Řešení nelineárních rovnic a jejich soustav

Lineární rovnice = rovnice, která lze upravit na tvar $ax + b = 0$

Nelineární rovnice řešitelné analyticky

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$
$$\exp\left(\frac{5}{x^2 + 10} + 4.5\right) - 100 = 0$$
$$2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2.1 = 0$$

neřešitelné analyticky $0.2x + 0.4 + 3\sin x = 0$

Fáze numerického řešení:

1) Separace kořenů

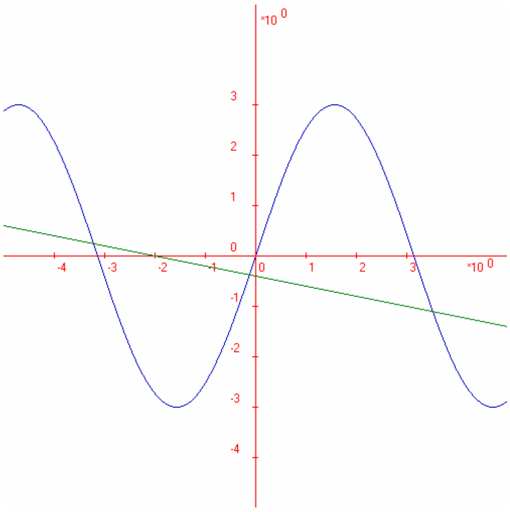
a) Sledování znaménkových změn funkce $f(x)$:

Příklad: $f(x) = 0.2x + 0.4 + 3\sin x$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	+	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-

b) Grafické řešení ruční $f(x) = 0 \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$

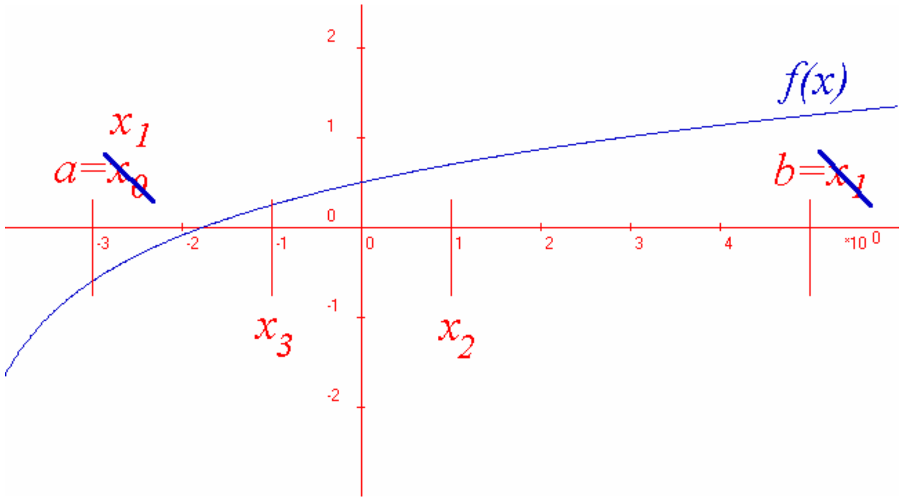
$$0.2x + 0.4 + 3\sin x = 0 \Rightarrow 3\sin x = -0.2x - 0.4$$



c) Grafické řešení „počítačové“ [příklad]

Zpřesňování aproximací:

Metoda bisekce (půlení intervalu):



obecně:

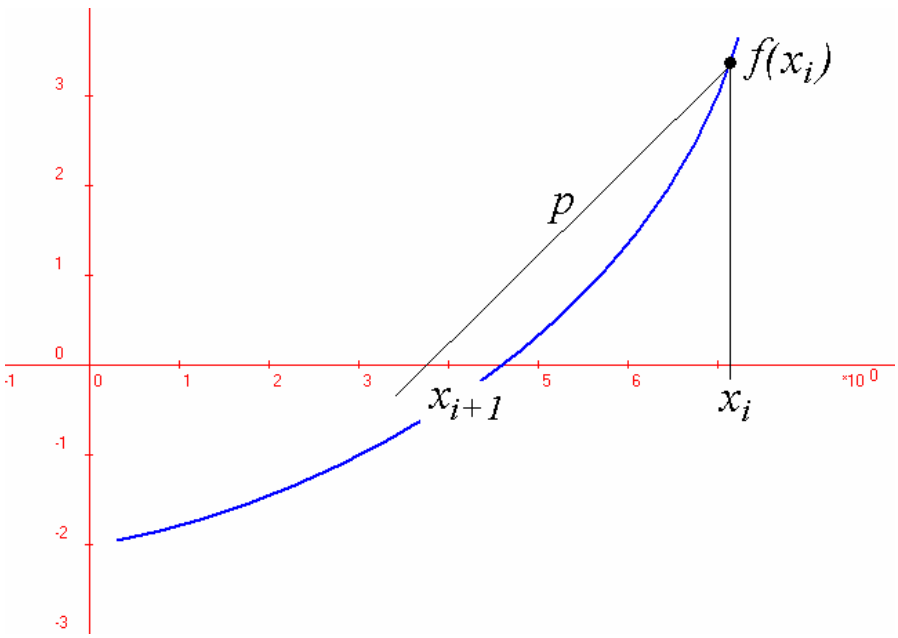
$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$$
$$f(x_0)\,f(x_2) < 0 \Rightarrow x_1 := x_0$$
$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$
$$f(x_{i-1})\,f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$$
$$x_{i+2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

Příklad

Zpřesňování aproximací:

Aproximace funkce $f(x)$ přímkou (obecně):



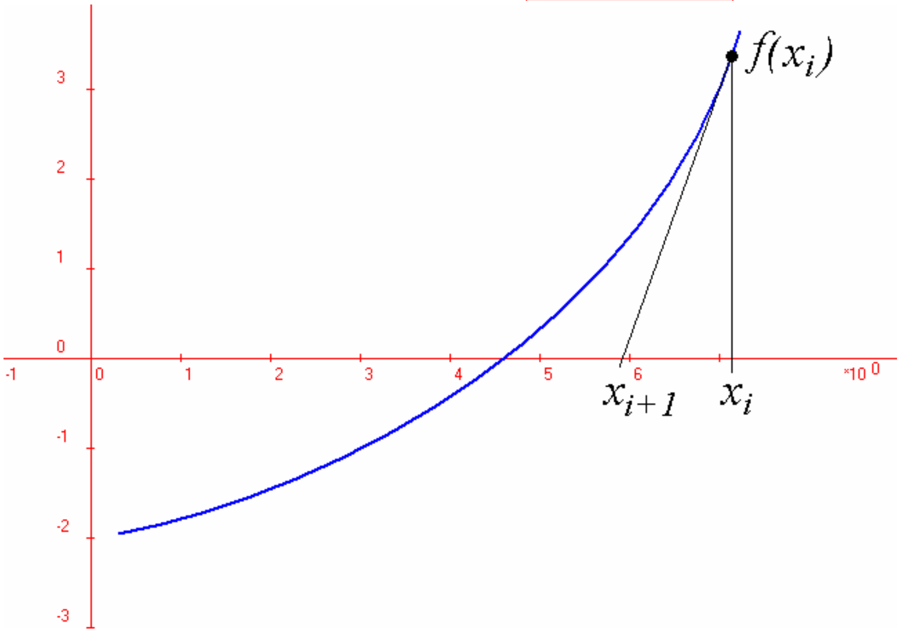
Směrnice přímky p: $\quad k = \dfrac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{k}$

Zpřesňování aproximací:

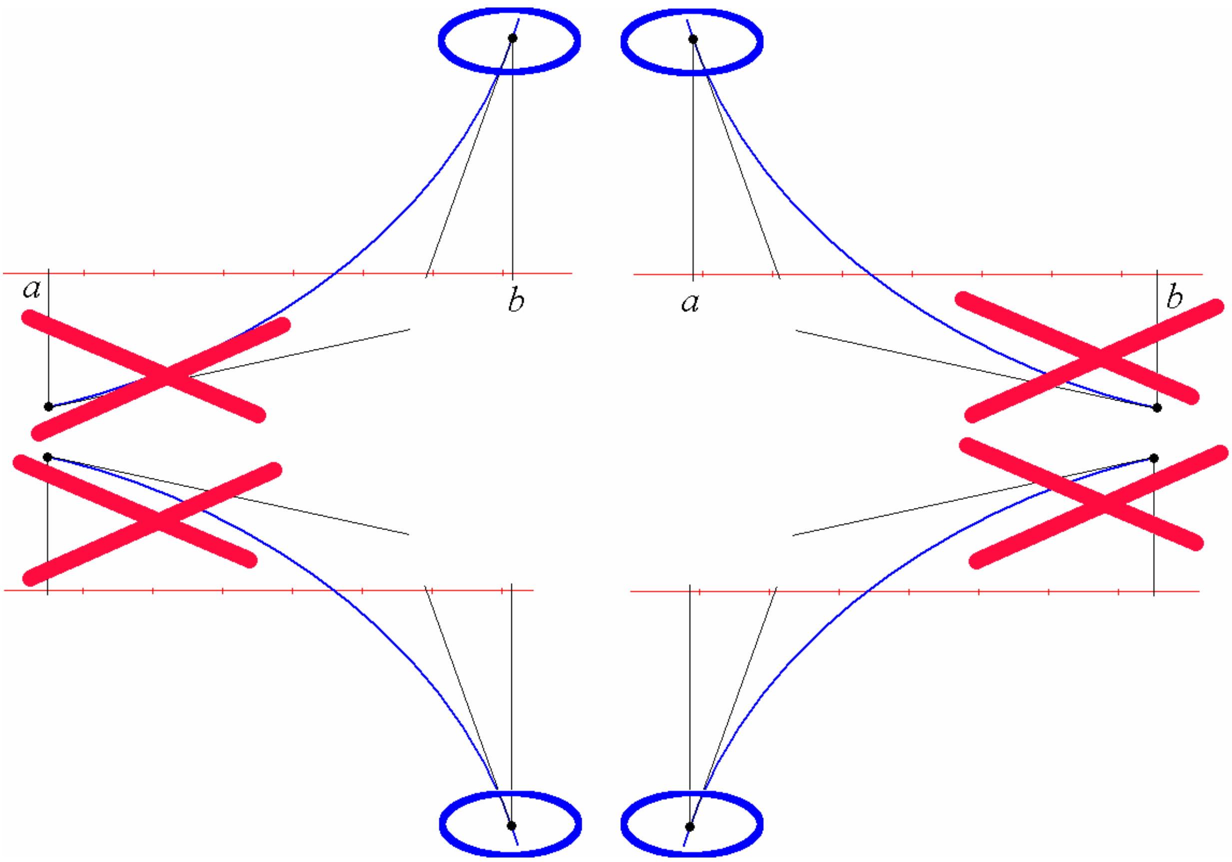
Aproximace funkce $f(x)$ **přímkou** p **(obecně):** $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{k}$

Metoda Newtonova: p je tečna v bodě $[x_i; f(x_i)]$ $\Rightarrow$ $k = f'(x_i)$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$



