Protože $\partial w^*/\partial \xi_s \in \mathcal{P}_2(n-1)$, předpoklad (16.48) dává

$$E^*\left(\psi \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s}\right) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{P}_2(n-1)\,.$$

Užijeme-li lemma 4.4, kde nyní $F(\psi) = E^*(\psi\, \partial w^*/\partial \xi_s)$ s pevným $w^* \in \mathcal{P}_2(n)$, dostaneme vzhledem k posledním dvěma vztahům

$$\left| E^*\left(k^*_{ij} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r} \frac{\partial w^*}{\partial \xi_s}\right)\right| \le C|\psi|_{C^n(\overline{T}_0)} |w^*|_{1,T_0}\,. \tag{16.52}$$

Vztah (16.51), věta o derivování součinu spojitě diferencovatelných funkcí a fakt, že $D^\alpha v^* \equiv 0$ pro $|\alpha| = n+1$, dávají

$$|\psi|_{C^n(\overline{T}_0)} \le C(n) \sum_{m=0}^{n} |k^*_{ij}|_{C^m(\overline{T}_0)} \left| \frac{\partial v^*}{\partial \xi_r}\right|_{C^{n-m}(\overline{T}_0)} \le$$

$$\le C(n) \sum_{m=1}^{n} |k^*_{ij}|_{C^m(\overline{T}_0)} |v^*|_{C^{n+1-m}(\overline{T}_0)}\,,$$

protože $|v^*|_{C^{n+1}(\overline{T}_0)} = 0$ pro všechna $v^* \in \mathcal{P}_2(n)$. Lemma 16.4 a vztahy (14.15), (14.23) a (14.44) pak implikují

$$|\psi|_{C^n(\overline{T}_0)} \le C(n) \sum_{m=1}^{n} |k^*_{ij}|_{C^m(\overline{T}_0)} |v^*|_{n+1-m,T_0} \le$$

$$\le C(n) \sum_{m=1}^{n} h_T^m |k_{ij}|_{C^m(\overline{T})} h_T^{n-m} |v|_{n+1-m,T} \le C(n) h_T^n \|k_{ij}\|_{C^n(\overline{T})} \|v\|_{n,T}\,.$$

Tento výsledek a vztah (16.52) spolu s (14.15) a (14.23) implikují nerovnost (16.50), což jsme chtěli dokázat. $\square$

16.9. Lemma. *Nechť $n \ge 1$ je dané přirozené číslo. Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$, kde $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$. Nechť*

$$f \in C^n(\overline{T}) \tag{16.53}$$

a nechť kvadraturní formule na referenčním trojúhelníku $\overline{T}_0$ je taková, že

$$E^*(p) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_2(2n-2). \tag{16.54}$$

Potom pro všechny funkce $v \in X_h^{(n)}$ platí

$$|E_T(vf)| \le C h_T^n (\mathrm{mes}_2 T)^{1/2} \|f\|_{C^n(\overline{T})} \|v\|_{1,T}\,, \tag{16.55}$$

kde konstanta C nezávisí na $\overline{T}$, f a v.

Důkaz. A) Nejprve probereme případ $n = 1$. Nechť $\varphi \in C^1(\overline{T}_0)$. Potom podle (16.36)

$$|E^*(\varphi)| \le \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{I} |\omega_i^*|\right) \|\varphi\|_{C^0(\overline{T}_0)} \le C\|\varphi\|_{C^1(\overline{T}_0)} \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{T}_0)\,.$$

Tento vztah, linearita funkcionálu $E^*(\varphi)$ na $C^1(\overline{T}_0)$ a předpoklad (16.54) (kde nyní $n = 1$) dávají podle Lemmatu 4.4

$$|E^*(\varphi)| \le C|\varphi|_{C^1(\overline{T}_0)} \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{T}_0)\,. \tag{16.56}$$

Položme

$$\varphi = v^* f^*, \tag{16.57}$$

kde v^*, f^* jsou funkce v, f transformované z $\overline{T}$ na $\overline{T}_0$:

$$v^*(\xi_1, \xi_2) = v(x_1^*(\xi_1, \xi_2), x_2^*(\xi_1, \xi_2)), \tag{16.58}$$

$$f^*(\xi_1, \xi_2) = f(x_1^*(\xi_1, \xi_2), x_2^*(\xi_1, \xi_2)). \tag{16.59}$$

Podle Lemmatu 14.4 a předpokladu (16.53) platí, že $f^* \in C^1(\overline{T}_0)$. Lineárnost transformace (14.1) dává $v^* \in \mathcal{P}_2(1)$. Odtud $v^* f^* \in C^1(\overline{T}_0)$. Užijeme-li vztah (16.57) a větu o derivování součinu spojitě diferencovatelných funkcí, dostaneme

$$|\varphi|_{C^1(\overline{T}_0)} \le C(|v^*|_{C^1(\overline{T}_0)} |f^*|_{C^0(\overline{T}_0)} + |v^*|_{C^0(\overline{T}_0)} |f^*|_{C^1(\overline{T}_0)}) \,. \tag{16.60}$$

Lemma 16.4 a vztahy (14.15), (14.23), (14.44) potom implikují

$$|\varphi|_{C^1(\overline{T}_0)} \le C \|f\|_{C^1(\overline{T})} \|v\|_{1,T} \,. \tag{16.61}$$

Konečně, ze vztahu (16.37) plyne

$$|E_T(vf)| = |J_T| \cdot |E^*(v^* f^*)| \,. \tag{16.62}$$

Podle (14.4) a (14.15) platí

$$|J_T| \le C h_T^2 \le C h_T (\mathrm{mes}_2 T)^{1/2}. \tag{16.63}$$

Vztahy (16.56), (16.57), (16.61) – (16.63) implikují (16.55) v případě $n = 1$.

B) V případě $n \ge 2$ vyjdeme z identity (16.62) a napíšeme $E^*(v^* f^*)$ ve tvaru

$$E^*(v^* f^*) = E^*(A f^*) + E^*((v^* - A) f^*) \,, \tag{16.64}$$

kde A je konstanta závislá na v^* a definovaná vztahem

$$\int_{T_0} (v^* - A) \, \mathrm{d}\xi = 0 \,. \tag{16.65}$$

Platí

$$|A| = 2 \left| \int_{T_0} v^* \, \mathrm{d}\xi \right| \le \sqrt{2} \|v^*\|_{0,T_0} \,, \tag{16.66}$$

kde nerovnost je důsledkem Schwarzovy nerovnosti (viz větu $\mathcal{P}$.15).

Nyní odhadneme oba výrazy na pravé straně (16.64). Předpoklad (16.53) a Lemma 14.4 dávají $f^* \in C^n(\overline{T}_0)$. Užitím této skutečnosti a odhadu (16.66) můžeme psát vzhledem k (16.36)

$$|E^*(A f^*)| \le \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{I} |\omega_i^*| \right) |A| \cdot |f^*|_{C^0(\overline{T}_0)} \le C \|v^*\|_{0,T_0} \|f^*\|_{C^n(\overline{T}_0)} \,.$$

Pro pevné v^* (a tedy také pro pevné $A \in \mathcal{P}_2(0)$) položme

$$F(f^*) = E^*(A f^*) \,.$$

Vidíme, že $F(f^*)$ je lineární ohraničený funkcionál na $C^n(\overline{T}_0)$ s normou menší nebo rovnou $C \|v^*\|_{C^0(\overline{T}_0)}$. Podle předpokladu (16.54) (který v tomto kroku není plně využit) je

$$F(f^*) = 0 \quad \forall f^* \in \mathcal{P}_2(n-1) \,.$$

Všechny předpoklady Lemmatu 4.4 jsou tedy splněny a my dostáváme

$$|E^*(A f^*)| \le C \|v^*\|_{0,T_0} |f^*|_{C^n(\overline{T}_0)} \,.$$

Užijeme-li vztahy (14.23) a (14.44), nalezneme, že

$$|E^*(Af^*)| \le Ch_T^n(\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2}\|v\|_{0,T}|f|_{C^n(\overline{T})}\,. \tag{16.67}$$

Dále platí

$$|E^*((v^*-A)f^*)| \le C\|(v^*-A)f^*\|_{C^0(\overline{T}_0)} \le$$
$$\le C\|(v^*-A)\|_{C^0(\overline{T}_0)}\|f^*\|_{C^0(\overline{T}_0)} \le C\|v^*-A\|_{0,T_0}\|f^*\|_{C^{n-1}(\overline{T}_0)}\,.$$

V poslední nerovnosti jsme užili Lemma 16.4 a skutečnost, že $f^* \in C^n(\overline{T}_0)$. Protože $v^*-A \in \mathcal{P}_2(n)$, z předpokladu (16.54) plyne

$$E^*((v^*-A)f^*) = 0 \quad \forall f^* \in \mathcal{P}_2(n-2)\,.$$

Užijeme-li Lemma 4.4, kde nyní $F(f^*) = E^*((v^*-A)f^*)$ s pevným v^*-A, dostaneme z posledních dvou vztahů

$$|E^*((v^*-A)f^*)| \le C\|v^*-A\|_{0,T_0}|f^*|_{C^{n-1}(\overline{T}_0)}$$

a tím spíše

$$|E^*((v^*-A)f^*)| \le C\|v^*-A\|_{1,T_0}|f^*|_{C^{n-1}(\overline{T}_0)}\,.$$

Poincaréova nerovnost (viz (2.30)) a vztah (16.65) implikují

$$\|v^*-A\|_{1,T_0} \le C|v^*-A|_{1,T_0} = C|v^*|_{1,T_0}\,.$$

Odtud podle (14.23) a (14.44)

$$|E^*((v^*-A)f^*)| \le Ch_T^n(\mathrm{mes}_2 T)^{-1/2}|v|_{1,T}|f|_{C^{n-1}(\overline{T})}\,. \tag{16.68}$$

Zkombinujeme-li (16.64), (16.67) a (16.68) s (16.62) a užijeme-li vztahy (14.14) a (14.15), dostaneme (16.55) v případě $n \ge 2$. □

16.10. Věta. *Nechť forma $a(v,w)$, která je definována vztahem (16.16), je V-eliptická. Nechť*

$$f \in C^n(\overline{\Omega}), \quad k_{ij} \in C^n(\overline{\Omega}) \quad (i,j = 1,2), \tag{16.69}$$

kde $n \ge 1$ je dané přirozené číslo a $\Omega \subset R^2$ je ohraničená oblast s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Nechť formy $L_h(v)$ a $a_h(v,w)$, které jsou definovány vztahy (16.14) a (16.17), jsou vypočteny kvadraturními formulemi (16.9) stupně přesnosti $d = 2n-2$. Nechť $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$ je přesné řešení Problému 6.2 (které existuje právě jedno - viz kapitolu 7). Potom pro každou triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$, kde $h \in (0,h_0)$, platí

$$\|u-u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \le Ch^n\left\{\|f\|_{C^n(\overline{\Omega})} + \|u\|_{n+1,\Omega}\left(1+\max_{i,j=1,2}\|k_{ij}\|_{C^n(\overline{\Omega})}\right)\right\}, \tag{16.70}$$

kde $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ je jediné řešení Problému 16.1 definované na triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$ a kde konstanta C nezávisí na $\mathcal{T}_h$, h, u, f a k_{ij}.

