Predikátová logika (cvičení)

Základní pojmy

(1) Nechť L je jazyk, jenž se skládá z rovnosti $=$ a binárního predikátového symbolu p.

(a) Uvažujme realizaci $\mathcal{M}$ jazyka L na množině $\mathbb{N}$, kde

$$p_{\mathcal{M}}(i,j) \Leftrightarrow i+1=j.$$

Definujme formule
$\phi \equiv (\forall x)(\forall y)((p(x,y) \wedge p(y,x)) \Rightarrow x=y)$,
$\psi \equiv (p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(x,z)$. Rozhodněte, zda platí $\mathcal{M} \models \phi$, $\mathcal{M} \models \psi$. (tj. je formule ϕ resp. ψ splněna v realizaci $\mathcal{M}$?)

(b) Najděte realizaci N jazyka L, kde $\mathcal{N} \not\models \phi$ pro ϕ z předchozího příkladu.

(c) Nechť $\mathcal{M}$ je realizace jazyka L s univerzem $\mathbb{Z}$, kde

$$p_{\mathcal{M}}(i,j) \Leftrightarrow i \leq j.$$

Uvažujme teorii $T = \{(p(x,y) \wedge p(y,x)) \Rightarrow x=y, p(x,x), (p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(x,z)\}$. Rozhodněte, zda platí:

(i) $\mathcal{M} \models T$ (Je $\mathcal{M}$ modelem teorie T?)
(ii) $\mathcal{M} \models \chi$ pro $\chi \equiv (\forall x)(\exists y)(\neg y = x \wedge p(x,y))$
(iii) $T \models \chi$ (Je χ důsledkem teorie T?)

(d) Nechť $\mathcal{N}$ je realizace jazyka L na univerzu $\mathbb{Z}$, kde

$$p_{\mathcal{M}}(i,j) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) k \cdot i = j.$$

(Píšeme $i \mid j$, čteme "i dělí j".) Rozhodněte, zda platí:

(i) $\mathcal{N} \models T$, kde T je teorie z předch. příkl.
(ii) $\mathcal{N} \models \phi$ pro $\phi \equiv (\exists x)(\forall y) p(x,y)$
(iii) $\mathcal{N} \models \chi$ pro $\chi \equiv (\exists x)(\forall y) p(y,x))$

(2) Nechť K je jazyk s rovností, binárním predikátovým symbolem p a binárním funkčním symbolem f.

(a) Najděte realizace $\mathcal{M}$ jazyka K splňující formuli $\phi_1 \equiv p(x, f(x,x))$, $\phi_2 \equiv p(x, f(x,y))$

(b) Nechť $\mathcal{M}$ je realizace jazyka K s nosnou množinou $\mathbb{N}$, kde $p_{\mathcal{M}}(i,j) \Leftrightarrow i \mid j$ a $f_{\mathcal{M}}(i,j) = i+j$. Rozhodněte, zda platí:

(i) $\mathcal{M} \models \phi_1$, $\mathcal{M} \models \phi_2$
(ii) $\mathcal{M} \models T$ (T z předch. příkladu)
(iii) $\mathcal{M} \models \{p(x,y) \Rightarrow (\forall z) p(f(x,z), f(y,z))\}$
(iv) $\mathcal{M} \models \{p(x,y) \Rightarrow (\forall z) p(x, f(y,z))\}$
(v) $S = T \cup \{\phi_2\}$ z předch. části, pak $\mathcal{M} \models S$
(vi) $S \models \{p(x,y) \Rightarrow (\forall z) p(x, f(y,z))\}$

(c) Nechť $\mathcal{M}$ je realizace jazyka K na univerzu $\mathcal{P}(3)$, kde $p_{\mathcal{M}}(A,B) \Leftrightarrow A \subseteq B$ a $f_{\mathcal{M}}(A,B) = A \cap B$. Rozhodněte, zda platí $\mathcal{M} \models T$.

(d) Uveďte axiom ϕ, který zaručí, že každé 2 množiny mají v univerzu $M \subseteq \mathcal{P}(3)$ sjednocení.

(e) Uveďte nějaký další model teorie $T \cup \{\phi\}$ jako realizaci jazyka K.

