Z $(13.6)_{3,4}$ a (13.7) plyne dvojím užitím Rolleovy věty existence bodů $\eta_1 \in (0;\xi_1)$ a $\eta_2 \in (\xi_1;1)$ takových, že

$$\hat{p}''(\eta_1) = 0, \quad \hat{p}"(\eta_2) = 0\,. \tag{13.8}$$

Konečně z (13.8) podle Rolleovy věty plyne existence takového bodu $\eta_3 \in (\eta_1;\eta_2)$, že

$$\hat{p}'''(\eta_3) = 0\,. \tag{13.9}$$

Polynom $\hat{p}(t)$ má obecně tvar

$$\hat{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t + a_3 t\,. \tag{13.10}$$

Tedy $\hat{p}'''(t) = 6a_3$ a z (13.9) plyne, že $a_3 = 0$. Odtud a z (13.10) plyne že $\hat{p}''(t) = 2a_2$. Tento výsledek a (13.8) dávají $a_2 = 0$. Odtud a z (13.10) plyne, že $\hat{p}'(t) = a_1$. Tento výsledek a (13.7) dávají $a_1 = 0$, takže $\hat{p}(t) = a_0$. Odtud a z $(13.6)_{1,2}$ plyne $\hat{p}(t) \equiv 0$, což jsme potřebovali dokázat. □

13.3. Poznámka. Užijme místo parametrizace (13.1) úsečky $\overline{P_jP_k}$ parametrizaci

$$x = x_j + \frac{x_k - x_j}{l_{jk}}\tau\,, \quad y = y_j + \frac{y_k - y_j}{l_{jk}}\tau, \quad 0 \le \tau \le l_{jk} \tag{13.11}$$

a definujme na $\langle 0; l_{jk}\rangle$ polynom $\tilde{p}(\tau) \in \mathcal{P}_1(3)$ vztahem

$$\tilde{p}(\tau) = p\left(x_j + \frac{x_k - x_j}{l_{jk}}\tau, y_j + \frac{y_k - y_j}{l_{jk}}\tau\right), \quad \tau \in \langle 0; l_{jk}\rangle\,. \tag{13.12}$$

Stejně jako v důkazu lemmatu 13.1 zjistíme, že

$$\tilde{p}(0) = p(P_j),\ \tilde{p}(l_{jk}) = p(P_k),\ \tilde{p}'(0) = \frac{\partial p}{\partial s}(P_j),\ \tilde{p}'(l_{jk}) = \frac{\partial p}{\partial s}(P_k). \tag{13.13}$$

Mezi vztahy (13.3) – (13.5) a vztahy (13.13) není žádný rozpor: Podle (13.2) a (13.12) mají grafy funkcí $\hat{p}(t)$ a $\tilde{p}(\tau)$ v korespondujících bodech $t \leftrightarrow \tau$ (které spolu souvisejí podle vztahu $\tau = l_{jk}t$) stejnou "výšku" (protože každému bodu $P \in \overline{P_jP_k}$ odpovídá právě jedno t a právě jedno τ); proto podle (13.3) a $(13.13)_{1,2}$ je $\hat{p}(0) = \tilde{p}(0)$, $\hat{p}(1) = \tilde{p}(l_{jk})$. Je-li $l_{jk} < 1$, potom graf $\tilde{p}(\tau)$ je strmější než graf $\hat{p}(t)$; je-li $l_{jk} > 1$, potom graf $\hat{p}(\tau)$ je strmější než graf $\tilde{p}(t)$; to vysvětluje, že podle (13.4), (13.5) a $(13.13)_{3,4}$ je $\hat{p}'(0) = l_{jk}\tilde{p}'(0)$, $\hat{p}'(1) = l_{jk}\tilde{p}'(l_{jk})$.

13.4. Věta. *Nechť $u \in C^1(\overline{T})$, kde $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Potom existuje právě jeden polynom $u_I \in \mathcal{P}_2(3)$, pro který platí*

$$\begin{gathered} u_I(P_i^T) = u(P_i^T) \quad (i = 0,1,2,3), \\ \frac{\partial u_I}{\partial x}(P_j^T) = \frac{\partial u}{\partial x}(P_j^T), \quad \frac{\partial u_I}{\partial y}(P_j^T) = \frac{\partial u}{\partial y}(P_j^T) \quad (j = 1,2,3), \end{gathered} \tag{13.14}$$

kde P_0^T je těžiště trojúhelníka $\overline{T}$ a P_1^T, P_2^T, P_3^T jeho vrcholy.

Důkaz. Stejně jako v důkazu věty 9.4 stačí dokázat, že vztahy

$$u_I(P_i^T) = 0\ (i = 0,\dots,3), \quad \frac{\partial u_I}{\partial x}(P_j^T) = \frac{\partial u_I}{\partial y}(P_j^T) = 0\ (j = 1,2,3) \tag{13.15}$$

implikují $u_I(x,y) \equiv 0$.

Z (13.15) a lemmatu 13.1 plyne, že

$$u_I(P) = 0 \quad \forall P \in \overline{P_iP_j} \quad (i,j = 1,2,3;\ i \ne j).$$

Odtud podle lemmatu 9.3 dostáváme (protože $u_I \in \mathcal{P}_2(3)$)

$$u_I(x,y) = K f_{12}(x,y) f_{13}(x,y) f_{23}(x,y). \tag{13.16}$$

Protože $P_0^T \notin \overline{P_iP_j}$, platí

$$f_{ij}(P_0^T) \ne 0 \quad (i,j = 1,2,3;\ i \ne j). \tag{13.17}$$

Vztahy (13.16) a (13.17) spolu se vztahem $u_I(P_0^T) = 0$ dávají $K = 0$, takže podle (13.16) je $u_I(x,y) \equiv 0$, což jsme chtěli dokázat. □

13.5. Věta (o konstrukci prostoru $X_h^{(3,H)}$). *Nechť $\mathcal{T}_h$ je libovolná triangulace uzavřené ohraničené oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Za uzlové body triangulace $\mathcal{T}_h$ zvolme vrcholy a těžiště trojúhelníků $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$.*

a) Funkce $v(x,y)$, která je na každém trojúhelníku $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ polynomem z $\mathcal{P}_T(3)$ jednoznačně určeným deseti parametry

$$v(P_i),\ \frac{\partial v}{\partial x}(P_i),\ \frac{\partial v}{\partial y}(P_i)\ \ (P_i \in \partial T), \qquad v(P_j)\ (P_j \in T \equiv \operatorname{int} \overline{T}),$$

náleží do prostoru $C^0(\overline{\Omega})$ funkcí spojitých na $\overline{\Omega}$.

b) Množina všech funkcí $v(x,y)$ popsaných v tvrzení a) je r-rozměrný lineární prostor, který označíme $X_h^{(3,H)}$. Přitom platí

$$r = 3\varrho_v + \varrho_t \tag{13.18}$$

kde ϱ_v značí (stejně jako v (9.1)) celkový počet vrcholů v triangulaci $\mathcal{T}_h$ a ϱ_t celkový počet trojúhelníků.

Důkaz. Tvrzení a) plyne z lemmatu 13.1; tvrzení b) je evidentní. □

13.6. Porovnání dimensí prostorů $X_h^{(3)}$ a $X_h^{(3,H)}$. Podle Eulerovy formule v triangulacích s mnoha trojúhelníky platí

$$\varrho_v : \varrho_t : \varrho_s \doteq 1 : 2 : 3, \tag{13.19}$$

takže

$$\varrho_t \doteq 2\varrho_v, \quad \varrho_s \doteq 3\varrho_v\,. \tag{13.20}$$

Tedy podle (9.1)

$$\varrho = \varrho_v + 2\varrho_s + \varrho_t \doteq 9\varrho_v,$$

$$r = 3\varrho_v + \varrho_t \doteq 5\varrho_v,$$

takže $\varrho : r \doteq 9 : 5 = 1,8$. V triangulaci čtverce, která vznikne dělením na $10 * 10$ čtverců, přičemž každý dílčí čtverec rozdělíme úhlopříčkou na dva trojúhelníky, je $\varrho_v = 121$, $\varrho_t = 200$ a $\varrho_s = 320$ (přitom tato triangulace nemá z hlediska aplikací mnoho trojúhelníků). Tedy $\varrho = 961$ a $r = 563$, takže $\varrho : r = 1,707$, což je dobrá shoda s obecným vzorcem. Tedy dimense prostoru $X_h^{(3,H)}$ je na stejné triangulaci téměř dvakrát menší než dimense prostoru $X_h^{(3)}$. To je první výhoda prostorů $X_h^{(3,H)}$ proti prostorům $X_h^{(3)}$.

13.7. Spojitost derivací funkcí z prostorů $X_h^{(3,H)}$. Funkce z prostoru $X_h^{(3,H)}$ mají oproti funkcím z prostorů $X_h^{(n)}$ velkou výhodu: jejich první derivace jsou ve vrcholech trojúhelníků spojité, protože vystupují mezi parametry, které funkci $v \in X_h^{(3,H)}$ jednoznačně určují. V aplikacích mají derivace větší význam než funkční hodnoty; proto v případě prostorů $X_h^{(n)}$ se musejí přibližně dopočítávat (většinou zprůměrováním z hodnot na trojúhelnících, které mají příslušný uzlový bod společný).

13.8. Realizace okrajových podmínek. Začneme s homogenní okrajovou podmínkou

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma_1. \tag{13.21}$$

Jsou možné tři případy:

a) Uzlový bod $P_i \in \Gamma_1$ není vrcholem polygonu $\partial\Omega$ (a protože $P_i \in \Gamma_1$, není P_i koncovým bodem $\overline{\Gamma}_1$). Potom pro funkce $v \in V_h^{(3,H)} \subset X_h^{(3,H)}$, kde

$$V_h^{(3,H)} = \{v \in X_h^{(3,H)} \colon\ v = 0 \text{ na } \overline{\Gamma}_1\}, \tag{13.22}$$

z (13.21), resp. (13.22) plyne

$$v(P_i) = 0\,, \quad \frac{\partial v}{\partial s}(P_i) = 0\,, \tag{13.23}$$

kde $\partial/\partial s$ je derivace ve směru úsečky l, která je částí $\partial\Omega$ a na které uzlový bod P_i leží. Platí

$$\frac{\partial}{\partial s} = (\cos\alpha)\frac{\partial}{\partial x} + (\sin\alpha)\frac{\partial}{\partial y}\,, \tag{13.24}$$

kde α je úhel, který svírá orientovaná úsečka $\overrightarrow{l}$ s kladným směrem osy x. Tedy (13.23) můžeme psát ve tvaru

$$v(P_i) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(P_i)\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}(P_i)\sin\alpha = 0\,. \tag{13.25}$$

Je-li $\cos\alpha \neq 0$, $\sin\alpha \neq 0$, máme pro dva parametry $\partial v(P_i)/\partial x$, $\partial v(P_i)/\partial y$ jednu podmínku $(13.25)_2$. Jeden z těchto parametrů zvolíme za "volný" (neznámý) a druhý pomocí něj vyjádříme; např.

$$\frac{\partial v}{\partial x}(P_i) = -\frac{\partial v}{\partial y}(P_i)\mathrm{tg}\alpha\,.$$

V tomto případě jsme zvolili za volný parametr derivaci $\partial v(P_i)/\partial y$.