Důkaz. A) V-elipticita bilineární formy $a(v,w)$ a předpoklad (16.69) zaručují, že podmínky věty 7.3 jsou splněny. Tedy řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ (a podle předpokladu dokonce $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$) Problému 6.2 existuje právě jedno.

Podle věty 16.7 jsou bilineární formy $a_h(v,w)$ stejnoměrně V_h-eliptické pro $h \in (0,h_0)$. Tedy stejně jako v důkazu věty 10.3 lze dokázat, že existuje právě jedno řešení $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ Problému 16.1, které je definováno na triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$.

Zcela stejným způsobem lze ukázat, že všechny podmínky věty 16.3 o abstraktním odhadu chyby jsou splněny; platí tedy nerovnost (16.25).

B) Zbývá odhadnout pravou stranu nerovnosti (16.25). Nechť $I_h^{(n)}u \in W_h^{(n)}$ je $X_h^{(n)}$-interpolant řešení $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$, tj. funkce, která náleží do $W_h^{(n)}$ a splňuje vztahy $(I_h^{(n)}u)(P_i) = u(P_i)$ pro všechny uzlové body P_i triangulace $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$. Potom podle věty 8.4, což je důsledek věty 15.1, platí

$$\inf_{v\in W_h^{(n)}} \|u-v\|_{1,\Omega} \le \|u - I_h^{(n)}u\|_{1,\Omega} \le Ch^n|u|_{n+1,\Omega}\,. \tag{16.71}$$

Podle (16.38) a Lemmatu 16.9 dostaneme pro $w \in X_h^{(n)}$

$$|L(w) - L_h(w)| \le Ch^n \|f\|_{C^n(\overline{\Omega})} \sum_{\overline{T}\in\mathcal{T}_h} (\mathrm{mes}_2 T)^{1/2}\|w\|_{1,T}\,.$$

Tento odhad a Cauchyova nerovnost implikují

$$|L(w) - L_h(w)| \le Ch^n (\mathrm{mes}_2\Omega)^{1/2}\|f\|_{C^n(\overline{\Omega})}\|w\|_{1,\Omega}\,,$$

odkud

$$\sup_{\substack{w\in V_h^{(n)}\\ w\neq 0}} \frac{|L(w)-L_h(w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} \le Ch^n(\mathrm{mes}_2\Omega)^{1/2}\|f\|_{C^n(\overline{\Omega})}\,. \tag{16.72}$$

Kvůli stručnosti položme

$$B_n = \max_{i,j=1,2} \|k_{ij}\|_{C^n(\overline{\Omega})}\,.$$

Potom podle (16.39) a Lemmatu 16.8 platí

$$|a(I_h^{(n)}u, w) - a_h(I_h^{(n)}u, w)| \le CB_nh^n \sum_{\overline{T}\in\mathcal{T}_h} \|I_h^{(n)}u\|_{n,T}\|w\|_{1,T}\,.$$

Věta 15.1 implikuje

$$\|I_h^{(n)}u\|_{n,T} \le \|u\|_{n,T} + \|u - I_h^{(n)}u\|_{n,T} \le C\|u\|_{n+1,T}$$

a z Cauchyovy nerovnosti potom plyne

$$\sum_{\overline{T}\in\mathcal{T}_h} \|I_h^{(n)}u\|_{n,T}\|w\|_{1,T} \le C\|u\|_{n+1,\Omega}\|w\|_{1,\Omega}\,.$$

Tedy platí

$$\inf_{v\in W_h^{(n)}} \sup_{\substack{w\in V_h^{(n)}\\ w\neq 0}} \frac{|a(v,w)-a_h(v,w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} \le CB_nh^n\|u\|_{n+1,\Omega}\,. \tag{16.73}$$

Zkombinujeme-li odhady (16.71) – (16.73) s nerovností (16.25), dostaneme odhad (16.70), což jsme chtěli dokázat. ☐

16.11. Věta. *Nechť jsou splněny všechny předpoklady Věty 16.10 s výjimkou $u \in W_2^{n+1}(\Omega)$. Nechť funkce $\overline{u}$, která definuje Dirichletovu okrajovou podmínku v Problému 6.2 je tak hladká, že existuje taková funkce $z \in W_2^2(\Omega)$, že $\gamma z = \overline{u}$. Potom*

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} = 0\,, \tag{16.74}$$

kde $u \in W_2^1(\Omega)$ je jediné řešení Problému 6.2 a $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ jediné řešení Problému 16.1 definované na triangulaci $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$.

Podobně jako v případě Věty 11.3 důkaz vynecháváme a odkazujeme na monografii [Že2, důkaz věty 11.9].

17. Teorie numerické integrace v případě nehomogenní Neumannovy okrajové podmínky

Budeme předpokládat, že existuje konečná množina úseček $\{\overline{S}_1, \overline{S}_2, \dots, \overline{S}_r\}$, že (viz Obr.17.1)

$$\overline{\Gamma}_2 = \bigcup_{k=1}^{r} \overline{S}_k, \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad (i \neq j), \tag{17.1}$$

kde S_k je vnitřek úsečky $\overline{S}_k$ $(k = 1, \dots, r)$.

Obr. 17.1

17.1. Definice. Označení

$$q \in PC^n(\Gamma_2) \tag{17.2}$$

bude znamenat toto: Derivace $\widetilde{q}_k^{(j)}(s)$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ funkce

$$\widetilde{q}_k(s) := q\left(\hat{x}_1^k + \frac{\hat{x}_2^k - \hat{x}_1^k}{\overline{s}_k} s, \hat{y}_1^k + \frac{\hat{y}_2^k - \hat{y}_1^k}{\overline{s}_k} s\right), \tag{17.3}$$

kde $[\hat{x}_1^k, \hat{y}_1^k]$, $[\hat{x}_2^k, \hat{y}_2^k]$ jsou koncové body úsečky $\overline{S}_k$ a $\overline{s}_k = \mathrm{mes}_1 \overline{S}_k$, jsou spojité v $(0, \overline{s}_k)$ a platí

$$\left| \lim_{s \to 0+} \widetilde{q}_k^{(j)}(s) \right| < \infty\,, \quad \left| \lim_{s \to \overline{s}_k -} \widetilde{q}_k^{(j)}(s) \right| < \infty\,,$$

kde $j = 0, 1, \dots, n$.

Jestliže položíme pro $j = 0, 1, \dots, n$

$$\widetilde{q}_k^{(j)}(0) = \lim_{s \to 0+} \widetilde{q}_k^{(j)}(s), \quad \widetilde{q}_k^{(j)}(\overline{s}_k) = \lim_{s \to \overline{s}_k -} \widetilde{q}_k^{(j)}(s)\,,$$

potom můžeme psát

$$\widetilde{q}_k \in C^n(\langle 0; \overline{s}_k \rangle) \quad (k = 1, \dots, r)\,. \tag{17.4}$$

Toto je význam předpokladu (17.2).

17.2. Poznámka. a) Symbol PC je zkratka anglického "piecewise continuous" (česky: po částech spojitá).

b) Norma funkce $q \in PC^n(\Gamma_2)$ může být definována vztahem

$$\|q\|_{PC^n(\Gamma_2)} := \max_{k=1,\dots,r} \max_{j=0,\dots,n} \max_{s\in\langle 0;\overline{s}_k\rangle} |\widetilde{q}_k^{(j)}(s)| . \tag{17.5}$$

c) Jestliže $P_k = \overline{S}_i \cap \overline{S}_j$, potom uzlový bod P_k má dva lokální významy na Γ_2: $P_k = P_m^i$ a $P_k = P_s^j$. V tomto případě neexistuje hodnota $q(P_k)$ a hodnoty $q(P_m^i)$ a $q(P_s^j)$ definujeme pomocí odpovídajících hodnot funkcí $\widetilde{q}_i$ a $\widetilde{q}_j$ (viz (17.3), (17.4) a Obr. 17.1).

Nechť $\mathcal{T}_h$ je daná triangulace oblasti $\overline{\Omega}$ a nechť

$$\mathcal{M}_h = \{\overline{T}_i \in \mathcal{T}_h : \ \mathrm{mes}_1(\partial T_i \cap \Gamma_2) > 0\}. \tag{17.6}$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat jenom takové triangulace $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$, že $\overline{T}_i \in \mathcal{M}_h$ má pouze jednu stranu společnou s $\overline{\Gamma}_2$.