Fourierova podmínka: $\boxed{f(a) \cdot f''(a) > 0}$

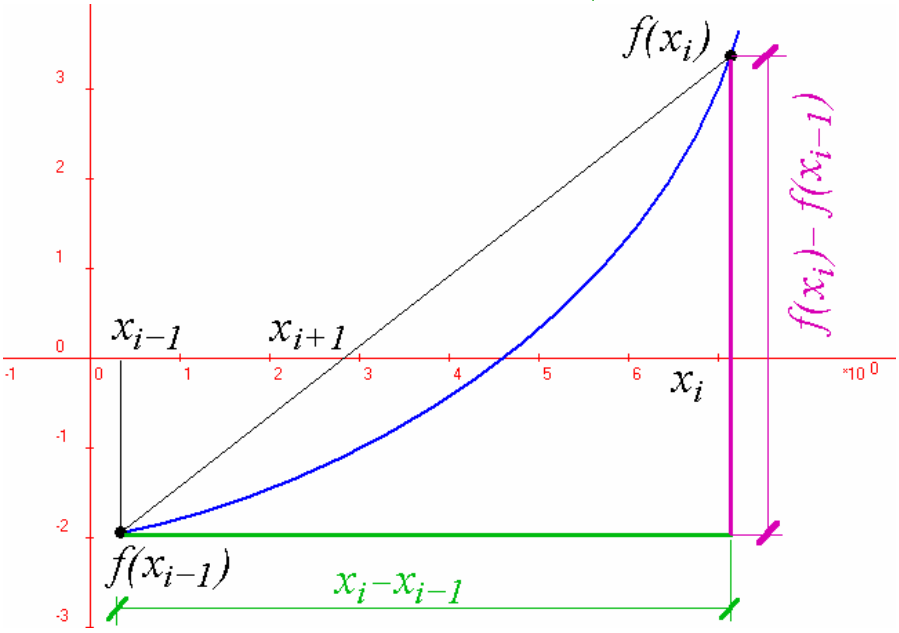


Zpřesňování aproximací:

Aproximace funkce $f(x)$ přímkou p (obecně): $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{k}$

Metoda sečen: p je sečna spojující body $\left[x_{i-1}; f(x_{i-1})\right]; \left[x_i; f(x_i)\right]$ $k = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{k} = \boxed{x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)}$$



Zpřesňování aproximací:

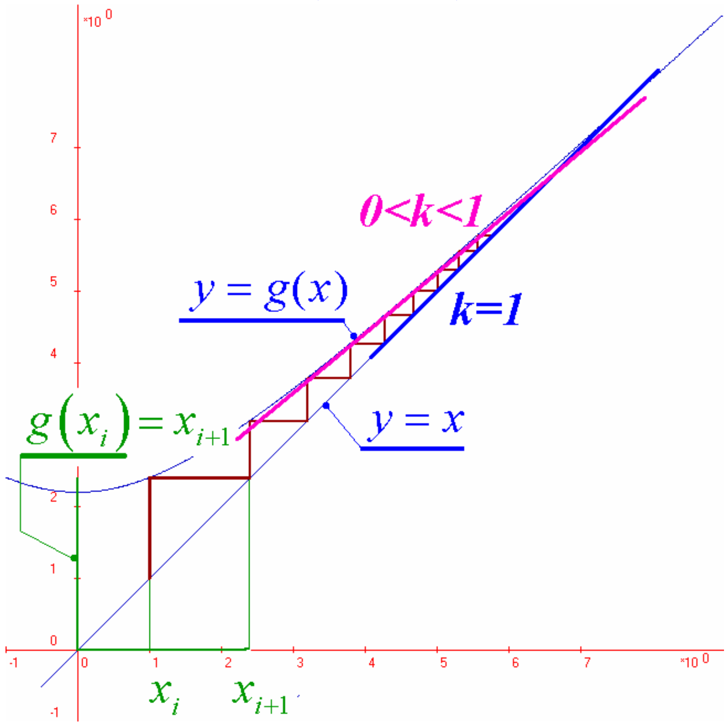
Metoda regula falsi = metoda sečen „hlídající znaménka“

Regula falsi:		**srovnej**	**půlení intervalu**
i-tá sečna	$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$	i-té půlení	$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$
pohlídej znaménko:	$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$	pohlídej znaménko:	$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$
i+1 sečna	$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1} - x_i}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \cdot f(x_{i+1})$	i+1 půlení	$x_{i+2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda: $f(x)=0 \Rightarrow x=g(x)$

