Počítačová geometrie a grafika

2/2

Přednášky: ***nepovinné, ale důrazně doporučované***

Hodnocení: ***cvičení: max. 20 bodů, a to***

tři rysy	*celkem*	*10 bodů*
tři modely v Rhinoceros	*celkem*	*10 bodů*

podmínky udělení zápočtu:

získání minimálně 10 bodů,
kromě toho aktivní účast na cvičeních
a za každý rys a model min. 1 bod

zkouška: max. 80 bodů, a to

dvě konstrukční úlohy	*20+20 bodů*
výpočetní úloha	*20 bodů*
ústní	*20 bodů*

Celkové hodnocení:

100 – 90 bodů	*A*
89 – 80 bodů	*B*
79 – 70 bodů	*C*
69 –60 bodů	*D*
59 – 50 bodů	*E*
49 – 0 bodů	*F*

Studijní materály: ***matematika online*** *http://mathonline.fme.vutbr.cz/*

Odkaz Počítačová geometrie a grafika

Odkaz Konstruktivní a počítačová geometrie

Skripta: Borecká, K. a kol.: Konstruktivní geometrie, CERM, 2006

Elektronický učební text Martišek, D.: Počítačová geometrie a grafika
http://mathonline.fme.vutbr.cz/Prednaska/sc-1245-sr-1-a-261/default.aspx
Jednotlivé sylaby budou postupně ke stažení na
http://www.math.fme.vutbr.cz/zamestnanci
-> Doc. PaedDr. Dalibor Martišek, PhD. -> Soubory ke stažení

Studentům, kteří neabsolvovali na střední škole deskriptivní geometrii důrazně doporučuji navštěvovat nepovinný předmět Vybrané kapitoly z konstruktivní geometrie

Do 5. přednášky je třeba znát základy:

Mongeova promítání a pravoúhlé axonometrie

a) zobrazení bodu, přímky a roviny ***a) zobrazení bodu, přímky a roviny***

včetně speciálníh poloh - přímka (rovina) kolmá (rovnoběžná) na (s) průmětnu(ou)…

b) sestrojení incidujících útvarů ***b) sestrojení incidujících útvarů***

bod ležící na dané přímce, přímka ležící v dané rovině, bod ležící v dané rovině

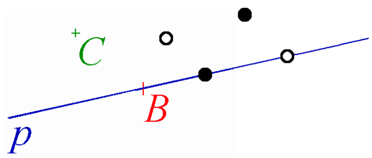
c) základní polohové úlohy ***c) základní polohové úlohy***

hlavní přímky roviny	*hlavní přímky roviny*
daným bodem vést rovnoběžku k dané přímce	*daným bodem vést rovnoběžku k dané přímce*
daným bodem vést rovinu rovnoběžnou s danou rovinou	*daným bodem vést rovinu rovnoběžnou s danou rovinou*
sestrojení průsečnice daných dvou rovin	*sestrojení průsečnice daných dvou rovin*
sestrojení průsečíku dané přímky s danou rovinou	*sestrojení průsečíku dané přímky s danou rovinou*

d) základní metrické úlohy

spádové přímky roviny
daným bodem vést kolmici k dané rovině
daným bodem vést kolmou rovinu k dané přímce
sklápění promítací roviny (např. určení velikosti úsečky)
otáčení obecné roviny (např. sestrojení čtverce v obecné rovině)

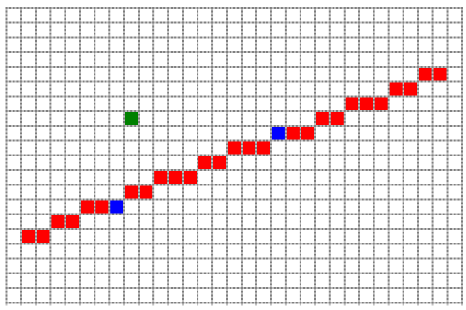
Euklidovský prostor



Základní pojmy:
bod, přímka rovina

Základní vztahy:

bod leží na přímce	*bod inciduje s přímkou*
přímka prochází bodem	*přímka inciduje s bodem*
bod leží v rovině	*bod inciduje s rovinou*
rovina prochází bodem	*rovina inciduje s bodem*
přímka leží v rovině	*přímka inciduje s rovinou*
(rovina prochází přímkou)	*rovina inciduje s přímkou*



