POPISNÁ STATISTIKA EKONOMICKÝCH ČASOVÝCH ŘAD

Základní pojmy

Většina ekonomických jevů se chová dynamicky, tj. vyvíjí se v čase. Základním prostředkem studia dynamiky takových jevů je analýza jejich vývoje v minulosti, která nám umožňuje poznat existující zákonitosti sledovaných jevů na čase a na základě tohoto poznání předpovídat jejich chování v budoucnosti.

Časovou řadu dostaneme, když údaje o sledovaném jevu ve sledovaném časovém úseku chronologicky uspořádáme. Dobře sestavená a pro analýzu použitelná časová řada musí splňovat tyto požadavky:

- údaje musí být seřazené chronologicky,
- údaje musí být porovnatelné, jinak řečeno musí být zajištěna:
  - a) jednota časového období ve kterém jsou získány,
  - b) jednotná definice údaje (měrné jednotky, stejný způsob sběru dat).

Pokud některé z uvedených podmínek nerespektujeme, získáme nesprávné závěry.

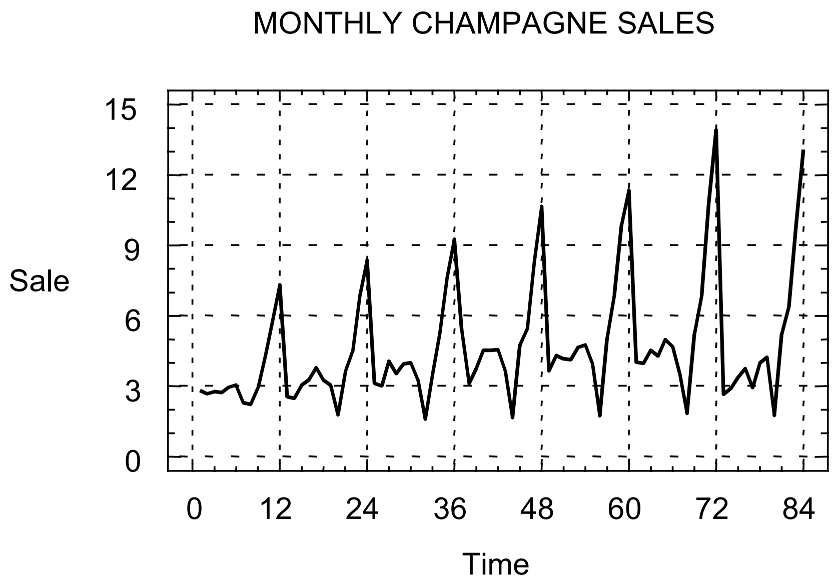
Z hlediska matematické statistiky je časová řada posloupnost $(y_1,...,y_n)$ pozorovaných hodnot y_i statistického znaku Y, kde index i odpovídá časovému okamžiku t_i nebo i-tému intervalu končícímu v t_i, k němuž se y_i vztahuje, $t_i < t_{i+1}$, $i = 1,...,n$. Někdy místo y_i píšeme y_t. Graficky se časová řada nejčastěji znázorňuje pomocí grafu v kartézské souřadné soustavě, kde na x-ovou osu vynášíme indexy i anebo časy t_i a na y-ovou osu hodnoty y_i. Příklad grafu časové řady je na obr. 1.

Časové řady se vztahují k určitému období, pak se jedná o intervalové časové řady, anebo k určitému okamžiku, kdy se jedná o okamžikové časové řady. Intervalové časové řady obsahují ukazatele, zjišťované vždy za určité časové období (hodina, den, měsíc, rok, atd.). Pro tyto časové řady je charakteristické, že:

- údaje vyjadřují množství,
- jsou závislé na délce sledovaného časového intervalu,
- součet údajů má určitý význam a smysl.

Okamžikové časové řady obsahují údaje, vztažené k určitému časovému okamžiku. Pro tyto časové řady je charakteristické, že:

- údaje vyjadřují úroveň nebo stav zkoumaného jevu,
- údaje nejsou závislé na době mezi sledovanými časovými okamžiky,
- součet jednotlivých údajů nemá konkrétní smysl.