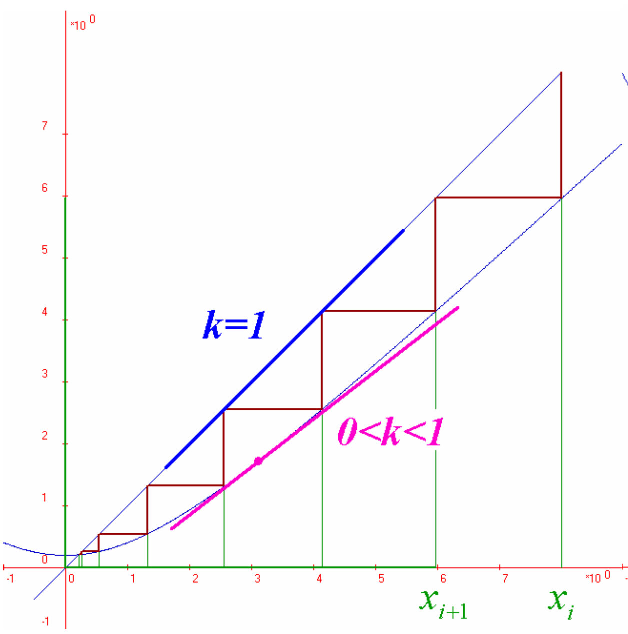
$$\boxed{x_{i+1}=g(x_i)}$$

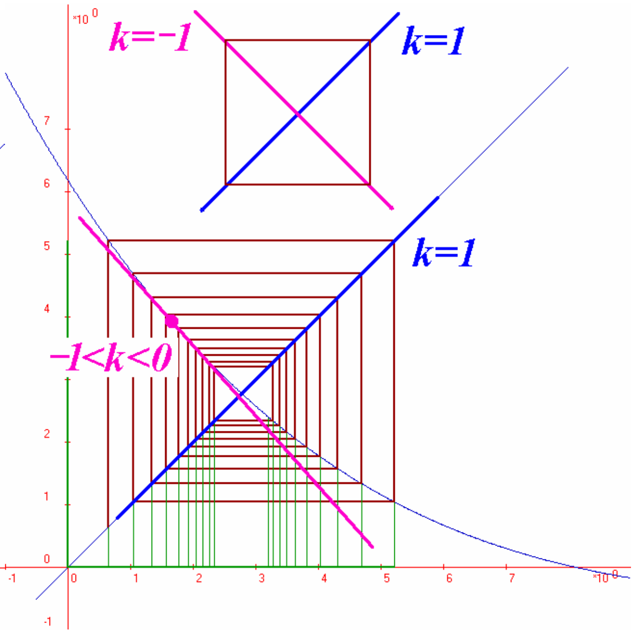


Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda: $f(x)=0 \Rightarrow x=g(x)$

$$\boxed{x_{i+1}=g(x_i)}$$





podmínka konvergence $\boxed{|g'(x)|<1}$

Soustavy nelineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1;x_2;....;x_n) &= 0\\
f_2(x_1;x_2;....;x_n) &= 0\\
&..............................\\
f_n(x_1;x_2;....;x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

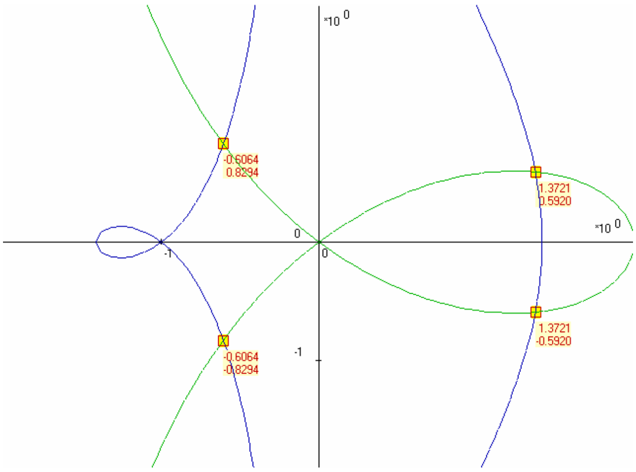
ve dvojrozměrném případě

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 0\\
g(x,y) &= 0
\end{aligned}
$$

Fáze numerického řešení:

1) Separace kořenů
2) Zpřesňování aproximací

1) Separace kořenů:



2) Zpřesňování aproximací:

Newtonova metoda:

$$f(x,y)=0$$

$$g(x,y)=0$$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)}{1!}+\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)\frac{(y-y_0)}{1!}+....$$

$$g(x,y)=g(x_0,y_0)+\frac{\partial}{\partial x}g(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)}{1!}+\frac{\partial}{\partial y}g(x_0,y_0)\frac{(y-y_0)}{1!}+....$$

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)}{1!}+\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)\frac{(y-y_0)}{1!}$$

$$g(x,y)\approx g(x_0,y_0)+\frac{\partial}{\partial x}g(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)}{1!}+\frac{\partial}{\partial y}g(x_0,y_0)\frac{(y-y_0)}{1!}$$

$$f(x_0,y_0)+\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

$$g(x_0,y_0)+\frac{\partial}{\partial x}g(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}g(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

