6. Formální ekvivalence eliptického okrajového problému a příslušného variačního problému

Nechť oblast $\Omega \subset R^2$ má lipschitzovskou hranici $\partial\Omega$. Uvažujme tento okrajový problém:

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad \text{v } \Omega, \tag{6.1}$$

$$u = \overline{u} \quad \text{na } \Gamma_1 \subset \partial\Omega, \tag{6.2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} n_j = q \quad \text{na } \Gamma_2 \subset \partial\Omega, \tag{6.3}$$

kde $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ jsou dvě (relativně otevřené) podmnožiny $\partial\Omega$ takové, že

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \mathrm{mes}_1\Gamma_1 + \mathrm{mes}_1\Gamma_2 = \mathrm{mes}_1\partial\Omega, \quad \mathrm{mes}_1\Gamma_1 > 0. \tag{6.4}$$

Navíc předpokládáme, že Γ_1 sestává z konečného počtu navzájem disjunktních oblouků. Nejjednodušší možný případ, kdy Γ_1 je jeden oblouk, je naznačen na Obr. 6.1. Body A, $B \in \partial\Omega$ nepatří ani do Γ_1, ani do Γ_2, takže $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{A, B\}$.

Obr. 6.1

Symboly k_{ij}, f, $\overline{u}$ a q značí dané dostatečně hladké funkce bodu $x := [x_1, x_2]$ (jejich hladkost bude specifikována později) a n_1, n_2 jsou složky jednotkové vnější normály k hranici$\partial\Omega$; $n_i = n_i(x)$.

6.1. Poznámka. a) Ve speciálním případě, kdy $k_{ij} = \delta_{ij}$, kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta (tj. $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$) rovnice (6.1) se redukuje na Poissonovu rovnici ($\mathcal{P}$.15), tj. na

$$-\Delta u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f \quad \text{v } \Omega,$$

a okrajová podmínka (6.3) na okrajovou podmínku ($\mathcal{P}$.17), tj.

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = q \quad \text{na } \Gamma_2.$$

b) V dalším textu budeme často užívat větu $\mathcal{P}.5$, která platí i pro funkce $u, \varphi \in W_2^1(\Omega)$.

Abychom získali variační formulaci problému (6.1) – (6.3), předpokládejme, že jeho klasické řešení existuje, a násobme (6.1) libovolnou funkcí $v \in V$, kde

$$V = \{v \in W_2^1(\Omega) : \ \gamma v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}. \tag{6.5}$$

Po integraci přes Ω dostaneme:

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega v \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}x = \int_\Omega v f \,\mathrm{d}x. \tag{6.6}$$

Užijeme-li větu $\mathcal{P}.5$ (důsledek Greenovy věty), přejde levá strana (6.6) na tvar

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega v \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}x = -\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\Omega} v k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \,\mathrm{d}s + \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x.$$

Podle (6.3) a (6.5) platí

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\Omega} v k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_2} vq \,\mathrm{d}s.$$

Tedy vztah (6.6) může být psán ve tvaru

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega v f \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} vq \,\mathrm{d}s. \tag{6.7}$$

Kvůli stručnosti užívejme značení

$$a(w,v) := \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,, \tag{6.8}$$

$$L(v) := \int_\Omega v f \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} vq \,\mathrm{d}s\,. \tag{6.9}$$

Potom lze psát (6.7) ve tvaru

$$a(u,v) = L(v),$$

kde funkce $v \in V$ je libovolná. Protože tento vztah může být splněn funkcí u, která je méně hladká než klasické řešení problému (6.1) – (6.3), jsme motivováni formulovat následující variační problém:

6.2. Problém. Nechť oblast $\Omega \subset R^2$ má lipschitzovskou hranici $\partial\Omega$. Nechť $\overline{u} \in L_2(\Gamma_1)$ je taková funkce, že existuje funkce $z \in W_2^1(\Omega)$, pro kterou $\gamma z = \overline{u}$ na Γ_1. Nechť $k_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ $(i, j = 1, 2)$, kde k_{ij} jsou funkce, které vystupují v (6.8). Nechť $f \in L_2(\Omega)$ a $q \in L_2(\Gamma_2)$, kde f, q jsou funkce, které vystupují v (6.9). Problém zní takto: Nalezněte funkci $u \in W_2^1(\Omega)$ takovou, že

$$u - z \in V, \tag{6.10}$$

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \tag{6.11}$$

kde prostor V je definován vztahem (6.5) a formy $a(u, v)$ a $L(v)$ jsou definovány vztahy (6.8) a (6.9).

6.3. Poznámka. a) Předpoklady problému 6.2, které se týkají funkcí k_{ij}, f a q zaručují, že Lebesgueovy integrály definující $a(w, v)$ a $L(v)$ jsou konečné pro všechny funkce $v, w \in W_2^1(\Omega)$.

b) Vztah (6.10) implikuje

$$\gamma u = \overline{u} \quad \text{téměř všude na } \Gamma_1, \tag{6.12}$$

což je okrajová podmínka (6.2) psaná pro funkci $u \in W_2^1(\Omega)$.

6.4. Věta (o formální ekvivalenci okrajového problému a variačního problému). *a) Nechť problém* (6.1) – (6.3) *má klasické řešení* u. *Potom je řešením Problému* 6.2.

b) Nechť Problém 6.2 *má řešení* u. *Jestliže* $u \in W_2^2(\Omega)$ *a* $k_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, *potom řešení* u *splňuje rovnici* (6.1) *téměř všude v* Ω *a okrajovou podmínku* (6.3) *téměř všude na* Γ_2. *Vzhledem k* (6.12) *je tedy* u *řešením problému* (6.1) – (6.3).

Důkaz. a) Vztahy (6.6) – (6.9) implikují, že klasické řešení u splňuje (6.11). Podmínka (6.10) je evidentně splněna.

b) Protože $u \in W_2^2(\Omega)$, můžeme výraz pro $a(u, v)$ upravit pomocí věty $\mathcal{P}$.5 takto:

$$a(u, v) \equiv \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\Omega} v k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \, \mathrm{d}s - \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, \mathrm{d}x \, . \tag{6.13}$$

Protože $\gamma v = 0$ téměř všude na Γ_1 (viz (6.5)), dostáváme z (6.11) pomocí (6.8), (6.9) a (6.13) vztah

$$-\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + f \right\} v \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j - q \right\} v \, \mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in V. \tag{6.14}$$

Protože $W_0^{1,2}(\Omega) \subset V$, můžeme uvažovat (6.14) pouze pro funkce $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Potom dostaneme

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + f \right\} v \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{6.15}$$

Prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je hustý v $L_2(\Omega)$. (Plyne to z věty $\mathcal{P}$.17 a toho, že $C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$.) Tedy podle věty $\mathcal{P}$.19 vztah (6.15) implikuje platnost rovnice (6.1) téměř všude v Ω.

Protože rovnice (6.1) platí téměř všude v Ω, redukuje se (6.14) na tvar

$$\int_{\Gamma_2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j - q \right\} v \,\mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in V. \tag{6.16}$$

Vztah (6.16) lze přepsat takto:

$$\int_{\Gamma_2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j - q \right\} v \,\mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in \gamma(V), \tag{6.17}$$

kde $\gamma(V) \subset L_2(\Gamma_2)$ je množina stop všech funkcí z V na Γ_2. Podle věty 2.6 je množina $\gamma(V)$ hustá v $L_2(\Gamma_2)$, takže z (6.17) podle věty $\mathcal{P}$.19 plyne, že okrajová podmínka (6.3) je splněna téměř všude na Γ_2. $\square$

Věta 6.4 je důvodem, proč je řešení variačního problému 6.2 nazýváno *slabým řešením* okrajového problému (6.1) – (6.3).

Matematicky je Problém 6.2 obtížnější než okrajový problém (6.1) – (6.3). Avšak získání přibližného řešení variačního problému je přímočařejší a snadnější úkol než získání přibližného řešení okrajového problému.

6.5. Poznámka. Rovnice (6.1) je speciálním případem rovnice

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + k_0 u = f \quad \forall x \in \Omega \tag{6.18}$$

a Neumannova okrajová podmínka (6.3) speciálním případem Newtonovy (někdy též nazývané Robinovy) okrajové podmínky

$$bu + \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j = q \quad \text{na } \Gamma_2 \subset \partial\Omega, \tag{6.19}$$

kde $k_0 = k_0(x)$, $b = b(x)$. Není-li $b(x)$ identicky rovno nule, potom předpokládáme, že $b(x) \neq 0$ pro $x \in \Gamma_3 \subset \Gamma_2$, kde Γ_3 sestává z konečného počtu navzájem disjunktních oblouků. V případě (6.18) a (6.19) je forma $a(w,v)$ nahrazena formou

$$a(w,v) := \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega k_0 wv \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} bwv \,\mathrm{d}s \tag{6.20}$$

a předpoklady Problému 6.2 je třeba doplnit těmito předpoklady: funkce k_0 je ohraničená a měřitelná na Ω a funkce b je ohraničená a měřitelná na Γ_3. (Pokud $k_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ a $b \in C^0(\overline{\Gamma}_3)$, potom jsou tyto předpoklady splněny.)

7. Existence a jednoznačnost řešení variačního problému

Následující věta, jejíž důkaz je např. v [Re, str. 404 - 407], má zásadní význam pro úvahy v této kapitole.