Je-li $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha \neq 0$, potom podle $(13.25)_2$ je $\partial v(P_i)/\partial y = 0$ a parametr $\partial v(P_i)/\partial x$ je volný, protože nemáme pro něj žádnou podmínku.

Je-li $\cos\alpha \neq 0$, $\sin\alpha = 0$, potom podle $(13.25)_2$ je $\partial v(P_i)/\partial x = 0$ a parametr $\partial v(P_i)/\partial y$ je volný.

b) Uzlový bod $P_i \in \overline{\Gamma}_1$ je vrcholem polygonu $\partial\Omega$, ale je koncovým bodem $\overline{\Gamma}_1$. V tomto případě postupujeme zcela stejně jako v případě a).

c) Uzlový bod $P_i \in \overline{\Gamma}_1$ je vrcholem polygonu $\partial\Omega$ a není koncovým bodem $\overline{\Gamma}_1$. V tomto případě vedle vztahu $(13.25)_2$ ještě platí

$$\frac{\partial v}{\partial t}(P_i) = \frac{\partial v}{\partial x}(P_i)\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial y}(P_i)\sin\beta = 0, \tag{13.26}$$

kde $\partial/\partial t$ je derivace ve směru úsečky $\overrightarrow{p} \subset \overline{\Gamma}_1$, jejímž jedním koncovým bodem je bod P_i, a β je úhel, který úsečka $\overrightarrow{p}$ svírá s kladným směrem osy x. Z (13.25) a (13.26) pak plyne

$$v(P_i) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(P_i) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(P_i) = 0. \tag{13.27}$$

V definici prostoru $V_h^{(3,H)}$ jakožto podprostoru $X_h^{(3,H)}$ musíme vyjmenovat pro funkce $v \in V_h^{(3,H)}$ všechny nulové parametry a všechny závislé parametry; toto vyjmenování je závislé na okrajové podmínce (13.21) a triangulaci $\mathcal{T}_h$ oblasti Ω.

V případě nehomogenní okrajové podmínky

$$u = \overline{u} \text{ na } \overline{\Gamma}_1 \tag{13.28}$$

konstruujeme navíc množinu $W_h^{(3,H)}$; v případech a), b) vycházíme ze vztahů

$$v(P_i) = \overline{u}(P_i), \quad \frac{\partial v}{\partial s}(P_i) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial s}(P_i).$$

V případě c) k těmto dvěma vztahům přibíráme ještě vztah

$$\frac{\partial v}{\partial t}(P_i) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(P_i).$$

Postup je zřejmý (místo homogenních lineárních algebraických rovnic máme nyní k dispozici pro parametry $v(P_i)$, $\partial v(P_i)/\partial x$, $\partial v(P_i)/\partial y$ nehomogenní rovnice).

Formulace přibližného řešení Problému 6.2 v konečněprvkovém prostoru $X_h^{(3,H)}$ je tato: Najít funkci $u_h^{(3,H)} \in W_h^{(3,H)}$ tak, aby platilo

$$a(u_h^{(3,H)}, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h^{(3,H)}. \tag{13.29}$$

13.9. Případ zakřivené hranice. Už na tomto místě je nutné zmínit se o případě, kdy aproximujeme zakřivenou hranici polygonem a užíváme na triangulaci aproximující polygonální oblasti Ω_h prostor $X_h^{(3,H)}$. Z (13.21) opět plyne (13.23), kde však nyní symbol $\partial/\partial s$ znamená derivaci ve směru tečny k oblouku Γ_1. Je třeba poznamenat, že k přesnému výpočtu této derivace musíme znát analytické vyjádření Γ_1; pokud je neznáme, musíme příslušné derivace vypočítat s dostatečnou přesností přibližně (např. aproximovat $\overline{\Gamma}_1$ kubickým splajnem).

14. Transformace trojúhelníku na referenční trojúhelník

14.1. Věta (o vlastnostech transformace trojúhelníka na referenční trojúhelník). *Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ je trojúhelník s vrcholy $P(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ (lokální značení). Nechť $\overline{T}_0$ je trojúhelník, který leží v kartézské souřadné soustavě ξ, η a má vrcholy $R_1(0,0)$, $R_2(1,0)$, $R_3(0,1)$ (tzv. referenční trojúhelník). Potom transformace*

$$\begin{aligned} x &= x^*(\xi,\eta) \equiv x_1 + \overline{x}_2\xi + \overline{x}_3\eta, \\ y &= y^*(\xi,\eta) \equiv y_1 + \overline{y}_2\xi + \overline{y}_3\eta, \end{aligned} \tag{14.1}$$

kde

$$\overline{x}_k = x_k - x_1, \quad \overline{y}_k = y_k - y_1 \quad (k = 2, 3), \tag{14.2}$$

má tyto vlastnosti:
a) zobrazuje $\overline{T}_0$ vzájemně jednoznačně na $\overline{T}$;
b) vrcholy a strany $\overline{T}_0$ a $\overline{T}$ splňují tyto relace:

$$R_i \leftrightarrow P_i \ (i = 1, 2, 3), \quad \overline{R_iR_j} \leftrightarrow \overline{P_iP_j} \ (i \neq j); \tag{14.3}$$

c) jakobián $J_T \equiv \overline{x}_2\overline{y}_3 - \overline{x}_3\overline{y}_2$ transformace (14.1) splňuje odhady

$$\frac{1}{2}h_T^2 \sin\vartheta_T \leq |J_T| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}h_T^2, \tag{14.4}$$

kde h_T je délka největší strany trojúhelníka $\overline{T}$ a ϑ_T nejmenší úhel $\overline{T}$;
d) platí

$$\left|\frac{\partial x^*}{\partial \xi}\right| \leq h_T, \quad \left|\frac{\partial x^*}{\partial \eta}\right| \leq h_T, \quad \left|\frac{\partial y^*}{\partial \xi}\right| \leq h_T, \quad \left|\frac{\partial y^*}{\partial \eta}\right| \leq h_T; \tag{14.5}$$

e) inversní transformace k transformaci (14.1) má tvar

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^*(x,y) \equiv \frac{1}{J_T}[\overline{y}_3(x - x_1) - \overline{x}_3(y - y_1)], \\ \eta &= \eta^*(x,y) \equiv \frac{1}{J_T}[-\overline{y}_2(x - x_1) + \overline{x}_2(y - y_1)] \end{aligned} \tag{14.6}$$

a platí

$$\left|\frac{\partial \xi^*}{\partial x}\right| \leq \frac{2}{h_T \sin\vartheta_T}, \quad \left|\frac{\partial \xi^*}{\partial y}\right| \leq \frac{2}{h_T \sin\vartheta_T},$$
$$\left|\frac{\partial \eta^*}{\partial x}\right| \leq \frac{2}{h_T \sin\vartheta_T}, \quad \left|\frac{\partial \eta^*}{\partial y}\right| \leq \frac{2}{h_T \sin\vartheta_T}. \tag{14.7}$$

Důkaz. a) Vektory $\overrightarrow{P_1P_2} = (\overline{x}_2, \overline{y}_2)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (\overline{x}_3, \overline{y}_3)$ jsou nekolineární; proto platí

$$J_T \equiv \overline{x}_2\overline{y}_3 - \overline{x}_3\overline{y}_2 \neq 0. \tag{14.8}$$

Vztah (14.8) implikuje, že zobrazení (14.1) je injekce roviny (ξ, η) do roviny (x, y): Jestliže dva body $[\hat{\xi}_1, \hat{\eta}_1]$, $[\hat{\xi}_2, \hat{\eta}_2]$ mají tentýž obraz $[\hat{x}, \hat{y}]$, potom podle (14.1)

$$\hat{x} = x_1 + \overline{x}_2\hat{\xi}_i + \overline{x}_3\hat{\eta}_i, \quad \hat{y} = y_1 + \overline{y}_2\hat{\xi}_i + \overline{y}_3\hat{\eta}_i \quad (i = 1, 2).$$

Odečtením těchto dvou soustav vztahů získáme

$$0 = \overline{x}_2(\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2) + \overline{x}_3(\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2), \quad 0 = \overline{y}_2(\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2) + \overline{y}_3(\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2).$$

Toto je homogenní soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2$, $\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2$. Determinant této soustavy je roven J_T. Tedy $\hat{\xi}_1 = \hat{\xi}_2$, $\hat{\eta}_1 = \hat{\eta}_2$.

Nyní dokážeme, že ke každému bodu $\hat{P}(\hat{x}, \hat{y}) \in \overline{T}$ můžeme nalézt takový bod $[\hat{\xi}, \hat{\eta}] \in \overline{T}_0$, že

$$\hat{x} = x^*(\hat{\xi}, \hat{\eta}), \quad \hat{y} = y^*(\hat{\xi}, \hat{\eta}). \tag{14.9}$$

Zvolme $\hat{P} = P_1$. Potom $\hat{\xi} = 0$, $\hat{\eta} = 0$ splňují vztahy (14.9). Nechť nyní $\hat{P} \neq P_1$, $\hat{P} \in \overline{T}$. Potom souřadnice $\hat{x}, \hat{y}$ bodu $\hat{P}$ splňují vztahy

$$\hat{x} = (1 - c)x_1 + c(ax_2 + bx_3), \quad \hat{y} = (1 - c)y_1 + c(ay_2 + by_3), \tag{14.10}$$

kde

$$0 < c \leq 1; \quad a + b = 1, \quad a \geq 0, \ b \geq 0. \tag{14.11}$$

(Vztahy (14.10), (14.11) plynou z těchto dvou faktů: (1) $\hat{x} = x_1 + c(x_Q - x_1)$, $\hat{y} = y_1 + c(y_Q - y_1)$, kde Q je společný bod přímky $P_1\hat{P}$ a úsečky $\overline{P_2P_3}$; (2) každý bod úsečky $\overline{P_2P_3}$ je tvaru $[ax_2 + bx_3, ay_2 + by_3]$.)

