1D Burgersova úloha s viskozitou

Řešte konvekčně-difúzní úlohu

$$
\begin{aligned}
&w_t + w w_x = \varepsilon w_{xx} && \text{pro } x \in (0,\ell),\ t \in (0,T)\,,\\
&w(x,0) = w^0(x) && \text{pro } x \in (0,\ell)\,,\\
&w_x(x,t) = 0 && \text{pro } x = 0,\ x = \ell,\ t \in (0,T)\,.
\end{aligned}
$$

Koeficient $\varepsilon \geq 0$ reprezentuje viskozní účinky. Zvolte rovnoměrně dělení intervalu $\langle 0,\ell\rangle$, tj. pro $N > 1$ položte $h = \ell/N$ a označte $x_j = (j - \frac{1}{2})h$, $j = 1,2,\ldots,N$. Úsečka $\langle 0,\ell\rangle$ je sjednocením N konečných objemů (úseček)

$$
D_j \equiv \langle x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\rangle\,, \qquad j = 1,2,\ldots,N\,,
$$

kde $x_{j-1/2} = x_j - \frac{1}{2}h$, $x_{j+1/2} = x_j + \frac{1}{2}h$. Na intervalu $\langle 0,T\rangle$ zvolte dělení

$$
0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots < t_{Q-1} < t_Q = T
$$

a označme $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ délku časového kroku. Má se spočítat přibližné řešení w_j^k na konečných objemech D_j pro časy t_k. Jako počáteční hodnoty zvolíme $w_j^0 = w_0(x_j)$, $j = 1,2,\ldots,N$.

Pro prezentaci výsledků použijte rovnoměrné dělení $t_s^{out} = s\Delta t$, $s = 0,1,\ldots,M$, kde $\Delta t = T/M$. Výpočet organizujte tak, aby množina výpočetních časů $\{t_k\}_{k=0}^{Q}$ obsahovala množinu časů $\{t_s^{out}\}_{s=0}^{M}$.

Vlastní výpočet proveďte ve dvou krocích. Nejdříve řešte jen konvekční úlohu

$$
w_t + w w_x = 0
$$

metodou konečných objemů, tj. spočtěte

$$
w_j^* = w_j^k - \frac{\tau_k}{h}(H_{j+1/2} - H_{j-1/2})\,.
$$

Zde $H_{j+1/2}, H_{j-1/2}$ jsou numerické toky,

$H_{j+1/2} := H(w_j^k, w_{j+1}^k)$ z konečného objemu D_j do konečného objemu D_{j+1},

$H_{j-1/2} := H(w_{j-1}^k, w_j^k)$ z konečného objemu D_{j-1} do konečného objemu D_j.

Použijte následující numerické toky:

Godunov: $H_G(u,v) = f(q)\,,$ kde q určíme takto:

if $u > v$ **then if** $u + v > 0$ **then** $q := u$ **else** q:=v
else if $u \geq 0$ **then** $q := u$
else if $v \leq 0$ **then** $q := v$ **else** $q := 0$;

$$\textit{Engquist–Osher:} \quad H_{EO}(u,v) = f^+(u) + f^-(v),$$

$$\textit{Van-Leer:} \quad H_{VL}(u,v) = \frac{1}{2}\left[f(u) + f(v) - \left|A\left(\frac{u+v}{2}\right)\right|(v-u)\right],$$

$$\textit{Rusakov:} \quad H_R(u,v) = \frac{1}{2}\left[f(u) + f(v) - \max\{|\lambda(\mathbf{A}(u))|, |\lambda(\mathbf{A}(v))|\}(v-u)\right].$$

Přitom $f(w) = \frac{1}{2}w^2$, $\mathbf{A}(w) = f'(w) = w = \lambda(\mathbf{A}(w))$,

$$f^+(w) = \begin{cases} 0 & \text{pro } w \le 0, \\ w & \text{pro } w > 0, \end{cases} \qquad f^-(w) = \begin{cases} w & \text{pro } w \le 0, \\ 0 & \text{pro } w > 0. \end{cases}$$

Poznamenejme, že Van-Leerův tok je totožný s Roeovým tokem

$$H_{Roe}(u,v) = \frac{1}{2}\left[f(u) + f(v) - \left|\hat{A}(u,v)\right|(v-u)\right], \quad \text{kde} \quad \hat{\mathbf{A}}(u,v) = \frac{1}{2}(u+v).$$

Okrajovou podmínku uplatníme prostřednictvím fiktivních konečných objemů D_0 resp. D_{N+1}, v nichž předepíšeme hodnoty symetrické podle okraje $x = 0$ resp. $x = \ell$. Na fiktivních konečných objemech tedy položíme $w_0^k = w_1^k$, $w_{N+1}^k = w_N^k$.

V druhém kroku řešte parabolický problém

$$w_t = \varepsilon w_{xx}$$

diferenční metodou, tj. spočtěte

$$w_j^{k+1} = r w_{j-1}^* + (1-2r) w_j^* + r w_{j+1}^*, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \qquad \text{kde} \quad r = \varepsilon \frac{\tau_k}{h^2}.$$

Okrajovou podmínku opět uplatníme prostřednictvím fiktivních konečných objemů tak, že provedeme $w_0^* = w_1^*$, $w_{N+1}^* = w_N^*$.

Řešení vykreslete pro několik reprezentativních časů. Výpočet proveďte pro různé hodnoty viskozity ε. Při výpočtu je třeba zajistit splnění podmínek stability: pro $\varepsilon = 0$ jde pouze o CFL podmínku

$$\max_j |w_j^k| \frac{\tau_k}{h} \le C_{CFL} \le 1, \tag{CFL}$$

pro $\varepsilon > 0$ je třeba přidat podmínku stability pro řešení parabolické úlohy explicitní Eulerovou metodou, tj. podmínku

$$\varepsilon \frac{\tau_k}{h^2} \le \frac{1}{2}. \tag{DIFF}$$

Tato podmínka se pro velmi malou viskozitu prakticky neuplatní, pro větší ε však převáží a časový krok τ_k výrazně omezí.

Při řešení parabolického problému lze použít také implicitní Eulerovu metodu. V tom případě w_j^{k+1}, $j = 1, 2, \ldots, N$, dostaneme jako řešení soustavy rovnic

$$-r w_{j-1}^{k+1} + (1+2r) w_j^{k+1} - r w_{j+1}^{k+1} = w_j^*, \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

V rovnici pro $j = 1$ zvolíme $w_0^{k+1} = w_1^{k+1}$ a v rovnici pro $j = N$ zvolíme $w_{N+1}^{k+1} = w_N^{k+1}$. Výsledná soustava rovnic se symetrickou třídiagonální maticí soustavy se vyřeší snadno. Délku kroku řídíme jen podmínkou (CFL), podmínka (DIFF) se neuplatní, takže pro větší ε je výpočet výrazně rychlejší.