7.1. Věta (Lax-Milgram). *Nechť H je Hilbertův prostor se skalárním součinem (u, v) a nechť $B(u, v)$ je bilineární forma (tedy lineární jak v u, tak ve v) definovaná pro $u, v \in H$ a taková, že existují konstanty $M > 0$ a $\beta > 0$ nezávislé na u a v tak, že platí*

$$|B(u, v)| \leq M\|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in H, \tag{7.1}$$

$$B(v, v) \geq \beta\|v\|^2 \quad \forall v \in H, \tag{7.2}$$

kde $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. Potom lze každý lineární funkcionál F, který je definovaný a ohraničený na H, vyjádřit ve tvaru

$$F(v) = B(w, v) \quad \forall v \in H, \tag{7.3}$$

kde w je prvek prostoru H jednoznačně určený funkcionálem F. Přitom je

$$\|w\| \leq \frac{\|F\|_*}{\beta}, \tag{7.4}$$

kde $\|F\|_*$ je norma funkcionálu F.

7.2. Poznámka. Bilineární forma $B(u, v)$ nemusí být symetrická; proto na rozdíl od skalárního součinu v ní záleží na pořadí u, v.

S pomocí věty 7.1 nyní dokážeme existenci a jednoznačnost řešení Problému 6.2.

7.3. Věta (o existenci a jednoznačnosti řešení variačního problému). *Je-li bilineární forma $a(v, w)$ ohraničená na $W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$, tj.*

$$|a(v, w)| \leq M\|v\|_{1,\Omega}\|w\|_{1,\Omega} \quad \forall v, w \in W_2^1(\Omega) \quad (M = \text{const}), \tag{7.5}$$

a V-eliptická, tj.

$$a(v, v) \geq \beta\|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in V \quad (\beta = \text{const} > 0), \tag{7.6}$$

kde prostor $V \subset W_2^1(\Omega)$ je definován v (6.5), a je-li lineární forma $L(v)$ ohraničená na $W_2^1(\Omega)$, tj.

$$|L(v)| \leq K\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in W_2^1(\Omega) \quad (K = \text{const}), \tag{7.7}$$

potom existuje právě jedna funkce $u \in W_2^1(\Omega)$, která splňuje vztahy (6.10), (6.11), tj. vztahy

$$u - z \in V, \tag{7.8}$$

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \tag{7.9}$$

Dále, jsou-li z_1, $z_2 \in W_2^1(\Omega)$ *dvě neekvivalentní funkce, pro které platí*

$$\gamma z_1 = \gamma z_2 \quad \text{na } \Gamma_1, \tag{7.10}$$

potom funkce u_1, $u_2 \in W_2^1(\Omega)$ *splňující vztahy*

$$u_1 - z_1 \in V, \quad u_2 - z_2 \in V, \tag{7.11}$$

$$a(u_1, v) = L(v), \quad a(u_2, v) = L(v) \quad \forall v \in V \tag{7.12}$$

jsou ekvivalentní v prostoru $W_2^1(\Omega)$.

Důkaz. a) *Existence.* V důkazu existence řešení Problému 6.2 použijeme větu 7.1, kde za prostor H zvolíme prostor V. To lze, protože V je podprostor prostoru $W_2^1(\Omega)$, tedy je Hilbertovým prostorem s metrikou prostoru $W_2^1(\Omega)$.

Z předpokladů (7.5) a (7.6) plyne, že jsou splněny předpoklady (7.1), (7.2) věty 7.1:

$$|a(t, v)| \le M\|t\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall t, v \in V \subset W_2^1(\Omega), \tag{7.13}$$

$$a(v, v) \ge \beta\|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in V \subset W_2^1(\Omega). \tag{7.14}$$

V prostoru V uvažujme funkcionál

$$F(v) = L(v) - a(z, v) \quad \forall v \in V, \tag{7.15}$$

kde $z \in W_2^1(\Omega)$ je pevná funkce z Problému 6.2 (vyskytuje se v (6.10), resp. (7.8)).

Funkcionál (7.15) je zřejmě na prostoru V lineární. Dokážeme-li, že je na V také ohraničený, budeme mít ověřeno, že jsou splněny všechny předpoklady věty 7.1. Z (7.15), (7.7) a (7.5) plyne

$$|F(v)| \le |L(v)| + |a(z, v)| \le K\|v\|_{1,\Omega} + M\|z\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} =$$

$$= (K + M\|z\|_{1,\Omega})\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in V. \tag{7.16}$$

Protože $z \in W_2^1(\Omega)$ je pevný prvek, je výraz $K + M\|z\|_{1,\Omega}$ konstanta nezávislá na $v \in V$. Tedy $F(v)$ je ohraničený funkcionál na V.

Z věty 7.1 tedy plyne, že existuje *právě jedno* $w \in V$ tak, že platí

$$F(v) = a(w, v) \quad \forall v \in V, \tag{7.17}$$

tj. že platí (dosadili jsme do (7.17) za $F(v)$ z (7.15))

$$a(w, v) = L(v) - a(z, v) \quad \forall v \in V. \tag{7.18}$$

Protože forma $a(t, v)$ je lineární v obou argumentech, můžeme psát

$$a(w, v) + a(z, v) = a(w + z, v). \tag{7.19}$$

Položíme-li tedy

$$u := w + z, \tag{7.20}$$

z (7.18) a (7.19) plyne

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V,$$

což je rovnice (7.9). Protože podle (7.20) je zároveň

$$u - z = w \in V,$$

což je inkluse (7.8), splňuje funkce u obě podmínky (6.10) a (6.11), které jsou kladeny na řešení Problému 6.2. Řešení Problému 6.2 tedy existuje.

b) *Jednoznačnost.* Víme, že existuje právě jedno $w \in V$ tak, že platí vztah (7.18). Toto jediné w vystupuje spolu s danou funkcí $z \in W_2^1(\Omega)$ ve vztahu (7.20), kterým definujeme řešení u. Tedy pro dané $z \in W_2^1(\Omega)$ existuje právě jedno řešení u Problému 6.2.

Zbývá dokázat, že jsou-li z_1, $z_2 \in W_2^1(\Omega)$ dvě neekvivalentní funkce, pro které platí (7.10), potom funkce u_1, $u_2 \in W_2^1(\Omega)$ splňující vztahy (7.11), (7.12) jsou ekvivalentní v prostoru $W_2^1(\Omega)$.

To je však snadné: Odečtením $(7.12)_1$ od $(7.12)_2$ dostaneme

$$a(u_2 - u_1, v) = 0 \quad \forall v \in V. \tag{7.21}$$

Z (7.11) plyne

$$(u_2 - z_2) - (u_1 - z_1) = (u_2 - u_1) - (z_2 - z_1) \in V. \tag{7.22}$$

Vzhledem k (7.10) platí $z_2 - z_1 \in V$, takže ze vztahu (7.22) plyne, že $u_2 - u_1 \in V$. V (7.21) můžeme tedy položit $v = u_2 - u_1$ a s pomocí (7.6) dostaneme

$$0 = a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \geq \beta \|u_2 - u_1\|_{1,\Omega}^2$$

čili

$$\|u_2 - u_1\|_{1,\Omega} = 0,$$

odkud $u_2 = u_1$ v prostoru $W_2^1(\Omega)$. $\square$

V následujícím lemmatu dokážeme, že podmínky kladené na funkce k_{ij}, f a q v Problému 6.2 postačují na splnění předpokladů (7.5) a (7.7) věty 7.3.

7.4. Lemma. *Nechť oblast Ω má lipschitzovskou hranici $\partial\Omega$. Nechť $k_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ $(i, j = 1, 2)$, $f \in L_2(\Omega)$ a $q \in L_2(\Gamma_2)$. Potom formy $a(v, w)$ a $L(v)$ dané vztahy* (6.8) *a* (6.9) *splňují* (7.5) *a* (7.7), *tj. platí pro ně*

$$|a(v,w)| \leq M\|v\|_{1,\Omega}\|w\|_{1,\Omega} \quad \forall v, w \in W_2^1(\Omega) \quad (M = \text{const}),$$

$$|L(v)| \leq K\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in W_2^1(\Omega) \quad (K = \text{const}),$$

kde konstanty K, M nezávisejí na funkcích v, w.

Důkaz. a) Z (6.8) a Schwarzovy nerovnosti (viz větu $\mathcal{P}$.15) plyne (symbol $\|v\|_{0,\Omega}$ znamená totéž, co $\|v\|_{L_2(\Omega)}$):

$$|a(v,w)| = \left| \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x \right| \leq \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^0(\overline{\Omega})} \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \cdot \left| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right| \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^0(\overline{\Omega})} \sum_{i,j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega} =$$

$$= \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^0(\overline{\Omega})} \left\{ \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\|_{0,\Omega} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\|_{0,\Omega} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\|_{0,\Omega} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\|_{0,\Omega} \right) \right\}.$$

Na každý z obou součtů v kulatých závorkách užijeme Cauchyovu nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}, \tag{7.23}$$

takže dostaneme (s použitím seminormy – viz definici 2.10)

$$|a(v,w)| \leq 2 \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^0(\overline{\Omega})} \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2} =$$

$$= 2 \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^0(\overline{\Omega})} |v|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega} \leq M \|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega},$$

kde jsme položili $M = 2 \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^0(\overline{\Omega})}$.

b) Podle (6.9)

$$|L(v)| \leq \left| \int_\Omega v f \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\Gamma_2} v q \, \mathrm{d}s \right|.$$

Pomocí Schwarzovy nerovnosti a "stopové" nerovnosti (2.13) dostaneme pro každé $v \in W_2^1(\Omega)$:

$$\left| \int_\Omega v f \, \mathrm{d}x \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega},$$

$$\left| \int_{\Gamma_2} v q \, \mathrm{d}s \right| \leq \|q\|_{L_2(\Gamma_2)} \|v\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq C \|q\|_{L_2(\Gamma_2)} \|v\|_{1,\Omega},$$

kde stopa γv je označena jednoduše symbolem v (viz Poznámku 2.5b). Tedy můžeme položit $K = \|f\|_{0,\Omega} + C\|q\|_{L_2(\Gamma_2)}$. □

Poznamenejme, že předpoklad lipschitzovskosti hranice $\partial\Omega$ jsme potřebovali v části b) důkazu, když jsme užili "stopovou" nerovnost (2.13).

