Ověřme (3.2). Transformací do sférických souřadnic

$$x_1 = \varrho \cos\varphi \sin\vartheta, \quad x_2 = \varrho \sin\varphi \sin\vartheta, \quad x_3 = \varrho \cos\vartheta,$$

kde $\varrho \in \langle 0; R\rangle$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$, $\vartheta \in \langle 0; \pi\rangle$, snadno zjistíme, že

$$\Big\| \ln\frac{1}{r}\Big\|^2_{0,K_R} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^R \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^\pi \Big(\ln\frac{1}{\varrho}\Big)^2 \varrho^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \Big\} \mathrm{d}\varphi \Big\} \mathrm{d}\varrho \,.$$

Pro $\varrho \in (0, R\rangle$ je $\frac{1}{\varrho} > 1$, takže $(\ln\frac{1}{\varrho})^2 < \frac{1}{\varrho^2}$. Odtud

$$\Big\| \ln\frac{1}{r}\Big\|^2_{0,K_R} < \int_0^R \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^\pi \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \Big\} \mathrm{d}\varphi \Big\} \mathrm{d}\varrho = 4\pi R \,.$$

Dále,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\ln\frac{1}{r}\Big) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\ln r = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r^2},$$

takže

$$\sum_{i=1}^N \Big[\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\ln\frac{1}{r}\Big)\Big]^2 = \frac{1}{r^2}\,. \tag{3.4}$$

Pro $N = 3$ odtud plyne transformací do sférických souřadnic

$$\sum_{i=1}^3 \Big\| \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\ln\frac{1}{r}\Big)\Big\|^2_{0,K_R} = \int_0^R \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^\pi \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \Big\} \mathrm{d}\varphi \Big\} \mathrm{d}\varrho = 4\pi R \,.$$

Tedy platí (3.2).

Ověříme (3.3). Transformací do polárních souřadnic

$$x_1 = \varrho\cos\varphi, \quad x_2 = \varrho\sin\varphi \quad (\varrho \in \langle 0; R\rangle,\ \varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle)$$

dostaneme

$$\Big\| \ln\frac{1}{r}\Big\|^2_{0,K_R} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^R \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big(\ln\frac{1}{\varrho}\Big)^2 \varrho \mathrm{d}\varphi \Big\} \mathrm{d}\varrho = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^R \varrho(\ln\varrho)^2 \mathrm{d}\varrho \,.$$

Dvojí integrací per partes snadno zjistíme, že

$$\int \varrho(\ln\varrho)^2\mathrm{d}\varrho = \frac{1}{2}\Big[(\varrho\ln\varrho)^2 - \varrho^2\ln\varrho + \frac{1}{2}\varrho^2\Big] = \frac{1}{2}\Big[\Big(\varrho\ln\frac{1}{\varrho}\Big)^2 + \varrho^2\ln\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}\varrho^2\Big]\,.$$

Protože

$$\lim_{\varrho\to 0+} \varrho\ln\frac{1}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0+} \frac{\ln\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho}} = \lim_{\varrho\to 0+} \frac{-\varrho\frac{1}{\varrho^2}}{-\frac{1}{\varrho^2}} = 0,$$

dostáváme z předchozího (3.3).

Pro $N = 2$ z (3.4) plyne, že

$$\sum_{i=1}^2 \Big\| \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\ln\frac{1}{r}\Big)\Big\|^2_{0,K_R} = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^R \frac{1}{\varrho}\mathrm{d}\varrho \to \infty,$$

takže $\ln\frac{1}{r} \notin W_2^1(K_R)$ a platí pouze (3.3). $\square$

3.5. Příklad. Dokážeme, že

$$\sqrt[4]{\ln \frac{1}{r}} \in W_2^1(K_R) \quad \text{pro } N = 2 \quad \Big(\frac{1}{R} > 1\Big)\,, \tag{3.5}$$

$$\ln \ln \frac{1}{r} \in W_2^1(K_R) \quad \text{pro } N = 2 \quad \Big(\ln \frac{1}{R} > 1\Big)\,. \tag{3.6}$$