Obr. 1

Pro správný rozbor časové řady je nutné si uvědomit určité rozdíly, které plynou z odlišného charakteru údajů obsažených v časových řadách a jejich významu. Proto rozdělujeme časové řady na řady:

1) původních veličin: a) intervalové
b) okamžikové

2) odvozených veličin: a) součtové: α) kumulativní
β) klouzavých součtů (úhrnů)

b) průměrové: α) kumulativních průměrů
β) klouzavých průměrů

c) rozdílové a poměrové

Intervalové řady a okamžikové časové řady

Intervalové řady

Hodnoty intervalových veličin (znaků) pro intervalové časové řady se vztahují k určitým intervalům (časovým obdobím) a tyto hodnoty podstatně ovlivňují délky těchto intervalů. Nejběžnějšími intervalovými veličinami jsou: produkce, maloobchodní obrat, tržby, mzdové fondy, odpracované hodiny, počet narozených dětí v určitém období atd. Jejich základní agregující číselnou charakteristikou je aritmetický průměr hodnot $y_1,...,y_n$. Konkrétně pro stejně dlouhé časové intervaly používáme prostý aritmetický průměr

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

a pro různě dlouhé časové intervaly je vhodný vážený aritmetický průměr s váhami rovnými převráceným hodnotám těchto délek.

Okamžikové řady

Hodnoty okamžikových veličin (znaků) se nevztahují na určité období, ale k určitému okamžiku. Tímto okamžikem může být první nebo poslední den tohoto období, záměrně zvolený den nebo okamžik. Příkladem okamžikové veličiny údaje je např. početní stav obyvatelstva, dělníků, stav základních prostředků atd. Tyto údaje ukazují okamžitý stav zvoleného jevu. Pro jejich základní agregování používáme tzv. chronologický průměr.

Jestliže známe hodnoty okamžikového ukazatele (sledovaného znaku Y) $y_1, y_2, y_3,..., y_n$ v n časových okamžicích $t_1, t_2, t_3,..., t_n$, vypočteme pro dvojice

$$(t_1, t_2);\ (t_2, t_3);...;\ (t_{n-1}, t_n)$$

průměry

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2},\ \bar{y}_2 = \frac{y_2 + y_3}{2},...,\ \bar{y}_{n-1} = \frac{y_{n-1} + y_n}{2},$$

Z těchto dílčích průměrů pak určíme chronologický průměr za období od t_1 do t_n jako jejich vážený aritmetický průměr, přičemž váhy volíme úměrné vzdálenostem časových okamžiků (viz obr. 2):

$$d_1 = t_2 - t_1,\ d_2 = t_3 - t_2,\ \dots,\ d_{n-1} = t_n - t_{n-1}.$$

Obr. 2

Chronologický průměr pak je

$$\bar{y}_{chr} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} d_1 + \frac{y_2 + y_3}{2} d_2 + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} d_{n-1}}{d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}}$$

a po úpravě

$$\bar{y}_{chr} = \frac{y_1 d_1 + y_2 (d_1 + d_2) + \ldots + y_{n-1}(d_{n-2} + d_{n-1}) + y_n d_{n-1}}{2(d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1})} \quad .$$

Speciálně při stejných časových vzdálenostech

$$d_1 = d_2 = \ldots = d_{n-1}$$

je chronologický průměr

$$\bar{y}_{chr} = \frac{0{,}5 y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + 0{,}5 y_n}{n-1} \quad .$$

P ř í k l a d 1

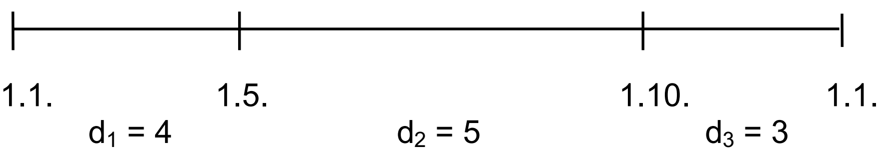
Ve výrobní firmě Bernie, s.r.o. je vedena evidence stavu zásob. Celkový přehled je uveden v Kč a k dispozici jsou údaje z následujících dnů:

1. leden	20,523 mil. Kč
1. květen	16,100 mil. Kč
1. říjen	17,230 mil. Kč
1. leden	21,432 mil. Kč

Vypočtěte průměrný roční stav zásob (jejich hodnotu) v této firmě.

Ř e š e n í:

Pro výpočet použijeme vztah pro výpočet chronologického průměru s nestejnými časovými vzdálenostmi (v měsících), kde $y_1 = 20{,}523$, $y_2 = 16{,}100$, $y_3 = 17{,}230$, $y_4 = 21{,}432$ a



Po dosazení hodnot dostaneme

$$\overline{y}_{chr} = \frac{20{,}523 \cdot 4 + 16{,}100(4+5) + 17{,}230(5+3) + 21{,}432 \cdot 3}{2(4+5+3)} \approx 17{,}880 \text{ mil. Kč.}$$

Průměrný roční stav zásob v podniku činil 17,880 mil. Kč. Tento průměrný roční stav by bylo možné určit vzhledem k počtu dnů, resp. pracovních dnů.