Nechť $\overline{T}_i \in \mathcal{M}_h$ je libovolný hraniční trojúhelník. Potom existuje taková úsečka $\overline{S}_k$, že $l_i \subset \overline{S}_k$, kde značíme

$$l_j := \partial T_j \cap \Gamma_2 \quad \forall \overline{T}_j \in \mathcal{M}_h . \tag{17.7}$$

Položme

$$q_i(\tau) := q\left(x_1^i + \frac{x_2^i - x_1^i}{\mathrm{mes}_1 l_i}\tau, y_1^i + \frac{y_2^i - y_1^i}{\mathrm{mes}_1 l_i}\tau\right), \tag{17.8}$$

kde $0 \le \tau \le \mathrm{mes}_1 l_i$ a $[x_1^i, y_1^i]$, $[x_2^i, y_2^i]$ jsou koncové body úsečky l_i. Inkluse $l_i \subset \overline{S}_k$ zaručuje existenci takové hodnoty s_1, že

$$x_1^i = \hat{x}_1^k + \frac{\hat{x}_2^k - \hat{x}_1^k}{\overline{s}_k} s_1 , \quad y_1^i = \hat{y}_1^k + \frac{\hat{y}_2^k - \hat{y}_1^k}{\overline{s}_k} s_1 .$$

Tato skutečnost a identity

$$\frac{\hat{x}_2^k - \hat{x}_1^k}{\overline{s}_k} = \frac{x_2^i - x_1^i}{\mathrm{mes}_1 l_i} , \quad \frac{\hat{y}_2^k - \hat{y}_1^k}{\overline{s}_k} = \frac{y_2^i - y_1^i}{\mathrm{mes}_1 l_i}$$

implikují

$$q_i(\tau) = \widetilde{q}_k(s_1 + \tau) \quad (0 \le \tau \le \mathrm{mes}_1 l_i) . \tag{17.9}$$

Pro stručnost označme seminormu funkce $\widetilde{q}$ v $PC^n(\Gamma_2)$ symbolem

$$\widetilde{K}_n := \max_{k=1,\dots,r} \max_{s\in\langle 0;\overline{s}_k\rangle} |\widetilde{q}_k^{(n)}(s)| . \tag{17.10}$$

Potom podle (17.9)

$$\max_{\tau\in\langle 0;\mathrm{mes}_1 l_i\rangle} |q_i^{(n)}(\tau)| \le \widetilde{K}_n \quad \forall \overline{T}_i \in \mathcal{M}_h . \tag{17.11}$$

Dále uvažujme zobrazení

$$\left.\begin{aligned} x = \varphi_i^*(t) &\equiv x_1^i + (x_2^i - x_1^i)t \\ y = \psi_i^*(t) &\equiv y_1^i + (y_2^i - y_1^i)t \end{aligned}\right\} \quad (0 \le t \le 1) , \tag{17.12}$$

které transformuje úsečku $I = \langle 0; 1\rangle$ vzájemně jednoznačně na úsečku l_i, a definujme funkci

$$q_i^*(t) := q(\varphi_i^*(t), \psi_i^*(t)), \quad t \in I . \tag{17.13}$$

Porovnáme-li (17.8) se (17.12), (17.13), nalezneme, že

$$q_i^*(t) = q_i(t\,\mathrm{mes}_1 l_i), \quad t \in I .$$

Odtud

$$\max_{t\in I}|q_i^{*(n)}(t)| = (\mathrm{mes}_1 l_i)^n \max_{s\in\langle 0;\mathrm{mes}_1 l_i\rangle} |q_i^{(n)}(s)|\,. \tag{17.14}$$

Vztahy (17.1) – (17.14) spolu s inklusí

$$\overline{S}_i \cap \overline{S}_j \subset \sigma_h \quad (i \neq j)\,,$$

kde σ_h je množina všech uzlových bodů v triangulaci $\mathcal{T}_h$, obsahují všechny předpoklady a pomocné výsledky týkající se funkce q, které budou potřebné v této kapitole.

Uvažujme nějakou integrační formuli na úsečce I

$$\int_0^1 G^*(t)\mathrm{d}t \doteq \sum_{j=1}^{J} \beta_j^* G^*(t_j)\,, \tag{17.15}$$

kde β_j^* jsou koeficienty a t_j integrační body formule. Podle definice křivkového integrálu platí

$$\int_{l_i} F(x,y)\mathrm{d}s = \mathrm{mes}_1 l_i \int_0^1 F(\varphi_i^*(t),\psi_i^*(t))\mathrm{d}t\,. \tag{17.16}$$

Vztahy (17.15) a (17.16) implikují

$$\int_{l_i} F(x,y)\mathrm{d}s \doteq \sum_{j=1}^{J} \beta_j^i F(B_j^i)\,, \tag{17.17}$$

kde

$$\beta_j^i = (\mathrm{mes}_1 l_i)\beta_j^*\,, \quad B_j^i = [\varphi_i^*(t_j),\psi_i^*(t_j)]\,. \tag{17.18}$$

Uvedeme dva příklady: v případě jednobodové formule platí

$$J=1, \quad \beta_1^*=1 \quad t_1=\frac{1}{2}, \quad \beta_1^i = \mathrm{mes}_1 l_i, \quad B_1^i = P_0^i\,,$$

kde P_0^i je půlicí bod úsečky l_i, a v případě lichoběžníkové formule

$$J=2, \quad \beta_j^*=\frac{1}{2}, \quad t_1=0, \quad t_2=1, \quad \beta_j^i=\frac{1}{2}\mathrm{mes}_1 l_i, \quad B_j^i=P_j^i \quad (j=1,2)\,,$$

kde P_1^i, P_2^i jsou koncové body úsečky l_i.

Protože $\overline{\Gamma}_2$ je sjednocení úseček l_i, aproximace $L_h^\Gamma(w)$ lineární formy $L^\Gamma(w)$, kde $w \in V_h$, je tvaru

$$L_h^\Gamma(w) = \sum_{\overline{T}_i\in\mathcal{M}_h} \sum_{j=1}^{J} \beta_j^i q(B_j^i) w(B_j^i)\,. \tag{17.19}$$

Je třeba poznamenat, že v případech $B_j^i \in \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$ a $B_j^i = \overline{S}_k \cap \overline{S}_m$ jsou hodnoty $q(B_j^i)$ definovány ve smyslu Poznámky 17.2c, tj. jako limitní hodnoty funkce $\widetilde{q}_i(s)$ $(s \in (0,\overline{s}_i))$ v odpovídajících koncových bodech úsečky $\langle 0;\overline{s}_i\rangle$.

Podobně jako v kapitole 16 definujeme chybové funkcionály

$$E_{l_i}(F) = \int_{l_i} F(x,y)\mathrm{d}s - \sum_{j=1}^{J} \beta_j^i F(B_j^i)\,, \tag{17.20}$$

$$E_I^*(F_i^*) = \int_0^1 F_i^*(t)\mathrm{d}t - \sum_{j=1}^{J} \beta_j^* F_i^*(t_j)\,, \tag{17.21}$$

kde

$$F_i^*(t) = F(\varphi_i^*(t),\psi_i^*(t)) \quad ((x,y)\in l_i)\,. \tag{17.22}$$

Ze vztahů (17.15) – (17.18) a (17.20) – (17.22) plyne

$$E_{l_i}(qw) = (\mathrm{mes}_1 l_i) E_I^*(q_i^* w_i^*)\,, \tag{17.23}$$

kde funkce $q_i^*(t)$ je dána vztahem (17.13) a kde

$$w_i^*(t) = w(\varphi_i^*(t),\psi_i^*(t)) \quad ((x,y)\in l_i)\,. \tag{17.24}$$

Nyní jsme připraveni dokázat hlavní výsledek této kapitoly.

17.3. Věta. *Nechť platí* (17.2). *Nechť integrační formule na referenční úsečce* $I = \langle 0; 1\rangle$ *je taková, že*

$$E_I^*(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_1(2n-1)\,. \tag{17.25}$$

Potom pro všechna $w \in X_h^{(n)}$ *platí*

$$|E_{l_i}(qw)| \le C\widetilde{K}_n(\mathrm{mes}_1 l_i)^{1/2}h^n\|w\|_{0,l_i}\,, \tag{17.26}$$

takže

$$\sum_{\overline{T}_i\in\mathcal{M}_h} |E_{l_i}(qw)| \le C\widetilde{K}_n(\mathrm{mes}_1\overline{\Gamma}_2)^{1/2}h^n\|w\|_{1,\Omega}\,, \tag{17.27}$$

kde konstanta C *nezávisí na* h *a* w *a veličina* $\widetilde{K}_n$ *je dána vztahem* (17.10).

Důkaz. A) Nejprve poznamenáváme, že

$$\|w_i^*\|_{0,I} = (\mathrm{mes}_1 l_i)^{-1/2}\|w\|_{0,l_i}\,. \tag{17.28}$$

Vztah (17.28) plyne z definice křivkového integrálu:

$$\|w\|_{0,l_i}^2 = \int_{l_i} w^2\mathrm{d}s = \mathrm{mes}_1 l_i \int_0^1 (w_i^*)^2\mathrm{d}t = \mathrm{mes}_1 l_i\|w_i^*\|_{0,I}^2\,.$$

B) Podle (17.21) platí

$$|E_I^*(q_i^*w_i^*)| \le \left(1 + \left|\sum_{j=1}^J \beta_j^*\right|\right)\max_{t\in I}|q_i^*(t)w_i^*(t)| \le$$
$$\le C\max_{t\in I}|q_i^*(t)|\max_{t\in I}|w_i^*(t)| \le C\max_{j=0,\dots,n}\max_{t\in I}|q_i^{*(j)}(t)|\max_{t\in I}|w_i^*(t)|\,.$$

Podobně jako v lemmatu 16.4 lze dokázat

$$\max_{t\in I}|w_i^*(t)| \le C\|w_i^*\|_{0,I} \quad \forall w_i^* \in \mathcal{P}_1(n). \tag{17.29}$$

Odtud

$$|E_I^*(q_i^*w_i^*)| \le C\|w_i^*\|_{0,I}\max_{j=0,\dots,n}\max_{t\in I}|q_i^{*(j)}(t)|\,.$$

Protože podle (17.25) platí

$$E_I^*(q_i^*w_i^*) = 0 \quad \forall q_i^* \in \mathcal{P}_1(n-1)\,,$$

z Bramble-Hilbertova lemmatu 4.4 plyne

$$|E_I^*(q_i^*w_i^*)| \le C\|w_i^*\|_{0,I}\max_{t\in I}|q_i^{*(n)}(t)|\,.$$

Zkombinujeme-li tento výsledek s (17.28), (17.14) a (17.11), dostaneme

$$|E_I^*(q_i^*w_i^*)| \le C\widetilde{K}_n(\mathrm{mes}_1 l_i)^{n-1/2}\|w\|_{0,l_i}\,. \tag{17.30}$$

Vztahy (17.30) a (17.23) implikují odhad (17.26), protože $\mathrm{mes}_1 l_i \le h$.