Položme $\hat{\xi} = ac$, $\hat{\eta} = bc$. Potom podle (14.11) platí

$$0 < \hat{\xi} + \hat{\eta} = ac + bc = c(a + b) = c \leq 1.$$

Tedy $[\hat{\xi}, \hat{\eta}] \in \overline{T}_0$. Nyní ukážeme, že jsou splněny vztahy (14.9): Vztah $(14.10)_1$ může být psán ve tvaru

$$\hat{x} = [1 - c(a + b)]x_1 + x_2\hat{\xi} + x_3\hat{\eta} = x_1 + (x_2 - x_1)\hat{\xi} + (x_3 - x_1)\hat{\eta} = x^*(\hat{\xi}, \hat{\eta}).$$

Podobně dostaneme z $(14.10)_2$:

$$\hat{y} = [1 - c(a + b)]y_1 + y_2\hat{\xi} + y_3\hat{\eta} = y^*(\hat{\xi}, \hat{\eta}).$$

Zbývá dokázat, že (14.1) zobrazuje $\overline{T}_0$ do $\overline{T}$: Pišme (14.1) ve tvaru

$$x = (1 - \xi - \eta)x_1 + \xi x_2 + \eta x_3, \quad y = (1 - \xi - \eta)y_1 + \xi y_2 + \eta y_3 \tag{14.12}$$

a nechť $[\xi, \eta] \neq [0, 0]$, $[\xi, \eta] \in \overline{T}_0$. Položíme-li $\xi + \eta = c$, $a = \xi/c$, $b = \eta/c$, potom můžeme psát vzhledem k (14.12)

$$x = (1 - c)x_1 + c(ax_2 + bx_3), \quad y = (1 - c)y_1 + c(ay_2 + by_3), \tag{14.13}$$

kde a, b, c splňují (14.11). Srovnáme-li (14.13) s (14.10), vidíme, že $[x, y] \in \overline{T}$.

Předchozí výsledky implikují vlastnost a) transformace (14.1).

b) Vztahy $(14.3)_1$ plynou z tvrzení a) a ze vztahů $x_i = x^*(R_i)$, $y_i = y^*(R_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Vztahy $(14.2)_2$ plynou z tvrzení a) a z následující skutečnosti: Položíme-li $\eta = 0$ v (14.1) a omezíme-li ξ na segment $\langle 0; 1\rangle$, dostaneme parametrické rovnice strany $\overline{P_1P_2}$. Položíme-li $\xi = 0$ a $\eta \in \langle 0; 1\rangle$, potom se vztahy (14.1) stanou parametrickými rovnicemi strany $\overline{P_1P_3}$, a položíme-li $\eta = 1 - \xi$, $\xi \in \langle 0; 1\rangle$, dostaneme parametrické rovnice strany $\overline{P_2P_3}$.

c) Platí

$$\mathrm{mes}_2 T = \int_T \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{T_0} |J_T|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}|J_T|. \tag{14.14}$$

Dokážeme, že

$$\frac{1}{2}h_T^2 \sin\vartheta_T < 2\mathrm{mes}_2 T \le \frac{\sqrt{3}}{2}h_T^2. \tag{14.15}$$

Druhá nerovnost (14.15) plyne z toho, že rovnostranný trojúhelník má největší plošný obsah ze všech trojúhelníků se stejnou největší stranou. Nyní dokážeme první nerovnost: nechť $a_T \le b_T \le c_T \equiv h_T$ jsou délky stran trojúhelníka $\overline{T}$. Potom

$$2\mathrm{mes}_2 T = h_T b_T \sin\vartheta_T. \tag{14.16}$$

Protože součet délek dvou libovolných stran trojúhelníka je větší než délka zbývající strany, platí $h_T < a_T + b_T \le 2b_T$. Odtud $\frac{1}{2}h_T < b_T$. Tato nerovnost a vztah (14.16) implikují první nerovnost (14.15).

Z (14.14) a (14.15) plynou odhady (14.4).

d) Protože $|\overline{x}_k| \le h_T$, $|\overline{y}_k| \le h_T$ $(k = 2, 3)$, dostaneme vztahy (14.5) derivováním (14.1).

e) Uvažujeme-li vztahy (14.1) jako lineární algebraické rovnice pro neznámé ξ, η, dostaneme (14.6) ihned pomocí Cramerova pravidla. Odhady (14.7) získáme derivováním (14.6) a užitím vztahů $|\overline{x}_k| \le h_T$, $|\overline{y}_k| \le h_T$ $(k = 2, 3)$ a $|J_T|^{-1} < (\frac{1}{2}h_T^2 \sin\vartheta_T)^{-1}$ (poslední nerovnost plyne z první nerovnosti (14.4)). $\square$

V následující větě budeme opět používat symboly x_1, x_2 a ξ_1, ξ_2 namísto x, y a ξ, η a budeme stručně psát $\int f\,\mathrm{d}x$ a $\int g\,\mathrm{d}\xi$ místo $\int f\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ a $\int g\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$.

Transformace (14.1) bude psána ve tvaru

$$x_i = x_i^*(\xi_1, \xi_2) \quad (i = 1, 2) \tag{14.17}$$

a k ní inversní ve tvaru

$$\xi_i = \xi^*(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2). \tag{14.18}$$

Odhady (14.5) a (14.7) mohou být stručně psány takto:

$$|D^\alpha x_i^*(\xi_1, \xi_2)| \le h_T, \quad |\alpha| = 1 \quad (i = 1, 2), \tag{14.19}$$

$$|D^\alpha \xi_i^*(x_1, x_2)| \le \frac{2}{\sin\vartheta_T} h_T^{-1}, \quad |\alpha| = 1 \quad (i = 1, 2). \tag{14.20}$$

Věta 14.2 uvede vlastnosti složené funkce

$$w^*(\xi_1, \xi_2) = w(x_1^*(\xi_1, \xi_2), x_2^*(\xi_1, \xi_2)), \tag{14.21}$$

kde funkce $w(x_1, x_2)$ náleží do $W_2^k(T)$. Tyto vlastnosti budou velmi užitečné jak v teorii interpolace, tak v teorii numerické integrace.

14.2. Věta. *a) Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Je-li $w \in C^\infty(\overline{T})$, potom $w^* \in C^\infty(\overline{T}_0)$ a pro libovolná celá čísla s, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ platí tyto odhady:*

$$\|w\|_{s,T} \le \frac{\widetilde{C}(s)}{(\sin \vartheta_T)^s} h_T^{-s} \sqrt{\mathrm{mes}_2 T} \|w^*\|_{s,T_0}\,, \tag{14.22}$$

$$|w^*|_{k,T_0} \le \widehat{C}(k) h_T^k (\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2} |w|_{k,T}, \tag{14.23}$$

kde $h_T < 1$ a pro konstanty $\widetilde{C}(s)$, $\widehat{C}(k)$ platí

$$\widetilde{C}(s) = 2^s \sqrt{2}(s+1), \quad \widehat{C}(k) = \frac{\sqrt{2}}{2}(k+1). \tag{14.24}$$

b) Jestliže $w \in W_2^k(T)$, kde $k \ge 2$, potom $w^* \in W_2^k(T_0)$ a platí odhady (14.22), (14.23), přičemž v (14.22) je $0 \le s \le k$.

Důkaz. a) Protože $x_i^*(\xi_1, \xi_2) \in C^\infty(R^2)$ $(i = 1, 2)$, ze (14.21) a předpokladu $w \in C^\infty(\overline{T})$ plyne (podle věty o derivování složené funkce), že $w^* \in C^\infty(\overline{T}_0)$. Nyní dokážeme (14.22). Podle věty o transformaci integrálu platí

$$\|w\|_{s,T}^2 = \sum_{|\alpha| \le s} \int_T (D^\alpha w)^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{|\alpha| \le s} \int_{T_0} ((D^\alpha w)^*)^2 |J_T| \,\mathrm{d}\xi, \tag{14.25}$$

kde

$$(D^\alpha w)^*(\xi_1, \xi_2) = (D^\alpha w)(x_1^*(\xi_1, \xi_2), x_2^*(\xi_1, \xi_2)).$$

Abychom vyjádřili $(D^\alpha w)^*$ ve vhodném tvaru, pišme

$$w(x_1, x_2) = w^*(\xi_1^*(x_1, x_2), \xi_2^*(x_1, x_2)). \tag{14.26}$$

Protože $\xi_1^*(x_1, x_2)$, $\xi_2^*(x_1, x_2)$ jsou lineární funkce, dostaneme z (14.26) derivováním

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{2} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m^*}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{m,r=1}^{2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi_m \partial \xi_r} \frac{\partial \xi_m^*}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_r^*}{\partial x_j}$$

a obecně

$$D^\alpha w = \sum_{|\beta| = |\alpha|} b_{\alpha\beta} D^\beta w^*\,, \tag{14.27}$$

kde $b_{\alpha\beta}$ jsou konstanty, pro které podle (14.20) platí

$$|b_{\alpha\beta}| \le \frac{2^{|\alpha|}}{(\sin \vartheta_T)^{|\alpha|}} h_T^{-|\alpha|}. \tag{14.28}$$

Tedy pravá strana (14.27) je pouze funkcí ξ_1, ξ_2 a vyjadřuje $(D^\alpha w)^*$:

$$(D^\alpha w)^* = \sum_{|\beta| = |\alpha|} b_{\alpha\beta} D^\beta w^*. \tag{14.29}$$

Podle Cauchyovy nerovnosti (7.23) (kde položíme $b_i = 1$) je

$$\left| \sum_{i=1}^{m} a_i \right|^2 \le m \sum_{i=1}^{m} a_i^2. \tag{14.30}$$

Pomocí (14.14) a (14.28) – (14.30) dostaneme z (14.25):

$$\|w\|_{s,T}^2 = |J_T| \sum_{|\alpha|\le s} \int_{T_0} \Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|} b_{\alpha\beta} D^\beta w^* \Big)^2 \,\mathrm{d}\xi \le$$

$$\le 2\mathrm{mes}_2 T \sum_{|\alpha|\le s} \frac{2^{2|\alpha|}}{(\sin\vartheta_T)^{2|\alpha|}} h_T^{-2|\alpha|} \int_{T_0} \Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|} D^\beta w^* \Big)^2 \,\mathrm{d}\xi \le$$

$$\le 2\mathrm{mes}_2 T \sum_{|\alpha|\le s} \frac{2^{2|\alpha|}}{(\sin\vartheta_T)^{2|\alpha|}} h_T^{-2|\alpha|} (|\alpha|+1) \sum_{|\beta|=|\alpha|} \int_{T_0} (D^\beta w^*)^2 \,\mathrm{d}\xi \le$$

$$\le \frac{2\cdot 2^{2s}(s+1)}{(\sin\vartheta_T)^{2s}} h_T^{-2s} \mathrm{mes}_2 T \sum_{|\alpha|\le s} |w^*|^2_{|\alpha|,T_0} \le \frac{2\cdot 2^{2s}(s+1)^2}{(\sin\vartheta_T)^{2s}} h_T^{-2s} \mathrm{mes}_2 T \|w^*\|^2_{s,T_0}\,.$$

Tento výsledek dává okamžitě (14.22).