Základní vlastnosti
Axiomy incidence

I 1. *Dvěma různými body prochází jediná přímka.*

I 2. *Na každé přímce leží alespoň dva body.* $[2;3]$ $y=4x-5$

I 3. *Existují alespoň tři body, které neleží na jedné přímce.* $3=4\cdot 2-5$ *pravda*

Axiomy uspořádání

U 1. *Jestliže* $C\mu AB$, *pak* $A;B;C$ *jsou tři navzájem různé body téže přímky a platí také* $C\mu BA$

U 2. *Ke každým dvěma různým bodům* $A;B$ *existuje alespoň jeden bod* C *tak, že* $C\mu BA$

U 3. *Pro každé tři různé body téže přímky platí, že právě jeden z nich leží mezi zbylými dvěma.*

U 4. (Paschův)*:* *Jsou-li* $E;F;G$ *nekolineární body* p *je přímka, která neprochází body* $E;F;G$ *a na které leží bod* $M\mu EF$. *Pak existuje bod* N, *který leží na* p *a platí buď* $N\mu EG$, *anebo* $N\mu FG$

Axiomy shodnosti

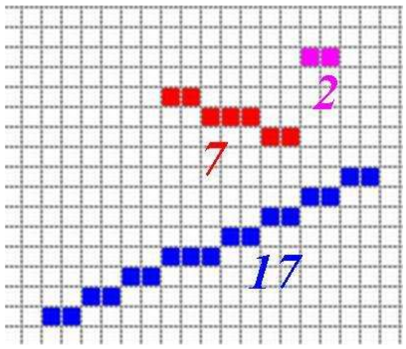
S 1: Shodnost úseček je reflexivní, symetrická a tranzitivní

S 2: Nechť AB je úsečka CD polopřímka. Pak na CD leží právě jeden bod E tak, že $AB \cong CE$.

S 3: Nechť $C\mu AB$; $C'\mu A'B'$; $AC \cong A'C'$; $CB \cong C'B'$. Pak $AB \cong A'B'$.

S4: Shodnost úhlů je reflexivní, symetrická a tranzitivní

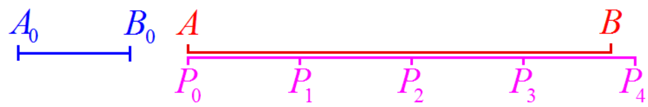
S5: Pro každý $\sphericalangle AVB$ a každou polorovinu $A'V'M$ existuje jediná polopřímka $V'B'$ tak, že $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle A'V'B'$



Velikost (délka) úsečky, vzdálenost bodů

* Délka každé úsečky je kladná
* Délky shodných úseček jsou si rovny
* Je-li $C\mu AB$, pak $|AC|+|CB|=|AB|$
* Existuje úsečka délky jedna.

A (Archimedův axiom): Nechť A_0B_0; AB jsou libovolné úsečky. Na polopřímce AB sestrojme posloupnost $P_0;P_1;...;P_k;....=\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tak, že $P_0=A$; $P_kP_{k+1}\cong A_0B_0$. Pak existuje $n\in\mathbb{N}$ tak, že $B\mu AP_n$.



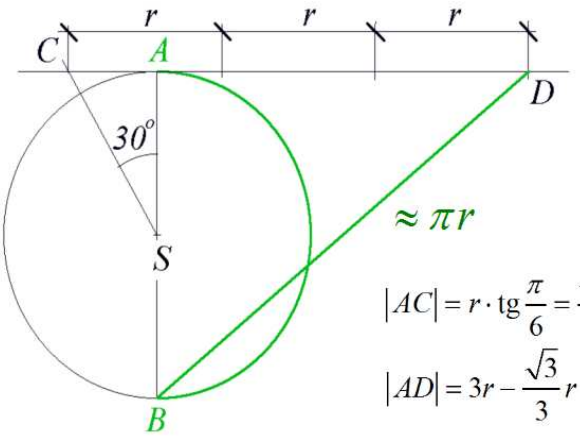
Axiom rovnoběžnosti

E (Euklidův axiom): Bodem A neležícím na přímce p prochází právě jedna přímka a, která leží v rovině pA a s přímkou p nemá společný žádný bod.