P ř í k l a d 2

K dispozici jsou údaje o počtu zaměstnanců firmy METALIKA v průběhu kalendářního roku:

1. ledna	3 500 zaměstnanců
1. dubna	3 425 zaměstnanců
1. července	3 430 zaměstnanců
1. října	3 390 zaměstnanců
1. ledna	3 350 zaměstnanců

Vypočtěte průměrný počet zaměstnanců v dané firmě v celém ročním období.

Ř e š e n í:

Použijeme vztah pro výpočet chronologického průměru pro stejné časové vzdálenosti (v měsících), kde y_1 = 3 500, y_2 = 3 425, y_3 = 3 430, y_4 = 3 390 a y_5 = 3 350. Po dosazení těchto hodnot získáme

$$\overline{y}_{chr} = \frac{0{,}5.3\,500 + 3\,425 + 3\,430 + 3390 + 0{,}5.3\,350}{4} = 3\,417{,}5\ .$$

Chronologický průměr stavu zaměstnanců podniku METALIKA činí v daném roce 3 417,5. Pro případnou prezentaci zaokrouhlíme údaj nahoru, to jest na 3 418.

Speciální typy řad

Součtové řady kumulativní

Kumulativní řady mají povahu narůstajících úhrnů a používají se u řad intervalového typu. Podstatou součtové řady kumulativní je načítání hodnot zvoleného jevu od stanoveného počátku. Tento nástroj má své uplatnění např. v případě sledování plnění ukazatelů za určité období (měsíc, rok). Kumulativní hodnoty najdou své uplatnění v záležitostech strategického rozhodování. Názorná ukázka použití tohoto nástroje je obsažena v následujícím příkladě.

<u>P ř í k l a d 3</u>

Máme údaje o stavu výroby (tis. tun) za jednotlivé měsíce. Úkolem je porovnání skutečného stavu výroby za jednotlivé měsíce a zároveň za celý rok:

Produkce (tis. tun)						
Měsíc	Měsíční hodnoty			Kumulativní hodnoty		
	Plán	Výroba	(%)	Plán	Výroba	(%)
leden	36,2	36,5	100,8	36,2	36,5	100,8
únor	36,5	35,8	98,1	72,7	72,3	99,4
březen	35,1	35,8	102,0	107,8	108,1	100,3
duben	34,2	35,1	102,6	142,0	143,2	100,8
květen	33,0	33,2	100,6	175,0	176,4	100,8
červen	33,0	32,1	97,3	208,0	208,5	100,2
červenec	33,0	31,2	94,5	241,0	239,7	99,5
srpen	32,5	31,0	95,4	273,5	270,7	99,0
září	32,7	32,3	98,8	306,2	303,0	99,0
říjen	34,6	33,4	96,5	340,8	336,4	98,7
listopad	36,8	36,6	99,5	377,6	373,0	98,8
prosinec	38,0	38,1	100,3	415,6	411,1	98,9

Z tabulky kumulativních hodnot je vidět (viz prosinec), že oproti ročnímu plánu 415,6 tis. tun bylo vyrobeno celkem za rok 411,1 tis. tun, což činí 98,9 % plánu.

Časové řady kumulativních průměrů

Řady kumulativních průměrů jsou tvořeny z řad intervalových. Tyto řady ukazují, jak se kumulativní průměry blíží k celkovému průměru za sledované období, který je vyjádřen poslední hodnotou. Tento nástroj je využíván při sledování výše nákladů, při sledování kvality výroby atd. Princip použití vychází z kumulativní součtové řady, přičemž údaj se dělí počtem období, za které byl nakumulován. Pro demonstraci použijme v následujícím příkladu data z příkladu 3 s kumulativními hodnotami výroby:

<u>P ř í k l a d 4</u>

Období	Kumulativní hodnota (tis. tun)	Kumulativní průměr (tis. tun)
leden	36,5	36,5 : 1 = 36,50
únor	72,3	72,3 : 2 = 36,15
březen	108,1	108,1 : 3 ≈ 36,03
duben	143,2	143,2 : 4 = 35,80
květen	176,4	176,4 : 5 = 35,28
červen	208,5	208,5 : 6 = 34,75
červenec	239,7	239,7 : 7 ≈ 34,24
srpen	270,7	270,7 : 8 ≈ 33,84
září	303,0	303,0 : 9 ≈ 33,67
říjen	336,4	336,4 :10 = 33,64
listopad	373,0	373,0 :11 ≈ 33,91
prosinec	411,1	411,1 :12 ≈ 34,26

Součtové řady klouzavých součtů

Řady klouzavých součtů (úhrnů) mají charakter intervalových řad a získáme je postupnými součty předem zvoleného počtu po sobě jdoucích hodnot původní řady. Součtová řada klouzavých úhrnů je vhodná ke srovnání vývojové tendence původní řady ve dvou delších (např. ročních) obdobích - viz příklad 5 s dvouměsíční řadou.

Časové řady klouzavých průměrů

Klouzavé průměry navazují na výpočet klouzavých součtů. Klouzavé průměry se vypočítají podělením klouzavého součtu počtem sečtených období - viz příklad 5 s dvouměsíční řadou. Řada klouzavých průměrů stírá případné sezónní vlivy na původní hodnoty. Další informace o klouzavých průměrech lze nalézt v literatuře.

P ř í k l a d 5

			Klouzavé součty:
1994:	leden	36,5	36,5+35,8+33,2+31,2+32,3+36,6 = 205,6
	březen	35,8	35,8+33,2+31,2+32,3+36,6+36,8 = 205,9
	květen	33,2	.... = 206,2
	červenec	31,2	.... = 207,0
	září	32,3	.... = 207,8
	listopad	36,6	.... = 209,0
1995:	leden	36,8	.... = 209,6
	březen	36,1	
	květen	34,0	
	červenec	32,0	
	září	33,5	
	listopad	37,2	

Po vydělení jednotlivých klouzavých úhrnů počtem sečtených období (v našem případě 6), dostaneme časovou řadu prostých klouzavých průměrů:

34,267; 34,317; 34,367; 34,500; 34,633; 34,833; 34,933.

Z obou vypočtených časových řad klouzavých úhrnů a klouzavých průměrů hodnot pro období 1994 a 1995 je zřejmé, že trend výroby je rostoucí.

Vývoj časových řad

Mezi nejjednodušší charakteristiky rozboru časových řad patří absolutní a relativní míry růstu, respektive poklesu hodnot sledovaného znaku. Rozbor absolutních a relativních měr růstu umožňuje rozhodování pří výběru funkce na vyrovnání časové řady. U následujících nástrojů budeme pro jednoduchost uvažovat, že délky intervalů mezi sousedními okamžiky okamžikových časových řad, případně délky intervalů u intervalových časových řad, jsou stejné.

Absolutní míry růstu představují absolutní porovnání hodnot jednotlivých členů časové řady. Pro bližší popis časové řady se používají:

absolutní přírůstek (diference) $\delta_i = y_i - y_{i-1}$ pro $i = 2, 3, ..., n$,

průměrný absolutní přírůstek $\bar{\delta} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\delta_i = \frac{y_n - y_1}{n-1}$,

který se vypočte jako prostý aritmetický průměr všech absolutních přírůstků.

Pokud jsou absolutní přírůstky, označované také jako první diference $\delta_i^{(1)}$, blízké konstantě, má hodnocená časová řada lineární trend, který lze graficky vyjádřit přímkou. Druhé diference $\delta_i^{(2)}$ se vypočtou jako rozdíly dvou po sobě jdoucích prvních diferencí a také se dle potřeby počítá jejich aritmetický průměr $\bar{\delta}^{(2)}$. Jsou-li druhé diference blízké konstantě, je možné trend časové řady vyjádřit pomocí polynomu druhého stupně, tj. graficky parabolou. Třetí diference se vypočtou jako rozdíly dvou po sobě jdoucích druhých diferencí. Další diference se určí podobným způsobem. Obecně pokud je m-tá diference přibližně konstantní, lze průběh dané časové řady vyjádřit pomocí polynomu stupně m.

