$ v metrice indukované skalárním součinem $(u,v)_{k,\Omega}$ (viz (1.5), (1.6), (1.9), (1.10)).

2.8. Věta. *Nechť oblast Ω má lipschitzovskou hranici. Prostor $W_0^{k,2}(\Omega)$ je podprostorem prostoru $W_2^k(\Omega)$ a patří do něj funkce, pro které platí*

$$\gamma D^\alpha u(x) = 0 \text{ v } L_2(\partial\Omega) \text{ pro } |\alpha| \leq k-1, \quad u \in W_2^k(\Omega)\,. \tag{2.20}$$

Důkaz. a) Nejprve probereme případ $k = 1$. Nechť $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. To znamená (podle konstrukce prostoru $W_0^{1,2}(\Omega)$), že existuje posloupnost $\{u_n\} \subset S_0^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{1,\Omega} = 0\,. \tag{2.21}$$

Podle (2.14) platí

$$\|\gamma u - \gamma u_n\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C\|u - u_n\|_{1,\Omega}\,.$$

Protože podle (2.11) a toho, že $u_n \in S_0^{1,2}(\Omega)$ (tj. $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$), platí $\gamma u_n(x) = 0$ pro $x \in \partial\Omega$, lze poslední nerovnost psát ve tvaru

$$\|\gamma u\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C\|u - u_n\|_{1,\Omega}\,.$$

Odtud a z (2.21) plyne $\gamma u = 0$ v $L_2(\partial\Omega)$, tj. vztah (2.20) pro $k = 1$.

b) V obecném případě nechť $u \in W_0^{k,2}(\Omega)$. Potom existuje posloupnost $\{u_n\} \subset S_0^{k,2}(\Omega)$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{k,\Omega} = 0\,.$$

Podobně jako (2.14) dokážeme, že pro $|\alpha| \leq k-1$ platí

$$\|\gamma D^\alpha u - \gamma D^\alpha u_n\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C\|D^\alpha u - D^\alpha u_n\|_{1,\Omega} \leq C\|u - u_n\|_{k,\Omega}\,.$$

Protože $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, potom víme, že funkce $u_n(x)$ je identicky rovna nule v určitém okolí hranice $\partial\Omega$, takže $D^\alpha u_n(x) = 0$ na $\partial\Omega$ pro jakkoliv velké $|\alpha|$. Tedy z předchozích nerovností plyne pro $|\alpha| \leq k-1$

$$\|\gamma D^\alpha u\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C\|u - u_n\|_{k,\Omega} \to 0 \text{ pro } n \to \infty\,,$$

takže platí vztah (2.20). $\square$

2.9. Věta (Friedrichsova nerovnost). *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom*

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \le C\left\{\sum_{j=1}^N \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u^2 \,\mathrm{d}s\right\} \quad \forall u \in W_2^1(\Omega)\,, \tag{2.22}$$

kde konstanta C závisí pouze na oblasti Ω.

2.10. Definice. a) Výraz

$$|u|_{1,\Omega} := \sqrt{\sum_{j=1}^N \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}x} \quad \forall u \in W_2^1(\Omega) \tag{2.23}$$

nazýváme seminormou v prostoru $W_2^1(\Omega)$.

b) Obecně, výraz

$$|u|_{k,\Omega} := \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \,\mathrm{d}x} \quad \forall u \in W_2^k(\Omega) \tag{2.24}$$

nazýváme seminormou v prostoru $W_2^k(\Omega)$.

Dá se dokázat, že seminorma $|\cdot|_{k,\Omega}$ má vlastnosti ($\mathcal{P}$.8) a ($\mathcal{P}$.9). S pomocí seminormy lze Friedrichsovu nerovnost psát ve tvaru

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \le C\Big(|u|_{1,\Omega}^2 + \int_{\partial\Omega} u^2 \,\mathrm{d}s\Big) \quad \forall u \in W_2^1(\Omega)\,. \tag{2.22*}$$

V případě prostoru $W_0^{1,2}(\Omega)$ se redukuje nerovnost (2.22) na tvar

$$\|u\|_{1,\Omega} \le C|u|_{1,\Omega} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2.25}$$

Poněkud obecnější tvar Friedrichsovy nerovnosti udává následující věta:

2.11. Věta (Friedrichsova nerovnost). *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí a $S \subset \partial\Omega$ její část, která má kladnou Lebesgueovu míru,* $\mathrm{mes}_1 S > 0$*. Potom*

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \le K(\Omega, S)\Big(|u|_{1,\Omega}^2 + \int_S u^2 \,\mathrm{d}s\Big) \quad \forall u \in W_2^1(\Omega), \tag{2.26}$$

kde konstanta $K(\Omega, S)$ závisí pouze na oblasti Ω a oblouku S.