Následující lemma udává postačující podmínku pro platnost předpokladu (7.6) věty 7.3.

7.5. Lemma. *Nechť oblast Ω má lipschitzovskou hranici $\partial\Omega$. Nechť $k_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ $(i,j = 1,2)$, $\mathrm{mes}_1 \Gamma_1 > 0$ a nechť*

$$\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu(\xi_1^2 + \xi_2^2) \tag{7.24}$$

pro skoro všechna $x \in \Omega$ a všechna $\xi_1, \xi_2 \in R^1$, kde μ je kladná konstanta, která je nezávislá na reálných číslech ξ_1, ξ_2. Nechť bilineární forma $a(v,w)$ je dána vztahem (6.8). *Potom*

$$a(v,v) \geq \beta \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in V,$$

kde prostor V je dán vztahem (6.5) *a β je kladná konstanta nezávislá na $v \in V$.*

Důkaz. Položme $S = \Gamma_1$ ve Friedrichsově nerovnosti (2.25) a označme $C_0 := (K(\Omega, \Gamma_1))^{-1}$, kde $C_0 > 0$. Potom dostaneme

$$C_0 \|v\|_{1,\Omega}^2 \leq |v|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in V, \tag{7.25}$$

V (7.24) položme $\xi_i = \partial v / \partial x_i$, kde $v \in V$. Integrací přes Ω dostaneme s pomocí (6.8) a (7.25):

$$a(v,v) \geq \mu |v|_{1,\Omega}^2 \geq \mu C_0 \|v\|_{1,\Omega}^2.$$

Tedy $\beta = \mu C_0 > 0$. $\square$

7.6. Poznámka. Je-li podmínka (7.24) splněna, potom říkáme, že rovnice (6.1) je rovnoměrně eliptická v oblasti Ω. Konstanta μ obvykle závisí na funkcích k_{ij} a oblasti Ω. Je podstatné, že funkce k_{ij}, vystupující ve formulacích mnoha technických problémů, splňují podmínku (7.24).

S použitím podmínky (7.24) můžeme větu o existenci a jednoznačnosti řešení Problému 6.2 vyslovit takto:

7.7. Věta. *Jestliže funkce k_{ij} splňují podmínku* (7.24) *a* $\mathrm{mes}_1 \Gamma_1 > 0$, *potom Problém* 6.2 *má právě jedno řešení $u \in W_2^1(\Omega)$.*

Důkaz. Předpoklady věty 7.7 spolu s předpoklady formulovanými v Problému 6.2 zaručují podle lemmat 7.4 a 7.5, že předpoklady věty 7.3 jsou splněny (s formami $a(v,w)$ a $L(v)$ definovanými pomocí vztahů (6.8) a (6.9)). $\square$

V následující větě si všimneme případu, kdy bilineární forma $a(v,w)$ je dána vztahem (6.20).

7.8. Věta. *Je-li bilineární forma $a(v,w)$ dána vztahem* (6.20), *přičemž*

$$k_0(x) \geq 0 \text{ téměř všude v } \Omega, \quad b(x) \geq 0 \text{ téměř všude na } \Gamma_3, \tag{7.26}$$

potom věta 7.7 *opět platí. Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek*

$$k_0(x) \geq c_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (c_0 = \mathrm{const}), \tag{7.27}$$

$$b(x) \geq c_0 > 0 \quad \forall x \in \Gamma_3, \tag{7.28}$$

potom ve větě 7.7 *může být $\Gamma_1 = \emptyset$.*

Důkaz. Z (6.20) a (7.26) plyne

$$a(v,v) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega k_0 v^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} b v^2 \,\mathrm{d}s \geq \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x.$$

Odtud a z (7.24) (podobně jako v důkazu lemmatu 7.5) plyne podmínka (7.6) věty 7.3. Splnění předpokladů (7.5) a (7.7) o ohraničenosti forem $a(v, w)$ a $L(v)$ je zřejmé z předchozího výkladu.

Je-li splněna podmínka (7.27), potom podle (6.20)

$$a(v,v) \geq \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x + c_0 \int_{\Omega} v^2 \, \mathrm{d}x \geq$$

$$\geq \mu |v|_{1,\Omega}^2 + c_0 \|v\|_{0,\Omega}^2 \geq \min(\mu, c_0) \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in W_2^1(\Omega).$$

Je-li splněna podmínka (7.28), potom podle (6.20) a Friedrichsovy nerovnosti (2.26) opět platí $a(v, v) \geq \beta \|v\|_{1,\Omega}^2$ pro všechna $v \in W_2^1(\Omega)$, kde $\beta = \min(\mu, c_0)/K(\Omega, \Gamma_3)$.

Prozatím jsme nepožadovali, aby forma $a(v, w)$ byla symetrická, Tento požadavek vyslovíme až ve větě 7.9:

7.9. Věta (o minimu kvadratického funkcionálu). *Nechť bilineární forma $a(v, w)$, která vystupuje ve formulaci Problému 6.2, je symetrická, tj.*

$$a(v,w) = a(w,v) \quad \forall v, w \in W_2^1(\Omega). \tag{7.29}$$

Je-li dále V-eliptická (tj. platí (7.6)), potom funkce $u \in W_2^1(\Omega)$ je jediným řešením Problému 6.2, když a jen když ostře minimalizuje funkcionál

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \tag{7.30}$$

na množině $z + V$, tj.

$$\Pi(u) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in z + V, \tag{7.31}$$

kde znamení rovnosti platí pouze pro $v = u$ a kde $z + V$ je množina, která vznikne, když ke každému prvku z V přičteme konstantní prvek $z \in W_2^1(\Omega)$.

Důkaz. Množina $z + V$ může být psána ve tvaru

$$z + V = \{v \in W_2^1(\Omega) : \ v = u + \lambda w, \ \forall \lambda \in R^1, \ \forall w \in V\}, \tag{7.32}$$

kde $\gamma u = \gamma z$ na Γ_1. Nechť $v \in z + V$. Potom podle (7.30) platí

$$\Pi(u + \lambda w) - \Pi(u) = \frac{1}{2} a(u + \lambda w, u + \lambda w) - L(u + \lambda w) -$$

$$-\frac{1}{2} a(u,u) + L(u) = \frac{\lambda}{2} a(u,w) + \frac{\lambda}{2} a(w,u) + \frac{\lambda^2}{2} a(w,w) - \lambda L(w) =$$

$$= \lambda [a(u,w) - L(w)] + \frac{\lambda^2}{2} a(w,w). \tag{7.33}$$

a) Nechť u je jediné řešení Problému 6.2. Potom podle (6.11) a (7.33) platí

$$\Pi(u + \lambda w) - \Pi(u) = \frac{\lambda^2}{2} a(w,w).$$

Tento výsledek a V-eliptičnost formy $a(v, v)$ implikují, že funkce u ostře minimalizuje funkcionál $\Pi(v)$ na množině V.

b) Nyní dokážeme opačnou implikaci: Nechť funkce u ostře minimalizuje funkcionál $\Pi(v)$ na množině V. Jestliže existuje taková funkce $w_0 \in V$, že

$$a(u, w_0) \neq L(w_0), \tag{7.34}$$

potom, zvolíme-li $\lambda = -[a(u, w_0) - L(w_0)]/a(w_0, w_0)$, dostaneme z (7.33):

$$\Pi(u + \lambda w_0) - \Pi(u) = -[a(u, w_0) - L(w_0)]^2/[2a(w_0, w_0)] < 0,$$

protože podle (7.6) je $a(w_0, w_0) > 0$ (funkce w_0 nemůže být ekvivalentní nule - viz (7.34)). To je však spor s předpokladem, že platí (7.31). Tedy (7.34) nemůže platit, takže u splňuje (6.11), tj. u je jediné řešení Problému 6.2. $\square$

Poznamenejme, že podle (6.8), resp. (6.20) vztah (7.29) platí, když a jen když $k_{ij} = k_{ji}$.

Ve zbývající části této kapitoly uvedeme dva důsledky dosud neužitého vztahu (7.4) z Lax-Milgramova lemmatu. Symetričnost (7.29) opět nebudeme předpokládat.