Sečteme-li (17.26) přes všechna i, pro která $\overline{T}_i \in \mathcal{M}_h$, a užijeme-li Cauchyovu nerovnost (7.23) a "stopovou" nerovnost (2.13), dostaneme (17.27). $\square$

Pomocí věty 17.3 a výsledků uvedených v kapitole 16 snadno získáme následující dvě konvergenční věty 17.4 a 17.5. Připomínáme, že přibližné řešení $u_h^{(n)} \in W_h^{(n)}$ splňuje

$$a_h(u_h^{(n)}, v) = L_h(v) \quad \forall v \in V_h^{(n)}\,, \tag{17.31}$$

kde bilineární forma $a_h(v,w)$ je dána vztahem (16.17) a lineární forma $L_h(v)$ vztahem

$$L_h(v) = L_h^{\Omega}(v) + L_h^{\Gamma}(v)\,. \tag{17.32}$$

Forma $L_h^{\Omega}(v)$ je definovaná pravou stranou vztahu (16.14), tj.

$$L_h^{\Omega}(v) = \sum_{\overline{T}_i\in\mathcal{T}_h}\sum_{i=1}^{I_T}\omega_{i,T}f(B_{i,T})v(B_{i,T})\,,$$

a lineární forma $L_h^{\Gamma}(v)$ vztahem (17.19). Ve shodě s (17.32) označujeme

$$L^{\Omega}(v) := \int_{\Omega} vf\mathrm{d}x\,,\quad L^{\Gamma}(v) := \int_{\Gamma_2} vq\mathrm{d}s\,. \tag{17.33}$$

Poznamenejme, že formy $L^{\Omega}(v)$ a $L_h^{\Omega}(v)$ jsou v kapitole 15 označeny pouze symboly $L(v)$ a $L_h(v)$.

17.4. Věta. *Nechť jsou splněny předpoklady vět* 16.10 *a* 17.3. *Potom*

$$\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega} \le Ch^n\,,$$

kde $u\in W_2^{n+1}(\Omega)$ je jediné řešení Problému 6.2 *a C je konstanta nezávislá na h.*

17.5. Věta. *Nechť jsou splněny předpoklady vět* 16.11 *a* 17.3. *Potom*

$$\lim_{h\to 0+}\|u - u_h^{(n)}\|_{1,\Omega}\,,$$

kde $u\in W_2^1(\Omega)$ je jediné řešení Problému 6.2.

Důkaz obou vět je jednoduchý: opět platí abstraktní odhad chyby (16.25), kde nyní

$$|L(w) - L_h(w)| \le |L^{\Omega}(w) - L_h^{\Omega}(w)| + |L^{\Gamma}(w) - L_h^{\Gamma}(w)|\,.$$

Podle $(17.33)_2$, (17.19) a (17.20) platí

$$|L^{\Gamma}(w) - L_h^{\Gamma}(w)| \le \sum_{\overline{T}_i\in M_h}|E_{l_i}(q_i w)|\,.$$

Tedy z věty 17.3 plyne

$$\sup_{w\in V_h^{(n)}}\frac{|L^{\Gamma}(w) - L_h^{\Gamma}(w)|}{\|w\|_{1,\Omega}} \le C\widetilde{K}_n(\mathrm{mes}_1\Gamma_2)^{1/2}h^n\,.$$

Zbytek důkazu je tentýž jako důkazy vět 16.10 a 16.11. □

18. Trojúhelníkové konečné C^m-prvky

18.1. Lemma. *Nechť $P_i(x_i,y_i)$, $P_j(x_j,y_j)$ jsou dva body v rovině (x,y) a $m\ge 0$, $\lambda\ge 0$ dvě daná celá čísla. Nechť polynom $p(x,y)\in\mathcal{P}_2(n)$, kde*

$$n = 4m + \lambda + 1,$$

splňuje podmínky

$$D^{\alpha}p(P_i) = D^{\alpha}p(P_j) = 0,\quad |\alpha|\le 2m, \tag{18.1}$$

$$\frac{\partial^q p}{\partial\nu^q}(Q_{ij}^{(r,s)}) = 0\quad (r = 1,\dots,s;\ s = \lambda + q;\ q = 0,\dots,m), \tag{18.2}$$

kde $\partial/\partial\nu$ značí derivaci ve směru normály k přímce l určené body P_i, P_j a kde $Q_{ij}^{(1,s)}$, $Q_{ij}^{(2,s)}$, ..., $Q_{ij}^{(s,s)}$ je s bodů, které dělí úsečku P_iP_j na $s+1$ stejných dílů. (V případě $s=0$ je množina těchto bodů prázdná.) Potom v libovolném bodě této přímky platí

$$D^\alpha p(P) = 0 \quad |\alpha| \leq m, \quad P \in l. \tag{18.3}$$

Důkaz. Protože každou z $q+1$ derivací q-tého řádu

$$\frac{\partial^q p}{\partial \nu^q}(x,y),\ \frac{\partial^q p}{\partial \nu^{q-1}\partial\tau}(x,y),\ \ldots,\ \frac{\partial^q p}{\partial \nu\partial\tau^{q-1}}(x,y),\ \frac{\partial^q p}{\partial \tau^q}(x,y), \tag{18.4}$$

kde $\partial/\partial\tau$ značí derivaci ve směru P_iP_j, lze psát ve tvaru lineární kombinace $q+1$ derivací

$$\frac{\partial^q p}{\partial x^q}(x,y),\ \frac{\partial^q p}{\partial x^{q-1}\partial y}(x,y),\ \ldots,\ \frac{\partial^q p}{\partial x\partial y^{q-1}}(x,y),\ \frac{\partial^q p}{\partial y^q}(x,y) \tag{18.5}$$

a naopak každou z $q+1$ derivací (18.5) lze psát ve tvaru lineární kombinace $q+1$ derivací (18.4), vidíme, že stačí dokázat

$$\frac{\partial^{a+b} p}{\partial \nu^a \partial\tau^b}(P) = 0 \quad P \in l; \quad a,b = 0,\ldots,m; \quad 0 \leq a+b \leq m. \tag{18.6}$$

Vyjádřeme přímku l parametricky rovnicemi

$$x = x_i + (x_j - x_i)\tau, \quad y = y_i + (y_j - y_i)\tau \quad (-\infty < \tau < \infty)$$

a definujme pro $a = 0,\ldots,m$ funkce

$$g_a(\tau) = \frac{\partial^a p}{\partial \nu^a}(x,y)\Big|_l = \frac{\partial^a p}{\partial \nu^a}(x_i + (x_j - x_i)\tau, y_i + (y_j - y_i)\tau). \tag{18.7}$$

Každá funkce $g_a(\tau)$ náleží do $\mathcal{P}_1(4m+\lambda+1-a)$. Podle (18.1) a (18.7) platí

$$\frac{\mathrm{d}^k g_a}{\mathrm{d}\tau^k}(0) = \frac{\mathrm{d}^k g_a}{\mathrm{d}\tau^k}(1) = 0 \quad (k = 0,\ldots,2m-a) \tag{18.8}$$

a podle (18.2) a (18.7) platí

$$g_a\Big(\frac{r}{\lambda+a+1}\Big) = 0 \quad (r = 1,\ldots,\lambda+a). \tag{18.9}$$

Podmínky (18.8) a (18.9) jsou hermiteovského typu a jejich celkový počet je $4m+\lambda+2-a$, což je počet koeficientů polynomu $g_a(\tau)$. Tedy podle věty o jednoznačném určení Hermiteova interpolačního polynomu jedné proměnné (která se snadno dokáže pomocí Rolleovy věty) z (18.8) a (18.9) plyne

$$g_a(\tau) \equiv 0 \quad (a = 0,\ldots,m).$$

Diferencujeme-li b-krát tento vztah, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^b g_a}{\mathrm{d}\tau^b}(\tau) \equiv 0 \quad (b = 0,1,2,\ldots). \tag{18.10}$$

Vzhledem k definici (18.7) funkcí $g_a(\tau)$ je však vztah (18.10) pouze jinak zapsaný vztah (18.6). □

18.2. Lemma. *Nechť $P_i(x_i,y_i)$, $P_j(x_j,y_j)$ jsou dva body v rovině (x,y) a $m \geq 0$, $\lambda \geq 0$ dvě daná celá čísla. Nechť polynom $p(x,y) \in \mathcal{P}_2(n)$, kde*

$$n = 4m + \lambda + 3,$$

splňuje podmínky (18.2) a podmínky

$$D^\alpha p(P_i) = D^\alpha p(P_j) = 0, \quad |\alpha| \leq 2m+1\,.$$

Potom v libovolném bodě P přímky l určené body P_i, P_j platí vztah (18.3).

Důkaz probíhá zcela stejně jako důkaz lemmatu 18.1.

18.3. Lemma. *Nechť pro polynom $p(x,y) \in \mathcal{P}_2(n)$ v libovolném bodě přímky l určené body $P_i(x_i,y_i)$, $P_j(x_j,y_j)$ platí vztah (18.3), kde $m < n$. Potom je tento polynom dělitelný funkcí $[f_{ij}(x,y)]^{m+1}$, kde*

$$f_{ij}(x,y) = -(y_j - y_i)(x - x_i) + (x_j - x_i)(y - y_i)\,, \tag{18.11}$$

tj. platí

$$p(x,y) = K[f_{ij}(x,y)]^{m+1} q_{n-m-1}(x,y)\,, \tag{18.12}$$

kde $q_{n-m-1}(x,y) \in \mathcal{P}_2(n-m-1)$ a $K \neq 0$ je konstanta.