Ověřme (3.5). Po transformaci do polárních souřadnic z nerovnosti $\ln \frac{1}{\varrho} < \frac{1}{\varrho}$, která platí pro $\varrho \in (0, R\rangle$, dostaneme

$$\Big\| \sqrt[4]{\ln \frac{1}{r}} \Big\|^2_{0,K_R} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^R \Big\{ \int_0^{2\pi} \varrho \sqrt{\ln \frac{1}{\varrho}} \mathrm{d}\varphi \Big\} \mathrm{d}\varrho =$$
$$= 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^R \varrho \sqrt{\ln \frac{1}{\varrho}} \mathrm{d}\varrho < 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^R \sqrt{\varrho} \mathrm{d}\varrho = \frac{4}{3} \pi \sqrt{R^3}\,.$$

Dále

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\sqrt[4]{\ln \frac{1}{r}} \Big) = -\frac{1}{4} \Big(\ln \frac{1}{r} \Big)^{-\frac{3}{4}} \frac{x_i}{r^2}\,,$$

takže

$$\sum_{i=1}^2 \Big\| \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\sqrt[4]{\ln \frac{1}{r}} \Big) \Big\|^2_{0,K_R} = \frac{2\pi}{16} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^R \Big(\ln \frac{1}{\varrho} \Big)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{\varrho} \mathrm{d}\varrho\,.$$

Substitucí $t = -\ln \varrho$ dostaneme

$$\int_\varepsilon^R \Big(\ln \frac{1}{\varrho} \Big)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{\varrho} \mathrm{d}\varrho = -\int_{\ln 1/\varepsilon}^{\ln 1/R} t^{-3/2} \mathrm{d}t = 2 \Bigg(\frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{R}}} - \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}} \Bigg) \to \frac{2}{\sqrt{\ln \frac{1}{R}}} \quad \text{pro } \varepsilon \to 0+\,,$$

takže platí (3.5).

Ověřme (3.6). Platí

$$\Big\| \ln \ln \frac{1}{r} \Big\|^2_{0,K_R} = 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^R \Big(\ln \ln \frac{1}{\varrho} \Big)^2 \varrho \mathrm{d}\varrho < 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^R \Big(\ln \frac{1}{\varrho} \Big)^2 \varrho \mathrm{d}\varrho\,.$$

Dále pokračujeme stejně jako v případě $\big\| \ln \frac{1}{r} \big\|^2_{0,K_R}$, když $K_R \subset R^2$ (tj. jako při ověřování (3.3)). Tedy

$$\Big\| \ln \ln \frac{1}{r} \Big\|^2_{0,K_R} < \infty\,.$$

Platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\ln \ln \frac{1}{r} \Big) = -\frac{1}{\ln \frac{1}{r}} \frac{x_i}{r^2}\,,$$

takže

$$\sum_{i=1}^2 \Big\| \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\ln \ln \frac{1}{r} \Big) \Big\|^2_{0,K_R} = 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^R \frac{1}{\big(\ln \frac{1}{\varrho} \big)^2} \frac{1}{\varrho} \mathrm{d}\varrho\,.$$

Substitucí $t = -\ln \varrho$ dostaneme

$$\int_\varepsilon^R \frac{1}{\big(\ln \frac{1}{\varrho} \big)^2} \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = -\int_{\ln 1/\varepsilon}^{\ln 1/R} t^{-2} \mathrm{d}t = \frac{1}{\ln \frac{1}{R}} - \frac{1}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}\,.$$

Tedy platí (3.6). □

3.6. Příklad. Uvažujme oblast $G \subset R^2$ ohraničenou křivkami

$$x_2 = 0, \quad x_1 = a \ (a > 0), \quad x_2 = x_1^{\alpha}, \tag{3.7}$$

kde

$$\alpha > 2 + \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1). \tag{3.8}$$

