MARKOVOVY ŘETĚZCE A JEJICH APLIKACE

Zdeněk Karpíšek

Centrum pro jakost a spolehlivost výroby (CQR)
Odbor statistiky a optimalizace, Ústav matematiky
Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně
Technická 2, 616 69 Brno, E-mail: karpisek@fme.vutbr.cz

Abstrakt: Referát je zaměřen na popis základních pojmů a vlastností Markovových řetězců a na ukázky jejich možných aplikací v řízení jakosti výroby. Jednak jde o užití konečných homogenních řetězců pro popis jakosti výrobního procesu pro dávku stejných výrobků, jednak o modelovaní jakosti výroby montážních celků v dávce pomocí nehomogenních řetězců.

1. Markovovy řetězce

1.1 Základní pojmy

Stochastickým dynamickým diskrétním systémem (dále jen ***systémem***) ***X*** rozumíme uspořádanou dvojici $\left(\Omega;\mathbf{P}(n)\right)$, kde

- $\Omega=\{\omega_1,...,\omega_j,...\}$ je ***stavový prostor***,
- ω_j jsou ***stavy systému X***, $j=1,2,...$,
- $\mathbf{P}(n)=\left[p_1(n),\dots,p_j(n),\dots\right]$ je ***matice rozdělení pravděpodobnosti*** (***matice absolutních pravděpodobností***) ***stavů systému X po*** n ***krocích*** (nebo také ***v čase*** *n*), $n=0,1,...$.

Přitom $p_j(n)$ je pravděpodobnost, že systém ***X*** je po *n* krocích ve stavu ω_j. Speciálně **P**(0) je ***matice počátečního rozdělení pravděpodobnosti stavů systému X*** (tj. před prvním krokem), kde $p_j(0)$ je pravděpodobnost toho, že systém ***X*** je na počátku ve stavu ω_j.

Pro jednoduchost a bez újmy na obecnosti položíme $\omega_j=j$, takže $\Omega=\{1,2,...\}$. Stav systému ***X*** po *n* krocích pak vyjadřuje diskrétní náhodná veličina X_n s rozdělením pravděpodobnosti **P**(*n*), která nabývá hodnot $j=1,2,...$.

Posloupnost $\{X_n\}$ diskrétních náhodných veličin X_n, $n=0,1,...$, se nazývá ***Markovův řetězec*** (***Markovský řetězec***), jestliže pro každý index $k=1,2,...$ a pro všechny možné hodnoty *i*, *j*, *h*,... náhodných veličin X_n je

$$P(X_k=j/(X_{k-1}=i,...,X_0=h))=P(X_k=j/X_{k-1}=i)\,. \qquad (1.1)$$

Podmíněná pravděpodobnost $p_{ij,k}=P(X_k=j/X_{k-1}=i)$ je ***pravděpodobnost přechodu systému X v*** k***-tém kroku ze stavu*** i ***do stavu*** j.

Přechod systému $\boldsymbol{X}$ v k-tém kroku ze stavu i do stavu j popisuje ***matice pravděpodobností přechodu pro** k**-tý krok***

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} p_{11,k}, & p_{12,k}, & p_{13,k}, & \cdots \\ p_{21,k}, & p_{22,k}, & p_{23,k}, & \cdots \\ p_{31,k}, & p_{32,k}, & p_{33,k}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

kde $\sum_j p_{ij,k} = 1$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots$.

Jestliže pravděpodobnost přechodu $p_{ij,k}$ závisí na hodnotě k, jde o ***nehomogenní Markovův řetězec*** $\{X_n\}$. V případě, že pravděpodobnost přechodu $p_{ij,k}$ nezávisí na k, tj. jestliže pro všechny hodnoty i, j, k platí $p_{ij,k} = p_{ij}$, jde o ***homogenní Markovův řetězec*** $\{X_n\}$. Jeho ***matice pravděpodobností přechodu*** je konstantní a značíme ji

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11}, & p_{12}, & p_{13}, & \cdots \\ p_{21}, & p_{22}, & p_{23}, & \cdots \\ p_{31}, & p_{32}, & p_{33}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Pravděpodobnost $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j / X_0 = i)$, že systém $\boldsymbol{X}$ přejde ze stavu i do stavu j právě po n krocích, $n = 1, 2, \ldots$, je ***pravděpodobnost přechodu za** n **kroků***. Matice $\mathbf{P}^{(n)}$ s prvky $p_{ij}^{(n)}$ je ***matice pravděpodobností přechodu za** n **kroků***. Položíme-li $p_{ij}^{(0)} = 1$ pro $i = j$ a $p_{ij}^{(0)} = 0$ pro $i \neq j$, pak pro nehomogenní Markovův řetězec $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, platí

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\nu} p_{i\nu}^{(n-1)} p_{\nu j,n}\,, \quad \mathbf{P}^{(n)} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k\,,$$

$$p_j(n) = \sum_{\nu} p_{\nu}(0) p_{\nu j}^{(n)}\,, \quad \mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0)\mathbf{P}^{(n)}, \tag{1.4}$$

takže speciálně pro homogenní Markovův řetězec $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, je

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\nu} p_{i\nu}^{(n-1)} p_{\nu j}\,, \quad \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n\,,$$

$$p_j(n) = \sum_{\nu} p_{\nu}(0) p_{\nu j}^{(n)}\,, \quad \mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0)\mathbf{P}^n. \tag{1.5}$$

1.2 Některé vlastnosti Markovových řetězců

K bližšímu popisu vlastností Markovových řetězců se používají zejména následující pojmy:

a) Markovův řetězec $\{X_n\}$ je ***konečný***, jestliže má konečný počet stavů. Výše uvedené matice tohoto řetězce jsou konečné.

b) Stav j se nazývá ***dosažitelný*** ze stavu i, existuje-li n = 1, 2,… takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$.

c) Markovův řetězec $\{X_n\}$ se nazývá ***nerozložitelný*** (***ireducibilní***), je-li každý jeho stav dosažitelný z libovolného jiného stavu.

d) Stav Markovova řetězce $\{X_n\}$ se nazývá ***absorbující***, jestliže není možné přejít z něho do jiného stavu. Markovův řetězec $\{X_n\}$ se nazývá ***absorbující***, jestliže má alespoň jeden absorbující stav a z každého stavu lze přejít do absorbujícího stavu (nikoliv nutně jedním krokem). Když řetězec dosáhne některého absorbujícího stavu, je ***absorbován***.

e) Markovův řetězec je ***periodický***, jestliže se návrat systému do libovolného stavu může uskutečnit pouze v takovém počtu kroků, který je násobkem vhodného přirozeného čísla.

f) ***Doba návratu*** homogenního Markovova řetězce do stavu i z počátečního stavu i, tj. $X_0 = i$, je náhodná veličina $Y = \inf\{n > 0 \mid X_n = i\}$. Náhodná veličina Y má rozdělení pravděpodobnosti s pravděpodobnostmi $q_0(i) = 0,\ q_1(i) = p_{ii},\ q_2(i) = p_{ii}^{(2)} - q_1(i)p_{ii}, \dots$.

g) Stav i homogenního Markovova řetězce je ***rekurentní***, jestliže $\sum_{j=1}^{\infty} q_j(i) = P(Y < \infty) = 1$, jinak jde o stav ***tranzientní***. Jestliže pro rekurentní stav je střední doba návratu $E(Y) = \infty$, jde o stav ***rekurentní nulový***.