Nyní dokážeme (14.23). Protože $x_i^*(\xi_1,\xi_2)$ $(i=1,2)$ jsou lineární funkce, dostaneme z (14.21) derivováním

$$\frac{\partial w^*}{\partial \xi_i} = \sum_{m=1}^{2} \frac{\partial w}{\partial x_m} \frac{\partial x_m^*}{\partial \xi_i}, \qquad \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \sum_{m,r=1}^{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_m \partial x_r} \frac{\partial x_m^*}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_r^*}{\partial \xi_j} \tag{14.31}$$

a obecně

$$D^\alpha w^* = \sum_{|\beta|=|\alpha|} c_{\alpha\beta} D^\beta w\,, \tag{14.32}$$

kde $c_{\alpha\beta}$ jsou konstanty, pro které podle (14.19) platí

$$|c_{\alpha\beta}| \le h_T^{|\alpha|}\,. \tag{14.33}$$

Protože pravá strana (14.31) je funkcí pouze x_1, x_2, platí

$$(D^\alpha w^*)\hat{}= \sum_{|\beta|=|\alpha|} c_{\alpha\beta} D^\beta w, \tag{14.34}$$

kde

$$(D^\alpha w^*)\hat{}(x_1,x_2) = (D^\alpha w^*)(\xi_1^*(x_1,x_2), \xi_2^*(x_1,x_2)).$$

Užitím (14.14), (14.30), (14.33), (14.34) a věty o transformaci integrálu dostaneme:

$$|w^*|^2_{k,T_0} = \sum_{|\alpha|=k} \int_{T_0} (D^\alpha w^*)^2 \,\mathrm{d}\xi = \sum_{|\alpha|=k} \int_T ((D^\alpha w^*)\hat{})^2 |J_T|^{-1} \,\mathrm{d}x =$$

$$= |J_T|^{-1} \sum_{|\alpha|=k} \int_T \Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|} c_{\alpha\beta} D^\beta w \Big)^2 \,\mathrm{d}x \le |J_T|^{-1} \sum_{|\alpha|=k} h_T^{2|\alpha|} \int_T \Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|} D^\beta w \Big)^2 \,\mathrm{d}x \le$$

$$\le (2\mathrm{mes}_2 T)^{-1} h_T^{2k} \sum_{|\alpha|=k} (|\alpha|+1) \sum_{|\beta|=|\alpha|} \int_T (D^\beta w)^2 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} (\mathrm{mes}_2 T)^{-1} h_T^{2k} (k+1) \sum_{|\alpha|=k} |w|^2_{|\alpha|,T} = \frac{1}{2} (k+1)^2 h_T^{2k} (\mathrm{mes}_2 T)^{-1} |w|^2_{k,T}\,.$$

Odtud okamžitě plyne (14.23).

b) Nejprve dokážeme, že $w^* \in W_2^k(T_0)$, jestliže $w \in W_2^k(T)$ a $k \ge 2$. Protože každý trojúhelník má lipschitzovskou hranici, můžeme užít větu 1.11 o hustotě lineálu $C^\infty(\overline{T})$ v prostoru $W_2^k(T)$ a ke každé funkci $w \in W_2^k(T)$ nalézt posloupnost $\{v_i\} \subset C^\infty(\overline{T})$ takovou, že

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i - w\|_{k,T} = 0. \tag{14.35}$$

Položme

$$v_i^*(\xi_1, \xi_2) = v_i(x_1^*(\xi_1, \xi_2), x_2^*(\xi_1, \xi_2)) \,.$$

Stejně jako v části a) platí, že $v_i^* \in C^\infty(\overline{T}_0)$. Podobně jako v závěru předešlé části důkazu lze dokázat, že

$$\|v_j^* - v_i^*\|_{k,T_0} \leq C(k)(\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2} \|v_j - v_i\|_{k,T} \,. \tag{14.36}$$

Podle (14.35) pravá strana (14.36) jde k nule, když $i, j \to \infty$. Tedy $\{v_i^*\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru $W_2^k(T_0)$. Tento výsledek spolu s úplností prostoru $W_2^k(T_0)$ implikují existenci funkce $\omega \in W_2^k(T_0)$, pro kterou platí

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i^* - \omega\|_{k,T_0} = 0. \tag{14.37}$$

Na druhé straně, protože $k \geq 2$, podle věty 5.1 platí, že $w \in C^0(\overline{T})$. Odtud a podle (14.21) je $w^* \in C^0(\overline{T}_0)$, takže podobně jako v (14.36) platí

$$\|v_i^* - w^*\|_{0,T_0} \leq C(k)(\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2} \|v_i - w\|_{0,T} \to 0. \tag{14.38}$$

Vztahy (14.37) a (14.38) a jednoznačnost limity v $L_2(T_0)$ implikují, že $\omega = w^*$; odtud $w^* \in W_2^k(T_0)$, přičemž (dosadíme-li $\omega = w^*$ do (14.37))

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i^* - w^*\|_{k,T_0} = 0. \tag{14.39}$$

Zbytek důkazu je jednoduchý: Protože $\{v_i\} \subset C^\infty(\overline{T})$, platí podle již dokázané části a) věty 14.2

$$\|v_i\|_{s,T} \leq \frac{\widetilde{C}(s)}{(\sin\vartheta_T)^s} h_T^{-s} \sqrt{\mathrm{mes}_2 T} \|v_i^*\|_{s,T_0} \quad (0 \leq s \leq k), \tag{14.40}$$

$$|v_i^*|_{k,T_0} \leq \widehat{C}(k) h_T^k (\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2} |v_i|_{k,T}. \tag{14.41}$$

Vlastnosti normy a seminormy a vztahy (14.35) a (14.39) implikují

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i\|_{s,T} = \|w\|_{s,T} \,, \quad \lim_{i\to\infty} \|v_i^*\|_{s,T_0} = \|w^*\|_{s,T_0} \,, \tag{14.42}$$

$$\lim_{i\to\infty} |v_i|_{s,T} = |w|_{s,T} \,, \quad \lim_{i\to\infty} |v_i^*|_{s,T_0} = |w^*|_{s,T_0} \,. \tag{14.43}$$

Skutečně, podle trojúhelníkové nerovnosti a vztahu (14.35) platí

$$\|v_i\|_{s,T} = \|v_i + w - w\|_{s,T} \leq \|w\|_{s,T} + \|v_i - w\|_{s,T} \to \|w\|_{s,T} \,.$$

Stejně lze dokázat zbývající tři vztahy z (14.42) a (14.43). Tedy, přejdeme-li k limitě pro $i \to \infty$ v (14.40) a (14.41), dostaneme pro funkci $w \in W_2^k(T)$ odhady (14.22) a (14.23). $\square$

14.3. Poznámka. Pro naši teorii potřebujeme pouze odhady (14.22), (14.23). To je dobře, protože (podobně jako (14.36)) pro $\|w^*\|_{k,T_0}$ lze získat pouze odhad

$$\|w^*\|_{k,T_0} \leq C(k)(\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2} \|w\|_{k,T} \,,$$

tj. odhad, kde na pravé straně se nevyskytují žádné mocniny h_T.

Ze vztahů (14.31) – (14.33) okamžitě plyne následující lemma, které bude mít velké užití v 16. kapitole.

14.4. Lemma. *Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Je-li $w \in C^k(\overline{T})$, potom $w^* \in C^k(\overline{T}_0)$ a platí*

$$|w^*|_{C^k(\overline{T}_0)} \leq C(k) h_T^k |w|_{C^k(\overline{T})}. \tag{14.44}$$

15. Interpolační teorémy

V této kapitole uvedeme a dokážeme interpolační teorémy pro trojúhelníkové konečné prvky, pomocí nichž se generují konečněprvkové prostory $X_h^{(n)}$ a $X_h^{(3,H)}$.

15.1. Věta. *Nechť* $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. *Nechť* $u_I \in \mathcal{P}_2(n)$ *je interpolační polynom funkce* u *definovaný vztahy* (8.6), *tj. vztahy*

$$u_I(P_i) = u(P_i) \quad (i = 1, \dots, N), \tag{15.1}$$

kde $N = (n+1)(n+2)/2$ *a uzlové body* $P_1, \dots, P_N$ *jsou umístěny na* $\overline{T}$ *jako prvních* N *čísel v Pascalově trojúhelníku. Nechť* $u \in W_2^k(T)$, *přičemž*

$$2 \le k \le n+1. \tag{15.2}$$

Potom pro $0 \le s \le k$ *platí*

$$\|u - u_I\|_{s,T} \le \frac{C}{(\sin \vartheta_T)^s} h_T^{k-s} |u|_{k,T}\,, \tag{15.3}$$

kde

$$C = C(n, s, k, \overline{T}_0). \tag{15.4}$$

Důkaz. Poznamenejme, že předpoklad $k \ge 2$ zaručuje podle věty 5.1, že $u \in C^0(\overline{T})$, takže polynom u_I může být definován vztahy (15.1).

A) Položme

$$u^*(\xi, \eta) = u(x^*(\xi, \eta), y^*(\xi, \eta)), \tag{15.5}$$

kde funkce $x^*(\xi, \eta)$, $y^*(\xi, \eta)$ jsou definovány v (14.1). Podle věty 14.2 $u^* \in W_2^k(T_0)$.