Důkaz. Zvolme libovolně, ale pevně bod $P_k = [x_k, y_k]$, který neleží na přímce l. Zaveďme nové proměnné ξ, η rovnicemi (srovnej se (14.1))

$$x = x_i + (x_j - x_i)\xi + (x_k - x_i)\eta, \quad y = y_i + (y_j - y_i)\xi + (y_k - y_i)\eta, \tag{18.13}$$

tj. (srovnej se (14.6))

$$\xi = J_{ijk}^{-1}[-(y_k - y_i)(x - x_i) + (x_k - x_i)(y - y_i)], \quad \eta = J_{ijk}^{-1}[(y_j - y_i)(x - x_i) - (x_j - x_i)(y - y_i)], \tag{18.14}$$

kde

$$J_{ijk} = (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i). \tag{18.15}$$

Definujme polynom $\widetilde{p}(\xi, \eta)$ vztahem

$$\widetilde{p}(\xi, \eta) = p(x_i + (x_j - x_i)\xi + (x_k - x_i)\eta, y_i + (y_j - y_i)\xi + (y_k - y_i)\eta). \tag{18.16}$$

Ze vztahů (18.3), (18.16) a toho, že parametrické rovnice přímky l jsou tvaru $x = x_i + (x_j - x_i)\xi,\ y = y_i + (y_j - y_i)\xi$, plyne

$$D^\alpha \widetilde{p}(\xi, 0) = 0\,, \quad |\alpha| \le m. \tag{18.17}$$

Polynom $\widetilde{p}(\xi, \eta)$ může být psán ve tvaru

$$\widetilde{p}(\xi, \eta) = \eta \widetilde{q}_{n-1}(\xi, \eta) + \widetilde{r}_n(\xi)\,, \tag{18.18}$$

kde $\widetilde{q}_{n-1}(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_2(n-1)$ a $\widetilde{r}_n(\xi) \in \mathcal{P}_1(n)$ je ta část polynomu $\widetilde{p}(\xi, \eta)$, která nezávisí na η. Jestliže aplikujeme rovnici (18.17) s $|\alpha| = 0$ na rovnici (18.18), vidíme, že platí $\widetilde{r}_n(\xi) \equiv 0$, tj.

$$\widetilde{p}(\xi, \eta) = \eta \widetilde{q}_{n-1}(\xi, \eta)\,. \tag{18.19}$$

Předpokládejme, že pro libovolné $\kappa \le m$ platí

$$\widetilde{p}(\xi, \eta) = \eta^\kappa \widetilde{q}_{n-\kappa}(\xi, \eta)\,, \tag{18.20}$$

kde $\widetilde{q}_{n-\kappa}(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_2(n - \kappa)$. Z rovnic (18.17) a (18.20) plyne

$$\widetilde{q}_{n-\kappa}(\xi, 0) = \frac{1}{\kappa!} \frac{\partial^\kappa}{\partial \eta^\kappa} \big(\eta^\kappa \widetilde{q}_{n-\kappa}(\xi, \eta)\big)\Big|_{\eta=0} = 0\,. \tag{18.21}$$

Položme

$$\widetilde{q}_{n-\kappa}(\xi, \eta) = \eta \widetilde{q}_{n-\kappa-1}(\xi, \eta) + \widetilde{r}_{n-\kappa}(\xi)\,, \tag{18.22}$$

kde $\widetilde{q}_{n-\kappa-1}(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_2(n - \kappa - 1)$ a $\widetilde{r}_{n-\kappa}(\xi) \in \mathcal{P}_1(n - \kappa)$ je ta část polynomu $\widetilde{q}_{m-\kappa}(\xi, \eta)$, která nezávisí na η. Z rovnic (18.21) a (18.22) plyne

$$\widetilde{q}_{n-\kappa}(\xi, \eta) = \eta \widetilde{q}_{n-\kappa-1}(\xi, \eta)\,. \tag{18.23}$$

Z rovnice (18.19), předpokladu (18.20) a výsledku (18.23) nyní pomocí matematické indukce dostáváme

$$\widetilde{p}(\xi, \eta) = \eta^{m+1} \widetilde{q}_{n-m-1}(\xi, \eta)\,. \tag{18.24}$$

Podle (18.11) a (18.14) platí

$$\eta = J_{ijk}^{-1} f_{ij}(x, y), \tag{18.25}$$

Položíme-li $K = J_{ijk}^{-m-1}$ a užijeme-li transformaci (18.14), potom ze vztahů (18.16), (18.24) a (18.25) plyne vztah (18.12). $\square$

18.4. Věta. *Nechť $\overline{T}$ je trojúhelník s vrcholy P_1, P_2, P_3 a těžištěm P_0. Nechť $m \geq 0$ a κ, kde $1 \leq \kappa \leq 4$, jsou daná celá čísla. Potom existuje právě jeden polynom $p(x, y) \in \mathcal{P}_2(4m + \kappa)$, který nabývá daných hodnot*

$$D^\alpha p(P_k)\,, \quad k = 1, 2, 3\,, \tag{18.26}$$

$$D^\beta p(P_0)\,, \tag{18.27}$$

$$\frac{\partial^q p}{\partial \nu_{ij}^q}(Q_{ij}^{(r,s)}) \quad (i < j,\ i, j = 1, 2, 3;\ r = 1, \dots, s), \tag{18.28}$$

kde $\partial/\partial\nu_{ij}$ značí derivaci podle normály ke straně P_iP_j, kde body $Q_{ij}^{(r,s)}$ mají stejný význam jako v lemmatu 18.1 *a kde indexy α, β, q, s jsou určeny pomocí* (18.29$_\kappa$)*:*

$$|\alpha| \leq 2m, \quad |\beta| \leq m - 2, \quad q = s = 1, \dots, m, \tag{18.29$_1$}$$

$$|\alpha| \leq 2m, \quad |\beta| \leq m - 1, \quad q = s - 1,\ s = 1, \dots, m + 1, \tag{18.29$_2$}$$

$$|\alpha| \leq 2m + 1, \quad |\beta| \leq m, \quad q = s = 1, \dots, m, \tag{18.29$_3$}$$

$$|\alpha| \leq 2m + 1, \quad |\beta| \leq m + 1, \quad q = s - 1,\ s = 1, \dots, m + 1\,. \tag{18.29$_4$}$$

Poznamenejme, že ve čtyřech speciálních případech některé z předpisů (18.29$_\kappa$) ztrácejí smysl; potom tyto podmínky neuvažujeme a nic nepředpisujeme. Tzn. že v případě $n = 1$ nepředpisujeme nic v těžišti a na stranách trojúhelníku, v případech $n = 2$ a $n = 5$ nepředpisujeme nic v těžišti a v případě $n = 3$ nic na stranách trojúhelníku.

Pro lepší orientaci čtenáře jsou polynomy prvního až devátého stupně hierarchie popsané ve větě 18.4 znázorněny na Obr. 18.1. Na těchto obrázcích tučným bodem značíme, že v daném uzlovém bodě je předepsána funkční hodnota, číslem k v kroužku značíme, že v daném bodě (tj. středu tohoto kroužku, který je totožný buď s některým vrcholem trojúhelníku, nebo těžištěm trojúhelníku) je předepsána funkční hodnota a všechny parciální derivace až do k-tého řádu včetně, tj. celkem $(k + 1)(k + 2)/2$ hodnot. Konečně jednoduchou, resp. dvojitou šipkou značíme, že v počátečním bodě této šipky je předepsána první, resp. druhá derivace ve směru této šipky (tj. první, resp. druhá derivace podle normály).

OBR. 18.1

Polynom 2. stupně hierarchie popsané ve větě 18.4 začal v aplikacích metody konečných prvků první užívat Veubecke [Ve], polynom 3. stupně této hierarchie publikoval jako první Holand [Ho] a polynom 5. stupně téměř současně publikovali Argyris, Fried a Scharpf [AFS], Bell [Be], Bosshard [Bo], Visser [Vi] a Zlámal [Zl]. Práce [Zl] je teoretické povahy a je v ní dokázána konvergence metody konečných prvků při užití polynomů 2., 3. a 5. stupně na oblasti s polygonální hranicí. Analýzou důkazových metod užitých v [Zl] a rozborem podmínek, které jednoznačně určují do té doby známé polynomy, sestrojil Ženíšek [Že1] hierarchii popsanou ve větě 18.4.

Důkaz věty 18.4. Větu dokážeme v případě $\kappa = 1$, tj.

$$n = 4m + 1\,. \tag{18.30}$$

Nejprve se přesvědčíme, že celkový počet parametrů (18.26) – (18.28) je roven počtu součinitelů úplného polynomu n-tého stupně dvou proměnných, tj. $(n+1)(n+2)/2$. Počet parametrů (18.26) předepsaných v jednom vrcholu P_k je

$$V = (2m+1)(2m+2)/2,$$

počet parametrů (18.27) je

$$T = (m-1)m/2$$

a počet parametrů (18.28) předepsaných na jedné straně P_iP_j je

$$S = m(m+1)/2.$$

Celkový počet parametrů (18.26) – (18.28) tedy je, jak se můžeme přesvědčit snadným výpočtem,

$$3(V+S) + T = (4m+2)(4m+3)/2,$$

což lze psát vzhledem k (18.30) ve tvaru

$$3(V+S) + T = (n+1)(n+2)/2,$$

což jsme chtěli ověřit. Abychom dokázali, že parametry (18.26) – (18.28) jednoznačně určují polynom $p(x,y) \in \mathcal{P}_2(n)$, stačí dokázat, že z podmínek

$$D^\alpha p(P_k) = 0 \quad (|\alpha| \le 2m), \qquad \frac{\partial^q p}{\partial \nu_{ij}^q}(Q_{ij}^{(r,s)}) = 0, \tag{18.31}$$

$$D^\alpha p(P_0) = 0 \quad (|\alpha| \le m-2), \tag{18.32}$$

kde význam i, j, k, q, r, s je stejný jako v (18.26) – (18.28), plyne

$$p(x,y) \equiv 0\,. \tag{18.33}$$

Zaveďme ve shodě s lemmatem 18.3 lineární funkce

$$\begin{aligned} f_{12}(x,y) &= -(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1),\\ f_{13}(x,y) &= -(y_3 - y_1)(x - x_1) + (x_3 - x_1)(y - y_1),\\ f_{23}(x,y) &= -(y_3 - y_2)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2). \end{aligned} \tag{18.34}$$

Je-li $n = 1$ (tj. $m = 0$), potom podle lemmat 18.1 a 18.3 z (18.31) plyne, že polynom $p(x,y)$ je dělitelný polynomem 3. stupně $f_{12}f_{13}f_{23}$, což je možné jedině tehdy, platí-li (18.33).