7.10. Věta. *Pro řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ Problému* 6.2 *platí*

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C\big(\|f\|_{0,\Omega} + \|z\|_{1,\Omega} + \|q\|_{0,\Gamma_2}\big) \quad \forall v \in V. \tag{7.35}$$

Důkaz. Z (7.17) a (7.18) plyne

$$|F(v)| \leq |L(v)| + |a(z, v)| \quad \forall v \in V. \tag{7.36}$$

Z části b) důkazu lemmatu 7.4 dostáváme

$$|L(v)| \leq \big(\|f\|_{0,\Omega} + C_1\|q\|_{0,\Gamma_2}\big)\|v\|_{1,\Omega}, \tag{7.37}$$

kde C_1 je konstanta ze stopové nerovnosti. Z (7.36), (7.5) a (7.37) plyne

$$|F(v)| \leq \big(\|f\|_{0,\Omega} + C_1\|q\|_{0,\Gamma_2} + M\|z\|_{1,\Omega}\big)\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in V. \tag{7.38}$$

Z (7.38) dostáváme podle definice normy funkcionálu

$$\|F\|_* \leq \|f\|_{0,\Omega} + M\|z\|_{1,\Omega} + C_1\|q\|_{0,\Gamma_2}. \tag{7.39}$$

Podle (7.20) platí

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \|w\|_{1,\Omega} + \|z\|_{1,\Omega}, \tag{7.40}$$

kde podle (7.4)

$$\|w\|_{1,\Omega} \leq \frac{\|F\|_*}{\beta}.$$

Užitím této nerovnosti a nerovnosti a nerovnosti (7.39) dostaneme ze vztahu (7.40) odhad

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\beta}\|f\|_{0,\Omega} + \left(1 + \frac{M}{\beta}\right)\|z\|_{1,\Omega} + \frac{C_1}{\beta}\|q\|_{0,\Gamma_2}$$

a odtud odhad (7.35), kde $C = \max(1/\beta, 1 + M/\beta, C_1/\beta)$. $\square$

7.11. Věta (o spojité závislosti řešení na datech problému). *Nechť* u, *resp.* $\widetilde{u}$ *je řešení Problému* 6.2 *s daty* f, z, q, *resp. s daty* $\widetilde{f}$, $\widetilde{z}$, $\widetilde{q}$. *Potom platí*

$$\|u - \widetilde{u}\|_{1,\Omega} \le C\big(\|f - \widetilde{f}\|_{0,\Omega} + \|z - \widetilde{z}\|_{1,\Omega} + \|q - \widetilde{q}\|_{0,\Gamma_2}\big), \tag{7.41}$$

kde konstanta C *nezávisí na funkcích vystupujících v závorce.*

Důkaz. Protože Problém 6.2 je lineární, je rozdíl $u - \widetilde{u}$ řešením Problému 6.2 s daty $f - \widetilde{f}$, $z - \widetilde{z}$ a $q - \widetilde{q}$. Nerovnost (7.41) tedy plyne z tvrzení (7.35) věty 7.10. □

Odhad (7.41) říká, že malá změna dat (měřená v příslušných normách) způsobí malou změnu řešení Problému 6.2 měřenou v normě prostoru $W_2^1(\Omega)$.

8. První konstrukce trojúhelníkových konečných prvků. Interpolační věty

Protože víme, že existuje právě jedno řešení Problému 6.2, můžeme začít přemýšlet o konstrukcích přibližných řešení tohoto problému. Základní myšlenka je jednoduchá a přímočará: aproximovat funkci z nějakou jednoduchou funkcí $z_h \in W_2^1(\Omega)$ a prostor V nějakým konečněrozměrným podprostorem V_h prostoru $W_2^1(\Omega)$ a pak najít takovou funkci

$$u_h \in z_h + V_h \equiv \{v \in W_2^1(\Omega) : \; v = z_h + w, \; w \in V_h\},$$

že platí

$$a(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h.$$

Tato myšlenka je základem *přibližných variačních metod* pro řešení Problému 6.2.

V tomto skriptu budou funkce z_h a prostory V_h konstruovány pomocí konečných prvků. V této kapitole popíšeme nejjednodušší konečné prvky a jejich vlastnosti. Nejprve budeme uvažovat pouze ohraničené dvojrozměrné oblasti s polygonální hranicí. V úvahách této kapitoly budou mít základní význam definice 1.15 a důsledek 1.16.

Triangulujme danou ohraničenou oblast Ω s polygonální hranicí $\partial\Omega$ podle definice 1.15. Nechť uzlové body $P_1, \dots, P_m$ triangulace $\mathcal{T}$ jsou identické s vrcholy trojúhelníků z $\mathcal{T}$ (viz Obr. 8.1, kde Ω je obdélník a $m = 20$).

V každém uzlovém bodě P_i zvolme reálné číslo a označme je symbolem $v(P_i)$. Na každém trojúhelníku z $\mathcal{T}$ uvažujme lineární funkci, která je jednoznačně určena hodnotami $v(P_r)$, $v(P_s)$, $v(P_t)$ předepsanými ve vrcholech P_r, P_s, P_t trojúhelníku. Tímto způsobem zkonstruujeme funkci $v(x_1, x_2)$, která je spojitá na $\overline{\Omega}$, lineární na každém trojúhelníku z $\mathcal{T}$ a jednoznačně určena parametry $v(P_1), \dots, v(P_m)$. Podle důsledku 1.16 platí, že $v \in W_2^1(\Omega)$.

Množina všech těchto funkcí je m-rozměrný prostor

$$X_{\mathcal{T}}^{(1)} \subset W_2^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}). \tag{8.1}$$

Obr. 8.1

Dolní index $\mathcal{T}$ označuje triangulaci, na které byl prostor $X_{\mathcal{T}}^{(1)}$ konstruován; horní index v závorce označuje stupeň polynomu, který byl užit při konstrukci $X_{\mathcal{T}}^{(1)}$. Symbol $X_{\mathcal{T}}^{(1)}$ je speciálním případem symbolu $X_{\mathcal{T}}^{(n)}$.

Říkáme také, že prostor $X_{\mathcal{T}}^{(1)}$ byl konstruován pomocí konečných prvků tohoto typu: trojúhelníkový prvek s polynomem prvního stupně, který je jednoznačně určen funkčními hodnotami předepsanými ve vrcholech trojúhelníku.

Hovoříme-li tedy o libovolném konečném prvku, musí být definovány následující tři vlastnosti:

(1) geometrický tvar prvku

(2) typ funkce

(3) parametry

Vlastnosti (2) a (3) uvažované dohromady se nazývají *násada*. Výraz "parametry" ve vlastnosti (3) znamená parametry, které jednoznačně určují funkci, jejíž typ je dán ve vlastnosti (2).

Např. v případě prostoru $X_{\mathcal{T}}^{(1)}$ máme:

(1) trojúhelník

(2) lineární polynom

(3) funkční hodnoty ve vrcholech

V kapitole 9 uvidíme, že prostor $X_{\mathcal{T}}^{(2)}$ je konstruován konečnými prvky tohoto typu:

(1) trojúhelník

(2) kvadratický polynom

(3) funkční hodnoty ve vrcholech a půlicích bodech stran

V případě $n = 3$ je více možností; jedna z nich je konstruovat prostor $X_{\mathcal{T}}^{(3)}$ konečnými prvky tohoto typu:

(1) trojúhelník

(2) kubický polynom

(3) funkční hodnoty ve vrcholech, těžišti a bodech, které dělí strany na třetiny.

V kapitole 9 uvidíme, že pro $n = 2, 3$ je splněna inkluse analogická inklusi (8.1):

$$X_T^{(n)} \subset W_2^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}). \tag{8.2}$$

Na Obr. 8.2 jsou právě popsané tři konečné prvky znázorněny. Případ $n = 4$ bude použit v kapitole 9. Tučné body na těchto obrázcích znamenají jednak uzlové body a jednak skutečnost, že v těchto bodech předepisujeme funkční hodnoty.

Obr. 8.2

Tyto čtyři konečné prvky jsou prvními čtyřmi členy posloupnosti konečných prvků, kde v případě n-tého členu jsou uzlové body uspořádány na trojúhelníku jako prvních N čísel v Pascalově trojúhelníku, kde

$$N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \tag{8.3}$$

Nyní pro tyto konečné prvky uvedeme interpolační teorém, který hraje významnou roli v důkazech konvergence metody konečných prvků a v odhadech chyb. Pro lepší orientaci začneme případem $n = 1$:

8.1. Věta (interpolační teorém v případě n = 1). *Nechť $u \in W_2^2(T)$ a nechť u_I je lineární polynom, pro který platí*

$$u_I(P_i) = u(P_i) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{8.4}$$

kde P_1, P_2, P_3 jsou vrcholy trojúhelníka $\overline{T}$. Potom platí

$$\|u - u_I\|_{j,T} \le \frac{C}{(\sin\vartheta_T)^j}\, h_T^{2-j} |u|_{2,T} \quad (j = 0, 1, 2), \tag{8.5}$$

kde h_T je délka největší strany trojúhelníka $\overline{T}$, ϑ_T je nejmenší úhel trojúhelníka $\overline{T}$ a kde konstanta C nezávisí na h_T, ϑ_T a u.

8.2. Věta (interpolační teorém v obecném případě). *Nechť $u \in W_2^{n+1}(T)$ a nechť $u_I \in \mathcal{P}_2(n)$ je polynom, pro který platí*

$$u_I(P_i) = u(P_i) \quad (i = 1, \dots, N), \tag{8.6}$$

kde N je dáno vztahem (8.3) a $P_1, \dots, P_N$ jsou uzlové body na trojúhelníku $\overline{T}$ (viz Obr. 8.2). Potom platí

$$\|u - u_I\|_{j,T} \le \frac{C}{(\sin\vartheta_T)^j}\, h_T^{n+1-j} |u|_{n+1,T} \quad (j = 0, 1 \dots, n+1), \tag{8.7}$$

kde h_T je délka největší strany trojúhelníka $\overline{T}$, ϑ_T je nejmenší úhel trojúhelníka $\overline{T}$ a kde konstanta C nezávisí na h_T, ϑ_T a u.