Poměrnou rychlost vývoje (růstu nebo poklesu) hodnot dané časové řady charakterizují relativní přírůstky, které počítáme jako podíl první diference i-tého a běžné hodnoty (i –1)-tého období. Rychlost vývoje lze vyjádřit charakteristikami:

koeficient růstu $k_i = \frac{y_i}{y_{i-1}}$ pro $i = 2, 3, ..., n$,

koeficient přírůstku $\kappa_i = \frac{\delta_i}{y_{i-1}} = k_i - 1$ pro $i = 2, 3, ..., n$,

průměrný koeficient růstu $\bar{k} = \sqrt[n-1]{k_2 k_3 \cdots k_n} = \sqrt[n-1]{\prod_{i=2}^{n} k_i} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$,

který počítáme pomocí geometrického průměru individuálních koeficientů růstu.

Koeficienty růstu a přírůstku i průměrné koeficienty růstu se také uvádějí v procentuálním tvaru: $k_i 100\%$, $\kappa_i 100\%$, $\bar{k}100\%$. Pokud jsou koeficienty růstu k_i přibližně konstantní, je průběh časové řady zhruba exponenciální.

P ř í k l a d 6

Vývoj hrubého domácího produktu (mld. Kč) v České republice v letech 1990 až 1996 je po přepočtu na stálé ceny v tabulce:

Rok	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
HDP	564	721	859	1015	1192	1338	1579

Určete průměrný roční HDP, absolutní roční přírůstky, průměrný roční přírůstek, druhé diference, průměrnou druhou diferenci, koeficienty růstu, koeficienty přírůstku a průměrný koeficient růstu HDP.

Ř e š e n í:

Část výsledků výpočtu je v následující tabulce, kde místo i je přímo časová proměnná t:

t	y_t	δ_t	$\delta_t^{(2)}$	k_t	$k_t 100\%$	κ_t	$\kappa_t 100\%$
1990	564	---	---	---	---	---	---
1991	721	157	---	1,2784	127,84	0,2784	27,84
1992	859	138	-19	1,1914	119,14	0,1914	19,14
1993	1015	156	18	1,1816	118,16	0,1816	18,16
1994	1192	177	21	1,1744	117,44	0,1744	17,44
1995	1338	146	-31	1,1225	112,25	0,1225	12,25
1996	1579	241	95	1,1801	118,01	0,1801	18,01
Σ	7268	1015	84	---	---	---	---

Jedná se o intervalovou časovou řadu, takže průměrný roční HDP je prostý průměr

$$\bar{y} = \frac{7268}{7} \approx 1038{,}2857 \approx 1038{,}3 \text{ mld. Kč.}$$

Absolutní přírůstky δ_t, druhé diference $\delta_t^{(2)}$, koeficienty růstu k_t a koeficienty přírůstku κ_t jsou v předcházející tabulce. Odtud vidíme, že největšího přírůstku HDP 241 mld. Kč bylo dosaženo v roce 1996 a naopak nejmenšího absolutního přírůstku HDP 138 mld. Kč bylo dosaženo v roce 1992. Avšak největšího relativního růstu HDP bylo dosaženo v roce 1991 (koeficient růstu je 1,2784, tedy 127,84 %) a nejmenšího relativního růstu HDP bylo dosaženo v roce 1995 (koeficient růstu je 1,1225, tedy 112,25 %). Z tabulky je dále vidět, že největšího absolutního zrychlení vývoje HDP (největší kladná druhá diference) bylo dosaženo v roce 1996 a největšího zpomalení vývoje HDP (největší záporná druhá diference) bylo dosaženo v roce 1995. Průměrný roční absolutní přírůstek HDP je

$$\bar{\delta} = \frac{1015}{7-1} = 169{,}1666\ldots \approx 169 \text{ mld. Kč.}$$

Průměrný roční koeficient růstu HDP je

$$\bar{k} = \sqrt[7-1]{\frac{1579}{564}} \approx \sqrt[6]{2{,}7996454} \approx 1{,}1872,$$

tedy 118,72 %. Odtud je průměrný roční koeficient přírůstku HDP 0,1872, tedy 18,72 %. Výpočet průměrného koeficientu růstu nebo přírůstku pomocí aritmetického průměru je mírně řečeno zavádějící, ale bohužel se to v ekonomických aplikacích někdy stává. Průměrná roční druhá diference HDP je

$$\bar{\delta}^{(2)} = \frac{84}{7-2} = 16{,}8 > 0 \text{ ,}$$

takže se růst HDP celkově zrychluje.

Popis časových řad

Při zkoumání vývoje sledovaného jevu v zákonitosti na čase nás kromě vývoje (růst, pokles, stagnace) zajímají zákonitosti časového vývoje. Vývoj časových řad je determinován kombinací několika vlivů působících na hodnoty časové řady. Jde o:

- trend vývoje (dlouhodobě působící vliv),
- periodické vlivy (pravidelně se opakující vliv),
- nahodilé vlivy (působí nepravidelně, resp. náhodně).