Potom

$$u(x_1, x_2) := x_1^{-(1+\varepsilon)/2} \in W_2^1(G)\,. \tag{3.9}$$

Skutečně, snadno se přesvědčíme, že platí

$$\|u\|_{1,G}^2 = \lim_{\delta \to 0+} \int_{\delta}^{a} \left\{ \int_0^{x_1^{\alpha}} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 \right] \mathrm{d}x_2 \right\} \mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2+\beta} a^{2+\beta} + \frac{1}{\beta} \Big(\frac{1+\varepsilon}{2} \Big)^2 a^{\beta}\,,$$

kde

$$\beta = \alpha - 2 - \varepsilon > 0\,.$$

Nahradíme-li oblast G oblastí $\widetilde{G}$, která je ohraničena úsečkami ležícími na přímkách

$$x_2 = 0, \quad x = a \ (a > 0), \quad x_2 = kx_1 \ (k > 0), \tag{3.10}$$

potom při libovolně malém k zjistíme, že

$$u(x_1, x_2) \equiv x_1^{-(1+\varepsilon)/2} \notin W_2^1(\widetilde{G})\,. \tag{3.11}$$

3.7. Příklad. Nechť $Q \subset R^2$ je oblast ohraničená křivkami

$$x_2 = x^{\alpha}, \quad x_2 = -x^{\alpha}, \quad x_1 = a \ (a > 0), \tag{3.12}$$

kde α splňuje (3.8). Stejně snadno jako v příkladě 3.6 zjistíme, že

$$u(x_1, x_2) \equiv x_1^{-(1+\varepsilon)/2} \in W_2^1(Q)\,. \tag{3.13}$$

Je-li $\widetilde{Q}$ oblast ohraničená úsečkami ležícími na přímkách

$$x_2 = kx_1, \quad x_2 = -kx_1, \quad x_1 = a \quad (k > 0, \ a > 0), \tag{3.14}$$

a $\widehat{Q}$ oblast ohraničená křivkami

$$x_2 = x_1^{\alpha}, \quad x_2 = -kx_1, \quad x_1 = a \quad (k > 0, \ a > 0), \tag{3.15}$$

kde k je v (3.14) a (3.15) libovolně malé, potom opět snadno zjistíme, že

$$x_1^{-(1+\varepsilon)/2} \notin W_2^1(\widetilde{Q}), \quad x_1^{-(1+\varepsilon)/2} \notin W_2^1(\widehat{Q})\,. \tag{3.16}$$

3.8. Komentář. V příkladech 3.4 a 3.5 platí jak pro $N = 2$, tak pro $N = 3$, že K_R má lipschtzovskou hranici. Všechny funkce v těchto příkladech leží v průnicích prostorů $AC_i(K_R)$. Výsledek (3.3) ukazuje, že tato vlastnost je nutnou, nikoliv však postačující podmínkou pro to, aby daná funkce náležela do prostoru W_2^1. Musí platit věta 3.3.

Je třeba poznamenat, že vzhledem k větě o stopách (viz větu 2.4) se jiný výsledek než ten, který je uveden v (3.2) a (3.3), nedá obecně očekávat.

V příkladech 3.6 a 3.7 funkce leží v prostoru W_2^1, když hranice v okolí singularity se dostatečně přimyká k ose x_1.

3.9. Poznámka. S pomocí věty 3.3 lze dokázat lemma 1.14, důsledek 1.16 a větu 1.18 bez pomoci věty 1.12, a to velmi snadno.

4. Bramble–Hilbertovo lemma

Toto lemma, které uvádíme ve větě 4.3, je jednoduchou aplikací Poincaréovy nerovnosti; má však významné postavení v analýze metody konečných prvků.

4.1. Označení. a) Symbol $\kappa_N(k)$ bude značit počet všech různých multiindexů α takových, že $|\alpha| \le k$, a symbol $\widetilde{\kappa}_N(k)$ bude značit počet všech různých multiindexů α takových, že $|\alpha| = k$. Platí

$$\kappa_N(k) = \frac{(N+k)!}{N!k!}, \quad \widetilde{\kappa}_N(k) = \frac{(N+k-1)!}{(N-1)!k!}. \tag{4.1}$$

b) Množina všech polynomů N proměnných $x_1, \dots, x_N$, které mohou být psány ve tvaru

$$q(x) = \sum_{|\alpha| \le n} c_\alpha x^\alpha \equiv \sum_{j=0}^{n} \sum_{|\alpha|=j} c_\alpha x^\alpha, \tag{4.2}$$

kde x^α značí

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}, \tag{4.3}$$

bude označována symbolem $\mathcal{P}_N(n)$. To znamená, že $\mathcal{P}_N(n)$ je množina všech polynomů, jejichž stupeň není větší než n. Je evidentní, že $\mathcal{P}_N(n)$ je $\kappa_N(n)$-rozměrný lineární prostor. Restrikci polynomů z $\mathcal{P}_N(n)$ na oblast $G \subset R^N$ budeme značit $\mathcal{P}_G(n)$.