Užitečná bývá i tato věta:

2.12. Věta. *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí a $\Gamma \subset \Omega$ část hranice, která není částí přímky a která má kladnou Lebesgueovu míru,* $\mathrm{mes}_1\Gamma > 0$*. Potom*

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 \le C(\Omega, \Gamma)\Big(|u|_{2,\Omega}^2 + \int_\Gamma u^2 \,\mathrm{d}s\Big) \quad \forall u \in W_2^2(\Omega), \tag{2.27}$$

kde konstanta $C(\Omega, \Gamma)$ závisí pouze na oblasti Ω a části Γ.

2.13. Poznámka. V případě $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$ se nerovnost (2.27) redukuje na tvar

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C(\Omega)|u|_{2,\Omega} \quad \forall u \in W_0^{2,2}(\Omega). \tag{2.28}$$

2.14. Věta (Poincaréova nerovnost). *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom*

$$\|u\|_{k,\Omega}^2 \leq C\Big\{|u|_{k,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|<k} \Big(\int_\Omega D^\alpha u \,\mathrm{d}x\Big)^2\Big\}, \quad u \in W_2^k(\Omega), \tag{2.29}$$

kde konstanta C závisí pouze na k a na oblasti Ω. Speciálně pro $k = 1$ odtud plyne

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \leq C\Big\{|u|_{1,\Omega}^2 + \Big(\int_\Omega u \,\mathrm{d}x\Big)^2\Big\}, \quad u \in W_2^1(\Omega). \tag{2.30}$$

Důkazy Friedrichsových nerovností lze nalézt v [Ne] a Poincaréových nerovností v [KFJ].

3. Příklady funkcí z prostoru $W_2^1(\Omega)$

3.1. Definice. Nechť Ω je oblast v R^N, A, $B \in R^N$ dva body a p přímka jimi procházející, tj.

$$p = \{tA + (1-t)B \in R^N : t \in R^1\}.$$

Předpokládejme, že $p \cap \Omega \neq \emptyset$. Potom existuje (konečná nebo nekonečná) posloupnost otevřených intervalů $\{J_k\}$, $J_i \cap J_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, tak, že

$$p \cap \Omega = \bigcup_j \{tA + (1-t)B \in R^N : t \in J_j\}.$$

Nechť u je funkce definovaná v Ω; položme

$$\varphi(t) = u(tA + (1-t)B) \quad \text{pro } t \in \bigcup_j J_j.$$

O funkci u říkáme, že je absolutně spojitá na přímce p, jestliže funkce φ je spojitá na každém kompaktním podintervalu intervalu J_j pro každé j.

3.2. Definice. Symbol $AC_i(\Omega)$ značí množinu všech funkcí definovaných na Ω, které jsou absolutně spojité na téměř všech přímkách, které jsou rovnoběžné s osou x_i a mají neprázdný průnik s oblastí Ω.

3.3. Věta. *Aby $u \in W_2^1(\Omega)$, je nutné a stačí, aby $u \in L_2(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^N AC_i(\Omega)$ a aby pro "klasické" derivace platilo $\partial u/\partial x_i \in L_2(\Omega)$ $(i = 1, \dots, N)$.*

Důkaz. Viz např. [KJF, str. 274-276]. $\square$

3.4. Příklad. Nechť

$$K_R = \{[x_1, \dots, x_N] : \ x_1^2 + \dots + x_N^2 < R^2, \ 0 < R < 1\}. \tag{3.1}$$

Položme pro stručnost

$$r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}\,.$$

Potom

$$\ln\frac{1}{r} \in W_2^1(K_R) \quad \text{pro } N = 3\,, \tag{3.2}$$

$$\ln\frac{1}{r} \in L_2(K_R) \quad \text{pro } N = 2\,. \tag{3.3}$$