Modely euklidovského prostoru

Syntetický – euklidovské konstrukce	**analytický** (analytická geometrie)	
pravítko, kružítko (PK geometrie)		
	bod	$[a_1;a_2]$
Konstrukce čtverce	průsečík přímek	$y=k_1x+q_1$ $y=k_2x+q_2$
rektifikace kružnice	průsečík kružnic	$(x-m_1)^2+(y-n_1)^2=r_1^2$
kvadratura kruhu		$(x-m_2)^2+(y-n_2)^2=r_2^2$
zdvojení krychle		

Rektifikace kruhového oblouku (Kochańského)



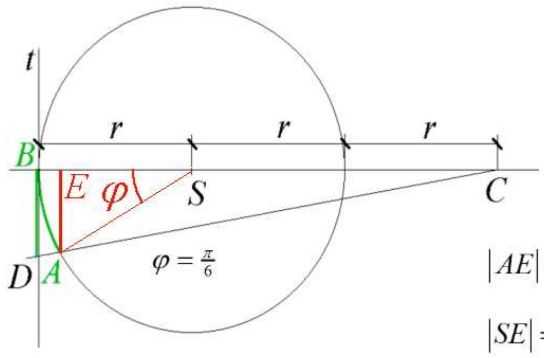
$$|AC| = r \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}r$$

$$|AD| = 3r - \frac{\sqrt{3}}{3}r = \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot r$$

$$|BD| = \sqrt{|AB|^2 + |AD|^2} = \sqrt{4r^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot r^2} = \sqrt{13 - 2\sqrt{3} + 3^{-1}} \cdot r \approx 3{,}141\ 533\ldots \cdot r$$

$$\pi = 3{,}141\ 592\ldots$$

Rektifikace kruhového oblouku (Sobotkova)



$$|AE| = r \cdot \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2}\cdot r$$

$$|SE| = r \cdot \cos\frac{\pi}{6} = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$|EC| = 2r + r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r \cdot \frac{4+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{|BD|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|EC|} \Rightarrow |BD| = \frac{|BC|}{|EC|}\cdot|AE| = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4+\sqrt{3}}\cdot 3 \cdot r = \frac{3}{4+\sqrt{3}}\cdot r \approx 0{,}523\ 372\ldots \cdot r$$

$$\tfrac{1}{6}\pi r = 0{,}523\ 598\ldots \cdot r$$

Euklidovský prostor

Incidence	Uspořádání	Shodnost	Rovnoběžnost	Spojitost
I1. I2. I3. .	U1. U2. U3. U4.	S1 S2 S3 S4 S5 S6 A	E	D (Dedekindův axiom)

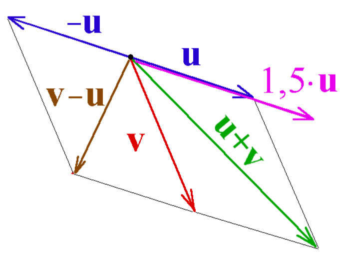
+ šest dalších axiomů incidence:

I4: Každými třemi body, které neleží na jedné přímce, prochází právě jedna rovina
I5: V každé rovině leží alespoň jeden bod
I6: Jestliže v rovině leží dva různé body téže přímky, pak v této rovině leží celá přímka
I7: Jestliže bod leží na přímce a tato přímka v rovině, pak bod leží v této rovině
I8: Existují alespoň čtyři body, které neleží v jedné rovině
I9: Jestliže dvě roviny mají společný bod, mají společnou přímku, která tímto bodem prochází.