Uvažujme konečný homogenní Markovův řetězec se stavovým prostorem $\{1, \dots, a+b\}$, kde je a absorbujících a b neabsorbujících stavů. Jestliže přerovnáme stavy řetězce tak, aby právě prvních a stavů bylo absorbujících, dostaneme matici pravděpodobností přechodu v tzv. ***kanonickém tvaru***

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \mathbf{P} = \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_a & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{array}\right], \end{array}$$

kde $\mathbf{I}_a$ je jednotková matice typu (a, a), $\mathbf{0}$ je nulová matice typu (a, b), $\mathbf{R}$ je matice typu (b, a) a $\mathbf{Q}$ je čtvercová matice typu (b, b). Platí, že

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \mathbf{P}^n = \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_a & \mathbf{0} \\ \hline * & \mathbf{Q}^n \end{array}\right], \end{array}$$

kde matici typu (b, a) označenou symbolem $*$ v levém dolním rohu matice $\mathbf{P}^n$ není nutno dále uvažovat. Z tvaru matice $\mathbf{P}^n$ plyne, že prvky matice $\mathbf{Q}^n$ udávají pro každý neabsorbující stav pravděpodobnost toho, že daný řetězec je po n krocích v některém z možných neabsorbujících stavů. Pravděpodobnost toho, že řetězec bude po n krocích v neabsorbujícím stavu, se blíží nule, takže každý prvek matice $\mathbf{Q}^n$ se blíží nule pro $n \to \infty$ a $\mathbf{Q}^n \to \mathbf{0}$, kde $\mathbf{0}$ je nulová čtvercová matice typu b. Z toho plyne, že k matici $\mathbf{I}_b - \mathbf{Q}$ existuje inverzní matice a navíc pro ni platí $\left(\mathbf{I}_b - \mathbf{Q}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q}^k$. Matice $\left(\mathbf{I}_b - \mathbf{Q}\right)^{-1}$ se nazývá ***fundamentální matice*** absorbujícího (homogenního) Markovova řetězce. Platí tato tvrzení:

1. Prvek m_{ij} fundamentální matice $\mathbf{M} = \left(\mathbf{I}_b - \mathbf{Q}\right)^{-1}$ je roven střední hodnotě počtu případů, kdy je řetězec v neabsorbujícím stavu j za předpokladu, že počátečním stavem byl neabsorbující stav i.
2. Prvek t_{i1} matice $\mathbf{t} = \mathbf{Mc}$, kde $\mathbf{c}$ je matice typu (b, 1), jejíž všechny prvky jsou rovny 1, je roven střednímu počtu kroků před absorbováním, tedy přechodu řetězce ze stavu i do libovolného absorbujícího stavu.
3. Prvek b_{ij} matice $\mathbf{B} = \mathbf{MR}$ je roven pravděpodobnosti toho, že absorbující řetězec bude absorbován ve stavu j za předpokladu, že začal v neabsorbujícím stavu i.

Tvrzení 1 umožňuje určit, kolikrát průměrně bude homogenní řetězec v každém neabsorbujícím stavu. Tvrzení 2 řeší problém, za jak dlouho bude průměrně proces absorbován. Z tvrzení 3 můžeme určit pravděpodobnost, že proces skončí v daném absorbujícím stavu.

Statistické úlohy pro Markovův řetězec spočívají především ve stanovení ***odhadů pravděpodobností přechodu***, případně ***testování statistických hypotéz*** o nich, na základě realizace posloupnosti pokusů, při nichž získáme posloupnost pozorovaných stavů systému $\boldsymbol{X}$. Pro konečný homogenní Markovův řetězec s q stavy jsou ***maximálně věrohodné odhady pravděpodobností přechodu***

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} \quad \text{pro } i, j = 1, 2, \ldots, q, \tag{1.6}$$

kde n_{ij} jsou pozorované četnosti přechodu systému $\boldsymbol{X}$ ze stavu i do stavu j v posloupnosti n pokusů a $n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{q} n_{ij}$ jsou pozorované marginální četnosti přechodu systému $\boldsymbol{X}$ ze stavu i do libovolného stavu. V případě $n_{i\bullet} = 0$, kdy pozorování neposkytuje podklad k odhadu pravděpodobností přechodu ze stavu i do stavu j, klademe $\hat{p}_{ij} = 0$.

2. Aplikace homogenních Markovových řetězců v jakosti

2.1 Výrobní proces pro dávku výrobků

Předpokládáme, že dávka N výrobků stejného typu prochází a výrobními operacemi. Po každé provedené operaci získáme buď shodný výrobek anebo neshodný výrobek. Shodný výrobek postupuje do další výrobní operace. Neshodný výrobek může být buď opravitelný a vrací se do dané výrobní operace, anebo je neopravitelný (jde o zmetek) a je z dalšího výrobního procesu vyřazen. Předpokládáme, že pravděpodobnost výroby shodného výrobku je v libovolné výrobní operaci konstantní (jde o stacionární proces), obecně však v každé operaci různá od pravděpodobností výroby shodného výrobku v jiné operaci, a dále, že náhodné jevy odpovídající výrobě shodného výrobku jsou ve všech operacích vzájemně nezávislé. Daný výrobní proces můžeme pak vyjádřit z hlediska jakosti (např. počtu provedených výrobních operací na libovolném výrobku) obecně jako nekonečný homogenní Markovův řetězec s počtem stavů $a+b$, kde $b=2$. Mimo a výrobních operací odpovídajících požadovaným shodným operacím jde ještě o dva stavy: stav F odpovídá finálnímu shodnému výrobku a stav Z odpovídá zmetku. Uvedený Markovský model má zajisté řadu reálných omezení, neboť v našem případě může teoreticky výrobek opakovaně procházet danou operací bez omezení, avšak pravděpodobnost takové posloupnosti je zanedbatelná. Naopak aplikací homogenních Markovových řetězců na takový výrobní proces získáme detailní pohled na jakost procesu oproti klasickému pohledu vycházejícímu pouze z pravděpodobnosti shodnosti jednotlivých nezávislých výrobních operací. Aplikaci ilustrujeme na následujícím konkrétním příkladu.

Aplikační příklad

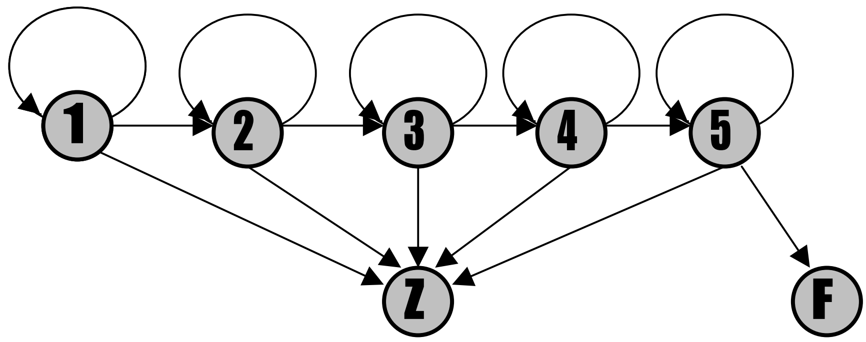
Předpokládáme, že dávka výrobků prochází postupně 5 vzájemně nezávislými výrobními operacemi s konstantními pravděpodobnostmi shodnosti jejich provedení. Pohyb výrobků mezi jednotlivými výrobními operacemi, vyřazení vzniklých neshodných neopravitelných výrobků a vznik shodných finálních výrobků vyjadřuje schéma stavů na obr. 2.1. V tomto případě je stavový prostor $\Omega = \{1, \ldots, 7\}$, kde stavem pro výrobek je 1. až 5. operace výrobního postupu, shodný finální výrobek a zmetek. Konkrétně jde o stavy:

a) neabsorbující:

1 … výrobek je podroben 1. operaci
2 … výrobek je podroben 2. operaci
3 … výrobek je podroben 3. operaci
4 … výrobek je podroben 4. operaci
5 … výrobek je podroben 5. operaci

b) absorbující:

F = 6 … shodný finální výrobek
Z = 7 … zmetek (neopravitelný kus)



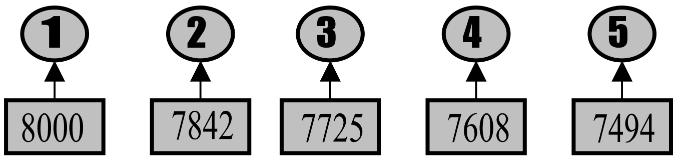
Obr. 2.1

Šipka $\longrightarrow$ znamená přechod z jednoho stavu do druhého (přechod do další operace, resp. výsledku, tj. vytvoření finálního výrobku anebo zmetku) a smyčka znamená přechod do stejné operace, tedy její opakování (oprava neshodného opravitelného kusu). Stavy 1, …, 5 jsou neabsorbující, protože výrobek podrobovaný dané operaci už nemůže být podrobován operacím předcházejícím. Uvedený výrobní proces lze z hlediska jakosti popsat pomocí homogenního Markovova řetězce, který je plně určen konstantní maticí pravděpodobností přechodu **P** a maticemi počátečních rozdělení pravděpodobnosti **P**(0).