$A \qquad\qquad B$

$$f(x_0,y_0)+\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)A+\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)B=0$$

$$g(x_0,y_0)+\frac{\partial}{\partial x}g(x_0,y_0)A+\frac{\partial}{\partial y}g(x_0,y_0)B=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0)A+\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)B=-f(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial}{\partial x} g(x_0,y_0)A+\frac{\partial}{\partial y} g(x_0,y_0)B=-g(x_0,y_0)$$

$$A=\frac{\begin{vmatrix} -f(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} g(x_0,y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} g(x_0,y_0) \end{vmatrix}} \qquad B=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) & -f(x_0,y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x_0,y_0) & -g(x_0,y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} g(x_0,y_0) \end{vmatrix}}$$

$$x-x_0=\frac{\begin{vmatrix} -f(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} g(x_0,y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} g(x_0,y_0) \end{vmatrix}} \qquad y-y_0=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) & -f(x_0,y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x_0,y_0) & -g(x_0,y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} g(x_0,y_0) \end{vmatrix}}$$

2) Zpřesňování aproximací:

Newtonova metoda:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{\begin{vmatrix} f(x_i,y_i) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_i,y_i) \\ g(x_i,y_i) & \frac{\partial}{\partial y} g(x_i,y_i) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x_i,y_i) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_i,y_i) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x_i,y_i) & \frac{\partial}{\partial y} g(x_i,y_i) \end{vmatrix}} \qquad y=y_i-\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x_i,y_i) & f(x_i,y_i) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x_i,y_i) & g(x_i,y_i) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x_i,y_i) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_i,y_i) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x_i,y_i) & \frac{\partial}{\partial y} g(x_i,y_i) \end{vmatrix}}$$

2) Zpřesňování aproximací:

Metoda prosté iterace:

$$\begin{array}{l} f_1(x_1;x_2;....;x_n)=0 \\ f_2(x_1;x_2;....;x_n)=0 \\ .... \\ f_n(x_1;x_2;....;x_n)=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=g_1(x_1;x_2;....;x_n) \\ x_2=g_2(x_1;x_2;....;x_n) \\ .... \\ x_n=g_n(x_1;x_2;....;x_n) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^{(i+1)}=g_1\left(x_1^{(i)};x_2^{(i)};....;x_n^{(i)}\right) \\ x_2^{(i+1)}=g_2\left(x_1^{(i)};x_2^{(i)};....;x_n^{(i)}\right) \\ .... \\ x_n^{(i+1)}=g_n\left(x_1^{(i)};x_2^{(i)};....;x_n^{(i)}\right) \end{array}$$

Metoda zrychlené iterace:

$$\begin{array}{l} f_1(x_1;x_2;....;x_n)=0 \\ f_2(x_1;x_2;....;x_n)=0 \\ .... \\ f_n(x_1;x_2;....;x_n)=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=g_1(x_1;x_2;....;x_n) \\ x_2=g_2(x_1;x_2;....;x_n) \\ .... \\ x_n=g_n(x_1;x_2;....;x_n) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^{(i+1)}=g_1\left(x_1^{(i)};x_2^{(i)};....;x_n^{(i)}\right) \\ x_2^{(i+1)}=g_2\left(x_1^{(i+1)};x_2^{(i)};....;x_n^{(i)}\right) \\ .... \\ x_n^{(i+1)}=g_n\left(x_1^{(i+1)};x_2^{(i+1)};....;x_n^{(i)}\right) \end{array}$$

Podmínka konvergence:

Alespoň jedna norma matice $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}g_1 & \frac{\partial}{\partial x_2}g_1 & ..... & \frac{\partial}{\partial x_n}g_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}g_2 & \frac{\partial}{\partial x_2}g_2 & ..... & \frac{\partial}{\partial x_n}g_2 \\ ...... & ..... & ..... & ..... \\ \frac{\partial}{\partial x_1}g_n & \frac{\partial}{\partial x_2}g_n & ..... & \frac{\partial}{\partial x_n}g_n \end{pmatrix}$ je menší než jedna.