Vektorový prostor

Syntetický model

množina všech orientovaných úseček se společným počátkem



Analytický model

množina všech uspořádaných dvojic resp. trojic reálných čísel

$$\mathbf{u}=(u_1;u_2) \qquad \mathbf{v}=(v_1;v_2)$$

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1;u_2)+(v_1;v_2)=(u_1+v_1;u_2+v_2)$$
$$c\cdot\mathbf{u}=c\cdot(u_1;u_2)=(c\cdot u_1;c\cdot u_2)$$

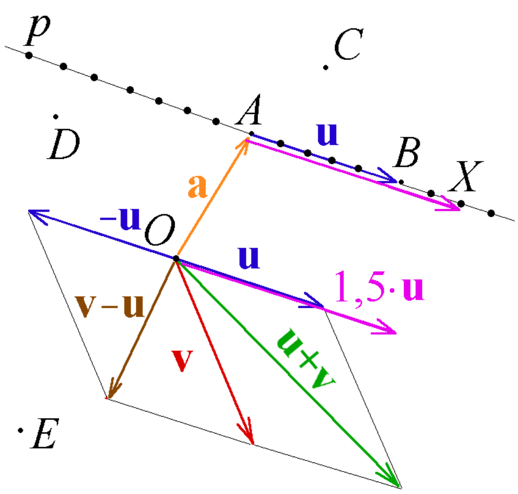
$$\mathbf{u}=(u_1;u_2;u_3) \qquad \mathbf{v}=(v_1;v_2;v_3)$$

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1;u_2;u_3)+(v_1;v_2;v_3)=(u_1+v_1;u_2+v_2;u_3+v_3)$$
$$c\cdot\mathbf{u}=c\cdot(u_1;u_2)=(c\cdot u_1;c\cdot u_2)$$

Afinní prostor

= vektorový prostor, ke kterému se „přidá“ množina bodů

Syntetický model



$p \equiv \langle A;\mathbf{u}\rangle$

Analytický model (axiomy I, U, R, Sp)

$B = A + \mathbf{u}$

$B = [b_1;b_2] = [a_1;a_2] + (u_1;u_2) = [a_1+u_1;a_2+u_2]$

$B = [a_1;a_2;a_3] + (u_1;u_2;u_3) = [a_1+u_1;a_2+u_2;a_3+u_3]$

$\mathbf{u} = B - A$

$\mathbf{u} = (u_1;u_2) = [b_1;b_2] - [a_1;a_2] = (b_1-a_1;b_2-a_2)$

$\mathbf{u} = [b_1;b_2;b_3] - [a_1;a_2;a_3] = (b_1-a_1;b_2-a_2;a_3-b_3)$

$\mathbf{a} = A - O$

$\mathbf{a} = [a_1;a_2] - [0;0] = (a_1;a_2)$

$\mathbf{u} = [a_1;a_2;a_3] - [0;0;0] = (a_1;a_2;a_3)$

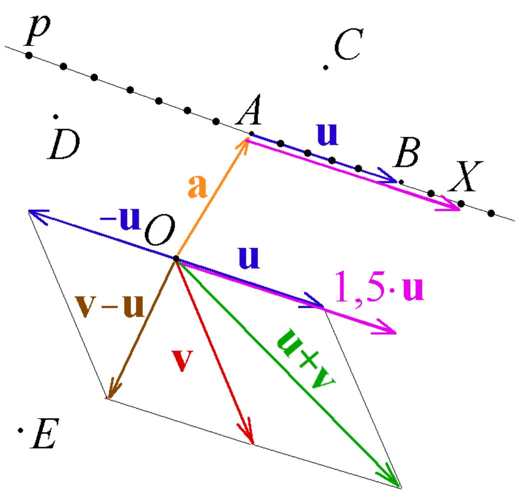
$p \equiv X = A + t\cdot\mathbf{u};\ t \in$ ˇ

$p \equiv [x_1;x_2] = [a_1+t\cdot u_1;a_2+t\cdot u_2]$ $\quad x_1 = a_1 + t\cdot u_1$

$x_2 = a_2 + t\cdot u_2$

Euklidovský prostor *= afinní prostor, který „umí“ měřit úsečky (axiomy I, U, S, R, Sp)*

Syntetický model



$\mathbf{u}\perp\mathbf{v} \iff \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$

Analytický model

$\mathbf{u} = (u_1;u_2);\ \mathbf{v} = (v_1;v_2);\Rightarrow \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

$\mathbf{u} = (u_1;u_2;u_3);\ \mathbf{v} = (v_1;v_2;v_3);\Rightarrow \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