Tabulka 2.1

i \ j	$n_{i\bullet}$	1	2	3	4	5	6	7
1	8000	125	7842	0	0	0	0	33
2	7842	0	96	7725	0	0	0	21
3	7725	0	0	102	7608	0	0	15
4	7608	0	0	0	73	7494	0	41
5	7494	0	0	0	0	42	7443	9
$N=\sum_i n_{i\bullet}$	38669							

V tabulce 2.1 jsou pozorované (smyšlené) absolutní četnosti výrobků, kde $n_{i\bullet}$ je celkový počet výrobků před zahájením i-té operace, i = 1, …, 5, $N=\sum_i n_{i\bullet}$ je celkový počet výrobků, které budou podrobovány 1. až 5. výrobní operaci a n_{ij} představuje počet výrobků přecházejících ze stavu i do stavu j, tj. do j-té operace či stavu po provedení i-té operace, $j=1,...,7$. Z tabulky 2.1 vidíme, že do první operace vstoupilo celkem 8000 výrobků (polotovarů). Do druhé operace vstoupilo 7842 výrobků, do třetí 7725 výrobků, do čtvrté 7608 výrobků a do páté 7494 výrobků. Vždy šlo o výrobky, které prošly úspěšně předcházejícími operacemi, tj. byly z hlediska těchto operací shodné. Vstup dávek s počty výrobků do jednotlivých operací je znázorněn na obr. 2.2.



Obr. 2.2

Z absolutních četností ze sloupců $j = 1,...,7$ z tabulky 2.1 vypočteme podle (1.6) maximálně věrohodné odhady prvků matice pravděpodobností přechodu **P** zaznamenané v tabulce 2.2.

Tabulka 2.2

i \ j	1	2	3	4	5	6	7
1	0,0156	0,9803	0	0	0	0	0,0041
2	0	0,0122	0,9851	0	0	0	0,0027
3	0	0	0,0132	0,9849	0	0	0,0019
4	0	0	0	0,0096	0,9850	0	0,0054
5	0	0	0	0	0,0056	0,9932	0,0012
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1

Předcházející i následující vypočtené číselné výsledky jsou zaokrouhleny na 4, resp. 5 desetinných míst. V dalších odstavcích je řešen uvedený aplikační příklad.

2.2 Výpočet absolutních pravděpodobností

Rozdělení pravděpodobnosti stavů výrobků po první výrobní operaci je

$$\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(0)\mathbf{P} = [0{,}0156;\ 0{,}9803;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}0041],$$

kde klademe $\mathbf{P}(0) = [1; 0; 0; 0; 0; 0; 0]$. Interpretace výsledku je v tabulce 2.3.

Tabulka 2.3

Stav	Pravděpodobnost	Po provedení 1. operace:
1	0,0156	1,56 % bylo znovu podrobeno 1. operaci
2	0,9803	98,03 % postoupilo do 2. operace
3	0	
4	0	
5	0	
6	0	
7	0,0041	0,41 % bylo vyřazeno

Rozdělení pravděpodobnosti stavů všech výrobků po absolvování jedné dané výrobní operace kde každá z dávek výrobků je v daném okamžiku podrobena dané jedné z pěti výrobních operací, je

$$\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(0)\mathbf{P} = [0{,}0032;\ 0{,}2053;\ 0{,}2024;\ 0{,}1986;\ 0{,}1949;\ 0{,}1925;\ 0{,}0031],$$

kde klademe $\mathbf{P}(0) = [n_{1\bullet}/n; \ldots; n_{5\bullet}/n; 0; 0] = [0{,}2069; 0{,}2028; 0{,}1998; 0{,}1967; 0{,}1938; 0; 0]$. Interpretace výsledku je v tabulce 2.4.

Tabulka 2.4

Stav	Pravděpodobnost	Po absolvování jedné výr. operace je:
1	0,0032	0,32 % výrobků podrobováno 1. operaci
2	0,2053	20,53 % výrobků podrobováno 2. operaci
3	0,2024	20,24 % výrobků podrobováno 3. operaci
4	0,1986	19,86 % výrobků podrobováno 4. operaci
5	0,1949	19,49 % výrobků podrobováno 5. operaci
6	0,1925	19,25 % shodných finálních výrobků
7	0,0031	0,31 % zmetků

2.3 Výpočet absolutních pravděpodobností přechodu po 5 krocích

V tabulce 2.5 je vypočtená matice pravděpodobností přechodu po 5 krocích $\mathbf{P}^5$.

Tabulka 2.5

i \ j	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0,00002	0,00153	0,05271	0,93038	0,01535
2	0	0	0	0,00002	0,00100	0,98770	0,01128
3	0	0	0	0	0,00001	0,99139	0,00860
4	0	0	0	0	0	0,99336	0,00664
5	0	0	0	0	0	0,99879	0,00121
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1

Rozdělení pravděpodobností stavů výrobků v jednotlivých dávkách výrobků po projití dávek, které vstoupily do výrobního procesu vždy do příslušné operace (tj. bez započítání výrobků, které se začaly obrábět později), pěti výrobními operacemi je

$$\mathbf{P}(5) = \mathbf{P}(0)\mathbf{P}^5 = [0; 0; 0{,}00002; 0{,}00153; 0{,}05271; 0{,}93038; 0{,}01535],$$

kde klademe $\mathbf{P}(0) = [1; 0; 0; 0; 0; 0; 0]$. Interpretace výsledku je v tabulce 2.6.

Tabulka 2.6

Stav	Pravděpodobnost	Po 5-ti krocích od vstupu do 1. operace je:
1	0	0 % výrobků podrobováno 1.operaci
2	0	0 % výrobků podrobováno 2.operaci
3	0,00002	0,002 % výrobků podrobováno 3.operaci
4	0,00153	0,153 % výrobků podrobováno 4.operaci
5	0,05271	5,271 % výrobků podrobováno 5.operaci
6	0,93038	93,038 % shodných finálních výrobků
7	0,01535	1,015 % zmetků

Rozdělení pravděpodobnosti stavů výrobků všech dávek pro jednotlivé operace, které vstoupily v daný okamžik do jedné z operací (bez započítání výrobků, které se začaly obrábět později), je

$$\mathbf{P}(5) = \mathbf{P}(0)\mathbf{P}^5 = [0;\, 0;\, 0{,}0001;\, 0{,}00032;\, 0{,}01111;\, 0{,}97984;\, 0{,}00872],$$

kde klademe $\mathbf{P}(0) = [n_{1\bullet}/n; \ldots; n_{5\bullet}/n; 0; 0] = [0{,}2069; 0{,}2028; 0{,}1998; 0{,}1967; 0{,}1938; 0; 0]$. Interpretace výsledku je v tabulce 2.7.