Je-li $n = 5$ (tj. $m = 1$), potom podle lemmat 18.1 a 18.3 z (18.31) plyne, že polynom $p(x,y)$ je dělitelný polynomem 6. stupně $(f_{12}f_{13}f_{23})^2$, což je možné jedině tehdy, platí-li (18.33).

Nechť nyní $n \ne 1$, $n \ne 5$ (tj. $m \ge 2$). Ze vztahů (18.31) podle lemmat 18.1, 18.3 plyne, že

$$p(x,y) = K[f_{12}(x,y)f_{13}(x,y)f_{23}(x,y)]^{m+1}q(x,y) \quad (K \ne 0), \tag{18.35}$$

kde $q(x,y) \in \mathcal{P}_2(m-2)$, tj.

$$q(x,y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + \cdots + b_My^{m-2} \quad (M = (m-1)m/2). \tag{18.36}$$

Označme souřadnice těžiště P_0 symboly x_0, y_0. Protože bod $[x_0, y_0]$ neleží na žádné ze tří přímek P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3, platí podle (18.34)

$$f_{12}(x_0,y_0)f_{13}(x_0,y_0)f_{23}(x_0,y_0) \neq 0\,. \tag{18.37}$$

Z (18.32), kde $|\alpha| = 0$, plyne podle (18.35) a (18.37)

$$q(x_0,y_0) = 0\,. \tag{18.38}$$

Předpokládejme, že pro celé číslo k splňující nerovnost $0 \leq k < m-2$ platí

$$D^\alpha q(x_0,y_0) = 0\,, \quad |\alpha| \leq k\,. \tag{18.39}$$

Potom z (18.32), kde $|\alpha| = k+1$, plyne snadno pomocí (18.35), (18.37) a (18.39)

$$D^\alpha q(x_0,y_0) = 0\,, \quad |\alpha| \leq k+1\,. \tag{18.40}$$

Z výsledku (18.38), předpokladu (18.39) a jeho důsledku (18.40) matematickou indukcí plyne

$$D^\alpha q(x_0,y_0) = 0\,, \quad |\alpha| \leq m-2\,. \tag{18.41}$$

Z (18.41) pro $|\alpha| = m-2$ plyne, že součinitelé b_k, které vystupují v (18.36), jsou rovny nule u členů x^iy^j, pro něž $i+j = m-2$: podle (18.41) je totiž

$$\frac{\partial^{m-2}q}{\partial y^{m-2}}(x_0,y_0) = (m-2)!b_M = 0, \qquad \frac{\partial^{m-2}q}{\partial x\partial y^{m-3}}(x_0,y_0) = (m-3)!b_{M-1} = 0, \quad \text{atd.}$$

Odtud a z (18.41), kde $|\alpha| = m-3$, plyne, že součinitelé b_k u členů x^iy^j, pro něž $i+j = m-3$, jsou rovny nule. Postupujeme-li tak dále, tj. užíváme-li předchozích výsledků a (18.41), kde postupně uvažujeme $|\alpha| = m-4, \ldots, 2, 1, 0$, zjistíme, že $q(x,y) \equiv 0$. Odtud podle (18.35) plyne (18.33). □

V následující větě užijeme tohoto způsobu značení: Symbolem A budeme značit celkový počet vrcholů trojúhelníků v dané triangulaci $\mathcal{T}_h$ ohraničené uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$, symbolem B celkový počet úseček v $\mathcal{T}_h$ (tj. stran trojúhelníků) a symbolem D celkový počet trojúhelníků. Vrcholy označíme symboly $P_1, P_2, \ldots, P_A$, úsečky symboly $l_1, l_2, \ldots, l_B$ a těžiště trojúhelníků symboly $R_1, R_2, \ldots, R_D$.

Obr. 18.2

Body, které dělí úsečku l_j na $s+1$ stejných dílů budeme značit $Q_j^{(1,s)}, Q_j^{(2,s)}, \ldots, Q_j^{(s,s)}$. Jednotkové normály ν_j k úsečkám l_j budeme orientovat podle tohoto pravidla: Jsou-li P_m, P_r, kde $m < r$, koncové body úsečky l_j, potom díváme-li se ve směru normály ν_j, vidíme bod P_r napravo od bodu P_m (viz Obr. 18.2).

18.5. Věta. *Nechť $\mathcal{T}_h$ je daná triangulace ohraničené uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ s polygonální hranicí $\partial\Omega$. Nechť $m \geq 0$ a κ, kde $1 \leq \kappa \leq 4$, jsou daná celá čísla. Potom existuje právě jedna funkce $w(x, y)$, která je m-krát spojitě diferencovatelná na $\overline{\Omega}$, na každém trojúhelníku $\overline{T}_k \in \mathcal{T}_h$ $(k = 1, \ldots, D)$ je restrikcí polynomu z $\mathcal{P}_2(4m+\kappa)$ a v uzlových bodech triangulace nabývá předepsaných hodnot*

$$D^\alpha w(P_i) \quad (i = 1, \ldots, A), \tag{18.42}$$

$$\frac{\partial^q w}{\partial \nu_j^q}(Q_j^{(r,s)}) \quad (j = 1, \ldots, B;\ r = 1, \ldots, s), \tag{18.43}$$

$$D^\beta w(R_k) \quad (k = 1, \ldots, D), \tag{18.44}$$

kde indexy α, β, q, s jsou určeny podle (18.29_κ).

Důkaz. Z věty 18.4 plyne, že funkce $w(x, y)$ je na každém trojúhelníku $\overline{T}_k \in \mathcal{T}_h$ $(k = 1, \ldots, D)$ jednoznačně určena těmi hodnotami (18.42) – (18.44), které příslušejí trojúhelníku $\overline{T}_k$. Z lemmatu 18.1, resp. 18.2 potom plyne, že hodnoty

$$D^\alpha w(P), \quad |\alpha| \leq m, \quad P \in l_j \quad (j = 1, \ldots, B)$$

jsou jednoznačně určeny hodnotami (18.42) a (18.43), které jsou předepsány pouze na úsečce l_j. $\square$

Právě uvedené trojúhelníkové konečné C^m-elementy mají aplikace v přibližném řešení okrajových problémů eliptických parciálních diferenciálních rovnic řádu $2(m + 1)$. Praktický význam mají C^1-elementy při přibližném řešení průhybu tenkých desek. Modelovým problémem ohybu vetknuté tenké desky je Dirichletův okrajový problém biharmonické rovnice:

$$\Delta^2 w(x, y) = f(x, y) \quad \forall [x, y] \in \Omega, \tag{18.45}$$

$$w(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \forall [x, y] \in \partial\Omega. \tag{18.46}$$

Tomuto okrajovému problému odpovídá tento variační problém (jeho odvození z okrajového problému (18.45), (18.46) pomocí několikerého užití Greenovy věty je uvedeno v [Re, str. 279 – 283]):

18.6. Problém. Nechť

$$V = \{v \in W_2^2(\Omega) :\ v = \partial v/\partial x = \partial v/\partial y = 0 \text{ na } \partial\Omega\}. \tag{18.47}$$

Najít funkci $w \in V$, pro kterou platí

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Omega v f \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \forall v \in V. \tag{18.48}$$

Má-li oblast $\overline{\Omega}$ polygonální hranici, potom vzhledem k větám 1.18 a 18.5 lze užít k přibližnému řešení problému 18.6 trojúhelníkové C^1-prvky (podrobnosti lze najít v [KKLŽ]).

Důkaz konvergence metody konečných prvků je opět založen na interpolačním teorému, který ve tvaru věty 18.7 byl dokázán v [BZ]:

18.7. Věta. *Nechť $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$. Nechť $u \in W_2^k(\Omega)$, kde $2m+2 \leq k \leq 4m+2$ a nechť $u_I \in \mathcal{P}_2(4m+1)$ je interpolační polynom funkce u jednoznačně určený podmínkami*

$$D^\alpha u_I(P_k) = D^\alpha u(P_k)\,, \quad |\alpha| \leq 2m \quad (k = 1, 2, 3)\,, \tag{18.49}$$

$$D^\beta u_I(P_0) = D^\beta u(P_0)\,, \quad |\beta| \leq m - 2\,, \tag{18.50}$$

$$\frac{\partial^q u_I}{\partial \nu_{ij}^q}(Q_{ij}^{(r,s)}) = \frac{\partial^q u}{\partial \nu_{ij}^q}(Q_{ij}^{(r,s)}) \quad (i < j,\ i, j = 1, 2, 3;\ r = 1, \ldots, s), \tag{18.51}$$

kde indexy α, β, q, s jsou určeny pomocí (18.29_1). Potom pro $0 \leq p \leq k$ platí

$$\|u - u_I\|_{p,T} \leq \frac{C}{(\sin \vartheta_T)^p} h_T^{k-p} |u|_{k,T}, \tag{18.52}$$

kde ϑ_T je nejmenší úhel trojúhelníku $\overline{T}$ a kde konstanta C nezávisí na $\overline{T}$ a funkci u.