Poznamenejme, že pro $N = 1, 2, 3$ vztah $(4.1)_1$ dává známé výrazy

$$\kappa_1(n) = n+1, \quad \kappa_2(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \quad \kappa_3(n) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3). \tag{4.4}$$

4.2. Lemma. *Nechť G je ohraničená oblast v R^N. Potom podmínky*

$$\int_G D^\alpha q(x)\,\mathrm{d}x = b_\alpha, \quad |\alpha| \le k, \tag{4.5}$$

kde $b_\alpha \in R^1$ jsou daná čísla, určují jednoznačně polynom $q \in \mathcal{P}_N(k)$.

Důkaz. Protože vztahy (4.5) representují $\kappa_N(k)$ lineárních algebraických rovnic pro $\kappa_N(k)$ koeficientů c_α polynomu $q(x)$ (viz (4.2) s $n = k$) stačí dokázat, že $\kappa_N(k)$ homogenních rovnic

$$\int_G D^\alpha q(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad |\alpha| \le k \tag{4.6}$$

implikuje $q(x) \equiv 0$. To je však snadné: jestliže $q \in \mathcal{P}_N(k)$, potom $D^\alpha q(x) =$ const pro $|\alpha| = k$. Tedy podle (4.6)

$$0 = \int_G D^\alpha q(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{mes}_N G) D^\alpha q(x), \quad |\alpha| = k.$$

Odtud plyne $D^\alpha q(x) = 0$ pro $|\alpha| = k$, takže $q \in \mathcal{P}_N(k-1)$. Proto $D^\alpha q(x) =$ const pro $|\alpha| = k-1$, takže podle (4.6)

$$0 = \int_G D^\alpha q(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{mes}_N G) D^\alpha q(x), \quad |\alpha| = k-1$$

a $q \in \mathcal{P}_N(k-2)$. Pokračujeme-li takto dále, dostaneme po celkem k krocích, že $q(x) = \text{const}$. Tento výsledek a (4.6), kde položíme $|\alpha| = 0$, dávají

$$0 = \int_G D^\alpha q(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{mes}_N G) q(x)\,.$$

Tedy $q(x) \equiv 0$, což jsme potřebovali dokázat. $\square$

4.3. Věta (Bramble-Hilbertovo lemma). *Nechť G je oblast s lipschitzovskou hranicí (kde $2 \le \dim G \le 3$). Nechť F je lineární ohraničený funkcionál na $W_2^k(G)$,*

$$|F(v)| \le C_1 \|v\|_{k,G} \quad \forall v \in W_2^k(G), \tag{4.7}$$

a nechť

$$F(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_N(k-1) \quad (N = \dim G)\,. \tag{4.8}$$

Potom

$$|F(v)| \le C_1 C_2 |v|_{k,G} \quad \forall v \in W_2^k(G), \tag{4.9}$$

kde konstanta C_1 nezávisí na funkci v a konstanta C_2 závisí pouze na k a na oblasti G.

Důkaz. Položme ve vztahu (4.5)

$$b_\alpha = -\int_G D^\alpha v\,\mathrm{d}x$$

a nahraďme v lemmatu 4.2 číslo k číslem $k-1$. Potom z lemmatu 4.2 plyne, že existuje právě jeden polynom $q \in \mathcal{P}_N(k-1)$, který splňuje vztahy

$$\int_G D^\alpha (v+q)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall |\alpha| \le k-1\,.$$