Zvolme funkci $v \in W_2^s(T_0)$ libovolně, ale pevně, a definujme lineární funkcionál $F(u^*)$ na $W_2^k(T_0)$ vztahem

$$F(u^*) = (u^* - u_I^*, v)_{s,T_0}\,, \tag{15.6}$$

kde polynom u_I^* je dán vztahem

$$u_I^*(\xi, \eta) = u_I(x^*(\xi, \eta), y^*(\xi, \eta)) \tag{15.7}$$

a $(v, w)_{s,T_0}$ je skalární součin ve $W_2^s(T_0)$:

$$(v, w)_{s,T_0} = \sum_{|\alpha| \le s} \int_{T_0} D^\alpha v D^\alpha w \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta\,. \tag{15.8}$$

Ověřme především, že F je lineární funkcionál: Nechť c_1, c_2 jsou dvě libovolná reálná čísla a w^*, $z^* \in W_2^k(T_0)$ dvě funkce korespondující s funkcemi w, $z \in W_2^k(T)$ podle vztahu (15.5). Potom

$$F(c_1 w^* + c_2 z^*) = F((c_1 w + c_2 z)^*) = ((c_1 w + c_2 z)^* - (c_1 w + c_2 z)_I^*, v)_{s,T_0} =$$

$$= ((c_1 w + c_2 z)^* - ((c_1 w + c_2 z)_I)^*, v)_{s,T_0} = (c_1 w^* + c_2 z^* - (c_1 w_I + c_2 z_I)^*, v)_{s,T_0} =$$

$$= (c_1 w^* + c_2 z^* - c_1 w_I^* - c_2 z_I^*, v)_{s,T_0} = c_1 (w^* - w_I^*, v)_{s,T_0} + c_2 (z^* - z_I^*, v)_{s,T_0} =$$

$$= c_1 F(w^*) + c_2 F(z^*)\,.$$

Nyní dokážeme, že

$$|F(u^*)| \le C_1 \|v\|_{s,T_0} \|u^*\|_{k,T_0}\,, \tag{15.9}$$

kde konstanta C_1 nezávisí na v a u^*. Vztah (15.6) implikuje

$$|F(u^*)| \le \|u^* - u_I^*\|_{s,T_0}\|v\|_{s,T_0} \le \|v\|_{s,T_0}(\|u^*\|_{k,T_0} + \|u_I^*\|_{k,T_0})\,. \tag{15.10}$$

Abychom dokázali (15.9), musíme odhadnout $\|u_I^*\|_{k,T_0}$ pomocí $\|u^*\|_{k,T_0}$: Podle (15.5) a (15.7) platí

$$u^*(P_i^*) = u(P_i), \quad u_I^*(P_i^*) = u_I(P_i) \quad (i = 1, \dots, N), \tag{15.11}$$

kde $P_i^* = [\xi^*(P_i), \eta^*(P_i)]$, $P_i = [x^*(P_i^*), y^*(P_i^*)]$. Vztahy (15.11) spolu se vztahy (15.1) dávají

$$u_I^*(P_i^*) = u^*(P_i^*), \quad (i = 1, \dots, N). \tag{15.12}$$

Lineárnost transformace (14.1) a vztah (15.7) zaručují, že $u_I^* \in \mathcal{P}_2(n)$. Podle (15.12) je tedy u_I^* interpolačním polynomem funkce $u^* \in W_2^k(T_0)$. Odtud

$$u_I^*(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N} u^*(P_i^*)\varphi_i^*(\xi, \eta), \tag{15.13}$$

kde bázové polynomy $\varphi_i^* \in \mathcal{P}_2(n)$ $(i = 1, \dots, N)$ jsou jednoznačně určeny vztahy

$$\varphi_i^*(P_j^*) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, N).$$

Platí

$$\|\varphi_i^*\|_{k,T_0} \le \widetilde{K} \quad (i = 1, \dots, N). \tag{15.14}$$

Konstanta $\widetilde{K}$ závisí pouze na pevných veličinách k, n, $\varphi_1^*, \dots, \varphi_N^*$ a může být (po jistém úsilí) vypočtena. Odhad (15.14) a vztah (15.13) implikují

$$\|u_I^*\|_{k,T_0} \le \sum_{i=1}^{N} |u^*(P_i^*)| \cdot \|\varphi_i^*\|_{k,T_0} \le \widetilde{K} \sum_{i=1}^{N} |u^*(P_i^*)|\,.$$

Protože $k \ge 2$, ze Sobolevovy věty o vnoření (viz větu 5.1) plyne

$$|u^*(P_i^*)| \le \max_{\overline{T}_0} |u^*(\xi, \eta)| \le K(\overline{T}_0)\|u^*\|_{k,T_0}\,,$$

kde konstanta $K(\overline{T}_0)$ závisí pouze na $\overline{T}_0$. Kombinací posledních dvou odhadů se vztahem (15.10) dostaneme odhad (15.9), kde $C_1 = 1 + N\widetilde{K}K(\overline{T}_0)$.

Nyní dokážeme, že

$$F(u^*) = 0 \quad \forall u^* \in \mathcal{P}_2(n)\,. \tag{15.15}$$

Podle (15.13) polynom $u_I^* \in \mathcal{P}_2(n)$ je interpolačním polynomem polynomu $u^* \in \mathcal{P}_2(n)$; odtud podle věty 9.4 je $u_I^* \equiv u^*$. Tento výsledek a vztah (15.6) dávají (15.15).

Podle (15.9) je $F(u^*)$ lineární ohraničený funkcionál na prostoru $W_2^k(T_0)$ s normou, která není větší než $C_1\|v\|_{s,T_0}$. Protože podle (15.2) je $k - 1 \le n$, vztah (15.15) dává

$$F(u^*) = 0 \quad \forall u^* \in \mathcal{P}_2(k-1). \tag{15.16}$$

Z (15.9) a (15.16) plyne, že oba předpoklady Bramble-Hilbertova lemmatu (viz větu 4.3) jsou splněny, takže platí

$$|F(u^*)| \le C_1C_2\|v\|_{s,T_0}|u^*|_{k,T_0} \quad \forall u^* \in W_2^k(T_0), \tag{15.17}$$

kde (jak už bylo zmíněno) $C_1 = 1 + N\widetilde{K}K(\overline{T}_0)$ a konstanta C_2 závisí podle věty 4.3 pouze na k a $\overline{T}_0$.

Protože funkce v byla zvolena ve $W_2^s(T_0)$ libovolně, vztahy (15.6) a (15.17) dohromady dávají

$$|(u^* - u_I^*, v)_{s,T_0}| \le C_1C_2\|v\|_{s,T_0}|u^*|_{k,T_0} \quad \forall u^* \in W_2^k(T_0), \quad \forall v \in W_2^s(T_0).$$

Položíme-li $v = u^* - u_I^*$, dostaneme odtud

$$\|u^* - u_I^*\|_{s,T_0} \le C_1 C_2 |u^*|_{k,T_0} \quad \forall u^* \in W_2^k(T_0). \tag{15.18}$$

B) Nyní užijeme větu 14.2: Položíme-li $w = u - u_I$, dostaneme z (14.22) pro $0 \le s \le k$

$$\|u - u_I\|_{s,T} \le \frac{\widetilde{C}(s)}{(\sin\vartheta_T)^s} h_T^{-s} \sqrt{\mathrm{mes}_2 T}\, \|u^* - u_I^*\|_{s,T_0}. \tag{15.19}$$

Položíme-li $w = u$, dostaneme z (14.23)

$$|u^*|_{k,T_0} \le \widehat{C}(k) h_T^k (\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2} |u|_{k,T}. \tag{15.20}$$

Závěr důkazu je nyní jednoduchý: Násobme (15.18) výrazem

$$\frac{\widetilde{C}(s)}{(\sin\vartheta_T)^s} h_T^{-s} \sqrt{\mathrm{mes}_2 T}$$

a odhadněme levou stranu zdola pomocí (15.19) a pravou stranu shora pomocí (15.20). Dostaneme

$$\|u - u_I\|_{s,T} \le \frac{C_1 C_2 \widetilde{C}(s) \widehat{C}(k)}{(\sin\vartheta_T)^s} h_T^{k-s} |u|_{k,T}\,,$$

což je odhad vyjádřený vztahem (15.3), kde $C = C_1 C_2 \widetilde{C}(s) \widehat{C}(k)$. Odtud plyne (15.4). □

15.2. Věta. *Nechť $u \in W_2^k(T)$, kde $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ a $3 \le k \le 4$. Nechť $u_I \in \mathcal{P}_2(3)$ je interpolační polynom funkce u definovaný vztahy* (13.14), *tj. vztahy*

$$u_I(P_i^T) = u(P_i^T) \quad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{15.21}$$

$$\frac{\partial u_I}{\partial x}(P_j^T) = \frac{\partial u}{\partial x}(P_j^T), \quad \frac{\partial u_I}{\partial y}(P_j^T) = \frac{\partial u}{\partial y}(P_j^T) \quad (j = 1, 2, 3), \tag{15.22}$$

kde P_0^T je těžiště trojúhelníka $\overline{T}$ a P_1^T, P_2^T, P_3^T jeho vrcholy. Potom pro $0 \le s \le k$ platí

$$\|u - u_I\|_{s,T} \le \frac{C}{(\sin\vartheta_T)^s} h_T^{k-s} |u|_{k,T}\,, \tag{15.23}$$

kde

$$C = C(3, s, k, \overline{T}_0). \tag{15.24}$$

Důkaz. Poznamenejme, že předpoklad $k \ge 3$ zaručuje podle věty 5.1, že $u \in C^1(\overline{T})$, takže polynom u_I může být definován vztahy (15.21), (15.22).

Důkaz probíhá téměř doslova stejně jako důkaz věty 15.1. Liší se pouze v důkazu odhadu (15.9); přesněji v důkazu vztahu

$$\|u_I^*\|_{k,T_0} \le C_3 \|u^*\|_{k,T_0}. \tag{15.25}$$

Nechť $R_1(0,0)$, $R_2(1,0)$, $R_3(0,1)$ jsou vrcholy trojúhelníka $\overline{T}_0$ a $R_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ jeho těžiště. Ze vztahů (15.5), (15.7) a (15.21) plyne, že

$$u_I^*(R_i) = u^*(R_i) \quad (i = 0, \ldots, 3). \tag{15.26}$$

Nyní dokážeme vztahy

$$\frac{\partial u_I^*}{\partial \xi}(R_j) = \frac{\partial u^*}{\partial \xi}(R_j), \quad \frac{\partial u_I^*}{\partial \eta}(R_j) = \frac{\partial u^*}{\partial \eta}(R_j) \quad (j = 1, 2, 3). \tag{15.27}$$

Podle (14.1), (15.5), (15.7) a (15.22) platí, že

$$\frac{\partial u_I^*}{\partial \xi}(R_j) = \frac{\partial u_I}{\partial x}(P_j)\frac{\partial x^*}{\partial \xi} + \frac{\partial u_I}{\partial y}(P_j)\frac{\partial y^*}{\partial \xi} =$$

$$= \overline{x}_2 \frac{\partial u_I}{\partial x}(P_j) + \overline{y}_2 \frac{\partial u_I}{\partial y}(P_j) = \overline{x}_2 \frac{\partial u}{\partial x}(P_j) + \overline{y}_2 \frac{\partial u}{\partial y}(P_j) = \frac{\partial u^*}{\partial \xi}(R_j),$$

čímž je první ze vztahů (15.27) dokázán. Druhý se dokáže zcela stejně.