19. Metoda konečných prvků v oblastech s nepolygonální hranicí

V této kapitole se omezíme na aproximaci dané oblasti Ω oblastí Ω_h s polygonální hranicí $\partial\Omega_h$. O samotné oblasti Ω budeme předpokládat, že má lipschitzovskou hranici ve smyslu poznámky 2.2 a že se skládá z konečného počtu hladkých oblouků, které jsou třídy C^2 (tj. funkce vystupující v parametrickém vyjádření $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ příslušného oblouku mají spojité všechny derivace alespoň do druhého řádu včetně).

Aproximující oblast Ω_h je přitom taková, že všechny vrcholy (rohy) její hranice $\partial\Omega_h$ leží na $\partial\Omega$, přičemž každá úsečka, která je částí $\partial\Omega_h$ je stranou nějakého trojúhelníku $\overline{T}$, který náleží do triangulace $\mathcal{T}_h$ uzavřené oblasti $\overline{\Omega}_h$. Konečně předpokládáme, že každý roh hranice $\partial\Omega$ (tj. bod, ve kterém se stýkají dva hladké oblouky patřící $\partial\Omega$) je vrcholem $\partial\Omega_h$, a tedy uzlovým bodem triangulace $\mathcal{T}_h$. Podobně uzlovými body $\mathcal{T}_h$ jsou body, ve kterých se stýkají části $\overline{\Gamma}_1$ a $\overline{\Gamma}_2$ hranice $\partial\Omega$.

Budeme opět aproximovat okrajový problém (6.1) – (6.3). Diskrétní schéma vytvoříme ve dvou krocích: Nejprve aproximujeme oblast Ω oblastí Ω_h a pro $v, w \in W_2^1(\Omega_h)$ definujeme

$$\widetilde{a}_h(v,w) := \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega_h} \widetilde{k}_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \,, \tag{19.1}$$

kde $\widetilde{k}_{ij}$ $(i,j = 1,2)$ jsou *prodloužení* funkcí $k_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ (viz definici 19.1), které mají vlastnost

$$\widetilde{k}_{ij} \in C^1(\widehat{\Omega}) \quad (i,j = 1,2), \tag{19.2}$$

přičemž $\widehat{\Omega}$ je uzávěr takové ohraničené oblasti $\widetilde{\Omega}$, že

$$\widetilde{\Omega} \supset \overline{\Omega} \cup \overline{\Omega}_h \quad \forall h \in (0, h_0)\,. \tag{19.3}$$

Vlastnost (19.2) zaručuje věta 19.2. Podobně s pomocí prodloužení $\widetilde{f} \in C^1(\widehat{\Omega})$ funkce $f \in C^1(\overline{\Omega})$ definujeme pro všechna $v \in W_2^1(\Omega_h)$

$$\widetilde{L}_h^{\Omega}(v) := \int_{\Omega_h} v \widetilde{f} \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \tag{19.4}$$

Vrcholy (rohy) polygonu $\partial\Omega_h$ dělí hranici $\partial\Omega$ na konečnou množinu $\{\lambda\}$ hladkých oblouků, z nichž každý je aproximován nějakou úsečkou λ^* patřící do množiny úseček $\{\lambda^*\}$, jejichž sjednocení tvoří hranici $\partial\Omega_h$. Nejpřirozenější definice formy $\widetilde{L}_h^{\Gamma}(v)$ má tvar

$$\widetilde{L}_h^{\Gamma}(v) := \sum_{\lambda \subset \Gamma_2} \mathrm{mes}_1 \lambda^* \int_0^1 q(\varphi_\lambda(t), \psi_\lambda(t)) v(\varphi_\lambda^*(t), \psi_\lambda^*(t)) \mathrm{d}t \quad \forall v \in W_2^1(\Omega_h)\,, \tag{19.5}$$

kde $x = \varphi_\lambda^*(t)$, $y = \psi_\lambda^*(t)$ $(t \in \langle 0;1 \rangle)$ je parametrické vyjádření úsečky λ^*, která aproximuje oblouk λ s parametrickým vyjádřením $x = \varphi_\lambda(t)$, $y = \psi_\lambda(t)$ $(t \in \langle 0;1 \rangle)$. Předpokládáme, že

$$q \in PC^1(\Gamma_2). \tag{19.6}$$

19.1. Definice. Nechť u je reálná funkce definovaná na množině $M \subset R^N$. Funkce U definovaná na množině $D \supset M$ se nazývá *prodloužením* funkce u, jestliže

$$U(x_1, \ldots, x_N) = u(x_1, \ldots, x_N) \quad \text{pro } [x_1, \ldots, x_N] \in M.$$

19.2. Věta. *Nechť hranice $\partial\Omega$ dvojrozměrné ohraničené oblasti Ω je po částech hladká a nemá body vratu. Nechť $v \in C^1(\overline{\Omega})$ a nechť $D \supset \overline{\Omega}$ je libovolná oblast. Potom existuje funkce $\widetilde{v} \in C^1(\overline{D})$, která je prodloužením funkce v, tj. $\widetilde{v}(x,y) = v(x,y)$ pro všechny body $[x,y] \in \overline{\Omega}$.*

Důkaz věty 19.2 je velmi komplikovaný a lze jej nalézt v [Fi, Dodatek]. V této kapitole budeme potřebovat ještě jednu větu o prodloužení.

19.3. Věta. *Nechť hranice $\partial\Omega$ dvojrozměrné ohraničené oblasti Ω je po částech hladká a nemá body vratu. Nechť její hladké části jsou třídy C^k. Nechť $D \supset \overline{\Omega}$ je libovolná oblast. Potom existuje takový lineární a ohraničený operátor prodloužení $\mathcal{E} : W_2^k(\Omega) \to W_2^k(D)$, že konstanta C vystupující v nerovnosti*

$$\|\mathcal{E}(v)\|_{k,D} \leq C\|v\|_{k,\Omega} \quad \forall v \in W_2^k(\Omega)$$

závisí pouze na oblasti D. Operátor $\mathcal{E}$ je také lineární a ohraničený operátor prodloužení z prostoru $W_2^{k-i}(\Omega)$ do prostoru $W_2^{k-i}(D)$ $(1 \leq i \leq k)$. Shodně s větou 19.2 užíváme značení $\widetilde{v} = \mathcal{E}(v)$.

Důkaz věty 19.3 je uveden v [OR, str. 20-22]. Je zajímavé, že navazuje na důkaz věty 19.2, který je uveden v [Fi]. Je třeba zdůraznit, že uvedené věty byly dokázány v dvojrozměrném případě. V trojrozměrném případě je situace komplikovanější a předpoklady o hranici oblasti Ω musejí být silnější, nebo tvrzení vět jsou změněná.

V druhém kroku aproximujeme formy $\widetilde{a}_h(v,w)$, $\widetilde{L}_h^\Omega(v)$ a $\widetilde{L}_h^\Gamma(v)$, kde $v, w \in X_h \equiv X_h^{(1)}$ integračními formulemi a výsledek této aproximace označíme symboly $a_h(v,w)$, $L_h^\Omega(v)$ a $L_h^\Gamma(v)$. Přitom je nutné se omezit na takové integrační formule, jejichž integrační body leží uvnitř trojúhelníků T, nebo jsou totožné s vrcholy těchto trojúhelníků. Důvod je prostý: existenci prodloužení $\widetilde{k}_{ij} \in C^1(\widehat{\Omega})$, $\widetilde{f} \in C^1(\widehat{\Omega})$ (která potřebujeme k důkazu konvergenčních vět) máme zaručenu; neznáme však hodnoty funkcí $\widetilde{k}_{ij}$, $\widetilde{f}$ v $\widehat{\Omega} - \overline{\Omega}$. To např. znamená, že v případě hraničních trojúhelníků $\overline{T} \in \mathcal{T}_h$ nemůžeme užívat integrační formuli, jejíž uzlové body jsou půlicími body stran trojúhelníků. S tímto omezením můžeme vytvořit formy $a_h(v,w)$ a $L_h^\Omega(v)$ stejným způsobem jako v kapitole 16.

Zbývá aproximovat formu $\widetilde{L}_h^\Gamma(v)$ danou vztahem (19.5), kde se omezíme na $v \in X_h$. Vzhledem k definici této formy můžeme užít libovolnou integrační formuli (17.15), takže dostaneme

$$L_h^\Gamma(v) = \sum_{\lambda \subset \Gamma_2} \mathrm{mes}_1 \lambda^* \sum_{j=1}^{J} \beta_j^* q(\varphi_\lambda(t_j), \psi_\lambda(t_j)) v(\varphi_\lambda^*(t_j), \psi_\lambda^*(t_j)). \tag{19.7}$$

Označíme-li úsečky, jejichž sjednocení je $\overline{\Gamma}_{2h} \subset \partial\Omega_h$, symboly $l_1, \ldots, l_r$ a užijeme-li v (19.7) lichoběžníkovou formuli, potom při lokálním označení koncových bodů úsečky l_i symboly P_1^i, P_2^i se vztah (19.7) zjednoduší na tvar

$$L_h^\Gamma(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{2} \mathrm{mes}_1 l_i q(P_j^i) v(P_j^i). \tag{19.8}$$

Nyní můžeme formulovat následující diskrétní problém v dvojrozměrné oblasti s nepolygonální hranicí.