Řešení

(1) (a) $\mathcal{M} \models \phi$, neboť formule $p(x,y) \wedge p(y,x)$ v této realizaci nemůže být splněna (nenastane $i+1=j$ a současně $j+1=i$ pro jakékoliv $i,j \in \mathbb{N}$)
$\mathcal{M} \not\models \phi$, neboť $p_{\mathcal{M}}(i,j) \wedge p_{\mathcal{M}}(j,k)$ je splněno například trojicí $i=1, j=2, k=3$, přičemž neplatí $p_{\mathcal{M}}(i,k)$.
(b) Příkladů je mnoho, třeba $\mathbb{N}$, kde $p_{\mathcal{M}}(i,j) \Leftrightarrow i \neq j$.
(c) (i) $\mathcal{M} \models T$ - $\mathcal{M}$ je uspořádaná množina a T je přesně teorie uspořádaných množin.
(ii) $\mathcal{M} \models \chi$, χ je podmínka, že nad každým prvkem je nějaký ostře větší, což zde platí.
(iii) $T \not\models \chi$, neboť tato podímnka není splněna například na množině $\{0,1\}$, kde je každý prvek srovnatelný pouze sám se sebou, přitom se jedná o model teorie T.
(d) (i) $\mathcal{N} \not\models T$, není splněna antisymetrie. Např. $3|-3$ a současně $-3|3$, protože $3 \cdot (-1) = -3$ a $(-3)\cdot(-1) = 3$ a $3 \neq -3$.
(ii) $\mathcal{N} \models \phi$, neboť prvek 1 má požadovanou vlastnost $(\forall j)\, 1|j$ (poněvadž $1 \cdot j = j$).
(iii) $\mathcal{N} \models \chi$, neboť prvek 0 má požadovanou vlastnost $(\forall j)\, j|0$ (poněvadž$j \cdot 0 = 0$).

(2) (a) Například $\mathbb{N}$, kde $p_{\mathcal{M}}(i,j) \Leftrightarrow i \leq j$, a $f_{\mathcal{M}}(i,j) = i+j$. Pak zřejmě $\forall i,j \in \mathbb{N}$ platí $i \leq i+i$ a $i \leq i+j$.
(b) (i) $\mathcal{M} \models \phi_1$, neboť $\forall i \in \mathbb{N}$, $i \cdot 2 = i+i$, tedy $i|i+i$. Naopak $\mathcal{M} \not\models \phi_2$, protože např. $2 \not| 2+3$.
(ii) $\mathcal{M} \models T$ (T z předch. příkladu) platí, protože jsou splněny podmínky uspořádání, zejména: $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $i|i$, protože $i \cdot 1 = i$;
$i,j \in \mathbb{N}$, $i|j$ a $j|i$, pak $\exists k,l \in \mathbb{N}$ takové, že $i \cdot k = j$ a $j \cdot l = i$. Tedy $i = i \cdot k \cdot l$, a protože $k,l \in \mathbb{N}$, $k = l = 1$ a tedy $i = j$;
$i,j,k \in \mathbb{N}$, $i|j$ a $j|k$, pak $\exists l,m \in \mathbb{N}$ takové, že $i \cdot l = j$ a $j \cdot m = k$. Tedy $k = i \cdot l \cdot m = i \cdot (l \cdot m)$, tedy $i|k$.
(iii) $\mathcal{M} \not\models \{p(x,y) \Rightarrow (\forall z)p(f(x,z), f(y,z))\}$, protože např. $2|4$, ale $2+1 \not| 4+1$.
(iv) $\mathcal{M} \not\models \{p(x,y) \Rightarrow (\forall z)p(x, f(y,z))\}$, protože $2|4$, ale $2 \not| 4+1$
(v) $\mathcal{M} \not\models S$, protože $\mathcal{M} \not\models \phi_2$.
(vi) $S \models \{p(x,y) \Rightarrow (\forall z)p(x, f(y,z))\}$ - dokážeme následovně. Označme $\chi \equiv p(x,y) \Rightarrow (\forall z)p(x, f(y,z))$. Nechť $\mathcal{N}$ je model teorie S s nosnou množinou X. Nechť $i,j \in X$ a platí $p_{\mathcal{N}}(i,j)$. Protože na $\mathcal{N}$ je splněna formule ϕ_2, $\forall k \in X$ platí též $p_{\mathcal{N}}(j, f_{\mathcal{N}}(j,k))$. Platí tedy konjunkce $p_{\mathcal{N}}(i,j) \wedge p_{\mathcal{N}}(j, f_{\mathcal{N}}(j,k))$ a z tranzitivity $(p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(x,z)$ dostáváme $p_{\mathcal{N}}(i, f_{\mathcal{N}}(j,k))$, tedy platí $p_{\mathcal{N}}(i,j) \Rightarrow (\forall k \in X)p_{\mathcal{N}}(i, f_{\mathcal{N}}(j,k))$ a formule χ je tedy splněna v modelu $\mathcal{N}$. Je tedy důsledkem teorie S.
(c) $\mathcal{M} \models T$. Platí, protože $A \in \mathcal{P}(3) \Leftrightarrow A \subseteq 3$ a tedy $\forall A \subseteq 3$ platí $A \subseteq A$;
$A,B \subseteq 3$, $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$, pak každý prvek množiny A je prvkem množiny B a naopak, A a B mají tedy stejné prvky, tedy $A = B$;
$A,B,C \subseteq 3$, $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, tedy každý prvek množiny B je prvkem množiny C a každý prvek množiny A je prvkem množiny B, tedy každý prvek množiny A je prvkem množiny C, tj. $A \subseteq C$.
(d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(p(x,z) \wedge p(y,z) \wedge (\forall u)((p(x,u) \wedge p(y,u)) \Rightarrow p(z,u)))$
(e) Např. $\mathbb{N}$, kde p je definováno jako uspořádání podle velikosti a f je libovolné - třeba konstantní $f(i,j) = 1$ $\forall i,j \in \mathbb{N}$.