Lineárnost transformace (14.1) a vztah (15.7) zaručují, že $u_I^* \in \mathcal{P}_2(3)$. Podle (15.26) a (15.27) je tedy u_I^* interpolačním polynomem funkce $u^* \in W_2^k(T_0)$. Uspořádáme-li deset hodnot, které vystupují na levých stranách vztahů (15.26), (15.27), nějakým způsobem, např.

$$\begin{gathered} u_I^*(R_0),\ u_I^*(R_1),\ \frac{\partial u_I^*}{\partial \xi}(R_1),\ \frac{\partial u_I^*}{\partial \eta}(R_1),\ u_I^*(R_2), \\ \frac{\partial u_I^*}{\partial \xi}(R_2),\ \frac{\partial u_I^*}{\partial \eta}(R_2),\ u_I^*(R_3),\ \frac{\partial u_I^*}{\partial \xi}(R_3),\ \frac{\partial u_I^*}{\partial \eta}(R_3) \end{gathered} \tag{15.28}$$

a označíme-li je pro stručnost symboly $a_1, \dots, a_{10}$ (pro určitost v pořadí uvedeném v (15.28)), můžeme psát

$$u_I^*(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{10} a_j \psi_j^*(\xi, \eta), \tag{15.29}$$

kde $\psi_j^*(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_2(3)$ $(j = 1 \dots, 10)$ jsou takové polynomy, že pouze vždy jedna z hodnot

$$\begin{gathered} \psi_j^*(R_0),\ \psi_j^*(R_1),\ \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \xi}(R_1),\ \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \eta}(R_1),\ \psi_j^*(R_2), \\ \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \xi}(R_2),\ \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \eta}(R_2),\ \psi_j^*(R_3),\ \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \xi}(R_3),\ \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \eta}(R_3) \end{gathered} \tag{15.30}$$

je rovna jedné a zbývajících devět rovno nule.

Platí

$$\|\psi_j^*\|_{k,T_0} \le \widetilde{K}_1 \quad (j = 1, \dots, 10). \tag{15.31}$$

Konstanta $\widetilde{K}_1$ závisí pouze na pevných veličinách k, 10, $\psi_1^*, \dots, \psi_{10}^*$ a může být (po jistém úsilí) vypočtena. Odhad (15.31) a vztah (15.29) implikují

$$\|u_I^*\|_{k,T_0} \le \sum_{i=1}^{10} |a_i| \cdot \|\psi_i^*\|_{k,T_0} \le \widetilde{K}_1 \sum_{i=1}^{10} |a_i| \, .$$

Protože $k \ge 3$, ze Sobolevovy věty o vnoření (viz větu 5.1) a vztahů (15.26), (15.27) plyne

$$|a_i| = |u^*(R_j)| \le \max_{\overline{T}_0} |u^*(\xi, \eta)| \le K_2(\overline{T}_0)\|u^*\|_{k,T_0} \quad (i = 1, 2, 5, 8;\ j = 0, 1, 2, 3),$$

$$|a_i| = \left| \frac{\partial u^*}{\partial \xi}(R_j) \right| \le \max_{\overline{T}_0} \left| \frac{\partial u^*}{\partial \xi}(\xi, \eta) \right| \le K_2(\overline{T}_0)\|u^*\|_{k,T_0} \quad (i = 3, 6, 9;\ j = 1, 2, 3),$$

$$|a_i| = \left| \frac{\partial u^*}{\partial \eta}(R_j) \right| \le \max_{\overline{T}_0} \left| \frac{\partial u^*}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right| \le K_2(\overline{T}_0)\|u^*\|_{k,T_0} \quad (i = 4, 7, 10;\ j = 1, 2, 3),$$

kde konstanta $K(\overline{T}_0)$ závisí pouze na $\overline{T}_0$. Kombinací posledních čtyř odhadů dostaneme odhad (15.25), kde $C_3 = 10\widetilde{K}_1 K_2(\overline{T}_0)$. $\square$

16. Numerická integrace v metodě konečných prvků (případ $\partial\Omega = \Gamma_1$)

V této kapitole se vrátíme k označení $x = (x_1, x_2)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ a $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$.

Kvadraturní formule definovaná na referenčním trojúhelníku $\overline{T}_0$ má obecně tvar

$$\int_{T_0} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi \doteq \sum_{i=1}^{I} \omega_i^* \varphi(B_i^*), \tag{16.1}$$

kde ω_i^* jsou koeficienty a B_i^* integrační body formule; symbol I označuje počet integračních bodů. Nejjednodušší formulí typu (16.1) je formule

$$\int_{T_0} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi \doteq \frac{1}{2}\varphi(R_0), \tag{16.2}$$

kde $R_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ je těžiště $\overline{T}_0$. Dva další příklady typu (16.1) jsou tyto formule:

$$\int_{T_0} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi \doteq \frac{1}{6}(\varphi(R_1) + \varphi(R_2) + \varphi(R_3)), \tag{16.3}$$

$$\int_{T_0} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi \doteq \frac{1}{6}(\varphi(S_1) + \varphi(S_2) + \varphi(S_3)), \tag{16.4}$$

kde $R_1(0,0)$, $R_2(1,0)$, $R_3(0,1)$ jsou vrcholy trojúhelníka $\overline{T}_0$ a $S_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $S_2(0, \frac{1}{2})$, $S_3(\frac{1}{2}, 0)$ půlicí body jeho stran. Užitím vztahu

$$\int_{T_0} \xi_1^j \xi_2^k \,\mathrm{d}\xi = \frac{j!k!}{(j+k+2)!} \tag{16.5}$$

můžeme snadno dokázat, že kvadraturní formule (16.2), (16.3) jsou stupně přesnosti $d = 1$ a že kvadraturní formule (16.4) má stupeň přesnosti $d = 2$. Podobně lze zjistit, že kvadraturní formule

$$\int_{T_0} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi \doteq \frac{1}{120}\left(3\sum_{i=1}^{3} \varphi(R_i) + 8\sum_{j=1}^{3} \varphi(S_j) + 27\varphi(R_0)\right)$$

má stupeň přesnosti $d = 3$. (Mnoho dalších kvadraturních formulí na $\overline{T}_0$ včetně tzv. *konických součinových formulí* lze nalézt v [St]; o konických součinových formulích viz též [Že3]. Zde pouze poznamenáváme, že tyto formule jsou založeny na myšlence transformovat trojúhelník na čtverec (resp. čtyřstěn na krychli) a potom užít ve směru každé souřadné osy Gaussovu integrační formuli zvoleného stupně přesnosti.)

Podle věty o transformaci integrálu platí

$$\int_{T} F(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x = |J_T| \int_{T_0} F^*(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi, \tag{16.6}$$

kde

$$F^*(\xi_1, \xi_2) = F(x_1^*(\xi_1, \xi_2), x_2^*(\xi_1, \xi_2)), \tag{16.7}$$

přičemž $x_1^*(\xi_1, \xi_2)$, $x_2^*(\xi_1, \xi_2)$ jsou pravé strany (14.1). Položme

$$\omega_{i,T} = |J_T|\omega_i^*, \quad B_{i,T} = (x_1^*(B_i^*), x_2^*(B_i^*)). \tag{16.8}$$

Vztahy (16.6), (16.8) a (16.1) dávají

$$\int_T F(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x \doteq \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,T} F(B_{i,T}), \tag{16.9}$$

protože podle věty 14.1 je $F(B_{i,T}) = F^*(B_i^*)$.

Uveďme několik příkladů. V případě formule (16.2) platí

$$I = 1,\ \omega_1^* = \frac{1}{2},\ B_1^* = R_0,\ \omega_{1,T} = \frac{1}{2}|J_T| \equiv \mathrm{mes}_2 T,\ B_{1,T} = P_0.$$

Formule (16.9) má tedy v tomto případě tvar

$$\int_T F(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x \doteq (\mathrm{mes}_2 T) F(P_0). \tag{16.10}$$

V případě formule (16.3) máme

$$I = 3,\ \omega_i^* = \frac{1}{6},\ B_i^* = R_i,\ \omega_{i,T} = \frac{1}{6}|J_T| \equiv \frac{1}{3}\mathrm{mes}_2 T,\ B_{i,T} = P_i\ (i = 1, 2, 3)$$

a formule (16.9) má tvar

$$\int_T F(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{1}{3}\mathrm{mes}_2 T \sum_{i=1}^{3} F(P_i). \tag{16.11}$$

V případě formule (16.4) platí

$$I = 3,\ \omega_i^* = \frac{1}{6},\ B_i^* = S_i,\ \omega_{i,T} = \frac{1}{6}|J_T| \equiv \frac{1}{3}\mathrm{mes}_2 T,\ B_{i,T} = Q_i\ (i = 1, 2, 3),$$

kde Q_1, Q_2, Q_3 jsou půlicí body stran trojúhelníka $\overline{T}$. Tedy formule (16.9) má v tomto případě tvar

$$\int_T F(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{1}{3}\mathrm{mes}_2 T \sum_{i=1}^{3} F(Q_i). \tag{16.12}$$

Aproximovat funkcionál

$$L(v) = \int_\Omega v f\,\mathrm{d}x, \quad f \in C^0(\overline{\Omega}) \quad \forall v \in W_2^1(\Omega) \tag{16.13}$$

pro $v \in X_h^{(n)} \subset W_2^1(\Omega)$ kvadraturní formulí (16.9) znamená nahradit (16.13) funkcionálem

$$L_h(v) = \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,T} f(B_{i,T}) v(B_{i,T}) \quad \forall v \in X_h^{(n)}, \tag{16.14}$$

který je definován na $X_h^{(n)}$. V případě $I = 1$ má vztah (16.14) tvar

$$L_h(v) = \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} (\mathrm{mes}_2 T) f(P_0^T) v(P_0^T) \quad \forall v \in X_h^{(n)}. \tag{16.15}$$

Aproximovat funkcionál

$$a(v,w) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j}(x) \right) \mathrm{d}x, \ k_{ij} \in C^0(\overline{\Omega}) \ \ \forall v,w \in W_2^1(\Omega) \tag{16.16}$$

pro $v, w \in X_h^{(n)} \subset W_2^1(\Omega)$ kvadraturní formulí (16.9) znamená nahradit (16.16) funkcionálem

$$a_h(v,w) = \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} \sum_{m=1}^{I} \sum_{i,j=1}^{2} \omega_{m,T} k_{ij}(B_{m,T}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(B_{m,T}) \frac{\partial w}{\partial x_j}(B_{m,T}) \ \forall v,w \in X_h^{(n)}, \tag{16.17}$$

který je definován na $X_h^{(n)}$. V případě $I = 1$ má vztah (16.17) tvar

$$a_h(v,w) = \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^{2} (\mathrm{mes}_2 T) k_{ij}(P_0^T) \frac{\partial v}{\partial x_i}(P_0^T) \frac{\partial w}{\partial x_j}(P_0^T) \ \forall v,w \in X_h^{(n)}. \tag{16.18}$$

Omezíme-li se v (16.18) na $v, w \in X_h^{(1)}$, potom se tento vztah zjednoduší:

$$a_h(v,w) = \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^{2} (\mathrm{mes}_2 T) k_{ij}(P_0^T) \left.\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_T \left.\frac{\partial w}{\partial x_j}\right|_T \quad \forall v,w \in X_h^{(1)}. \tag{16.19}$$

Diskrétní problém, který vznikne, když v Definici 10.2 aproximujeme bilineární formu $a(v,w)$ bilineární formou $a_h(v,w)$ (definovanou obecně vztahem (16.17)) a lineární formu $L(v)$ lineární formou $L_h(v)$ (definovanou obecně vztahem (16.14)), je formulován takto:

16.1. Problém. Najít takovou funkci $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$, že

$$a_h(u_h^{(n)}, v) = L_h(v) \quad \forall v \in V_h^{(n)}. \tag{16.20}$$

16.2. Poznámka. a) V případě, že užíváme hermiteovské konečné prvky uvedené v 13. kapitole, modifikuje se Problém 16.1 takto: Najít $u_h^{(3,H)} \in W_h^{(3,H)}$ tak, že

$$a_h(u_h^{(3,H)}, v) = L_h(v) \quad \forall v \in V_h^{(3,H)}. \tag{16.21}$$

Jak dále uvidíme, tvar konečných prvků nemá na numerickou integraci vliv; numerická integrace je pouze ovlivňována stupněm polynomů užitých při konstrukci konečných prvků. Proto se budeme zabývat pouze Problémem 16.1.

b) Protože v této kapitole je $\partial\Omega = \Gamma_1$, máme $V = W_0^{1,2}(\Omega)$. Tento speciální tvar prostoru V nezjednoduší naše úvahy ohledně numerické integrace přes oblast $\overline{\Omega}$; jediným důvodem pro předpoklad $\partial\Omega = \Gamma_1$ je absence křivkového integrálu v lineární formě $L(v)$. Numerická integrace v případě křivkového integrálu podél Γ_2 bude studována v následující kapitole.