Věta 8.1 je speciálním případem věty 8.2, která bude dokázána v kapitole 15. Zde pouze upozorňujeme, že počet uzlových bodů daný vztahem (8.3) je roven počtu koeficientů a_i polynomu dvou proměnných n-tého stupně,

$$p(x_1, x_2) = a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_1^2 \cdots + a_N x_2^n,$$

takže vztah (8.6) má smysl.

Abychom eliminovali z našich úvah závislost pravé strany (8.5), resp. (8.7) na $(\sin \vartheta_T)^{-j}$, budeme uvažovat pouze množinu triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$, $h \in (0; 1)$, jejíž každý člen $\mathcal{T}_h$ splňuje podmínku

$$\vartheta_h \geq \vartheta_0 > 0 \quad \forall h \in (0; 1), \tag{8.8}$$

kde

$$\vartheta_h := \min_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} \vartheta_T\,. \tag{8.9}$$

Podmínka vyjádřená vztahy (8.8), (8.9) se nazývá *podmínka minimálního úhlu* (the minimum angle condition). Protože

$$(\sin \vartheta_T)^{-j} \leq (\sin \vartheta_0)^{-j} \leq (\sin \vartheta_0)^{-n-1},$$

můžeme výraz $(\sin \vartheta_0)^{-n-1}$ zahrnout do konstanty C a místo (8.7) psát

$$\|u - u_I\|_{j,T} \leq C h_T^{n+1-j} |u|_{n+1,T} \quad (j = 0, 1 \ldots, n+1), \tag{8.10}$$

kde konstanta C nezávisí na u, h_T a $\overline{T}$.

Kromě parametru ϑ_h přiřadíme každé triangulaci $\mathcal{T}_h$ parametr

$$h := \max_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} h_T\,. \tag{8.11}$$

Symbol h má tak dva významy: jednak je to index u $\mathcal{T}_h$, jednak má význam daný vztahem (8.11). To však nepovede k nedorozumění.

8.3. Označení. Prostor $X_{\mathcal{T}_h}^{(n)}$ bude stručně označován symbolem $X_h^{(n)}$. Symbol $I_h^{(n)} u$ bude značit interpolant funkce $u \in C^0(\overline{\Omega})$ v prostoru $X_h^{(n)}$, tj. funkci z $X_h^{(n)}$, která je na každém trojúhelníku $\overline{T}_j \in \mathcal{T}_h$ interpolačním polynomem z $\mathcal{P}_2(n)$ funkce u; tedy platí

$$(I_h^{(n)} u)(P_i^j) = u(P_i^j) \quad (i = 1, \ldots, N;\ \overline{T}_j \in \mathcal{T}_h), \tag{8.12}$$

kde $P_1^j, \ldots, P_N^j$ jsou uzlové body na trojúhelníku $\overline{T}_j$ (viz Obr. 8.3, kde $N = 6$).

Obr. 8.3

8.4. Věta. *Nechť* $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$. *Nechť* $I_h^{(n)}u \in X_h^{(n)}$ *je interpolant funkce* $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$. *Nechť množina triangulací* $\{\mathcal{T}_h\}$ *splňuje podmínku minimálního úhlu. Potom platí*

$$\|u - I_h^{(n)}u\|_{s,\Omega} \le Ch^{n+1-s}|u|_{n+1,\Omega} \quad (s = 0, 1), \tag{8.13}$$

kde konstanta C *nezávisí na* h *a* u.

Důkaz. Podle definice 1.15, věty 8.2 a vztahu (8.11) platí

$$\|u - I_h^{(n)}u\|_{s,\Omega}^2 = \sum_{k=1}^{p} \|u - u_I\|_{s,T_k}^2 \le C^2 \sum_{k=1}^{p} h_{T_k}^{2(n+1-s)}|u|_{n+1,T_k}^2 \le$$

$$\le C^2 h^{2(n+1-s)} \sum_{k=1}^{p} |u|_{n+1,T_k}^2 = C^2 h^{2(n+1-s)}|u|_{n+1,\Omega}^2. \tag{8.14}$$

Odmocněním nerovnosti (8.14) dostaneme odhad (8.13). (Je třeba poznamenat, že s může v (8.13) nabývat pouze hodnot 0 a 1, protože podle důsledku 1.16 máme pouze zaručeno, že $I_h^{(n)}u \in W_2^1(\Omega)$). $\square$

Ve vztahu (8.12) a na Obr. 8.3 vystupuje tzv. *lokální značení* uzlových bodů.

9. Konečněprvkové prostory $X_h^{(n)}$

V této kapitole bude vhodnější užívat značení

$$x := x_1, \quad y := x_2 .$$

Budeme uvažovat libovolnou triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$ ohraničené oblasti $\Omega \subset R^2$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Zvolme přirozené číslo n a na každém trojúhelníku $\overline{T}_i \in \mathcal{T}_h$ zvolme N uzlových bodů způsobem popsaným v kapitole 8, kde N je dáno vztahem (8.3).

9.1. Lemma. a) *Mají-li trojúhelníky* $\overline{T}_i$, $\overline{T}_j \in \mathcal{T}_h$ *společnou stranu* l, *potom uzlové body trojúhelníka* $\overline{T}_i$, *které leží na* l, *jsou totožné s uzlovými body trojúhelníka* $\overline{T}_j$, *které leží na* l.

b) *Celkový počet* ϱ *uzlových bodů v triangulaci* $\mathcal{T}_h$ *je dán vztahem*

$$\varrho = \varrho_v + (n-1)\varrho_s + (N-3n)\varrho_t\,, \tag{9.1}$$

kde ϱ_v *je celkový počet vrcholů,* ϱ_s *celkový počet stran a* ϱ_t *celkový počet trojúhelníků v triangulaci* $\mathcal{T}_h$. *V případě vrcholů a stran se každý vrchol a každá strana bere pouze jednou (ne tedy tolikrát, kolika trojúhelníkům náleží).*

Důkaz. a) Uzlové body, které leží na straně trojúhelníka $\overline{T}$, dělí tuto stranu na n částí stejné délky. Odtud plyne tvrzení a).

b) Celkový počet uzlových bodů ležících uvnitř jedné strany každého trojúhelníka $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ je roven $n-1$. Tedy celkový počet uzlových bodů ležících na hranici ∂T trojúhelníka $\overline{T}$ je $3+3(n-1)=3n$. Tedy ve vnitřku T trojúhelníka $\overline{T}$ leží $N-3n$ uzlových bodů. Z těchto skutečností plyne vztah (9.1). $\square$

Pro naše další úvahy označíme uzlové body triangulace $\mathcal{T}_h$ (prozatím libovolně zvoleným způsobem) symboly $P_1, P_2, \ldots, P_\varrho$ (tzv. *globální značení* uzlových bodů na rozdíl od lokálního značení ve vztahu (8.12) a Obr. 8.3).

9.2. Lemma. *Nechť* P *je libovolný bod strany* $l \equiv \overline{P_jP_k}$ *trojúhelníka* $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. *Hodnota* $p_n(P)$ *polynomu* $p_n(x,y) \in \mathcal{P}_2(n)$ *je jednoznačně určena jeho hodnotami v* $n+1$ *uzlových bodech, které leží na straně* l.

Důkaz. Nechť $P_j = [x_j, y_j]$, $P_k = [x_k, y_k]$. Zvolme parametrické vyjádření úsečky l ve tvaru

$$x = x_j + (x_k - x_j)s, \quad y = y_j + (y_k - y_j)s, \quad 0 \le s \le 1$$

a definujme polynom $\hat{p}_n(s) \in \mathcal{P}_1(n)$ vztahem

$$\hat{p}_n(s) = p_n(x_j + (x_k - x_j)s, y_j + (y_k - y_j)s).$$

Z teorie Lagrangeových interpolačních polynomů jedné proměnné plyne, že polynom $\hat{p}_n(s)$ je jednoznačně určen $n+1$ hodnotami

$$\hat{p}_n\Big(\frac{i}{n}\Big) = p_n\Big(x_j + (x_k - x_j)\frac{i}{n}, y_j + (y_k - y_j)\frac{i}{n}\Big) \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Hodnoty na pravé straně jsou hodnoty polynomu $p_n(x,y)$ v $n+1$ uzlových bodech ležících na straně $l = \overline{P_jP_k}$. Protože můžeme pro každé $P \in l$ nalézt právě jedno $s \in \langle 0; 1\rangle$, které koresponduje bodu P, je důkaz ukončen. $\square$

Lemma 9.2 užijeme k důkazu prvních dvou vět této kapitoly. K důkazu první z nich potřebujeme ještě jedno lemma:

9.3. Lemma. *Nechť polynom $p(x,y) \in \mathcal{P}_2(n)$ je roven nule na úsečce $l = \overline{P_j P_k}$ kde $P_j = [x_j, y_j]$, $P_k = [x_k, y_k]$ (nebo, což je totéž, nechť je roven nule na přímce určené body P_j, P_k). Potom platí*

$$p(x,y) = f_{jk}(x,y) q_{n-1}(x,y) \quad \forall [x,y] \in R^2, \tag{9.2}$$

kde $q_{n-1} \in \mathcal{P}_2(n-1)$ a $f_{jk}(x,y)$ je lineární funkce daná vztahem

$$f_{jk}(x,y) = -(y_k - y_j)(x - x_j) + (x_k - x_j)(y - y_j). \tag{9.3}$$

Lemma 9.3 je speciálním případem lemmatu 18.3, které dokážeme později. Poznamenáváme, že rovnici přímky určené body P_j, P_k lze napsat ve tvaru $f_{jk}(x,y) = 0$.