Prenexní tvary a důkazy

(1) Prenexní tvary
   (a) Převeďte do prenexního tvaru:
      (i) $(\forall x)(\exists y)\phi(x,y) \wedge (\exists x)(\forall z)(\psi(x) \Rightarrow \phi(x,y))$
      (ii) $p(x,y) \Rightarrow (\forall z)p(x,f(y,z))$
      (iii) $(\forall y)((\forall x)\phi(x,y) \Rightarrow \psi(x,z)) \Rightarrow (\forall x)((\forall u)\phi(u,x) \wedge (\exists z)\psi(x,z)))$
   (b) Vyjádřete formulí jazyka usp. množin v prenexním tvaru, že
      (i) každé 2 prvky mají suprémum.
      (ii) množina má právě 2 maximální prvky.
   (c) Vyjádřete formulí jazyka elementární aritmetiky $(=, S, +, \cdot, 0)$ v prenexním tvaru následující věty chápané ve standardním modelu:
      (i) Každý prvek je lichý nebo roven 2.
      (ii) Prvek x je prvočíslo.
      (iii) Existuje právě jeden prvek takový, že přičtením ho k 1 dostaneme 2.

(2) Důkazy
   (a) Prveďte důkaz formule $\alpha \Rightarrow \neg(\beta \Rightarrow \neg\gamma)$ z předpokladů $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha \Rightarrow \gamma$. Použijte pravidlo skládání implikací, dvojí negace a tautologii $(*) \vdash (\neg\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \phi$.
   (b) Proveďte důkaz formule $p(x,y) \Rightarrow (\forall z)p(x,f(y,z))$ z předpokladů $p(x,y) \Rightarrow (p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$ a $(\forall x)(\forall y)p(x,f(x,y))$.

Řešení

(1) Prenexní tvary
  (a) (i) $(\forall x)(\exists z)(\exists u)\phi(x,z) \wedge (\psi(u) \Rightarrow \phi(u,y))$
    (ii) $(\forall z)p(x,y) \Rightarrow p(x, f(y,z))$
    (iii) Po přejmenování proměnných:
    $(\forall y)((\forall v)\phi(v,y) \Rightarrow \psi(x,z)) \Rightarrow (\forall w)((\forall u)\phi(u,w) \wedge (\exists r)\psi(w,r)))$.
    Prenexní tvar: $(\exists y)(\forall v)(\forall w)(\forall u)(\exists r)((\phi(v,y) \Rightarrow \psi(x,z)) \Rightarrow (\phi(u,w)\wedge\psi(w,r)))$
  (b) (i) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(x \leq z \wedge y \leq \wedge((x \leq u \wedge y \leq u) \Rightarrow z \leq u))$
    (ii) $(\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists x)((y \leq x \wedge \neg(x \leq y)) \vee z = x \vee z = y)$
  (c) (i) x je lichý: $(\forall y)\neg(x = y + y)$, číslo 2 je realizace termu $S(S(0))$
    hledaná formule v pr. tv. $(\forall x)(\forall y)(\neg(x = y + y) \vee x = S(S(0))$.
    (ii) $(\forall x)(\forall y)(x = y \cdot z \Rightarrow (y = x \vee z = x)))$
    (iii) $(\exists x)(\forall y)(x + S(0) = S(S(0)) \wedge (y + S(0) = S(S(0)) \Rightarrow y = x))$