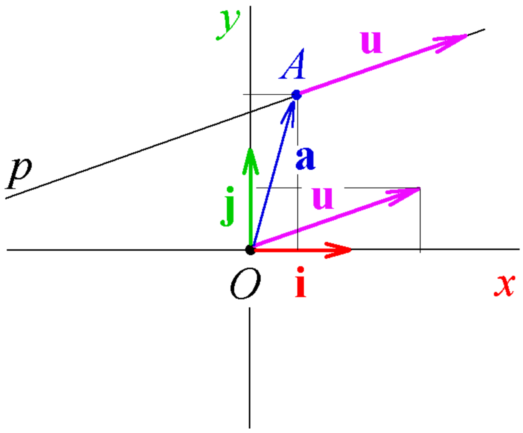
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \begin{cases} \sqrt{u_1u_1 + u_2u_2} & = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \\ \sqrt{u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3} & = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \end{cases}$$

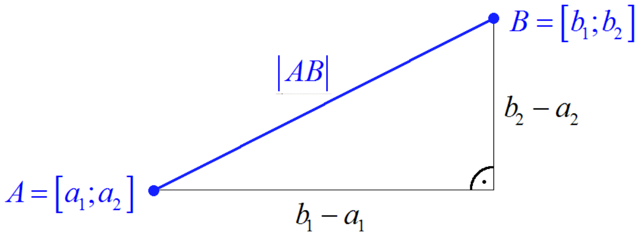
$|AB| = \|B - A\| =$

$$= \begin{cases} \|(b_1-a_1;b_2-a_2)\| & = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2} \\ \|(b_1-a_1;b_2-a_2;b_3-a_3)\| & = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2} \end{cases}$$

Euklidovský prostor - *zavedení souřadnic*

Syntetický model





Analytický model

$\mathbf{u} = (u_1; u_2);\ \mathbf{v} = (v_1; v_2); \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

$\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3);\ \mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3); \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \begin{cases} \sqrt{u_1 u_1 + u_2 u_2} & = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \\ \sqrt{u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3} & = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \end{cases}$$

$$|AB| = \|B - A\| = \begin{cases} \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \\ \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \end{cases}$$

$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

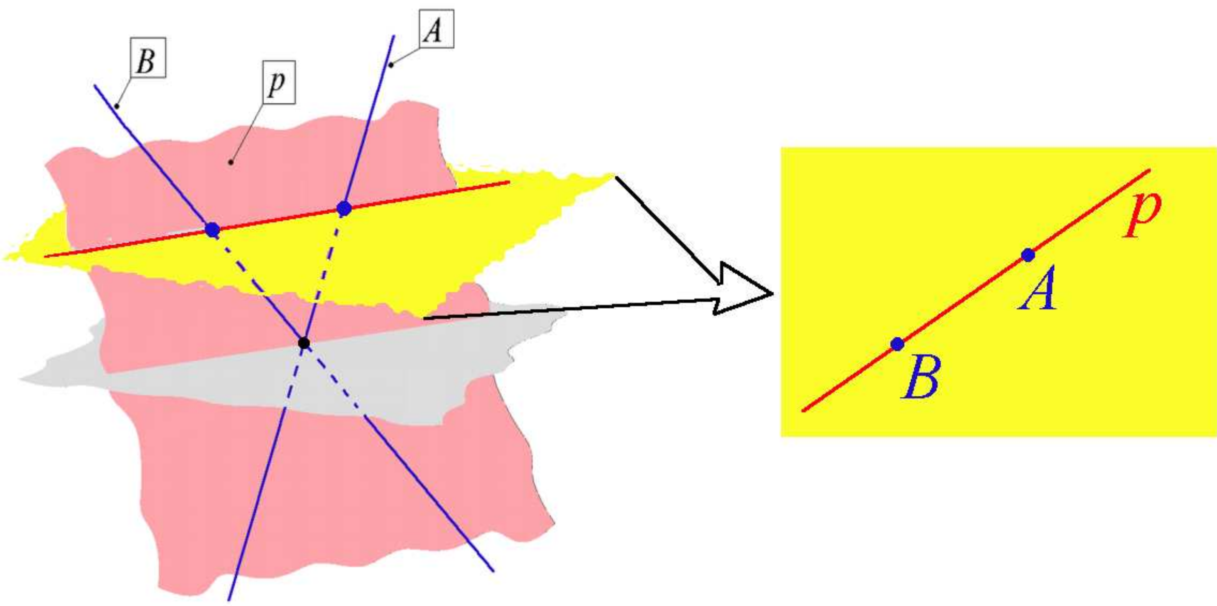
$p \equiv X = A + t \cdot \mathbf{u};\ t \in$ ˇ $\qquad p \equiv \langle A; \mathbf{u} \rangle$