Z věty 2.14 (vztah (2.29)) potom plyne,že

$$\|v+q\|_{k,G} \le C_2 |v+q|_{k,G} = C_2 |v|_{k,G}\,.$$

Pomocí vztahu (4.8), linearity funkcionálu F a vztahu (4.7) dále dostaneme

$$|F(v)| = |F(v) + F(q)| = |F(v+q)| \le C_1 \|v+q\|_{k,G}\,.$$

Odhadneme-li pravou stranu tohoto vztahu předchozím výsledkem, dostaneme (4.9), což jsme chtěli dokázat. $\square$

V 16. kapitole budeme potřebovat ještě jinou formu Bramble-Hilbertova lemmatu, kterou uvádíme ve větě 4.4. Nejprve však musíme uvést některé další prostory funkcí a příslušné normy.

Symbolem $C^0(\overline{\Omega})$ značíme Banachův prostor funkcí spojitých na uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$. Norma v prostoru $C^0(\overline{\Omega})$ je definována vztahem

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|\,, \quad u \in C^0(\overline{\Omega})\,. \tag{4.10}$$

Symbolem $C^k(\overline{\Omega})$ značíme Banachův prostor funkcí spojitých i se všemi svými derivacemi až do k-tého řádu včetně na uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$. Norma v prostoru $C^k(\overline{\Omega})$ je definována vztahem

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|\le k,\, x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|\,, \quad u \in C^k(\overline{\Omega})\,. \tag{4.11}$$

Seminorma v prostoru $C^k(\overline{\Omega})$, kde $k \ge 1$, je definována vztahem

$$|u|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| = k,\, x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|\,, \quad u \in C^k(\overline{\Omega})\,. \tag{4.12}$$

4.4. Bramble-Hilbertovo lemma pro spojitě diferencovatelné funkce. *Nechť G je oblast s lipschitzovskou hranicí (kde $1 \le \dim G \le 3$). Nechť F je lineární ohraničený funkcionál na $C^k(\overline{G})$,*

$$|F(v)| \le C_1 \|v\|_{C^k(\overline{G})} \quad \forall v \in C^k(\overline{G}), \tag{4.13}$$

a nechť

$$F(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_N(k-1) \quad (N = \dim G)\,. \tag{4.14}$$

Potom

$$|F(v)| \le C_1 C_2 |v|_{C^k(\overline{G})} \quad \forall v \in C^k(\overline{G}), \tag{4.15}$$

kde konstanta C_1 nezávisí na funkci v a konstanta C_2 závisí pouze na k a na oblasti G.

Důkaz je podobný důkazu věty 4.3. Místo vztahu (2.29) užíváme této modifikace Poincaréovy nerovnosti

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} \le C\left\{ |u|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|<k} \left| \int_\Omega D^\alpha u \,\mathrm{d}x \right| \right\}, \quad \forall u \in C^k(\overline{\Omega}), \tag{4.16}$$

která je dokázána v [Že2, Theorem $\mathcal{P}$.87]. Konstanta C v (4.16) závisí opět pouze na k a na Ω.

5. Sobolevova věta o vnoření

Uvádíme pouze speciální případ této důležité věty; v její obecnější versi je číslo 2 nahrazeno libovolným číslem p, které splňuje podmínku $p \in \langle 1; \infty)$.

5.1. Věta (Sobolev). *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí, $\dim\Omega = N > 1$ a k je takové přirozené číslo, že $2k > N$. Potom množina všech funkcí z $W_2^k(\Omega)$ je podmnožinou množiny všech funkcí z $C^0(\overline{\Omega})$, tj.*

$$W_2^k(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})\,, \tag{5.1}$$

a identický operátor $I:\ W_2^k(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})$ (tj. z $W_2^k(\Omega)$ do $C^0(\overline{\Omega})$) je ohraničený, tj.

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le K \|u\|_{k,\Omega} \quad \forall u \in W_2^k(\Omega)\,, \tag{5.2}$$

kde konstanta K nezávisí na funkci u.