Tabulka 2.7

Stav	Pravděpodobnost	Po provedení pěti operací od vstupu do jedné z operací je:
1	0	0 % výrobků podrobováno 1.operaci
2	0	0 % výrobků podrobováno 2.operaci
3	0,00001	0,001 % výrobků podrobováno 3.operaci
4	0,00032	0,032 % výrobků podrobováno 4.operaci
5	0,01111	1,111 % výrobků podrobováno 5.operaci
6	0,97984	97,984 % shodných finálních výrobků
7	0,00872	0,872 % zmetků

2.4 Střední hodnoty počtu jednotlivých operací na jeden výrobek

Pro výpočet středního počtu operací připadajících na jeden výrobek přerovnáme řádky a sloupce původní matice **P** z tabulky 2.2. Obdržíme matici pravděpodobností přechodu v kanonickém tvaru (pro jednoduchost opět označenou **P**, kde čísla na okrajích jsou původní čísla stavů)

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{array}\right] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \mathit{6} & \mathit{7} & \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4} & \mathit{5} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathit{6} \\ \mathit{7} \\ \mathit{1} \\ \mathit{2} \\ \mathit{3} \\ \mathit{4} \\ \mathit{5} \end{array} & \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0{,}00413 & 0{,}01563 & 0{,}98025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}00268 & 0 & 0{,}01224 & 0{,}98508 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}00194 & 0 & 0 & 0{,}01320 & 0{,}98485 & 0 \\ 0 & 0{,}00539 & 0 & 0 & 0 & 0{,}00960 & 0{,}98502 \\ 0{,}99319 & 0{,}00120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}00560 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} a \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} b \end{array} \\ & \begin{array}{cc} \underbrace{\hphantom{0{,}99319 \quad 0{,}00120}}_{a} & \underbrace{\hphantom{0{,}01563 \quad 0{,}98025 \quad 0{,}98508 \quad 0{,}98485 \quad 0{,}98502}}_{b} \end{array} \end{array}$$

Zde je $a = 2$ a $b = 5$. Odtud

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0{,}01563 & 0{,}98025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01224 & 0{,}98508 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}01320 & 0{,}98485 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}00960 & 0{,}98502 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}00560 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}00413 \\ 0 & 0{,}00268 \\ 0 & 0{,}00194 \\ 0 & 0{,}00539 \\ 0{,}99319 & 0{,}00120 \end{bmatrix}.$$

Po výpočtu obdržíme fundamentální matici

$$\mathbf{M} = \left(\mathbf{I}_5 - \mathbf{Q}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}01587 & 1{,}00815 & 1{,}00640 & 1{,}00076 & 0{,}99132 \\ 0 & 1{,}01239 & 1{,}01063 & 1{,}00497 & 0{,}99549 \\ 0 & 0 & 1{,}01338 & 1{,}00770 & 0{,}99820 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}00969 & 1{,}00016 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}00564 \end{bmatrix},$$

která obsahuje střední hodnoty počtu provedených operací pro jeden výrobek. Jsou započítány všechny výrobky: shodné finální výrobky, neshodné opravitelné kusy a zmetky (neshodné neopravitelné kusy). Matice středních hodnot počtu jednotlivých provedených operací, kterými projde výrobek, jenž vstoupil do první operace, je

$$\mathbf{P}(0)\mathbf{M} = [1{,}0159;\ 1{,}0082;\ 1{,}0064;\ 1{,}0008;\ 0{,}9913],$$

kde klademe $\mathbf{P}(0) = [1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0]$. Střední hodnota počtu provedení i-té výrobní operace vztažená na jeden výrobek vyjadřuje, kolikrát výrobek, který vstoupil do 1. operace, i-tou operací projde, $i = 1,\dots, 5$. Tato střední hodnota je vlastně index počtu provedení i-té operace. Interpretace výsledku (po zaokrouhlení na 4 desetinná místa) je v tabulce 2.8.

Tabulka 2.8

Stav	Střední hodnota	Střední počet provedení i-té výrobní operace na jeden výrobek
1	1,0159	1. operací projde výrobek 1,0159 krát
2	1,0082	2. operací projde výrobek 1,0082 krát
3	1,0064	3. operací projde výrobek 1,0064 krát
4	1,0008	4. operací projde výrobek 1,0008 krát
5	0,9913	5. operací projde výrobek 0,9913 krát

2.5 Střední hodnoty počtu provedených operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu

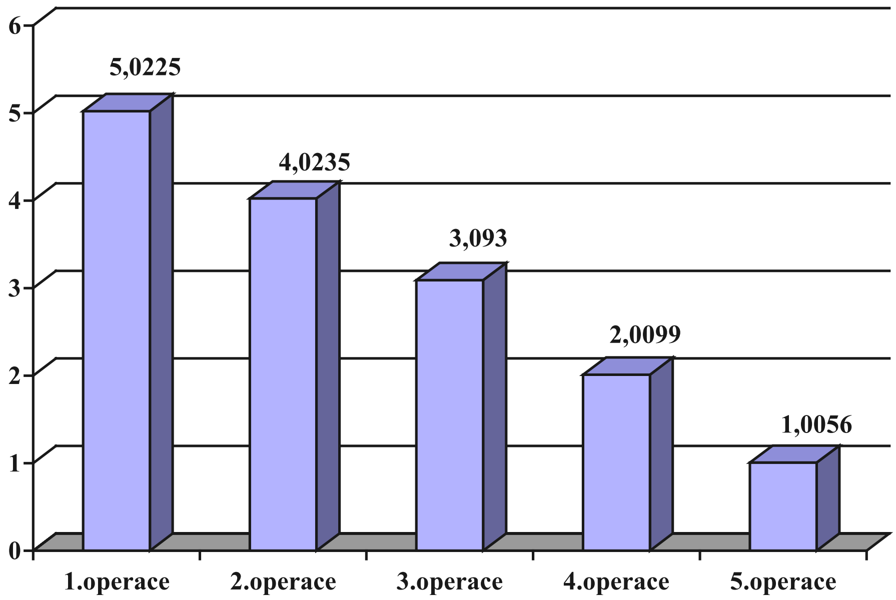
Matice středních hodnot počtu operací na jeden výrobek ve výrobním procesu (do vzniku shodného finálního výrobku anebo neshodného neopravitelného výrobku = zmetku), když vstupuje do i-té operace, $i = 1,\dots, 5$, je

$$\mathbf{t} = \mathbf{Mc} = [5{,}0225;\ 4{,}0235;\ \ 3{,}0193;\ \ 2{,}0099;\ \ 1{,}0056]^{\mathrm{T}},$$

kde $\mathbf{c} = [1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1]^{\mathrm{T}}$. Interpretace výsledku je v tabulce 2.9 a na obr. 2.3.

Tabulka 2.9

Stav	Střední hodnota	Střední počet provedených výrobních operací na jeden výrobek, když výrobek prochází *i*-tou operaci
1	5,0225	výrobek projde 5,0225 operacemi, pokud vstupuje do 1. operace
2	4,0235	výrobek projde 4,0235 operacemi, pokud vstupuje do 2. operace
3	3,0193	výrobek projde 3,0193 operacemi, pokud vstupuje do 3. operace
4	2,0099	výrobek projde 2,0099 operacemi, pokud vstupuje do 4. operace
5	1,0056	výrobek projde 1,0056 operacemi, pokud vstupuje do 5. operace



Obr. 2.3

2.6 Pravděpodobnosti přechodů z neabsorbujících do absorbujících stavů

Matice pravděpodobnosti přechodů výrobků z neabsorbujících do absorbujících stavů je

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad 6 & \quad\quad 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}9846 & 0{,}0154 \\ 0{,}9887 & 0{,}0113 \\ 0{,}9914 & 0{,}0086 \\ 0{,}9934 & 0{,}0066 \\ 0{,}9988 & 0{,}0012 \end{bmatrix} \end{array} .$$

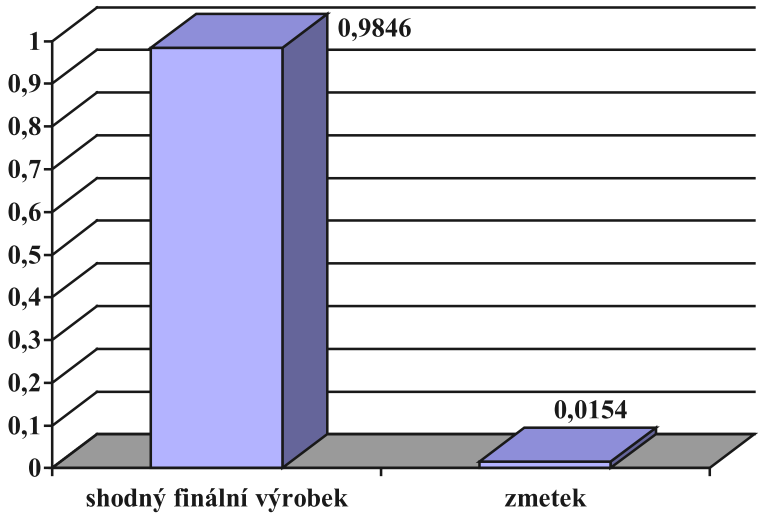
Rozdělení pravděpodobnosti přechodů výrobků z neabsorbujících stavů do absorbujících stavů, které vstoupily pouze do první operace, je

$$\mathbf{P}(0)\mathbf{B} = [0{,}9846;\ \ 0{,}0154],$$

kde klademe $\mathbf{P}(0) = [1; 0; 0; 0; 0]$. Interpretace výsledku je v tabulce 2.10 a na obr. 2.4.