$x \equiv \langle O; \mathbf{i} \rangle \qquad y \equiv \langle O; \mathbf{j} \rangle \qquad \langle O; \mathbf{i}; \mathbf{j} \rangle$

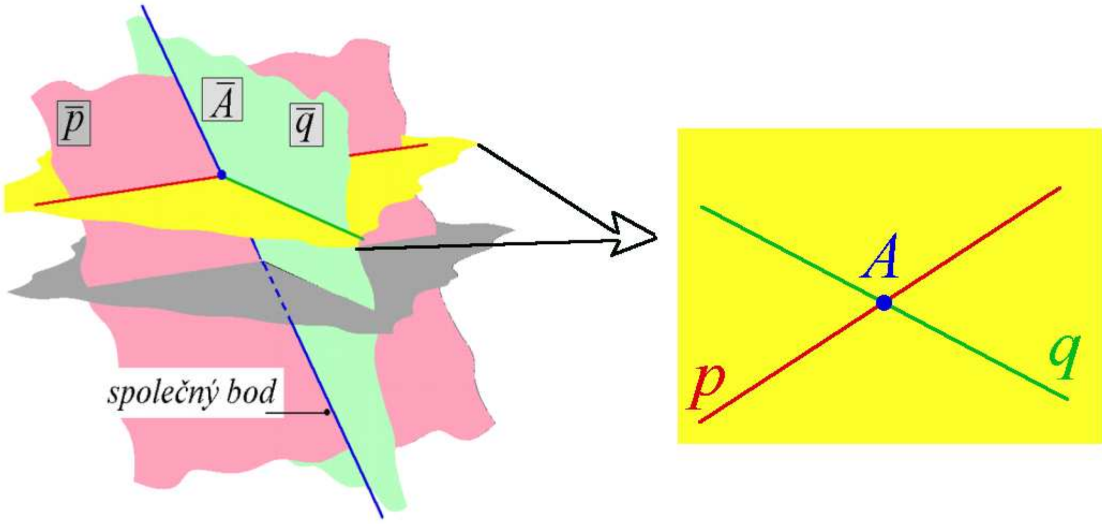
$\mathbf{u} = u_1 \cdot \mathbf{i} + u_2 \cdot \mathbf{j} = (u_1; u_2)$

$A = O + \mathbf{a} = O + a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j} = [a_1; a_2]$

