

Metoda konečných prvků byla ve své nejjednodušší podobě stručně načrtnuta Courantem [Cr] v roce 1943. Jeho práce nenašla odezvu ani mezi matematiky, ani mezi inženýry, protože v tehdejší době neexistovaly výpočtové prostředky k realizaci této metody. V roce 1956 byla poprvé uveřejněna tato metoda Turnerem, Cloughem, Martinem a Toppem [TCMT].

Původně byla metoda konečných prvků koncipována v termínech stavebně mechanických a aplikována inženýry zejména na statické problémy leteckého a raketového průmyslu. Stavebně mechanická koncepce je sice v jednoduchých případech fyzikálně názorná, je však omezená ve svém dosahu. Podstatně širší dosah má koncepce, která metodu konečných prvků formuluje jako variační metodu.

Prvním inženýrem na kontinentu, který začal metodu konečných prvků užívat byl Prof. Ing. Jiří Kratochvíl, DrSc. (tehdy odborný asistent FAST VUT), který se v roce 1965 o této metodě dozvěděl z amerických inženýrských časopisů a během dvou let vytvořil efektivní program pro statické výpočty přehrad. Své první výsledky [KL] publikoval v roce 1968. Koncem roku 1967 seznámil s koncepcí metody konečných prvků Prof. RNDr. Miloše Zlámalu, DrSc., ředitele tehdejší Laboratoře počítačích strojů VUT. Ten v krátké době tři měsíců napsal článek [Zl], první matematickou práci o této metodě. Měl jsem to štěstí, že jsem jej četl v rukopise a mohl dlouhé hodiny s prof. Zlámalou diskutovat o všem, co se metody konečných prvků týkalo. V době jednoho roku jsme získali řadu závažných výsledků a brzy se LPS VUT stala významným vědeckým centrem, jak matematickým, tak inženýrským, protože velké zkušenosti prof. Kratochvíla byly znásobeny programátorskou zručností Ing. Holuši a všechny teoretické výsledky byly vždy v krátké době ověřovány na počítači.

Toto skriptum obsahuje kromě výkladu nejnútnejšího matematického aparátu matematické výsledky získané v období 1968–72, které se již staly klasickými a tvoří dobrý teoretický základ metody konečných prvků. Kapitoly 17 a 19 obsahují navíc výsledky podstatně mladší. Při práci na skriptu jsem použil tuto literaturu:

- [AFS] Argyris J.H., Fried I., Scharpf D.W.: The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. *Aeronaut. J. R. Aeronaut. Soc.* 72 (1968), 514 – 517.
- [Be] Bell K.: A refined triangular plate bending element. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1 (1969), 101 – 122.
- [Bo] Bosshard W.: Ein neues, vollverträgliches endliches Element für Plattenbiegung. *Abh. Int. Verein. Brückenbau Hochbau* 28/I (1968), 27 – 40.
- [BZ] Bramble J.H., Zlámal M.: Triangular elements in the finite element method. *Math. Comp.* 24 (1970), 809 – 820.
- [Cr] Courant R.: Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 49 (1943), 1 – 23.
- [Ho] Holand I.: Higher order finite element for plane stress. *Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div.* 94 (1968), 698 – 702.
- [Fi] Fichtengolc G.M.: Kurs diferencialnogo i integralnogo isčislenija, tom I, Gostechizdat, Moskva 1951.
- [KJF] Kufner A., John O., Fučík S.: *Function Spaces*. Academia, Praha 1977.
- [KKLŽ] Kolář V., Kratochvíl J., Leitner F., Ženíšek A.: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků. SNTL, Praha 1979.
- [KL] Kratochvíl J., Leitner F.: Metoda konečných prvků a její aplikace v rovinné pružnosti. *Stavebnický časopis* 16 (1968), 63 – 82; 201 – 218.
- [Ne] Nečas J.: *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*. Academia, Praha 1967.
- [OR] Oganesjan L.A., Ruchovec L.A.: Variacionno-raznostnyje metody dlja rešenija elliptičeskich problem. *Izd. Akad. Nauk ArSSR, Jerevan* 1979.
- [Re] Rektorys K.: Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL, Praha 1974.
- [St] Stroud A.H.: *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1971.
- [TCMT] Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J.: Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aero Sci.* 23 (1956), 805 – 823.
- [Vi] Visser M.: *The finite element method in deformation and heat conduction*. Delft 1968.

- [Zl] Zlámal M.: On the finite element method. Numer. Math. 12 (1968), 394 – 409.
 [Že1] Ženíšek A.: Interpolation polynomials on the triangle. Numer. Math. 15 (1970), 283 – 296.
 [Že2] Ženíšek A.: Nonlinear elliptic and evolution problems and their finite element approximations. Academic Press, London 1990.
 [Že3] Ženíšek A.:

Brno, listopad 1999

Alexander Ženíšek

OBSAH

\mathcal{P} . Úvod	5
1. Prostor $W_2^k(\Omega)$	10
2. Stopy funkcí z prostoru $W_2^k(\Omega)$. Friedrichsova nerovnost	18
3. Příklady funkcí z prostoru $W_2^1(\Omega)$	25
4. Bramble – Hilbertovo lemma	29
5. Sobolevova věta o vnoření	31
6. Formální ekvivalence eliptického okrajového problému a příslušného variačního problému	33
7. Existence a jednoznačnost řešení variačního problému	37
8. První konstrukce trojúhelníkových konečných prvků. Interpolací věty	44
9. Konečněprvkové prostory $X_h^{(n)}$	48
10. Definice přibližného řešení. Věta o existenci a jednoznačnosti	53
11. Konvergence přibližných řešení	54
12. Přibližné řešení $u_h^{(n)}$ je řešení soustavy lineárních algebraických rovnic	56
13. Konečněprvkový prostor $X_h^{(3,H)}$	57
14. Transformace trojúhelníku na referenční trojúhelník	62
15. Interpolací teoremy	68
16. Numerická integrace v metodě konečných prvků (případ $\partial\Omega = \Gamma_1$)	72
17. Teorie numerické integrace v případě nehomogenní Neumannovy okrajové podmínky	85
18. Trojúhelníkové konečné C^m -prvky	89
19. Metoda konečných prvků v oblastech s nepolygonální hranicí	96
20. Závěr	100