9.4. Věta. *Nechť $u \in C^0(\overline{T})$, kde $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Potom existuje právě jeden polynom $u_I \in \mathcal{P}_2(n)$, pro který platí*

$$u_I(P_i^T) = u(P_i^T) \quad (i = 1, \ldots, N), \tag{9.4}$$

kde $N = (n+1)(n+2)/2$ a uzlové body $P_1^T, \ldots, P_N^T$ jsou zvoleny na trojúhelníku $\overline{T}$ způsobem popsaným v kapitole 8.

Důkaz. Polynom u_I lze psát obecně ve tvaru

$$u_I(x,y) = \sum_{t=0}^{n} \sum_{r+s=t} a_{rs}^{(t)} x^r y^s \,. \tag{9.5}$$

Dosadíme-li (9.5) do (9.4), dostaneme N lineárních algebraických rovnic pro N koeficientů $a_{rs}^{(t)}$. Stačí dokázat, že determinant této soustavy rovnic je různý od nuly. Jinými slovy stačí dokázat, že homogenní soustava

$$u_I(P_i^T) = 0 \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{9.6}$$

má pouze nulové řešení $a_{rs}^{(t)} = 0$, tj. $u_I(x,y) \equiv 0$.

Nechť P_1, P_2, P_3 jsou vrcholy $\overline{T}$. Trojím užitím lemmat 9.2 a 9.3 z (9.6) plyne, že polynom $u_I(x,y)$ je dělitelný kubickým polynomem $f(x,y)$, kde

$$f(x,y) := f_{12}(x,y) f_{13}(x,y) f_{23}(x,y) \,. \tag{9.7}$$

Pro $n = 1$ a $n = 2$ je to jedině možné, když $u_I(x,y) \equiv 0$. V případě $n = 3$ dostáváme

$$u_I(x,y) = K f(x,y) \,. \tag{9.8}$$

Protože $P_0 \notin \partial T$, kde P_0 je těžiště $\overline{T}$, je $f(P_0) \neq 0$. Tedy z (9.8) a $u_I(P_0) = 0$ plyne, že $K = 0$. Tedy podle (9.8) je $u_I(x,y) \equiv 0$.

V případě $n = 4$ z (9.6) a lemmat 9.2 a 9.3 dostaneme

$$u_I(x,y) = f(x,y) q_1(x,y), \tag{9.9}$$

kde $q_1 \in \mathcal{P}_2(1)$. Doposud jsme nevyužili toho, že

$$u_I(Q_1) = u_I(Q_2) = u_I(Q_3) = 0\,, \tag{9.10}$$

kde Q_1, Q_2, Q_3 jsou tři uzlové body, které leží ve vnitřku T trojúhelníka $\overline{T}$ (viz Obr. 8.2 pro $n = 4$). Protože $f(Q_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, z (9.9) a (9.10) plyne, že $q_1(Q_i) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. To však znamená, že $q_1(x, y) \equiv 0$. Z (9.9) pak plyne $u_I(x, y) \equiv 0$.

V obecném případě dokážeme větu matematickou indukcí. První krok již byl učiněn. Nyní předpokládáme, že implikace

$$(9.6) \quad \Rightarrow \quad u_I(x, y) \equiv 0$$

platí pro $u_I \in \mathcal{P}_2(k)$, kde $k = 1, \ldots, n-1$ $(n > 4)$. Z (9.6) a lemmat 9.2 a 9.3 dostaneme

$$u_I(x, y) = f(x, y) q_{n-3}(x, y)\,. \tag{9.11}$$

Ve vnitřku T trojúhelníku $\overline{T}$ leží nyní M uzlových bodů, kde

$$M = \frac{1}{2}(n - 3 + 1)(n - 3 + 2) = \frac{1}{2}(n - 2)(n - 1);$$

tyto uzlové body jsou uspořádány tak jako uzlové body polynomu $q_{n-3} \in \mathcal{P}_2(n-3)$. Označíme je $Q_1, \ldots, Q_M$. Podle (9.6) platí

$$u_I(Q_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, M). \tag{9.12}$$

Protože $Q_1, \ldots, Q_M$ neleží na ∂T, platí $f(Q_i) \neq 0$ $(i = 1, \ldots, M)$. Z (9.11) a (9.12) pak plyne, že

$$q_{n-3}(Q_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, M). \tag{9.13}$$

Podle indukčního předpokladu vztah (9.13) implikuje $q_{n-3}(x, y) \equiv 0$. Tento výsledek spolu s (9.11) dává $u_I(x, y) \equiv 0$. $\square$

9.5. Věta. *Nechť $\mathcal{T}_h$ je libovolná triangulace uzavřené ohraničené dvojrozměrné oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Zvolme přirozené n a na každém trojúhelníku $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ zadejme N uzlových bodů způsobem, který je popsán v kapitole* 8 *(číslo N je dáno vztahem* (8.3)*). Nechť $P_1, \ldots, P_\varrho$, kde ϱ je dáno vztahem* (9.1)*, je nějaké globální značení uzlových bodů triangulace $\mathcal{T}_h$. Zadejme v těchto uzlových bodech reálná čísla $v(P_1), \ldots, v(P_\varrho)$. Potom*

a) *funkce $v(x, y)$, která je na každém trojúhelníku $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ polynomem z $\mathcal{P}_T(n)$ jednoznačně určeným parametry $v(P_i)$, kde $P_i \in \overline{T}$, náleží do prostoru $C^0(\overline{\Omega})$ funkcí spojitých na $\overline{\Omega}$;*

b) *množina všech funkcí $v(x, y)$ popsaných v tvrzení* a) *je ϱ-dimensionální prostor, který označíme $X_h^{(n)}$.*

Důkaz. a) Jednoznačné určení polynomu $v\big|_{\overline{T}}$ parametry $v(P_i)$, kde $P_i \in \overline{T}$, plyne z věty 9.4. Tvrzení, že $v \in C^0(\overline{\Omega})$, plyne z lemmatu 9.2 a z vlastností každé triangulace (viz definici 1.15).

b) Toto tvrzení je evidentní. $\square$

9.6. Poznámka. Konečnědimensionální prostor $X_h^{(n)}$ z věty 9.5 je totožný s prostorem $X_h^{(n)}$ (čili $X_{\mathcal{T}_h}^{(n)}$) zavedeným v kapitole 8.

9.7. Věta. *Interpolační polynom $u_I(x,y)$ z věty 9.4 může být psán ve tvaru*

$$u_I(x,y) = \sum_{i=1}^{N} u(P_i^T)\psi_i^T(x,y), \tag{9.14}$$

kde $\psi_i^T(x,y) \in \mathcal{P}_2(n)$ je polynom jednoznačně určený podmínkami

$$\psi_i^T(P_j^T) = \delta_{ij} \quad (j = 1,\dots,N); \tag{9.15}$$

symbol δ_{ij} má jako obvykle význam Kroneckerova delta.

Důkaz. Z věty 9.4 plyne, že pro každé $i = 1,\dots,N$ existuje právě jeden polynom $\psi_i^T \in \mathcal{P}_2(n)$ s vlastnostmi (9.15). Tedy existuje právě jeden polynom náležející do $\mathcal{P}_2(n)$, který může být psán ve tvaru pravé strany vztahu (9.14). Vztahy (9.15) implikují, že polynom (9.14) splňuje podmínky (9.4). $\square$

9.8. Věta. *Nechť jsou splněny tytéž předpoklady jako ve větě 9.5. Nechť $\varphi_i(x,y)$ $(i = 1,\dots \varrho)$ jsou funkce z prostoru $X_h^{(n)}$, pro které*

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (i,j = 1,\dots,\varrho). \tag{9.16}$$

Potom každá funkce $v \in X_h^{(n)}$ může být psána ve tvaru

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^{\varrho} v(P_i)\varphi_i(x,y); \tag{9.17}$$

množina $\{\varphi_1(x,y),\dots,\varphi_\varrho(x,y)\}$ je báze ϱ-dimensionálního prostoru $X_h^{(n)}$ a funkční hodnoty $v(P_1),\dots,v(P_\varrho)$ jsou souřadnice funkce $v(x,y)$ při této bázi.

Důkaz. Protože $X_h^{(n)}$ je lineární prostor, náleží každá lineární kombinace funkcí $\varphi_1(x,y),\dots,\varphi_\varrho(x,y)$ do $X_h^{(n)}$. Tedy pravá strana vztahu (9.17) náleží do $X_h^{(n)}$.

Pro restrikci $v\,\big|_{\overline{T}}$ funkce $v \in X_h^{(n)}$ na trojúhelník $\overline{T}$ platí

$$v\,\big|_{\overline{T}}(x,y) = \sum_{i=1}^{\varrho} v(P_i)\varphi_i\,\big|_{\overline{T}}(x,y), \quad [x,y] \in \overline{T}. \tag{9.18}$$

Protože uzlové body $P_i \in \overline{T}$ mají lokální značení $P_1^T,\dots,P_N^T$, lze vztah (9.18) přepsat na tvar

$$v\,\big|_{\overline{T}}(x,y) = \sum_{j=1}^{N} v(P_j^T)\psi_j^T(x,y), \quad [x,y] \in \overline{T}. \tag{9.19}$$

Podle věty 9.7 je tedy $v\,\big|_{\overline{T}} \in \mathcal{P}_T(n)$, což jsme potřebovali dokázat. Tvrzení o bázi je evidentní. $\square$

9.9. Poznámka. Z definice prostoru $X_h^{(n)}$ plyne, že funkce $\varphi_i(x,y)$ je různá od nuly pouze na trojúhelnících, které mají uzlový bod P_i společný (buď jako společný vrchol, nebo jako bod na společné straně). V případě $n = 1$ je grafem funkce $\varphi_i(x,y)$ pyramida o výšce rovné jedné, resp. část pyramidy, leží-li P_i na hranici $\partial\Omega$.