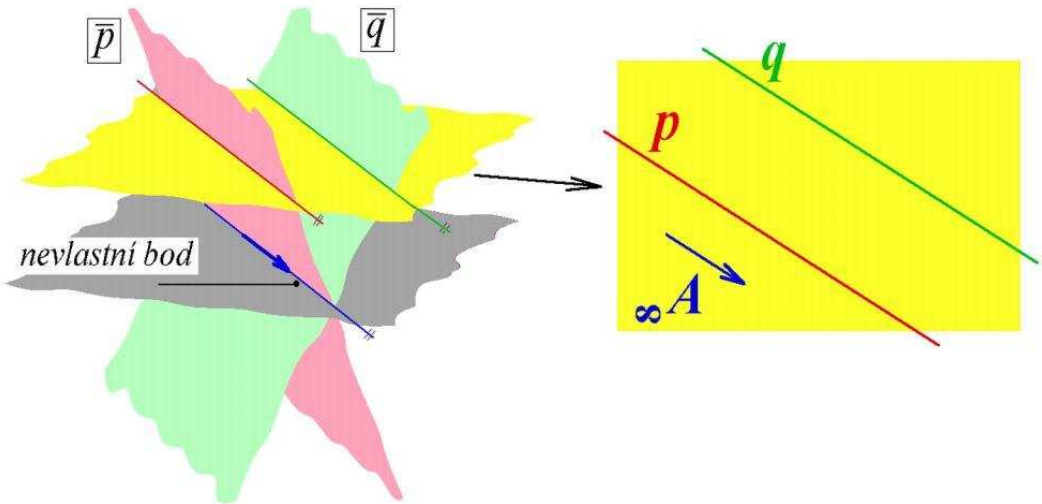
Projektivní rovina - *syntetický model*



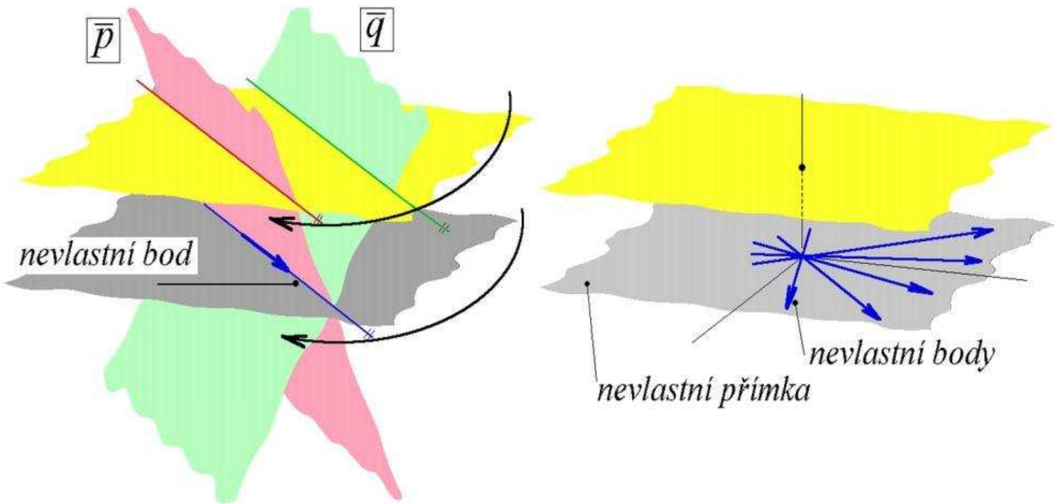
Projektivní rovina - syntetický model



Projektivní rovina - syntetický model



Projektivní rovina - syntetický model



Projektivní rovina - analytický model

Projektivní bod = množina všech směrových vektorů přímky

vlastní body

$A = k \cdot \mathbf{a} = k \cdot (a_1; a_2; \omega_A)$

$B = k \cdot \mathbf{b} = k \cdot (b_1; b_2; \omega_B)$ $\quad \omega \neq 0$

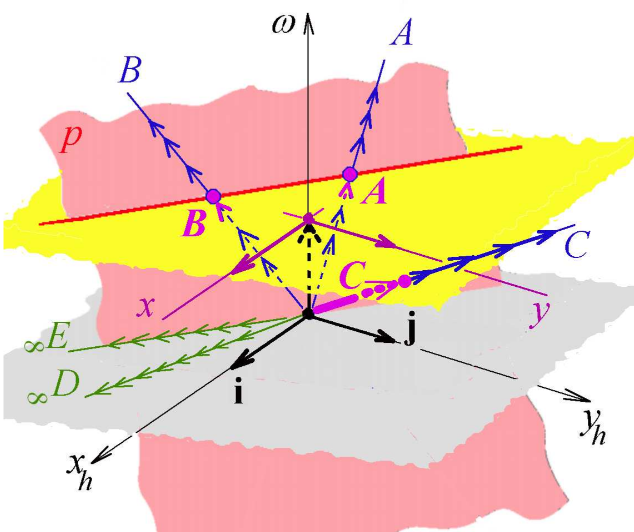
$C = k \cdot \mathbf{c} = k \cdot (c_1; c_2; \omega_C)$

výběr reprezentanta vlastního bodu:

$C = (kc_1; kc_2; k\omega_C)$; $k \neq 0;\ \omega_C \neq 0 \Rightarrow$

euklidovský reprezentant $\quad \boldsymbol{C} = (c_1; c_2; 1)$

v E_2 bod s kartézskými souř. $C = [c_1; c_2]$



nevlastní body

$_\infty D = k \cdot \mathbf{d} = k \cdot (d_1; d_2; 0)$ $\quad \omega = 0$

$_\infty E = k \cdot \mathbf{e} = k \cdot (e_1; e_2; 0)$

Projektivní rovina - analytický model (shrnutí)