Trend časové řady

Trend je důležitý prvek časových řad a představuje obecnou tendenci dlouhodobého vývoje sledovaného ukazatele v čase. V rámci ekonomického využití časových řad je trend nejdůležitější složkou, která nás zajímá jak z hlediska současného stavu tak i predikce budoucího vývoje. Často se u časové řady očekává lineární trend, vyjádřený lineární funkcí času t a graficky přímkou, ale v řadě případů jde o trend nelineárního tvaru. Pro vyjádření trendu časových řad byla vyvinuta a softwarově implementována řada metod. Základní metodika je níže popsána v odstavci o vyrovnání časových řad.

Periodické vlivy

Působením periodických vlivů dochází k periodickému kolísání průběhu časové řady. Délka periody je rozdílná a podle její velikosti uvažujeme další členění.
Projevují se:

- cyklické vlivy (kolísání se opakuje pravidelně v jednotlivých letech dlouhého časového období),
- sezónní vlivy (kolísání se opakuje pravidelně v rámci jednoho delšího časového úseku - např. měsíce v rámci roku),
- případně krátkodobé vlivy (kolísání krátkodobého charakteru při pravidelné periodě - např. den v týdnu, týden v měsíci atd.).

Pro vyjádření periodicity časových řad byla rovněž vyvinuta a softwarově implementována řada metod.

Nahodilé vlivy

Nahodilé vlivy způsobují nahodilé výkyvy ukazatelů časových řad kolem trendu nebo trendu s periodickými výkyvy. Tyto vlivy považujeme za rušivou složku. Nahodilé vlivy jsou modelovány pomocí náhodných veličin a lze je diagnostikovat metodami matematické statistiky.

Dekompozice časové řady

Z hlediska působení jednotlivých vlivů na průběh časové řady lze vyjádřit trend vývoje jako trendovou složku T_t, periodické vlivy jako periodickou složku P_t a náhodné vlivy jako náhodnou složku E_t dané časové řady. Periodickou složku podle potřeby rozdělujeme na cyklickou složku C_t a sezónní složku S_t. Dekompozice časové řady pak spočívá nejčastěji v jejím aditivním modelu

$$y_t = T_t + P_t + E_t \,, \quad \text{resp. } y_t = T_t + C_t + S_t + E_t$$

anebo multiplikativním modelu

$$y_t = T_t\, P_t\, E_t \,, \quad \text{resp. } y_t = T_t\, C_t\, S_t\, E_t \,.$$

Vyrovnání časových řad

Při zkoumání trendové složky časové řady jde vlastně o vymezení vlivu těch činitelů, které působí stabilně a určují směr vývoje dané časové řady. Graficky odpovídá řešení této úlohy nalezení takové dostatečně jednoduché křivky, která by při grafickém znázornění nejlépe vystihla směr vývoje dané časové řady. Takovou křivku získáme grafickým, mechanickým nebo analytickým vyrovnáním časové řady.

Grafické vyrovnání je založeno na zakreslení časové řady do grafu jako na obr. 1 a grafickým odhadem (vyrovnáním) jejího trendu ad hoc. Tato metoda má pouze orientační charakter, může vést k zavádějícím závěrům a díky software se již prakticky nepoužívá.

Mechanické vyrovnání časové řady vychází z klouzavých součtů. Když klouzavé součty dělíme počtem období, dostaneme klouzavé průměry, jejichž hodnoty jsou povětšinou blízké původním hodnotám. Liší se tím, že jsou do určité míry zbavené sezónních výkyvů. Čára klouzavých průměrů bude tedy vyrovnanější než čára původních hodnot. Přitom je tím monotónnější (a zároveň kratší), čím více období vezmeme za základ pro stanovení příslušných klouzavých součtů. Velkou předností této metody je její jednoduchost a skutečnost, že nás dobře informuje o tendenci vývoje dané časové řady zbavené sezónních i cyklických výkyvů.