Naše teoretické úvahy začneme opět s abstraktním odhadem chyby, který bude zobecněním odhadu z věty 11.1.

16.3. Věta (o abstraktním odhadu chyby při použití numerické integrace na oblasti $\overline{\Omega}$). *Nechť $\overline{\Omega}$ je dvojrozměrná ohraničená uzavřená oblast s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Nechť bilineární forma $a(v,w)$ definovaná vztahem (16.16) je ohraničená na $W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$, tj.*

$$|a(v,w)| \leq M\|v\|_{1,\Omega}\|w\|_{1,\Omega} \quad \forall v,w \in W_2^1(\Omega) \quad (M = \text{const}), \tag{16.22}$$

a V-eliptická, tj.

$$\beta\|v\|_{1,\Omega}^2 \leq a(v,v) \quad \forall v \in V \quad (\beta = \text{const} > 0). \tag{16.23}$$

Nechť formy $L(v)$, $L_h(v)$ a $a_h(v,w)$ jsou dány vztahy (16.13), (16.14) a (16.17). Nechť formy $a_h(v,w)$ jsou stejnoměrně $V_h^{(n)}$-eliptické, tj. nechť existují takové konstanty $\widetilde{\beta} > 0$ a $0 < h_0 < 1$, že

$$\widetilde{\beta}\|v\|_{1,\Omega}^2 \leq a_h(v,v) \quad \forall v \in V_h^{(n)} \quad \forall h \in (0,h_0), \tag{16.24}$$

kde $n \geq 1$ je dané přirozené číslo. Potom existuje právě jedno řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ Problému 6.2 a při daném h právě jedno řešení $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ Problému 16.1 a pro všechna $h \in (0,h_0)$ platí

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq C\Bigg\{ \inf_{v \in W_h^{(n)}} \|u - v\|_{1,\Omega} +$$

$$+ \sup_{\substack{w \in V_h^{(n)} \\ w \neq 0}} \frac{|L(w) - L_h(w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} + \inf_{v \in W_h^{(n)}} \sup_{\substack{w \in V_h^{(n)} \\ w \neq 0}} \frac{|a(v,w) - a_h(v,w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} \Bigg\}, \tag{16.25}$$

kde konstanta C nezávisí na řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ a prostoru $X_h^{(n)}$.

Důkaz. A) Předpoklady (16.13), (16.22) a (16.23) zaručují jednoznačnou existenci řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ Problému 6.2 (viz 7. kapitolu). Podobně jako v 10. kapitole předpoklad (16.24) implikuje při daném n jednoznačnou existenci řešení $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ Problému 16.1.

B) Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \leq \|u - v\|_{1,\Omega} + \|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in W_h^{(n)}. \tag{16.26}$$

Abychom odhadli výraz $\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega}$, zvolme $v \in W_h^{(n)}$ libovolně s výjimkou $v = u_h^{(n)}$. Protože $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$, platí $u_h^{(n)} - v \in V_h^{(n)}$ a vztahy (16.24) a (16.20) implikují

$$\widetilde{\beta}\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega}^2 \leq a_h(u_h^{(n)} - v, u_h^{(n)} - v) = L_h(u_h^{(n)} - v) - a_h(v, u_h^{(n)} - v). \tag{16.27}$$

Protože $V_h^{(n)} \subset V$, platí podle (6.11) a (6.9) (s $\Gamma_2 = \emptyset$)

$$a(u - v, u_h^{(n)} - v) - L(u_h^{(n)} - v) + a(v, u_h^{(n)} - v) = 0.$$

Přičtěme toto vyjádření nuly k pravé straně nerovnosti (16.27). S užitím (16.22) potom nalezneme

$$\widetilde{\beta}\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega}^2 \le M\|u - v\|_{1,\Omega}\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} + |L_h(u_h^{(n)} - v) - L(u_h^{(n)} - v)| +$$
$$+ |a(v, u_h^{(n)} - v) - a_h(v, u_h^{(n)} - v)|.$$

Dělíme-li tuto nerovnost výrazem $\widetilde{\beta}\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega}$ a položíme-li pro stručnost $w := u_h^{(n)} - v$, vidíme, že platí

$$\|u_h^{(n)} - v\|_{1,\Omega} \le (M/\widetilde{\beta})\|u - v\|_{1,\Omega} +$$
$$+ (1/\widetilde{\beta}) \sup_{\substack{w \in V_h^{(n)} \\ w \ne 0}} \left\{ \frac{|L_h(w) - L(w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} + \frac{|a(v,w) - a_h(v,w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} \right\}.$$

Kombinujeme-li tento výsledek s nerovností (16.26) a vezmeme-li infimum vzhledem k $v \in W_h^{(n)}$, dostaneme (16.25), kde $C = \max(1 + M/\widetilde{\beta}, 1/\widetilde{\beta})$. $\square$

První člen na pravé straně (16.25) vyjadřuje chybu interpolace metody konečných prvků a může být snadno odhadnut pomocí výsledků 14. kapitoly. Druhý člen je horní hranice chyby vzniklé v důsledku numerické integrace lineární formy $L(v)$ a třetí člen vyjadřuje horní hranici chyby vzniklé v důsledku numerické integrace bilineární formy $a(v, w)$. Odhad obou těchto horních hranic je hlavním obsahem této kapitoly.

Začneme s důkazem lemmatu, které má velký význam ve všech úvahách týkajících se odhadů chyb numerické integrace.

16.4. Lemma. *Nechť $k \ge 1$ je dané přirozené číslo. Potom*

$$|\varphi|_{j,T_0} \le C_1 |\varphi|_{i,T_0}, \quad 0 \le i \le j \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_2(k), \tag{16.28}$$

$$\max_{|\alpha|=j} \max_{\overline{T}_0} |D^\alpha \varphi(\xi_1, \xi_2)| \le C_2 |\varphi|_{j,T_0}, \quad j \ge 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_2(k), \tag{16.29}$$

kde konstanty C_1, C_2 závisejí pouze na daném čísle k.

Důkaz. Pišme libovolný polynom $\varphi \in \mathcal{P}_2(k)$ ve tvaru

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = \sum_{t=0}^{k} \sum_{r+s=t} A_{rs}^{(t)} \xi_1^r \xi_2^s. \tag{16.30}$$

Počet koeficientů $A_{rs}^{(t)}$ je $N(k) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$. Položme

$$m = m(j) \equiv N(k) - N(j-1),$$

kde $0 \le j \le k$. Uvažujme lineární prostor $R^m = R^1 \times \cdots \times R^1$, kde R^1 je prostor reálných čísel. Pro $a = (a_1, \ldots, a_m) \in R^m$, $b = (b_1, \ldots, b_m) \in R^m$ platí

$$\beta a = (\beta a_1, \ldots, \beta a_m), \quad a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m),$$

kde $\beta \in R^1$.

Ke každému $a \in R^m$ zvolme polynom $\varphi_a \in \mathcal{P}_2(k)$, jehož koeficienty jsou tvaru

$$A_{k,0}^{(k)} = a_1,\ A_{k-1,1}^{(k)} = a_2,\ \dots,\ A_{0,k}^{(k)} = a_{k+1},$$

$$A_{k-1,0}^{(k-1)} = a_{k+2},\ A_{k-2,1}^{(k-1)} = a_{k+3},\ \dots,\ A_{0,k-1}^{(k-1)} = a_{2k+1},$$

$$\dots$$

$$A_{j,0}^{(j)} = a_{m-j-1},\ A_{j-1,1}^{(j)} = a_{m-j},\ \dots,\ A_{0,j}^{(j)} = a_m.$$

Zbývající koeficienty $A_{rs}^{(t)}$ $(t < j)$ jsou libovolné. Ukažme, že zobrazení $a \to |\varphi_a|_{j,T_0}$ je norma v prostoru R^m: Pro $a = (0, \dots, 0)$ platí $|\varphi_a|_{j,T_0} = 0$; jestliže $|\varphi_a|_{j,T_0} = 0$, potom $\varphi_a \in \mathcal{P}_2(j-1)$, takže platí $a = (0, \dots, 0)$. Jestliže $b = \beta a \in R^m$, potom

$$|\varphi_b|_{j,T_0} = |\beta\varphi_a|_{j,T_0} = |\beta| \cdot |\varphi_a|_{j,T_0}.$$

Konečně,

$$|\varphi_{a+b}|_{j,T_0} = |\varphi_a + \varphi_b|_{j,T_0} \le |\varphi_a|_{j,T_0} + |\varphi_b|_{j,T_0}.$$

Protože všechny normy v konečněrozměrném prostoru R^m jsou ekvivalentní, platí

$$C_1(k,j)\Big(\sum_{i=1}^m a_i^2\Big)^{1/2} \le |\varphi_a|_{j,T_0} \le C_2(k,j)\Big(\sum_{i=1}^m a_i^2\Big)^{1/2}, \tag{16.31}$$

kde kladné konstanty $C_1(k,j)$, $C_2(k,j)$ závisejí pouze na k a j. Nechť $0 \le i \le j$ a nechť $\varphi \in \mathcal{P}_2(k)$. Potom podle (16.31) platí

$$|\varphi|_{j,T_0} \le C_2(k,j)[(A_{k,0}^{(k)})^2 + \dots + (A_{0,j}^{(j)})^2]^{1/2}, \tag{16.32}$$

$$C_1(k,i)[(A_{k,0}^{(k)})^2 + \dots + (A_{0,i}^{(i)})^2]^{1/2} \le |\varphi|_{i,T_0}. \tag{16.33}$$