19.4. Problém. Nechť dvojrozměrná oblast Ω má lipschitzovskou hranici (ve smyslu poznámky 2.2), jejíž hranice se skládá z konečného počtu hladkých oblouků, které jsou třídy C^2. Nechť aproximující oblast Ω_h je přitom taková, že všechny vrcholy (rohy) její hranice $\partial\Omega_h$ leží na $\partial\Omega$, přičemž každá úsečka, která je částí $\partial\Omega_h$ je stranou nějakého trojúhelníku $\overline{T}$, který náleží do triangulace $\mathcal{T}_h$ uzavřené oblasti $\overline{\Omega}_h$. Nechť funkce $\overline{u}$ je tak hladká, že existuje taková funkce $z \in W_2^2(\Omega)$, že $\gamma z = \overline{u}$ na Γ_1. Označme

$$W_h = \{v \in X_h \equiv X_h^{(n)} : v(P_k) = \overline{u}(P_k) \ \forall P_k \in \overline{\Gamma}_1\}, \tag{19.9}$$

$$V_h = \{v \in X_h : v(P_k) = 0 \ \ \forall P_k \in \overline{\Gamma}_1\} \equiv \{v \in X_h : v = 0 \text{ na } \overline{\Gamma}_1\}, \tag{19.10}$$

kde $P_k \in \sigma_h$ (přičemž σ_h označuje množinu všech uzlových bodů v $\mathcal{T}_h$). Nalezněte takovou funkci $u_h \in W_h$, že

$$a_h(u_h, v) = L_h(v) \quad \forall v \in V_h\,, \tag{19.11}$$

kde

$$L_h(v) = L_h^{\Omega}(v) + L_h^{\Gamma}(v) \tag{19.12}$$

a formy $a_h(v,w)$, $L_h^{\Omega}(v)$, $L_h^{\Gamma}(v)$ jsou aproximací forem $\widetilde{a}_h(v,w)$, $\widetilde{L}_h^{\Omega}(v)$, $\widetilde{L}_h^{\Gamma}(v)$ pomocí numerické integrace; způsob aproximace byl popsán před formulací Problému 19.4.

19.5. Věta (o abstraktním odhadu chyby). *Nechť existuje taková konstanta $\widetilde{\beta} > 0$ nezávislá na h, že pro $h \in (0, h_0)$ platí*

$$\widetilde{\beta}\|v\|_{1,\Omega_h}^2 \le a_h(v,v) \quad \forall v \in V_h\,. \tag{19.13}$$

Potom pro $h \in (0, h_0)$ každý Problém 19.4 má právě jedno řešení $u_h \in W_h$ a toto řešení splňuje odhad

$$\|\widetilde{u} - u_h\|_{1,\Omega_h} \le C\Bigg\{ \sup_{\substack{w\in V_h\\ w\neq 0}} \frac{|\widetilde{a}_h(\widetilde{u}, w) - L_h(w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} +$$

$$+ \inf_{v\in W_h} \Bigg(\|\widetilde{u} - v\|_{1,\Omega_h} + \sup_{\substack{w\in V_h\\ w\neq 0}} \frac{|\widetilde{a}_h(v,w) - a_h(v,w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} \Bigg) \Bigg\} \tag{19.14}$$

kde $\widetilde{u} \in W_2^1(\widetilde{\Omega})$ je prodloužení (ve smyslu věty 19.3) řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ Problému 6.2 a C je konstanta nezávislá na h a u.

Důkaz. Pro libovolné $v \in W_h$ platí

$$\|\widetilde{u} - u_h\|_{1,\Omega_h} \le \|\widetilde{u} - v\|_{1,\Omega_h} + \|u_h - v\|_{1,\Omega_h}\,. \tag{19.15}$$

Protože $u_h - v \in V_h$, můžeme psát podle (19.13), bilineárnosti formy $a_h(v,w)$ a vztahu (19.11)

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}\|u_h - v\|_{1,\Omega_h}^2 &\le a_h(u_h - v, u_h - v) = a_h(u_h, u_h - v) - a_h(v, u_h - v) = \\ &= L_h(u_h - v) - a_h(v, u_h - v) \le |L_h(u_h - v) - \widetilde{a}_h(\widetilde{u}, u_h - v)| + \\ &+ |\widetilde{a}_h(\widetilde{u}, u_h - v) - \widetilde{a}_h(v, u_h - v)| + |\widetilde{a}_h(v, u_h - v) - a_h(v, u_h - v)|\,.\end{aligned}$$

Je-li $\|u_h - v\|_{1,\Omega_h} > 0$, můžeme získaný odhad podělit $\|u_h - v\|_{1,\Omega_h}$. Užijeme-li ohraničenost formy $\widetilde{a}_h(v,w)$, která plyne z (19.1), dostaneme

$$|\widetilde{a}_h(\widetilde{u}, u_h - v) - \widetilde{a}_h(v, u_h - v)| \le M\|\widetilde{u} - v\|_{1,\Omega_h}\|u_h - v\|_{1,\Omega_h}.$$

Položíme-li konečně na pravé straně $w := u_h - v$, dostaneme po předchozích úpravách

$$\widetilde{\beta}\|u_h - v\|_{1,\Omega_h} \le \sup_{w\in V_h} \frac{|\widetilde{a}_h(\widetilde{u}, w) - L_h(w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} + M\|\widetilde{u} - v\|_{1,\Omega_h} + \sup_{w\in V_h} \frac{|\widetilde{a}_h(v,w) - a_h(v,w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}}. \quad (19.16)$$

Kombinací (19.15) a (19.16) dostaneme snadno (19.14). $\square$

Pokud oblast Ω má polygonální hranici, redukuje se věta 19.5 na již známé výsledky. Plyne to z nerovnosti

$$|\widetilde{a}_h(\widetilde{u}, w) - L_h(w)| \le |\widetilde{a}_h(\widetilde{u}, w) - \widetilde{L}_h(w)| + |\widetilde{L}_h^{\Omega}(w) - L_h^{\Omega}(w)| + |\widetilde{L}_h^{\Gamma}(w) - L_h^{\Gamma}(w)|. \quad (19.17)$$

V případě, že $\partial\Omega$ je polygon (či množina polygonů), je první člen na pravé straně (19.17) roven nule a ostatní výrazy na pravých stranách (19.14) a (19.17) již byly odhadnuty a podmínka (19.13) dokázána.

K důkazu nerovnosti (19.13) (která vyjadřuje tzv. stejnoměrnou V_h-eliptičnost bilineárních forem $a_h(v,w)$) potřebujeme tzv. diskrétní tvar Friedrichsovy nerovnosti

$$\|v\|_{1,\Omega_h} \le C|v|_{1,\Omega_h} \quad \forall v \in V_h, \quad \forall h \in (0, h_0). \quad (19.18)$$

Důkaz (19.18) je uveden v [Že2, str. 221-226]. Kromě toho potřebujeme nerovnost

$$\sum_{i,j=1}^{2} \widetilde{k}_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \mu(\xi_1^2 + \xi_2^2) \quad (\mu > 0), \quad (19.19)$$

která platí pro skoro všechna $x \in \widetilde{\Omega}$ a všechna $\xi_1, \xi_2 \in R^2$ a je zesílením předpokladu (7.24). Stejně jako v důkazu lemmatu 7.5 z nerovností (19.18) a (19.19) okamžitě dostaneme

$$\widetilde{a}_h(v,v) \ge C\mu\|v\|_{1,\Omega_h}^2 \quad \forall v \in V_h, \quad \forall h \in (h, h_0). \quad (19.20)$$

Pomocí vztahu (19.20) a lemmatu 16.6 dostaneme (19.13) podobným způsobem jako jsme dostali v důkazu věty 16.7 nerovnost (16.24) v případě polygonální oblasti.

Co se týče odhadu prvního členu na pravé straně (19.14) (či prvního členu na pravé straně (19.17), lze komplikovanými úvahami dokázat (viz [Že2, str. 176-187, 197-201, 263-266], že v případě $u \in W_2^1(\Omega)$ platí

$$|\widetilde{a}_h(\widetilde{u}, w) - L_h(w)| \le Ch^{1/2}\|w\|_{1,\Omega_h} \quad \forall w \in V_h \quad (19.21)$$

a v případě $u \in W_2^2(\Omega)$

$$|\widetilde{a}_h(\widetilde{u}, w) - L_h(w)| \le Ch\|w\|_{1,\Omega_h} \quad \forall w \in V_h. \quad (19.22)$$

Tím je dokázáno pro trojúhelníkové prvky s lineárním polynomem, že v případě nepolygonální hranice $\partial\Omega$ jsou konvergenční výsledky stejné jako v případě polygonální hranice.

20. Závěr

Materiál tohoto skripta lze rozdělit přibližně do čtyř nestejně velkých částí:

1. V kapitolách $1-5$ jsme si vybudovali nezbytný matematický aparát potřebný k analýze metody konečných prvků.

2. V kapitolách 6 a 7 jsme se seznámili s variačními formulacemi okrajových problémů lineárních eliptických parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu a dokázali věty o existenci a jednoznačnosti řešení příslušných variačních problémů.

3. V kapitolách $8-17$ jsme se detailně zabývali všemi základními aspekty metody konečných prvků pro řešení okrajových problémů eliptických PDR druhého řádu na oblastech s polygonální hranicí. Kapitola 18 byla věnována trojúhelníkovým konečným C^m-prvkům a jejich aplikacím na okrajové problémy lineárních eliptických PDR řádu $2(m+1)$. V celém skriptu jsme se zabývali dvojrozměrnými problémy a trojúhelníkovými prvky.

4. V kapitole 19 jsme otevřeli problematiku metody konečných prvků na dvojrozměrných oblastech s nepolygonální hranicí.

Domnívám se, že je to víc než dost pro základní informaci o metodě konečných prvků. Souběžné cvičení na počítačích osvětlí problematiku metody konečných prvků z trochu jiného pohledu.

Studenti by se měli dále seznámit s těmito konečnými prvky:

a) obdélníkové a čtyřstěnné prvky (viz [KKLŽ]);

b) dvojrozměrné a trojrozměrné izoparametrické prvky (viz [KKLŽ]);

c) zakřivené trojúhelníkové prvky (viz [Že2]).

Dále by se měli seznámit se základy těchto problémů a jejich řešení:

1. časově závislé problémy - lineární parabolické a hyperbolické (viz [KKLŽ], [Že2]);

2. nelineární problémy (alespoň tzv. asymptoticky lineární [Že2]).

V pátém ročníku budou mít studenti matematického inženýrství dva předměty z aplikací metody konečných prvků, které doplní jejich znalosti v právě uvedených směrech.