10. Definice přibližného řešení. Věta o existenci a jednoznačnosti přibližného řešení

Kromě požadavků kladených na triangulaci (viz definici 1.15) budeme požadovat, aby každá triangulace $\mathcal{T}_h$ byla konzistentní s hranicí $\partial\Omega$ oblasti Ω:

10.1. Definice. Říkáme, že triangulace $\mathcal{T}_h$ je konzistentní s hranicí $\partial\Omega$, jestliže každý trojúhelník $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$, který splňuje podmínku $\mathrm{mes}_1(\partial T \cap \Gamma_1) > 0$, nemá žádný společný bod s Γ_2.

Konečněprvkovou aproximaci prostoru V (viz (6.5)) budeme definovat vztahem

$$V_h^{(n)} = \{v \in X_h^{(n)} : v = 0 \text{ na } \overline{\Gamma}_1\} \equiv \{v \in X_h^{(n)} : v(P_i) = 0 \ \forall P_i \in \overline{\Gamma}_1\}, \tag{10.1}$$

kde P_i $(i = 1, \ldots, \varrho)$ jsou uzlové body $\mathcal{T}_h$. Protože $X_h^{(n)} \subset W_2^1(\Omega)$, platí

$$V_h^{(n)} \subset V. \tag{10.2}$$

Pro větší jednoduchost budeme předpokládat, že

$$\overline{u} \equiv \gamma z \in C^0(\overline{S}_j) \quad (j = 1, \ldots, r), \tag{10.3}$$

kde $\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_r$ jsou disjunktní části $\overline{\Gamma}_1$, jejichž sjednocení je $\overline{\Gamma}_1$. V tomto případě lze definovat konečněprvkovou aproximaci množiny $z + V$ vztahem

$$W_h^{(n)} = \{v \in X_h^{(n)} : v(P_i) = \overline{u}(P_i) \ \forall P_i \in \overline{\Gamma}_1\}. \tag{10.4}$$

Nyní jsme připraveni definovat přibližné řešení Problému 6.2 pomocí metody konečných prvků v případě oblasti Ω s polygonální hranicí $\partial\Omega$:

10.2. Definice. Přibližné řešení $u_h^{(n)}$ Problému 6.2 je definováno jako řešení tohoto problému: Najít takovou funkci $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$, že

$$a(u_h^{(n)}, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h^{(n)}. \tag{10.5}$$

10.3. Věta (o existenci a jednoznačnosti přibližného řešení). *Nechť bilineární forma $a(v, w)$ je V-eliptická. Potom problém formulovaný v definici* 10.2 *má právě jedno řešení $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$.*

Důkaz. V kapitole 12 uvidíme, že (10.5) není nic jiného než soustava lineárních algebraických rovnic pro parametry $u_h^{(n)}(P_i)$ (kde $i \in \{1, \ldots, \varrho\}$ a $P_i \notin \overline{\Gamma}_1$), které jednoznačně určují spolu s parametry $u_h^{(n)}(P_j) = \overline{u}(P_j)$ $(P_j \in \overline{\Gamma}_1)$ funkci $u_h^{(n)}(x, y)$ ve tvaru (9.17), tj.

$$u_h^{(n)}(x, y) = \sum_{i=1}^{\varrho} u_h^{(n)}(P_i)\varphi_i(x, y). \tag{10.6}$$

Tedy stačí dokázat, že determinant příslušné soustavy lineárních algebraických rovnic je různý od nuly. Jinými slovy, stačí dokázat jednoznačnost problému (10.5).

Předpokládejme, že kromě funkce $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$, která splňuje (10.5), existuje funkce $\widetilde{u}_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ tak, že

$$a(\widetilde{u}_h^{(n)}, v) = L(v) \quad \forall \in V_h^{(n)}. \tag{10.7}$$

Odečteme-li (10.7) od (10.5), dostaneme vzhledem k tomu, že forma $a(v, w)$ je bilineární,

$$a(u_h^{(n)} - \widetilde{u}_h^{(n)}, v) = 0 \quad \forall v \in V_h^{(n)}. \tag{10.8}$$

Ze vztahů (10.1) a (10.4) plyne, že $u_h^{(n)} - \widetilde{u}_h^{(n)} \in V_h^{(n)}$. Tedy ve vztahu (10.8) můžeme položit $v = u_h^{(n)} - \widetilde{u}_h^{(n)}$. Užijeme-li navíc V-eliptičnost formy $a(v, w)$ (viz (7.6)), dostaneme vzhledem k (10.2)

$$0 = a(u_h^{(n)} - \widetilde{u}_h^{(n)}, u_h^{(n)} - \widetilde{u}_h^{(n)}) \geq \beta \| u_h^{(n)} - \widetilde{u}_h^{(n)} \|_{1,\Omega}^2 .$$

Odtud plyne, že $\widetilde{u}_h^{(n)} = u_h^{(n)}$ téměř všude v Ω. $\square$

10.4. Poznámka. Nechť platí předpoklady věty 7.9. Z důkazu této věty snadno vidíme, že $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ splňuje vztah (10.5), když a jen když $u_h^{(n)}$ ostře minimalizuje kvadratický funkcionál $\Pi(v)$ na $W_h^{(n)}$.

11. Konvergence přibližných řešení

V celé kapitole předpokládáme, že oblast Ω má polygonální hranici $\partial\Omega$. Začneme s abstraktním odhadem chyby:

11.1. Věta (abstraktní odhad chyby). *Nechť $u \in W_2^1(\Omega)$ je řešení Problému 6.2, ve kterém vystupuje V-eliptická a ohraničená bilineární forma $a(v, w)$. Potom platí*

$$\| u - u_h^{(n)} \|_{1,\Omega} \leq C \inf_{v \in W_h^{(n)}} \| u - v \|_{1,\Omega}, \tag{11.1}$$

kde C je konstanta nezávislá na h, u a v.

Důkaz. Zvolme $v \in W_h^{(n)}$ libovolně. Podle (10.1) a (10.4) platí, že $u_h^{(n)} - v \in V_h^{(n)}$. Užitím (10.2) a (7.6) a pak (6.5) a (6.11) postupně dostaneme

$$\beta \| u_h^{(n)} - v \|_{1,\Omega}^2 \leq a(u_h^{(n)} - v, u_h^{(n)} - v) = a(u_h^{(n)}, u_h^{(n)} - v) - a(v, u_h^{(n)} - v) =$$

$$= L(u_h^{(n)} - v) - a(v, u_h^{(n)} - v) = a(u, u_h^{(n)} - v) - a(v, u_h^{(n)} - v) =$$

$$= a(u - v, u_h^{(n)} - v). \tag{11.2}$$

Předpoklady Problému 6.2 nám dovolují užít Lemma 7.4. Tedy platí

$$| a(u - v, u_h^{(n)} - v) | \leq M \| u - v \|_{1,\Omega} \| u_h^{(n)} - v \|_{1,\Omega}. \tag{11.3}$$

Zkombinujeme-li (11.2) a (11.3) a výsledek podělíme výrazem $\beta\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega}$, dostaneme za předpokladu, že $\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} > 0$,

$$\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} \leq \frac{M}{\beta}\|u - v\|_{1,\Omega}. \tag{11.4}$$

Tato nerovnost spolu s trojúhelníkovou nerovností

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq \|u - v\|_{1,\Omega} + \|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} \tag{11.5}$$

implikuje

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq \left(1 + \frac{M}{\beta}\right)\|u - v\|_{1,\Omega}. \tag{11.6}$$

Pokud $\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} = 0$, potom (11.4) platí bez úvah spojených s (11.2) a (11.3), takže s pomocí (11.5) opět dostaneme (11.6).

Přejdeme-li v (11.6) k infimu vzhledem k $v \in W_h^{(n)}$, dostaneme (11.1), kde $C = 1 + M/\beta$. $\square$

Věta 11.1 má dva důležité důsledky:

11.2. Věta (o maximální rychlosti konvergence). *Nechť $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$. Nechť bilineární forma $a(v,w)$ je V-eliptická a ohraničená a nechť $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$, kde u je řešení Problému 6.2. Nechť množina triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$, kde $h \in (0;1)$, splňuje podmínku minimálního úhlu (viz (8.8), (8.9)). Potom*

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq Ch^n|u|_{n+1,\Omega} \quad \forall h \in (0;1), \tag{11.7}$$

kde konstanta C nezávisí na h a u.

Důkaz. Protože $I_h^n u \in W_h^{(n)}$, vztah (11.1) implikuje

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq C\|u - I_h^n u\|_{1,\Omega}.$$

Vztah (11.7) nyní plyne z věty 8.4 (vztah (8.13), kde $s = 1$). $\square$

11.3. Věta (obecná věta o konvergenci metody konečných prvků). *Nechť ohraničená oblast $\Omega \subset R^2$ má polygonální hranici $\partial\Omega$. Nechť množina triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$, kde $h \in (0;1)$, splňuje podmínku minimálního úhlu. Nechť funkce $\overline{u}$ z okrajové podmínky (6.2) je taková, že existuje funkce $z \in W_2^2(\Omega)$ splňující vztah $\gamma z = \overline{u}$ na $\overline{\Gamma}_1$. Nechť jsou splněny předpoklady věty 7.3 o existenci a jednoznačnosti řešení variačního problému 6.2. Potom*

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} = 0, \tag{11.8}$$

kde $u \in W_2^1(\Omega)$ je řešení variačního Problému 6.2.