Tabulka 2.10

Absorbující stav	Pravděpodobnost	Pravděpodobnost toho, že výrobek, který vstoupil do 1. operace přejde do jednoho z absorbujících stavů
6	0,9846	98,46 %, že vznikne shodný finální výrobek
7	0,0154	1,54 %, že vznikne nesh.výrobek = zmetek



Obr. 2.4

3. Aplikace nehomogenních Markovových řetězců v jakosti

3.1 Výrobní proces pro dávku montážních celků

Předpokládáme, že jde o výrobu montážních celků stejného druhu, přičemž se každý montážní celek skládá z s různých typů součástí označených $d_1, d_2, ..., d_s$. Každá ze součástí daného typu může být obsažena v montážním celku vícekrát. Konkrétně součást typu d_r, kde $r = 1, ..., s$, je v montážním celku obsažena c_r-krát a c_r = 1, 2,… .

Schéma montážního celku:

c_1 d_1	c_2 d_2	...	c_r d_r	...	c_s d_s

Dále předpokládáme, že montážní celek označíme jako shodný, právě když všechny jeho součásti všech typů budou shodné.

3.2 Výroba součásti montážního celku

Předpokládáme, že součást typu d_r vstupuje do výrobního procesu jako polotovar a je postupně podrobována jednotlivým operacím. Celkový počet výrobních operací, kterými má tato součást projít, je pro různé součásti různý. Konkrétně celkový počet operací pro součást typu d_r montážního celku je n_r, $r = 1, 2,\ldots, s$. Nechť o_{rk} značí k-tou operaci na součásti typu d_r, $k = 1,2,\ldots,n_r$.

Schéma výrobního procesu pro součást typu d_r:

$$\boxed{o_{r1}} \longrightarrow \boxed{o_{r2}} \dashrightarrow \boxed{o_{rk}} \dashrightarrow \boxed{o_{r,n_r-1}} \longrightarrow \boxed{o_{rn_r}}$$

Náš model výroby montážních celků je založen na následujících předpokladech:

1. Součást typu d_r bude shodná, jestliže bude shodná po každé z jejích n_r operací o_{rk}, $k = 1,2,\ldots,n_r$. Pravděpodobnost toho, že součást typu d_r bude shodná po k–té operaci o_{rk}, označíme p_{rk}. Naopak pravděpodobnost toho, že po dané operaci bude součást neshodná, je $q_{rk} = 1 - p_{rk}$. Taková součást bude po dané operaci z dalšího výrobního procesu vyřazena.

2. Výsledek k-té operace je nezávislý na všech ostatních operacích, takže se jedná o posloupnost vzájemně nezávislých jevů, kdy pravděpodobnosti úspěchu v různých operacích jsou obecně různé.

3. Chceme vyrobit m shodných montážních celků stejného typu, takže do výrobního procesu součásti typu d_r vstupuje do první operace $c_r m$ polotovarů téhož typu, které prochází postupně n_r operacemi jako dávka. Protože po každé operaci jsou vyřazovány z dávky neshodné součásti, vstupuje do k-té operace $z_r = 0, 1, \ldots, c_r m$ shodných součástí a na konci tohoto procesu získáme 0 až $c_r m$ shodných součástí téhož typu.

Z těchto předpokladů plyne, že počet shodných součástí typu d_r po provedení k–té operace, do níž vstoupilo z_r shodných součástí téhož typu, je náhodná veličina X s binomickým rozdělením pravděpodobnosti Bi(z_r, p_{rk}) s pravděpodobnostní funkcí

$$\binom{z_r}{x} p_{rk}{}^{x} (1 - p_{rk})^{z_r - x},$$

kde $x = 0,1,\ldots,z_r$.

Všechny možné stavy vyjadřující počty shodných součástí, které mohou po provedení operace o_{rk} nastat, můžeme vyjádřit pomocí nehomogenního Markovova řetězce [1, 2] s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}_{rk}$ pro k-tou operaci na součásti typu d_r. Obecný prvek této matice je

$$p_{rk}(i,j) = \begin{cases} \binom{i}{j} p_{rk}^{\,j}(1-p_{rk})^{i-j} & \text{pro } i \geq j, \\ 0 & \text{pro } i < j, \end{cases} \tag{3.1}$$

kde i je číslo řádku, $i = 0, 1, \dots, c_r m$ a j je číslo sloupce, $j = 0, 1, \dots, c_r m$. Číslo řádku i odpovídá počtu součástí podrobených r-té operaci a číslo sloupce j odpovídá počtu shodných součástí po provedení této operace. $\mathbf{P}_{rk}$ je dolní trojúhelníková matice, protože před operací se nemůže v dávce nacházet méně shodných kusů než po provedení této operace.

Výsledky postupně prováděných nezávislých operací pro dávku součástí typu d_r tak tvoří vzhledem k počtu správně provedených operací nehomogenní Markovův řetězec s konečně mnoha stavy $0, 1, \dots, c_r m$. Vzhledem k tomu, že tento řetězec je tvořen trojúhelníkovými maticemi pravděpodobností přechodu (jde o degradační stochastický proces), není tento řetězec nerozložitelný (ireducibilní). Tento řetězec je však absorbující, neboť stav 0 tohoto řetězce je stavem absorbujícím. Navíc má tento řetězec konečnou délku n_r, protože počet výrobních operací pro každou součást je konečný.

Výsledek celého výrobního procesu součásti typu d_r montážního celku pro případ, že součásti postupují od operace k operaci jako dávka o z_r kusech ($z_r = 0, 1, \dots, c_r m$), vyjadřuje matice konečného rozdělení stavů $\mathbf{P}_r(n_r)$, kterou získáme vynásobením matic pravděpodobností přechodu pro jednotlivé operace $\mathbf{P}_{rk}$ a matice počátečního rozdělení pravděpodobností stavů (rozdělení pravděpodobností stavů před první operací) $\mathbf{P}_r(0)$, tedy

$$\mathbf{P}_r(n_r) = \mathbf{P}_r(0) \prod_{k=1}^{n_r} \mathbf{P}_{rk} \,. \tag{3.2}$$

Matice počátečního rozdělení pravděpodobností stavů vyjadřuje pravděpodobnostní funkci počtu shodných součástí (polotovarů), které vstupují do první operace. Tato matice je jednořádková s $c_r m + 1$ sloupci a má tvar

$$\mathbf{P}_r(0) = \left[p_{r0}(0),\ p_{r0}(1),\ \dots,\ p_{r0}(j),\ \dots,\ p_{r0}(c_r m - 1),\ p_{r0}(c_r m) \right], \tag{3.3}$$

kde $p_{r0}(j)$ je pravděpodobnost, že do první operace vstoupí j kusů shodných součástí typu d_r a $j = 0, 1, \dots, c_r m$. Výsledným popisem jakosti celého výrobního procesu pro součást typu d_r je matice konečného rozdělení pravděpodobností stavů, která vyjadřuje pravděpodobnostní funkci počtu shodných součástí na konci výrobního procesu. Tato jednořádková matice s $c_r m + 1$ sloupci má tvar

$$\mathbf{P}_r(n_r) = \left[p_{rn_r}(0), p_{rn_r}(1), \dots, p_{rn_r}(j), \dots, p_{rn_r}(c_r m - 1), p_{rn_r}(c_r m) \right], \tag{3.4}$$

Přitom $p_{m_r}(j)$ je pravděpodobnost, že po projití dávky n_r operacemi vyrobíme j shodných součástí typu d_r za předpokladu, že před první operací bylo v dávce $z_r = 0, 1, \ldots, c_r m$ shodných polotovarů.