Násobíme-li (16.33) výrazem $C_2(k,j)/C_1(k,i)$, dostaneme z (16.32) a (16.33) nerovnost

$$|\varphi|_{j,T_0} \le (C_2(k,j)/C_1(k,i))|\varphi|_{i,T_0}.$$

Tato nerovnost dokazuje tvrzení (16.28), přičemž

$$C_1 = \max_{0\le i\le j\le k} \frac{C_2(k,j)}{C_1(k,i)}.$$

Co se týče tvrzení (16.29), platí

$$\max_{(\xi_1,\xi_2)\in\overline{T}_0,\ |\alpha|=j} |D^\alpha\varphi| \le C_3(k,j)(|A_{k,0}^{(k)}| + \dots + |A_{0,j}^{(j)}|) \le$$

$$\le C_3(k,j)m^{1/2}[(A_{k,0}^{(k)})^2 + \dots + (A_{0,j}^{(j)})^2]^{1/2}; \tag{16.34}$$

druhá nerovnost plyne z Cauchyovy nerovnosti (7.23). Položme nyní $i = j$ v (16.33), násobme získaný vztah výrazem $C_3(k,j)m^{1/2}/C_1(k,j)$ a kombinujme výsledek s nerovností (16.34). Získáme tvrzení (16.29), přičemž

$$C_2 = (N(k))^{1/2} \max_{0\le j\le k} \frac{C_3(k,j)}{C_1(k,j)}.$$

Tím je důkaz lemmatu dokončen. $\square$

16.5. Chybové funkcionály. Kvůli stručnosti vyjadřování zaveďme *chybové funkcionály* $E_T(w)$ a $E^*(\varphi)$ vztahy

$$E_T(w) = \int_T w(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,T} w(B_{i,T}), \tag{16.35}$$

$$E^*(\varphi) = \int_{T_0} \varphi(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi - \sum_{i=1}^{I} \omega_i^* \varphi(B_i^*). \tag{16.36}$$

Funkcionál $E_T(w)$ vyjadřuje chybu numerické integrace funkce $w(x_1, x_2)$ na trojúhelníku $\overline{T}$ a funkcionál $E^*(\varphi)$ vyjadřuje chybu numerické integrace funkce $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ na trojúhelníku $\overline{T}_0$. Podle (16.6)–(16.9), (16.35) a (16.36) platí

$$E_T(F) = E^*(F^*|J_T|) = |J_T| \cdot E^*(F^*)\,. \tag{16.37}$$

Poznamenejme, že rozdíl $L(v) - L_h(v)$ může být stručně psán ve tvaru

$$L(v) - L_h(v) = \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} E_T(vf) \tag{16.38}$$

a rozdíl $a(v, w) - a_h(v, w)$ ve tvaru

$$a(v, w) - a_h(v, w) = \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} E_T\biggl(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \biggr). \tag{16.39}$$

16.6. Lemma. *Nechť $n \geq 1$ je dané přirozené číslo. Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$, kde $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$ (připomínáme, že symbol $\{\mathcal{T}_h\}$ označuje množinu triangulací, která splňuje podmínku minimálního úhlu – viz* (8.8), (8.9)). *Nechť*

$$k_{ij} \in C^1(\overline{T}) \quad (i, j = 1, 2) \tag{16.40}$$

a nechť kvadraturní formule na referenčním trojúhelníku $\overline{T}_0$ je taková, že

$$E^*(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_2(2n-2)\,. \tag{16.41}$$

Potom pro všechny funkce $v, w \in X_h^{(n)}$ platí

$$\left| E_T\biggl(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \biggr) \right| \leq C h_T \max_{i,j=1,2} |k_{ij}|_{C^1(\overline{T})} \|v\|_{1,T} \|w\|_{1,T}\,, \tag{16.42}$$

kde konstanta C nezávisí na $\overline{T}$, k_{ij}, v a w.

Důkaz. Podle (16.37) platí

$$E_T\biggl(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \biggr) = |J_T| \cdot E^*\biggl(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}^* \Bigl(\frac{\partial v}{\partial x_i} \Bigr)^* \Bigl(\frac{\partial w}{\partial x_j} \Bigr)^* \biggr).$$

Stejně jako v důkazu části a) věty 14.2 nalezneme, že

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^* = \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r^*}{\partial x_i}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^* = \sum_{s=1}^{2} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_s^*}{\partial x_j}.$$

Odtud

$$\left| E_T\left(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \right| \le |J_T| \sum_{r,s=1}^{2} \sum_{i,j=1}^{2} \left| \frac{\partial \xi_r^*}{\partial x_i} \right| \cdot \left| \frac{\partial \xi_s^*}{\partial x_j} \right| \cdot \left| E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right) \right|. \tag{16.43}$$

Předpoklad (16.40) a část a) věty 14.2 implikují, že $k_{ij}^* \in C^1(\overline{T}_0)$. Odtud, ze vztahu (16.36) a lemmatu 16.4 plyne, že

$$\left| E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right) \right| \le \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{I} |\omega_m^*| \right) \left\| k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right\|_{C^0(\overline{T}_0)} \le$$

$$\le C \|k_{ij}^*\|_{C^0(\overline{T}_0)} \left\| \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \right\|_{C^0(\overline{T}_0)} \left\| \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right\|_{C^0(\overline{T}_0)} \le C \|k_{ij}^*\|_{C^1(\overline{T}_0)} |v^*|_{1,T_0} |w^*|_{1,T_0}. \tag{16.44}$$

Pro pevná v^*, w^* položme

$$F(k_{ij}^*) = E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right).$$

Získali jsme lineární ohraničený funkcionál na $C^1(\overline{T}_0)$, jehož norma je podle nerovnosti (16.44) menší nebo rovna $C|v^*|_{1,T_0}|w^*|_{1,T_0}$. Dále, protože $v^* \in \mathcal{P}_2(n)$, $w^* \in \mathcal{P}_2(n)$, předpoklad (16.41) implikuje

$$F(k_{ij}^*) = 0 \quad \forall k_{ij}^* \in \mathcal{P}_2(0).$$

Odtud podle Bramble-Hilbertova lemmatu (ve tvaru 4.4)

$$\left| E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right) \right| \le C |k_{ij}^*|_{C^1(\overline{T}_0)} |v^*|_{1,T_0} |w^*|_{1,T_0}.$$

Tato nerovnost a vztahy (14.23), (14.15) a (14.44) implikují

$$\left| E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right) \right| \le C h_T |k_{ij}|_{C^1(\overline{T})} |v|_{1,T} |w|_{1,T}.$$

Kombinujeme-li tento výsledek s (16.43) a užijeme-li větu 14.1, dostaneme tvrzení věty 16.5. □

16.7. Věta. *Nechť bilineární forma $a(v,w)$, která je definována vztahem (16.16), je V-eliptická. Nechť funkce k_{ij} splňují podmínku*

$$k_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}) \quad (i,j = 1,2). \tag{16.45}$$

Nechť $n \ge 1$ je dané přirozené číslo. Nechť kvadraturní formule (16.9) užitá pro výpočet bilineární formy $a_h(v,w)$ (viz (16.17)) má stupeň přesnosti $d = 2n-2$. Potom pro každou triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$, kde $h \in (0,h_0)$ a h_0 je dostatečně malé, platí

$$\widetilde{\beta} \|v\|_{1,\Omega}^2 \le a_h(v,v) \quad \forall v \in V_h^{(n)}, \quad \forall h \in (0,h_0) \quad (\widetilde{\beta} = \text{const} > 0),$$

tj. podmínka (16.24) stejnoměrné $V_h^{(n)}$-elipticity je splněna na množině $\{V_h^{(n)}\}$ korespondující s množinou $\{\mathcal{T}_h\}$.

Důkaz. Všechny podmínky lemmatu 16.6 jsou splněny pro každou triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$: předpoklad (16.45) dává (16.40) a protože formule (16.9) je generována formulí (16.1), vztah (16.41) také platí.

Pro stručnost položme

$$B_0 = \max_{i,j=1,2} |k_{ij}|_{C^1(\overline{\Omega})} \,. \tag{16.46}$$

Nerovnost (16.42) pak dává

$$\left| E_T\left(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right| \le C B_0 h_T \|v\|_{1,T}^2 \,.$$

Odtud dostáváme pro všechna $v \in X_h^{(n)}$

$$- \sum_{\overline{T} \in \mathcal{T}_h} E_T\left(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \ge -C B_0 h \|v\|_{1,\Omega}^2 \,.$$

Protože $V_h^{(n)} \subset V$ a $a(v,w)$ je V-eliptická, platí

$$\beta \|v\|_{1,\Omega}^2 \le a(v,v) \quad \forall v \in V_h^{(n)} \quad (\beta = \text{const} > 0).$$

Poslední dvě nerovnosti spolu se vztahem (16.39) implikují

$$a_h(v,v) \ge (\beta - C B_0 h) \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in V_h^{(n)}.$$

Položme $h_0 = \beta/(2CB_0)$. Potom podmínka (16.24) stejnoměrné $V_h^{(n)}$-elipticity platí pro $\widetilde{\beta} = \beta/2$. $\square$

16.8. Lemma. *Nechť $n \ge 1$ je dané přirozené číslo. Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$, kde $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$. Nechť*

$$k_{ij} \in C^n(\overline{T}) \quad (i,j = 1,2) \tag{16.47}$$

a nechť kvadraturní formule na referenčním trojúhelníku $\overline{T}_0$ je taková, že

$$E^*(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_2(2n-2) \,. \tag{16.48}$$

Potom pro všechny funkce $v, w \in X_h^{(n)}$ platí

$$\left| E_T\left(\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \right| \le C h_T^n \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^n(\overline{T})} \|v\|_{n,T} \|w\|_{1,T} \,, \tag{16.49}$$

Důkaz. Projdeme-li důkaz lemmatu 16.6, vidíme, že stačí dokázat

$$\left| E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right) \right| \le C h_T^n \|k_{ij}\|_{C^n(\overline{T})} \|v\|_{n,T} \|w\|_{1,T} \,. \tag{16.50}$$

Předpoklad (16.47) a lemma 14.4 implikují, že funkce

$$\psi = k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \tag{16.51}$$

náleží do $C^n(\overline{T}_0)$, takže platí

$$\left| E^*\left(k_{ij}^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right) \right| \equiv \left| E^*\left(\psi \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right) \right| \le C \left\| \psi \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right\|_{C^0(\overline{T}_0)} \le$$

$$\le C \|\psi\|_{C^0(\overline{T}_0)} \left\| \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s} \right\|_{C^0(\overline{T}_0)} \le C \|\psi\|_{C^n(\overline{T}_0)} |w^*|_{1,T_0} \,.$$

V poslední nerovnosti jsme také užili odhad (16.29).