5.2. Poznámka. a) Inkluse (5.1) má tento význam: jestliže $u \in W_2^k(\Omega)$, potom u je třída ekvivalentních funkcí (tj. téměř všude sobě rovných) a inkluse (5.1) říká, že tato třída obsahuje nějaký prvek prostoru $C^0(\overline{\Omega})$.

b) V případech $N = 2$ a $N = 3$, které jsou pro praxi nejdůležitější, je nerovnost $2k > N$ splněna číslem $k = 2$. Tedy pro $N = 2$ a $N = 3$ je prostor $W_2^2(\Omega)$ podmnožinou prostoru $C^0(\overline{\Omega})$.

5.3. Poznámka. Důkaz věty 5.1 je komplikovaný (viz [KJF, kapitola 5.7]); dokážeme proto pouze tento speciální případ:

Nechť Ω je *rovinná* a *jednoduše souvislá* oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom množina všech funkcí z $W_0^{2,2}(\Omega)$ je podmnožinou množiny všech funkcí z $C^0(\overline{\Omega})$, tj.

$$W_0^{2,2}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}), \tag{5.3}$$

a identický operátor $I:\ W_0^{2,2}(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})$ (tj. z $W_0^{2,2}(\Omega)$ do $C^0(\overline{\Omega})$) je ohraničený, tj.

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le K\|u\|_{2,\Omega} \quad \forall u \in W_0^{2,2}(\Omega), \tag{5.4}$$

kde konstanta K nezávisí na funkci u.

Důkaz je snadný: Oblast $\overline{\Omega}$ můžeme umístit do dosti velkého čtverce $A = (a;b) \times (a;b)$, kde $a < b$. Každou funkci z $C_0^\infty(\Omega)$ prodloužíme nulou na celý čtverec A. Nechť $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Platí

$$\varphi(x) = \int_a^{x_1} \left\{ \int_a^{x_2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_2 \right\} \mathrm{d}\xi_2 = \int_{\Omega(x_1,x_2)} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi, \tag{5.5}$$

kde jsme položili

$$\Omega(x_1,x_2) = ((a,x_1) \times (a,x_2)) \cap \Omega. \tag{5.6}$$

Protože $\Omega(x_1,x_2) \subset A$, z (5.5) plyne pomocí $\mathcal{P}.15$, kde $u = 1$, $v = |\partial^2\varphi/\partial x_1\partial x_2|$,

$$|\varphi(x)| \le \int_A \left| \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1,\xi_2) \right| \mathrm{d}\xi \le \sqrt{\mathrm{mes}_2 A} \sqrt{\int_A \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1,\xi_2) \right)^2 \mathrm{d}\xi} =$$

$$= (b-a) \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1,\xi_2) \right)^2 \mathrm{d}\xi} \le (b-a)\|\varphi\|_{2,\Omega}, \tag{5.7}$$

takže

$$\|\varphi\|_{C^0(\overline{\Omega})} \equiv \max_{x\in\overline{\Omega}} |\varphi(x)| \le (b-a)\|\varphi\|_{2,\Omega} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.8}$$

Nechť $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$ je libovolná funkce a $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ posloupnost, pro kterou platí

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{2,\Omega} = 0; \tag{5.9}$$

existence takové posloupnosti $\{u_n\}$ plyne z věty 1.11. Potom podle (5.8) a (5.9)

$$\|u_m - u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le (b-a)\|u_n - u_m\|_{2,\Omega} \le (b-a)\big(\|u_n - u\|_{2,\Omega} + \|u - u_m\|_{2,\Omega}\big) \to 0,$$

takže posloupnost $\{u_n\}$ je cauchyovská v $C^0(\overline{\Omega})$. Protože $C^0(\overline{\Omega})$ je úplný prostor, existuje funkce $v \in C^0(\overline{\Omega})$, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - v\|_{C^0(\overline{\Omega})} = 0. \tag{5.10}$$

Z (5.10) plyne

$$\|u_n - v\|_{L_2(\Omega)} \le \|u_n - v\|_{C^0(\overline{\Omega})} \sqrt{\mathrm{mes}_2 \Omega} \to 0.$$

Z (5.9) plyne $\|u_n - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0$, takže jednoznačnost limity a $v \in C^0(\overline{\Omega})$ implikují $u = v \in C^0(\overline{\Omega})$. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ v nerovnosti (5.8), kde položíme $\varphi = u_n$ dostaneme (5.4). $\square$