Vzhledem k tomu, že každý shodný montážní celek obsahuje právě c_r shodných součástí typu d_r, je pro výrobu $y_r = 0,1,\ldots,m-1$ shodných montážních celků zapotřebí $y_r c_r$ až $(y_r+1)\,c_r - 1$ shodných součástí typu d_r. Pravděpodobnost tohoto jevu je vzhledem k disjunktnosti stavů

$$p_r^*(y_r) = \sum_{j=y_r c_r}^{(y_r+1)c_r-1} p_{rn_r}(j). \tag{3.5}$$

Pro výrobu $y_r = m$ shodných montážních celků je zapotřebí celkem mc_r shodných součástí typu d_r a pravděpodobnost tohoto jevu je $p_{rn_r}(c_r m)$. Matice konečného rozdělení pravděpodobnosti stavů pro součást typu d_r po provedení n_r operací z hlediska možného počtu shodných montážních celků pak je

$$\mathbf{P}_r^* = \left[p_r^*(0), p_r^*(1), \ \ldots, p_r^*(y_r), \ \ldots, p_r^*(m-1), p_r^*(m)\right] =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{c_r-1} p_{rn_r}(j), \ \sum_{j=c_r}^{2c_r-1} p_{rn_r}(j), \ldots, \sum_{j=y_r c_r}^{(y_r+1)c_r-1} p_{rn_r}(j), \ \ldots, \ \sum_{j=(m-1)c_r}^{mc_r-1} p_{rn_r}(j), \ p_{rn_r}(c_r m)\right], \tag{3.6}$$

za předpokladu, že před první operací o_{r1} bylo v dávce $z_r = 0, 1, \ldots, c_r m$ shodných polotovarů. Jinak řečeno jde o pravděpodobnosti, že budeme mít k dispozici pro montáž právě $y_r = 0,1,\ldots,m$ skupin shodných součástí typu d_r, $r = 1, 2, \ldots, s$, a nejvýše $c_r - 1$ jich bude přebývat, např. do zásoby.

3.3 Sestavení montážních celků

Pomocí matic $\mathbf{P}_r^*$ konečných rozdělení pravděpodobnosti stavů po vyrobení skupin součásti typu d_r montážního celku, $r = 1, 2, \ldots, s$, určíme výsledné rozdělení pravděpodobnosti počtu shodných montážních celků. Shodných montážních celků může být sestaveno 0 až m, přičemž každý shodný montážní celek obsahuje s skupin stejného typu shodných součástí. Předpokládáme, že montáž celku je vždy provedena správně a že montážní operace jsou vzájemně nezávislé.

Minimální počet všech skupin součástí shodných součástí ze všech dávek vyrobených součástí typu $d_1 \ldots d_s$ je náhodná veličina, kterou označíme T_s. Dále nechť Y_r značí náhodnou veličinu popisující počet skupin shodných součástí typu d_r, $r = 1, 2, \ldots, s$. Její pravděpodobnostní funkce je dána maticí $\mathbf{P}_r^*$ ze vztahu (3.6) a náhodné veličiny Y_r jsou zřejmě vzájemně nezávislé. Pak je

$$T_s = \min\,(Y_1,\ \ldots\ , Y_s)$$

a vzhledem k asociativitě binární operace minima ze dvou čísel platí, že

$$T_s = \min\,(\ \ldots \min\,(\min\ (Y_1, Y_2), Y_3),\ \ldots\ , Y_s).$$

Postupný výpočet minima pomocí předcházejícího vztahu lze vyjádřit rekurentním vztahem

$$T_r = \min\,(T_{r-1}, Y_r)\,,\ T_1 = Y_1,$$

kde $r = 2,\ldots, s$. Ze vzájemné nezávislosti náhodných veličin $Y_1, \ldots, Y_s$ plyne nezávislost dvojic náhodných veličin T_{r-1}, Y_r pro $r = 2, \ldots, s$. Náhodný vektor (T_{r-1}, Y_r) má proto pravděpodobnostní funkci

$$p_{r-1,r}(t_{r-1}, y_r) = \pi_{r-1}(t_{r-1})\, p_r^*(y_r)\,, \tag{3.7}$$

kde $\pi_{r-1}(t_{r-1})$ je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny T_{r-1} a t_{r-1} je počet shodných montážních celků po montáži skupin součástí typu $d_1,\ldots, d_{r-1}$ a t_{r-1}, $y_r = 0, 1, \ldots, m$.

Náhodná veličina T_r má pravděpodobnostní funkci

$$\pi_r(t_r) = \sum_{t=t_r+1}^{m} p_{r-1,r}(t, t_r) + \sum_{t=t_r}^{m} p_{r-1,r}(t_r, t) = \sum_{t=t_r+1}^{m} \left[p_{r-1,r}(t, t_r) + p_{r-1,r}(t_r, t) \right] + p_{r-1,r}(t_r, t_r)\,, \tag{3.8}$$

$t_r = 0, 1, \ldots, m$. Po postupném výpočtu obdržíme pro $r = s$ výslednou pravděpodobnostní funkci minima shodných montážních celků T_s v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{\pi}_s(t_s) = \left[\pi_s(0), \pi_s(1), \ldots, \pi_s(t_s), \ldots, \pi_s(s) \right].$$

Odtud pak získáme střední počet shodných montážních celků

$$E(T_s) = \sum_{t_s=0}^{s} t_s \pi_s(t_s)\,,$$

rozptyl počtu shodných montážních celků

$$D(T_s) = \sum_{t_s=0}^{s} t_s^2 \pi_s(t_s) - \left[E(T_s) \right]^2,$$

případně směrodatnou odchylku $\sigma(T_s) = \sqrt{D(T_s)}$, medián $\tilde{t}_s$, modus $\hat{t}_s$ apod.

3.4 Aplikační příklad

Předpokládejme, že vyrábíme pět židlí, přičemž každá židle se skládá ze čtyř noh, dvou područek, sedadla a opěradla. Označme nohu jako součást typu d_1, područku jako součást typu d_2, sedadlo jako součást typu d_3 a opěradlo jako součást typu d_4. Aby vznikla shodná finální součást, musí projít součásti typu d_1 pěti operacemi, součásti typu d_2 šesti operacemi, součásti typu d_3 sedmi operacemi a součásti typu d_4 osmi operacemi. Pravděpodobnosti úspěchu každé z operací p_{rk} jsou uvedeny v tabulce 3.1, kde index r odpovídá typu součásti a k číslu operace. Předpokládáme, že do první operace výrobního procesu vstoupí 20 shodných polotovarů součásti typu d_1, 10 shodných polotovarů součásti typu d_2, 5 shodných polotovarů součásti typu d_3 a 5 shodných polotovarů součásti typu d_4.

Tabulka 3.1

k	1	2	3	4	5	6	7	8
p_{1k}	0,99	0,97	0,98	0,96	0,85	–	–	–
p_{2k}	0,98	0,89	0,95	0,95	0,96	0,99	–	–
p_{3k}	0,93	0,99	0,99	0,96	0,99	0,89	0,98	–
p_{4k}	0,97	0,96	0,99	0,95	0,98	0,96	0,95	0,98

V dalším vyjádříme jakost:

1) jednotlivých operací pro všechny typy součástí pomocí matic pravděpodobností přechodu pro všechny možné stavy, které mohou po každé operaci nastat,
2) celého výrobního postupu pro dávky každého typu součásti pomocí pravděpodobností úspěchů jednotlivých stavů na konci každého z výrobních procesů za předpokladu, že do první operace vstoupí uvedený počet polotovarů,
3) procesu montáže celků pomocí pravděpodobností jednotlivých stavů na konci procesu montáže.