1. Vlastní bod $A = k \cdot \mathbf{a} = k \cdot (a_1; a_2; \omega_A)$; $\omega_A \neq 0$

   možno reprezentovat
   euklidovským reprezentantem $A = (a_1; a_2; 1)$ homogenní souřadnice

   v euklidovské rovině
   mu odpovídá bod $A = [a_1; a_2]$ kartézské souřadnice

2. Nevlastní bod = směr, ${}_\infty V = k \cdot \mathbf{v} = k \cdot (v_1; v_2; \omega_V)$; $\omega_V = 0$

   možno reprezentovat
   libovolným nenulovým vektorem $\mathbf{v} = (v_1; v_2; 0)$ homogenní souřadnice

   v euklidovské rovině libovolný
   směrový vektor $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$ kartézské souřadnice

Značení: euklidovská rovina E^2
projektivní rovina ${}_\infty E^2$

Podobně: projektivní prostor - analytický model

1. Vlastní bod $A = k \cdot \mathbf{a} = k \cdot (a_1; a_2; a_3; \omega_A)$; $\omega_A \neq 0$

   možno reprezentovat
   euklidovským reprezentantem $A = (a_1; a_2; a_3; 1)$ homogenní souřadnice

   v euklidovské rovině
   mu odpovídá bod $A = [a_1; a_2; a_3]$ kartézské souřadnice

2. Nevlastní bod = směr, ${}_\infty V = k \cdot \mathbf{v} = k \cdot (v_1; v_2; v_3; \omega_V)$; $\omega_V = 0$

   možno reprezentovat
   libovolným nenulovým vektorem $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3; 0)$ homogenní souřadnice

   v euklidovské rovině libovolný
   směrový vektor $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$ kartézské souřadnice

Značení: euklidovský prostor E^3
projektivní prostor ${}_\infty E^3$

Bod a vektor

v afinní rovině (prostoru) | **v projektivní rovině (prostoru)**

$A + \mathbf{u} = X$ $\qquad$ $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + \mathbf{u}$

$[a_1; a_2] + (u_1; u_2) = [a_1 + u_1; a_2 + u_2] = [x_1; x_2]$ $\qquad$ $(a_1; a_2; 1) + (u_1; u_2; 0) = (a_1 + u_1; a_2 + u_2; 1) = (x_1; x_2; 1)$

Součet bodu a vektoru je vektor

$X - A = \mathbf{u}$ $\qquad$ $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X} = \mathbf{u}$

$[x_1; x_2] - [a_1; a_2] = (x_1 - a_1; x_2 - a_2) = (u_1; u_2)$ $\qquad$ $(x_1; x_2; 1) - (a_1; a_2; 1) = (x_1 - a_1; x_2 - a_2; 0) = (u_1; u_2; 0)$

Rozdíl dvou bodů je vektor

$$c_1(a_{11}; a_{12}; 1) + c_2(a_{21}; a_{22}; 1) + \ldots + c_n(a_{n1}; a_{n2}; 1) = (x; y; c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \Leftrightarrow c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 1$$

$$c_1\boldsymbol{A}_1 + c_2\boldsymbol{A}_2 + c_3\boldsymbol{A}_3 + \ldots + c_i\boldsymbol{A}_i + \ldots + c_n\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{B} \qquad c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 1$$

Afinní kombinací bodů je bod

$$c_1(t)\cdot(a_{11}; a_{12}; 1) + c_2(t)\cdot(a_{21}; a_{22}; 1) + \ldots + c_n(t)\cdot(a_{n1}; a_{n2}; 1) = (x_1(t); x_2(t); 1)$$

Afinní kombinace bodů určená funkcemi jedné proměnné $\Rightarrow$ v CAD systému křivka určená řídicím polygonem. Tři (čtyři) projektivní souřadnice $\Rightarrow$ rovinná (prostorová) křivka.

$$c_1(u,v)\cdot(a_{11}; a_{12}; a_{13}; 1) + \ldots + c_n(u,v)\cdot(a_{n1}; a_{n2}; a_{n2}; 1) = (x_1(u,v); x_2(u,v); x_3(u,v); 1)$$

Afinní kombinace bodů určená funkcemi dvou proměnných $\Rightarrow$ v CAD systému křivka určená řídicím polygonem