(2) Důkazy
  (a) Máme dokázat $\alpha \Rightarrow \beta, \alpha \Rightarrow \gamma \vdash \alpha \Rightarrow \neg(\beta \Rightarrow \neg\gamma)$
    (i) Vezmeme jako předpoklady formule $\alpha \Rightarrow \beta$ a $\beta \Rightarrow \neg\gamma$
    (ii) Dle pravidla skládání implikací pak máme $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \neg\gamma \vdash \alpha \Rightarrow \neg\gamma$
    (iii) Axiom (3): $\vdash (\alpha \Rightarrow \neg\gamma) \Rightarrow (\neg\neg\gamma \Rightarrow \neg\alpha)$
    (iv) Pravidlo odloučení (modus ponens) a pravidlo dvojí negace dává
    $\alpha \Rightarrow \neg\gamma \vdash \gamma \Rightarrow \neg\alpha$
    (v) Celkem tedy máme z bodů (ii) a (iv): $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \neg\gamma \vdash \gamma \Rightarrow \neg\alpha$
    (vi) Skládání implikací: $\alpha \Rightarrow \gamma, \gamma \Rightarrow \neg\alpha \vdash \alpha \Rightarrow \neg\alpha$
    (vii) Modus ponens z kroků (v),(vi): $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \neg\alpha, \alpha \Rightarrow \gamma \vdash \alpha \Rightarrow \neg\alpha$
    (viii) Použijeme tautologii $(*)$ a pravidlo dvojí negace: $\vdash (\alpha \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow \neg\alpha$
    (ix) Modus ponens na (vii)a (viii) dohromady dává: $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \neg\alpha, \alpha \Rightarrow \gamma \vdash \neg\alpha$
    (x) Důsledek věty o dedukci dovolí přesun formule doprava:
    $\alpha \Rightarrow \beta, \alpha \Rightarrow \gamma \vdash (\beta \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow \neg\alpha$
    (xi) Obrácení implikace: $\alpha \Rightarrow \beta, \alpha \Rightarrow \gamma \vdash \alpha \Rightarrow \neg(\beta \Rightarrow \neg\alpha)$
  (b) Máme dokázat:
  $p(x,y) \Rightarrow (p(y,z) \Rightarrow p(x,z)), (\forall x)(\forall y)p(x, f(x,y)) \vdash p(x,y) \Rightarrow (\forall z)p(x, f(y,z))$.
    (i) Vezmeme jako předpoklady formule $p(x,y)$ a $p(x,y) \Rightarrow (p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$
    (ii) Použijeme m.p. na tyto formule
    $p(x,y), p(x,y) \Rightarrow (p(y,z) \Rightarrow p(x,z)) \vdash p(y,z) \Rightarrow p(x,z)$
    (iii) Pravidlo zobecnění dává $p(x,y) \vdash (\forall z)(p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$
    (iv) Axiom substituce: $\vdash (\forall z)(p(y,z) \Rightarrow p(x,z)) \Rightarrow (p(y, f(y,z)) \Rightarrow p(x, f(y,z))$
    (v) Dvojím užitím modus ponens dostaneme:
    $(\forall z)(p(y,z) \Rightarrow p(x,z)), p(y, f(y,z)) \vdash p(x, f(y,z))$
    (vi) Axiom substituce: $\vdash (\forall x)(\forall y)(p(x, f(x,y)) \Rightarrow (\forall y)p(x, f(x,y))$
    (vii) Znovu axiom substituce: $\vdash (\forall y)(p(x, f(x,y)) \Rightarrow p(x, f(x,z))$
    (viii) Dvojnásobným užitím modus ponens na předchozích axiomech dostaneme:
    $(\forall x)(\forall y)(p(x, f(x,y)) \vdash p(x, f(x,z))$
    (ix) Pravidlo zobecnění použité na předchozí bod dává
    $(\forall x)(\forall y)p(x, f(x,y)) \vdash (\forall x)p(x, f(x,z))$
    (x) Naposledy axiom substituce: $\vdash (\forall y)(p(x, f(x,z)) \Rightarrow p(y, f(y,z))$
    (xi) Modus ponens pak dává: $(\forall y)(p(x, f(x,z)) \vdash p(y, f(y,z))$
    (xii) Pomocí pravidlo zobecnění dostaneme $(\forall y)(p(x, f(x,z)) \vdash (\forall z)p(y, f(y,z))$
    (xiii) Dohromady máme
    $p(x,y) \Rightarrow (p(y,z) \Rightarrow p(x,z)), (\forall x)(\forall y)p(x, f(x,y)), p(x,y) \vdash (\forall z)p(y, f(y,z))$

(xiv) Důsledek věty o dedukci pak dá
$p(x,y) \Rightarrow (p(y,z) \Rightarrow p(x,z)), (\forall x)(\forall y)p(x, f(x,y)) \vdash p(x,y) \Rightarrow (\forall z)p(x, f(y,z))$.