Vzhledem k předpokladu o počtech shodných polotovarů jsou matice počátečních rozdělení pravděpodobností stavů pro součásti typu d_1, d_2, d_3, d_4

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad\quad\; \mathit{0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20} \\ \mathbf{P}_1(0) = [\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\ ]\,, \end{array}$$

$$\mathbf{P}_2(0) = [\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, 1\ ]\,,$$

$$\mathbf{P}_3(0) = [\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\ ]\,,$$

$$\mathbf{P}_4(0) = [\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\ ]\,.$$

Vyhodnocení jakosti procesu výroby těchto montážních celků bylo provedeno na PC pomocí speciálního výpočtového programu [7] - viz obr 3.1. Po zadání vstupních dat s = 4,

$m = 5$, p_{rk} a $p_{r0}(j)$ byly nejprve vypočteny dolní trojúhelníkové matice pravděpodobností přechodu pro každou výrobní operaci pomocí vztahu (3.1), kde $r = 1, ..., 4$ a pro součást typu

d_1 je $c_1 = 4$ a $n_1 = 5$, takže $i, j = 0,\ldots, 20$ a $k = 1,\ldots, 5$;

d_2 je $c_2 = 2$ a $n_2 = 6$, takže $i, j = 0, ..., 10$ a $k = 1,\ldots, 6$;

d_3 je $c_3 = 1$ a $n_3 = 7$, takže $i, j = 0, ..., 5$ a $k = 1,\ldots, 7$;

d_4 je $c_4 = 1$ a $n_4 = 8$, takže $i, j = 0, ..., 5$ a $k = 1,\ldots, 8$.

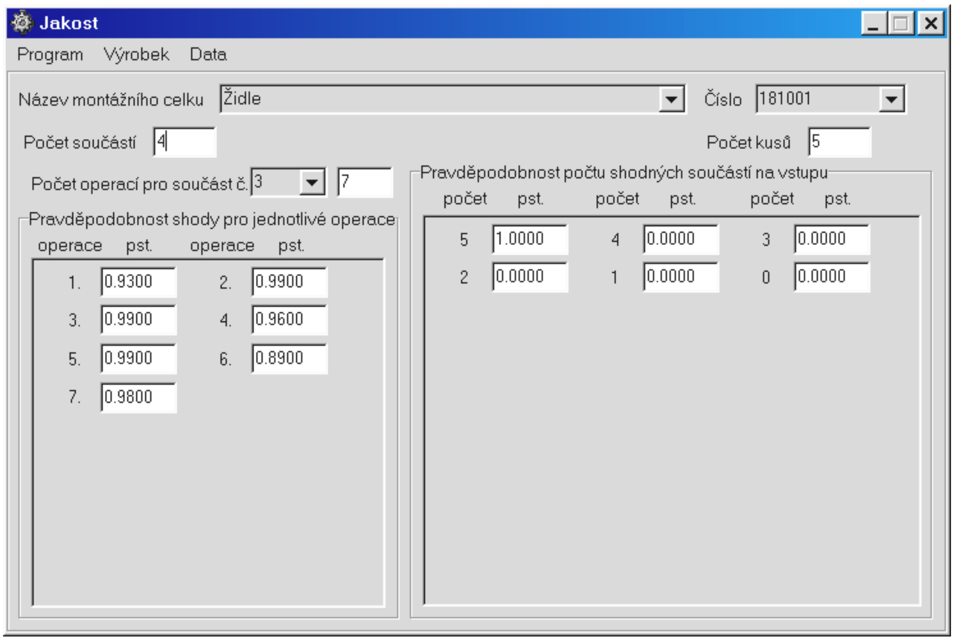
Dále po vynásobení matic odpovídajících jednotlivým výrobním operacím maticemi počátečních rozdělení pravděpodobností stavů podle vztahu (3.2) získáme matice konečných rozdělení pravděpodobností stavů pro součásti typu d_1, d_2, d_3, d_4

$$\mathbf{P}_1(5) = \mathbf{P}_1(0)\,\mathbf{P}_1^{(5)} = \mathbf{P}_1(0)\prod_{k=1}^{5}\mathbf{P}_{1k} = [0{,}000000; 0{,}000000; 0{,}000000; 0{,}000000; 0{,}000000; 0{,}000001; 0{,}000010; 0{,}000069; 0{,}000372; 0{,}001640; 0{,}005970; 0{,}017959; 0{,}044571; 0{,}090764; 0{,}150173; 0{,}198775; 0{,}205551; 0{,}160044; 0{,}088267; 0{,}030745; 0{,}005087],$$

$$\mathbf{P}_2(6) = \mathbf{P}_2(0)\,\mathbf{P}_2^{(6)} = \mathbf{P}_2(0)\prod_{k=1}^{6}\mathbf{P}_{2k} = [0{,}000001; 0{,}000030; 0{,}000408; 0{,}003231; 0{,}016798; 0{,}059873; 0{,}148194; 0{,}251514; 0{,}280134; 0{,}184895; 0{,}054916],$$

$$\mathbf{P}_3(7) = \mathbf{P}_3(0)\,\mathbf{P}_3^{(7)} = \mathbf{P}_3(0)\prod_{k=1}^{7}\mathbf{P}_{3k} = [0{,}000872; 0{,}013485; 0{,}083370; 0{,}257708; 0{,}398312; 0{,}246252],$$

$$\mathbf{P}_4(8) = \mathbf{P}_4(0)\,\mathbf{P}_4^{(8)} = \mathbf{P}_4(0)\prod_{k=1}^{8}\mathbf{P}_{4k} = [0{,}000394; 0{,}007504; 0{,}056906; 0{,}215786; 0{,}409129; 0{,}310283].$$



Obr. 3.1

Z těchto matic pak dostaneme pomocí vztahu (3.6) matice konečných rozdělení pravděpodobnosti stavů pro součásti typu d_1, d_2, d_3, d_4 z hlediska možného počtu shodných montážních celků

$$\begin{array}{llllll} \quad\quad\quad \mathit{0} & \quad\quad \mathit{1} & \quad\quad \mathit{2} & \quad\quad \mathit{3} & \quad\quad \mathit{4} & \quad\quad \mathit{5} \end{array}$$

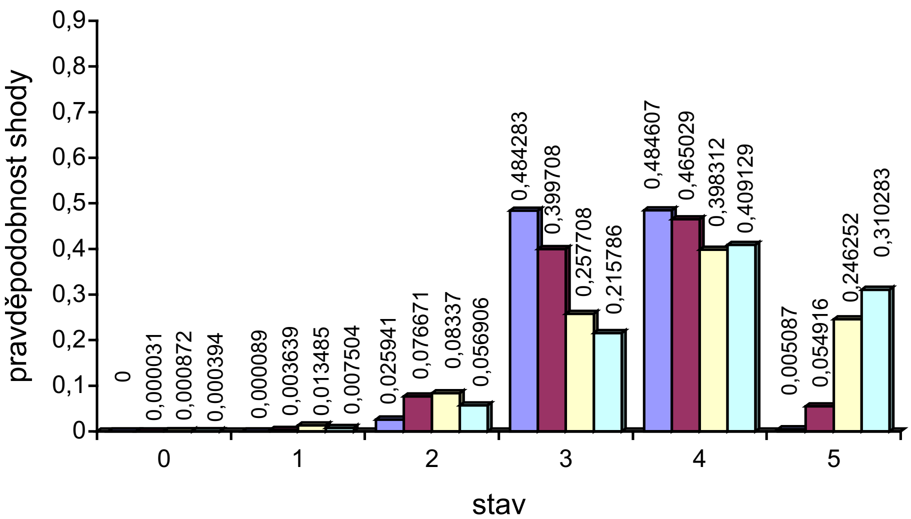
$$\mathbf{P}_1^* = [0{,}000000;\ 0{,}000089;\ 0{,}025941;\ 0{,}484283;\ 0{,}484607;\ 0{,}005087],$$

$$\mathbf{P}_2^* = [0{,}000031;\ 0{,}003639;\ 0{,}076671;\ 0{,}399708;\ 0{,}465029;\ 0{,}054916],$$

$$\mathbf{P}_3^* = [0{,}000872;\ 0{,}013485;\ 0{,}083370;\ 0{,}257708;\ 0{,}398312;\ 0{,}246252],$$

$$\mathbf{P}_4^* = [0{,}000394;\ 0{,}007504;\ 0{,}056906;\ 0{,}215786;\ 0{,}409129;\ 0{,}310283].$$

Grafické znázornění matic konečných rozdělení pravděpodobnosti stavů $\mathbf{P}_r^*$ pro součásti typu d_1, d_2, d_3, d_4 je na obr. 3.2.