Analytické vyrovnání časové řady je založeno na předpokladu závislosti hodnot časové řady y_t na čase t. Pro vyrovnání časové řady používáme takovou funkci f(t), která co nejlépe vyhovuje jejímu průběhu, tj. respektuje její trend, případně i její periodickou složku. Výběr vhodné funkce f(t) je založen na rozboru průběhu původních empirických (pozorovaných) hodnot časové řady y_t, respektive jejich prvních druhých, příp. dalších diferencí. Analytické vyrovnání časové řady má tvar

$$y_t = \hat{y}_t + e_t = f(t) + e_t \,,$$

kde $\hat{y}_t = f(t)$ je vyrovnaná hodnota pozorované hodnoty závisle proměnné y_t a e_t je tzv. reziduální složka. Pro analytické vyrovnání se obvykle používají funkce, jejichž graf je přímka, parabola, exponenciála, růstová křivka apod. Jde vlastně o aplikaci metod regresní analýzy. V praxi se zejména u rozsáhlých časových řad provádí vyrovnání na PC pomocí statistického software.

Nejčastěji se používá při vyrovnání časové řady tzv. vyrovnání pomocí přímky, kdy předpokládáme, že řada má lineární trend. Funkce f(t) má tvar

$$\hat{y}_t = b_1 + b_2 t \,,$$

kde t = 1, 2,…, n. Koeficienty b_1 a b_2 stanovíme z tzv. soustavy normálních rovnic

$$b_1 n + b_2 \sum_{t=1}^{n} t = \sum_{t=1}^{n} y_t \,,$$

$$b_1 \sum_{t=1}^{n} t + b_2 \sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} y_t t \,.$$

První koeficient b_1 je y-ová souřadnice bodu, ve kterém daná přímka protíná osu y a odpovídá vyrovnané hodnotě časové řady v nultém období. Druhý koeficient b_2 je směrnice přímky a vyjadřuje samotný trend, to znamená sklon přímky. Odpovídá změně vyrovnaných hodnot $\hat{y}_t$ při jednotkové změně veličiny t a vyjadřuje průměrnou změnu původních hodnot y_t při jednotkové změně veličiny t. O vhodnosti použité funkce se můžeme přesvědčit pomocí jejího grafu, velikosti koeficientu korelace nebo velikosti součtu čtverců odchylek (reziduí)

$$\sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \hat{y}_t \right)^2 .$$

Výpočet koeficientů b_1 a b_2 můžeme zjednodušit tím, že časovou proměnnou t posuneme tak, aby se součet posunutých časových hodnot časové proměnné rovnal nule. Toho dosáhneme posunutím počátku $t = 0$ do aritmetického průměru hodnot t. Místo původní proměnné t pak vezmeme novou proměnnou

$$t^* = t - \overline{t} = t - \frac{n+1}{2} .$$

Pak dostaneme explicitní vztahy

$$b_1^* = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n} \,, \; b_2^* = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t t^*}{\sum_{t=1}^{n} t^{*2}} \,,$$

takže koeficient b_1^* je aritmetický průměr hodnot y_t a pro původní koeficienty platí

$$b_1 = b_1^* - b_2^* \overline{t} \,, \; b_2 = b_2^* .$$

Postup výpočtu s novou časovou proměnnou t^* se traduje ve starší literatuře z doby, kdy se výpočet prováděl pouze ručně. K výpočtu uvedené přímky můžeme také použít software Excel.

P ř í k l a d 7

Určete trendovou složku $\hat{y}_t = b_1 + b_2 t$ časové řady vývoje hrubého domácího produktu České republiky v letech 1990 až 1996 z příkladu 3.6.

Ř e š e n í:

Z příkladu 3.6 je n = 7, $\sum_{t=1}^{n} t = 13591$, $\sum_{t=1}^{n} y_t = 7268$ a výpočtem dostaneme

$\sum_{t=1}^{n} t^2 = 27804371$, $\sum_{t=1}^{n} y_t t = 14489736$. Soustava normálních rovnic pak je

$$7b_1 + 13591b_2 = 7268,$$

$$13591b_1 + 27804371b_2 = 14489736.$$

Řešením této soustavy dostaneme koeficienty $b_1 \approx -327237{,}3$ a $b_2 \approx 164{,}7$. Odtud je vyrovnání časové řady

$$\hat{y}_t = -327237{,}3 + 164{,}7\, t.$$

Například pro t = 1993 dostaneme

$$\hat{y}_{1993} = -327237{,}3 + 164{,}7 \cdot 1993 = 1009{,}8 \text{ mld. Kč},$$

což je v dobré shodě se skutečným HDP y_{1993} = 1015 mld. Kč. Také hodnota

$$b_2 = = 164{,}7 \text{ mld. Kč / rok}$$

odpovídá průměrnému ročnímu absolutnímu přírůstku $\bar{\delta}$ = 169 mld.Kč z příkladu 6.