Vzhledem k větší komplikovanosti důkaz věty 11.3 zde neuvádíme (viz [Že2, str. 65 - 67).

Věta 11.3 zaručuje konvergenci metody konečných prvků za podmínek, které stačí k existenci a jednoznačnosti přesného řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ Problému 6.2. Je-li navíc přesné řešení dostatečně hladké, tj. $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$, kde $n \geq 1$, potom věta 11.2 zaručuje rychlost konvergence $O(h^2)$, je-li konečněprvková násada z $\mathcal{P}_2(n)$.

12. Přibližné řešení $u_h^{(n)}$ je řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

Nechť ϱ je celkový počet uzlových bodů v dané triangulaci $\mathcal{T}_h$ polygonální oblasti Ω a nechť r je počet uzlových bodů, které neleží na $\overline{\Gamma}_1$. Pro větší jednoduchost dalšího zápisu označme symboly $P_1, \dots, P_r$ uzlové body, které neleží na $\overline{\Gamma}_1$; uzlové body ležící na $\overline{\Gamma}_1$ jsou tedy označeny symboly $P_{r+1}, \dots, P_\varrho$. Kromě této podmínky může být způsob číslování uzlových bodů libovolný.

Prozatím neznáme funkční hodnoty přibližného řešení $u_h^{(n)}(x,y)$ v uzlových bodech $P_1, \dots, P_r$; označme je proto symboly $\omega_1, \dots, \omega_r$. Protože $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$, platí podle (10.4)

$$u_h^{(n)}(P_k) = \overline{u}(P_k) \quad \forall P_k \in \overline{\Gamma}_1, \tag{12.1}$$

takže podle věty 9.8 (vztah (9.17)) můžeme psát

$$u_h^{(n)}(x,y) = \sum_{j=1}^{r} \omega_j \varphi_j(x,y) + \sum_{k=r+1}^{\varrho} \overline{u}(P_k)\varphi_k(x,y)\,. \tag{12.2}$$

Vztahy (10.1) a (9.16) dávají

$$\varphi_i(x,y) \in V_h^{(n)} \quad (i = 1, \dots, r). \tag{12.3}$$

Dosaďme (12.2) do (10.5), tj. do vztahu

$$a(u_h^{(n)}, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h^{(n)},$$

a položme $v = \varphi_i$ $(1 \le i \le r)$, což jsme vzhledem k (12.3) oprávněni. Dostaneme

$$\sum_{j=1}^{r} a(\varphi_j, \varphi_i)\omega_j = L(\varphi_i) - \sum_{k=r+1}^{\varrho} a(\varphi_k, \varphi_i)\overline{u}(P_k) \quad (i = 1, \dots, r). \tag{12.4}$$

Jestliže bilineární forma $a(v,w)$ je symetrická, potom

$$a(\varphi_j, \varphi_i) = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

a vztahy (12.4) mohou být psány také ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{r} a(\varphi_i, \varphi_j)\omega_j = L(\varphi_i) - \sum_{k=r+1}^{\varrho} a(\varphi_i, \varphi_k)\overline{u}(P_k) \quad (i = 1, \dots, r). \tag{12.5}$$

V obou případech (12.4) a (12.5) jsme získali soustavu r lineárních algebraických rovnic pro r neznámých $\omega_1, \dots, \omega_r$; v prvním případě s nesymetrickou maticí $\{a(\varphi_j, \varphi_i)\}$; v druhém případě se symetrickou maticí $\{a(\varphi_i, \varphi_j)\}$. Podle věty 10.3

Obr. 12.1

každá z těchto soustav má právě jedno řešení $\omega_1, \dots, \omega_r$. V hodinách cvičení bude v případě $n = 1$ ukázáno, jak vytvořit soustavu (12.4), resp. (12.5) v počítači.

Poznamenejme, že uzlové body triangulace $\mathcal{T}_h$ jsou v aplikacích číslovány tak, aby výsledná matice $\{a(\varphi_j, \varphi_i)\}$ byla pásová s co možná nejmenší šířkou pásu. Řídkost matice $\{a(\varphi_j, \varphi_i)\}$ (a tedy při vhodném číslování i pásovost) plyne ze vztahu

$$a(\varphi_j, \varphi_i) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{mes}_2(\mathrm{supp}\,\varphi_i \cap \mathrm{supp}\,\varphi_j) = 0\,.$$

Pro triangulaci na Obr. 12.1, kde $\overline{\Gamma}_1$ je základna obdélníku, je v případě $n = 1$ naznačeno jedno z číslování uzlů, při kterém je šířka pásu minimální. Uzly ležící na $\overline{\Gamma}_1$ mohou být číslovány libovolně.

13. Konečněprvkový prostor $X_h^{(3,H)}$

Lagrangeovský trojúhelníkový konečný prvek se v případě $n = 3$ příliš nepoužívá; mnohem populárnější je v aplikacích hermiteovská varianta, která je definována takto:

(1) trojúhelník
(2) kubický polynom
(3) funkční hodnoty ve vrcholech a těžišti trojúhelníka; obě první derivace ve vrcholech trojúhelníka

Graficky je tento konečný prvek znázorněn na Obr. 13.1, kde tučný bod znamená funkční hodnotu v těžišti a jednička v kroužku funkční hodnotu a obě první parciální derivace - všechny tři parametry předepsány ve středu kroužku (kterým je v našem případě vrchol trojúhelníka).

Obr. 13.1

13.1. Lemma. *Nechť P je libovolný bod strany $\overline{P_jP_k}$ trojúhelníka $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Hodnota $p(P)$ polynomu $p(x,y) \in \mathcal{P}_2(3)$ je jednoznačně určena hodnotami parametrů, které jsou předepsány v uzlových bodech (vrcholech) P_j, P_k.*

Důkaz. Nechť $P_j = [x_j, y_j]$, $P_k = [x_k, y_k]$. Zvolme parametrické vyjádření úsečky $\overline{P_jP_k}$ ve tvaru

$$x = x_j + (x_k - x_j)t, \quad y = y_j + (y_k - y_j)t, \quad 0 \le t \le 1 \tag{13.1}$$

a definujme polynom $\hat{p}(t) \in \mathcal{P}_1(3)$ na segmentu $\langle 0; 1 \rangle$ vztahem

$$\hat{p}(t) = p(x_j + (x_k - x_j)t, y_j + (y_k - y_j)t), \quad t \in \langle 0; 1 \rangle. \tag{13.2}$$

Z teorie Hermiteových interpolačních polynomů jedné proměnné plyne, že polynom $\hat{p}(t)$ je jednoznačně určen čtyřmi hodnotami $\hat{p}(0)$, $\hat{p}(1)$, $\hat{p}'(0)$, $\hat{p}'(1)$ (dokážeme to snadno pomocí Rolleovy věty - viz Poznámku 13.2). Platí

$$\hat{p}(0) = p(x_j, y_j) = p(P_j), \quad \hat{p}(1) = p(x_k, y_k) = p(P_k), \tag{13.3}$$

$$\hat{p}'(0) = (x_k - x_j)\frac{\partial p}{\partial x}(P_j) + (y_k - y_j)\frac{\partial p}{\partial y}(P_j) = l_{jk}\frac{\partial p}{\partial s}(P_j), \tag{13.4}$$

$$\hat{p}'(1) = (x_k - x_j)\frac{\partial p}{\partial x}(P_k) + (y_k - y_j)\frac{\partial p}{\partial y}(P_k) = l_{jk}\frac{\partial p}{\partial s}(P_k), \tag{13.5}$$

kde l_{jk} je délka úsečky $\overline{P_jP_k}$ a $\partial/\partial s$ značí derivaci ve směru vektoru $\overrightarrow{P_jP_k}$. Připomeňme, že derivace $\partial p/\partial s$ je dána vztahem

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial p}{\partial y}\sin\alpha,$$

kde α je úhel, který svírá vektor $\overrightarrow{P_jP_k}$ s kladným směrem osy x. Platí

$$\cos\alpha = \frac{x_k - x_j}{l_{jk}}, \quad \sin\alpha = \frac{y_k - y_j}{l_{jk}}.$$

Tedy ve vyjádření parametrů $\hat{p}(0)$, $\hat{p}(1)$, $\hat{p}'(0)$, $\hat{p}'(1)$ vystupují pouze parametry

$$p(P_j),\ p(P_k),\ \frac{\partial p}{\partial x}(P_j),\ \frac{\partial p}{\partial y}(P_j),\ \frac{\partial p}{\partial x}(P_k),\ \frac{\partial p}{\partial y}(P_k),$$

které jsou předepsány v uzlových bodech P_j, P_k. Protože můžeme pro každý bod $P \in \overline{P_jP_k}$ nalézt právě jedno $t \in \langle 0; 1 \rangle$, které koresponduje s bodem P, je vzhledem k (13.2) důkaz ukončen. $\square$

13.2. Poznámka. Jednoznačnost bude dokázána, ukážeme-li, že pro $\hat{p}(t) \in \mathcal{P}_1(3)$ ze vztahů

$$\hat{p}(0) = 0,\ \hat{p}(1) = 0,\ \hat{p}'(0) = 0,\ \hat{p}'(1) = 0 \tag{13.6}$$

plyne $\hat{p}(t) \equiv 0$. To je však snadné. Podle $(13.6)_1$, $(13.6)_2$ a Rolleovy věty existuje takový bod $\xi_1 \in (0; 1)$, že

$$\hat{p}'(\xi_1) = 0. \tag{13.7}$$