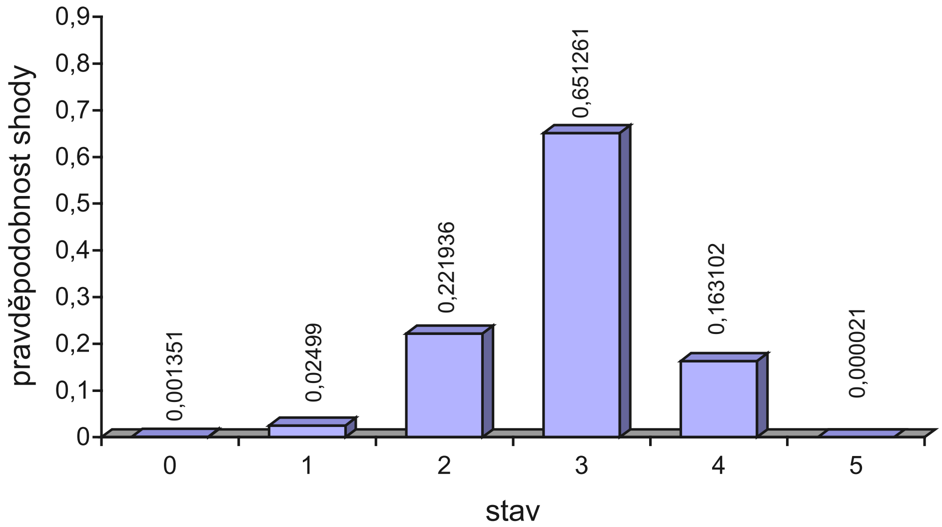


Obr. 3.2

Pomocí uvedeného programu pak byla aplikací vztahu (3.8) získána matice závěrečného rozdělení pravděpodobností stavů pro montážní celky, které se skládají ze součástí typu d_1, d_2, d_3, d_4. Tato matice udává pravděpodobnosti, se kterými po montáži získáme 0 až 5 shodných montážních celků. Vypočtené závěrečné rozdělení pravděpodobností stavů pro montážní celky je

$$\begin{array}{ll} & \quad\;\; \mathit{0} \qquad\qquad\;\; \mathit{1} \qquad\qquad\;\; \mathit{2} \qquad\qquad\;\; \mathit{3} \qquad\qquad\;\; \mathit{4} \qquad\qquad\;\; \mathit{5} \\ \pi_4(t_4) & = [0{,}000135;\ 0{,}024990;\ 0{,}221936;\ 0{,}651261;\ 0{,}163102;\ 0{,}000021]. \end{array}$$

Rozdělení pravděpodobností $\pi_4(t_4)$ stavů pro montážní celky je znázorněno na obr. 3.3 a jeho základní číselné charakteristiky jsou v tabulce 3.2.



Obr. 3.3

Tabulka 3.2

Střední hodnota $E(T_5)$	Medián $\tilde{t}_5$	Modus $\hat{t}_5$	Rozptyl $D(T_5)$	Směrodatná odchylka $\sigma(T_5)$
2,897143	3	3	0,990802	0,995390

Závěrem můžeme říct, že s největší pravděpodobností (větší než 0,95) smontujeme ze součástí typu d_1, d_2, d_3, d_4 dva až čtyři shodné montážní celky.

4. Závěr

Modely popsané v odstavci 2 a 3 naznačují možnosti aplikace jak homogenních, tak i nehomogenních Markovových řetězců v oblasti popisu jakosti dávek výrobků ve výrobním procesu i po jeho ukončení. Pomocí těchto modelů můžeme provést analýzu jakosti výrobního procesu takovým způsobem, že na základě pravděpodobnosti úspěšnosti jednotlivých operací určíme pravděpodobnosti úspěchu výroby v jednotlivých krocích, na konci procesu výroby, příp. i po procesu montáže celků. Tento přístup může posloužit zejména:

- **k podchycení nejméně úspěšných operací výrobních procesů,**
- **k plánování potřebného počátečního počtu polotovarů,**
- **jako simulační model pro analýzu nově navrhovaného výrobního procesu.**

Aplikace homogenního Markovova řetězce z odstavce 2 byla původně použita pro modelování migrace studentů na vysoké škole [6], avšak výukový proces z hlediska výsledku (stavu) studenta v jednotlivých ročnících a celého studia se z hlediska stochastického modelování od výrobního procesu v zásadě neliší. Jednodušší varianta aplikace nehomogenního Markovova řetězce popsaného v odstavci 3 byla původně vyvinuta pro oblast obrábění [3], ale byla aplikována i ve slévárenství [4], a také v oblasti tepelného zpracování [5]. Ve všech uvedených případech byla modelována jakost posloupností výrobních operací pomocí expertních odhadů pravděpodobnosti shodnosti výsledků, neboť nebylo možno získat u oslovených firem věrohodná data statistického charakteru. Popsaná varianta modelu [2] z odstavce 3 je obecnější nežli původní [3, 4, 5], neboť umožňuje popsat jakost výroby dávky montážních celků sestávajících ze součástí o různých počtech. Pro aplikace homogenních Markovových řetězců z odstavce 2 bylo vytvořeno makro ve VBA v Excelu [8].

Oba modely jakosti vycházející homogenních i nehomogenních Markovových řetězců lze aplikovat bez ohledu na sériovost výroby a to i v případě, že pravděpodobnosti úspěchu operací jsou statisticky odhadnuty anebo určeny expertně na základě zkušeností. Vždy se však předpokládá nezávislost jednotlivých operací a stacionarita procesu výroby v čase, neboť případný vzájemný vliv výrobních operací a časová proměnlivost jejich úspěšnosti mohou natolik významně ovlivnit výsledky, že aplikace uvedených modelů by byla mírně řečeno značně neadekvátní. Seriozní aplikace naopak mohou poskytnout dosti ucelený a přehledný popis reálné situace v jakosti výrobního procesu a umožňit interpretovat získané výsledky z ekonomického hlediska i z hlediska efektivnosti výroby.

5. Literatura

1. Mandl, P.: *Pravděpodobnostní dynamické modely.* Praha: Academia, 1985, 184 s.
2. Karpíšek, Z., Tomaňová, R.: *Nehomogenní Markovovy řetězce v jakosti.* Sborník konference Analýza dat pro jakost v měření a technologii. Lázně Bohdaneč 10.-12. 4. 2001, s. 52-61, ISBN 80-238-7359-8.

3. Tomaňová, R., Karpíšek, Z.: *Markovovy řetězce v jakosti výrobních procesů*. Sborník konference Analýza dat ´97. Pardubice 1997, s. 30-41.
4. Karpíšek, Z., Münsterová, E., Tomaňová, R.: *Využití Markovových řetězců v řízení jakosti výroby odlitku.* Sborník konference Slévárny a jejich konkurenceschopnost. Plzeň: VTS ZČ 1998, s. 185-200.
5. Karpíšek, Z., Münsterová, E., Tomaňová, R.: *Markovovy řetězce pro hodnocení jakosti v tepelném zpracování výrobků.* Sborník konference 17. dny tepelného zpracování s mezinárodní účastí. Brno 1998, s. 121-127, ISBN 80-238-1983-1.
6. Karpíšek, Z., Kropáč, J., Růžek, T., Tomaňová, R.: *Aplikace homogenních Markovových řetězců při popisu úspěšnosti studia na VŠ*. Sborník konference Analýza dat pro jakost v měření a technologii. Lázně Bohdaneč 10.-12. 4. 2001, s. 41-51, ISBN 80-238-7359-8.
7. Štarha, P., Tomaňa, R.: *Program pro nehomogenní Markovovy řetězce JAKOST 2.0.* OSNM ÚM FSI VUT Brno 2000.
8. Vitásek, V., Karpíšek, Z.: *Homogenní markovské řetězce v jakosti*. Makro VBA v Excelu. CQR - OSO ÚM FSI VUT Brno 2007.

Referát je součástí řešení výzkumného projektu MŠMT České republiky čís. 1M06047 Centrum pro jakost a spolehlivost výroby (CQR).