Pro ruční výpočet můžeme použít zjednodušený postup s transformací časové proměnné t. Protože původní časová proměnná nabývá hodnot 1990, 1991,…, 1996, provedeme transformaci $t^* = t - 1993$, neboť pro tuto danou časovou řadu

$$\bar{t} = (1990 + 1991 + \ldots + 1996)/7 = 1993.$$

Počet časových období je n = 7, takže

$$b_1^* = \frac{564 + 721 + \cdots + 1579}{7} = \frac{7268}{7} = 1038{,}2857 \approx 1038{,}3,$$

$$b_2^* = \frac{(-3)\cdot 564 + (-2)\cdot 721 + \cdots + 3 \cdot 1579}{(-3)^2 + (-2)^2 + \cdots + 3^2} = \frac{4612}{28} = 164{,}71428 \approx 164{,}7.$$

Původní koeficienty pak jsou

$$b_1 = 1038{,}2857 - 164{,}71428 \cdot 1993 = -327237{,}28 \approx -327237{,}3,$$

$$b_2 = 164{,}71428 \approx 164{,}7.$$

Koeficienty b_1 a b_2 můžeme také vypočítat pomocí explicitních vzorců v regresní analýze.

Příklady k procvičení

P ř í k l a d 8

K dispozici jsou údaje o stavu základních prostředků v podniku v průběhu kalendářního roku (účetní hodnota):

1.1.	101,230 mil. Kč	1.8.	100,250 mil. Kč
1.3.	105,100 mil. Kč	1.12.	99,800 mil. Kč
1.4.	105,500 mil. Kč	1.1.	103,150 mil. Kč

Vypočtěte chronologický průměr stavu základních prostředků.

V ý s l e d e k: $\overline{y}_{chr}$ = 102,05875 mil. Kč

P ř í k l a d 9

V tabulce je uvedena spotřeba elektrické energie v československém průmyslu v letech 1967 až 1972 v mld kWh.

Rok	1967	1968	1969	1970	1971	1972
Spotřeba	27,6	29,1	30,3	31,8	33,6	35,4

Určete průměrnou roční spotřebu elektrické energie, absolutní roční přírůstky, průměrný roční přírůstek, druhé diference, průměrnou druhou diferenci, koeficienty růstu, koeficienty přírůstku a průměrný koeficient růstu spotřeby elektrické energie.

V ý s l e d e k: $\overline{y}$ = 31,3 mld kWh; $\overline{\delta} =$ 1,56 mld kWh; $\overline{\delta}^{(2)} =$ 0,075 mld kWh; $\overline{k} \approx$ 1,051

P ř í k l a d 10

Vyrovnejte průměrný stav základních fondů (mil. Kčs) v následující tabulce za roky 1978 až 1985 přímkou a vypočtěte odhad průměrného stavu fondů v roce 1987 za předpokladu, že se zachová vývoj časové řady:

Rok	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Stav	675,0	681,4	684,0	689,6	690,8	698,2	706,0	712,0

V ý s l e d e k: $y'_t = -9352{,}193 + 5{,}069\,t$, $y'_{1987} = 719.91$ mil. Kč

P ř í k l a d 11

Dopravní firma AUTODOP měla tyto roční průměrné stavy automobilového parku:

1993…54 ks, 1994…63 ks, 1995…69 ks, 1996…72 ks.

V roce 1997 měla firma k daným dnům skutečné stavy, které jsou v tabulce:

Den	1.1.	20.3.	15.4.	30.7.	25.9.	31.12.
Stav	70	66	71	80	82	90

Určete průměrný stav automobilového parku firmy v roce 1997, průměrný roční koeficient růstu a charakterizujte trend vývoje stavu v letech 1993 lineární funkcí.

V ý s l e d e k: $\overline{y}_{chr} \approx 77$ (vážený chronologický průměr); $\overline{k} \approx 1{,}093$ (průměrný roční nárůst o 9,3 %); $y'_t = -10\,905{,}5 + 5{,}5\,t$

Kontrolní otázky

1. Definujte časovou řadu a uveďte konkrétní případy.
2. Uveďte rozdělení časových řad a konkrétní příklady na jednotlivé typy.
3. Jak se určí chronologický průměr okamžikové časové řady?
4. Jaké charakteristiky popisují vývoj časové řady?
5. Popište složky časové řady a její dekompozici.
6. Jakými způsoby vyrovnáváme časové řady?