STOCHASTICKÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE A MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ

Jan Franců[1]

Ústav matematiky, FSI VUT Brno
Technická 2, 616 69 Brno
E-mail : francu@um.fme.vutbr.cz

Abstrakt: Protože data reálných dějů obsahují v sobě náhodnou složku, stochastické diferenciální rovnice (StDR) představují důležitý prostředek pro jejich matematické modelování. Řešení jednoduché rovnice $X' = A\,X$ s koeficientem A obsahujícím náhodný šum slouží jako úvod do matematického modelování pomocí StDR.

Abstract: Since data of real phenomena contain a random component, stochastic differential equations (StDE) is an important mean for their mathematical modelling. Solution of a simple problem for the equation $X' = A\,X$ with a coefficient A containing random noise serves as an introduction to mathematical modelling by means of StDE.

Úvod

Při matematickém modelování jevů kontinua v diferenciálních rovnicích vystupují koeficienty, jejíchž hodnota není známa přesně, navíc tato hodnota se často s časem náhodně mění. Pokud v diferenciálních rovnicích uvažujeme takovéto náhodné koeficienty, z diferenciálních rovnic se stávají stochastické diferenciální rovnice (StDR). Na jednoduché modelové úloze ukážeme některé jevy, které přináší řešení těchto rovnic. Více lze najít například v monografiích [1], [2], nebo v textu [3], který je určen pro čtenáře zabývající se diferenciálními rovnicemi. Řešením stochastického modelu jiné konkrétní úlohy se zabývá příspěvek [4].

Modelová úloha

Budeme se zabývat počáteční úlohou pro lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$x'(t) = a\,x(t) \qquad t > 0\,, \qquad x(0) = x_0 \qquad [\ x_0 > 0\ ].$$

V deterministickém případě koeficient $a(t)$ je daná funkce; pro jednoduchost zvolíme konstantní funkci $a \in \mathbb{R}$. Potom řešení této rovnice je funkce

$$x(t) = x_0\,e^{at}\,,$$

[1] Tento výzkum je podporován grantem č. 201/03/0570 Grantové agentury České republiky.

která s rostoucím t klesá k nule v případě $a < 0$, v případě $a = 0$ je konstantní a pro $a > 0$ roste do nekonečna.

Budeme se zabývat stochastickou rovnicí, ve které koeficient — a následně i řešení — budou náhodné funkce. Ve stochastické analýze se náhodné funkce nazývají stochastický proces a označují velkými písmeny $X(t, \omega)$. Vedle proměnné t se zde vyskytuje argument $\omega \in \Omega$, který označuje jednu realizaci $X(\cdot, \omega)$ náhodné funkce zvanou *trajektorie*. Obráceně, pro každé pevné t je $X(t, \cdot)$ náhodná veličina.

Náhodný koeficient, označíme ho proto velkým A, rovnice uvažujeme ve tvaru součtu pevné konstantní složky r a náhodné složky „šumu“ $\xi(t, \omega)$ o „velikosti“ q:

$$A(t, \omega) = r + q \cdot \xi(t, \omega),$$

kde ξ je náhodný proces zvaný *jednotkový bílý šum*, o kterém předpokládáme, že má v každém čase t normované normální rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$ a hodnoty v jednotlivých časech t jsou navzájem nezávislé. Konstanta q přitom určuje „velikost“ šumu.

Bílý šum $\xi(t, \omega)$ však nemá spojité trajektorie, nelze jej znázornit a těžko se s ním pracuje. Proto příspěvky šumu za určitý časový úsek $(0, t)$ „sečteme“, tj. zintegrujeme, čímž dostáváme náhodný proces W_t se spojitými trajektoriemi, které už lze znázornit křivkou.

Uvažovaný stochastický proces W_t se podle autora nazývá Wienerův proces. Označuje se symbolem $W(t, \omega)$, nebo zkráceně W_t. Jiní autoři ho označují B_t a říkají mu Brownův pohyb, protože popisuje jednorozměrný Brownův jev: náhodný pohyb viditelné částice způsobený náhodnými nárazy okolních neviditelných částic.

Místo $\xi\,\mathrm{d}t$ budeme psát $\mathrm{d}W_t$ a rovnici $X_t' = A\,X_t$ s počáteční podmínkou zapíšeme ve tvaru

$$\mathrm{d}X(t, \omega) = [r\,\mathrm{d}t + q\,\mathrm{d}W(t, \omega)]\ X(t, \omega) \qquad\qquad X(0, \omega) = x_0\,. \tag{1}$$

Wienerův proces

Koeficient A_t je definován pomocí Wienerova procesu, který musíme řádně definovat. Buď Ω základní prostor a

$$W(t, \omega) : \langle 0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$$

stochastický proces, zkráceně budeme psát W_t. Přírůstek procesu od času t do času $t + h$ (při stejné realizaci ω) je také náhodná veličina, kterou označíme $\Delta_h W_t$:

$$\Delta_h W_t \;\equiv\; W(t + h, \cdot) - W(t, \cdot).$$

Budeme předpokládat, že proces W_t splňuje následující tři podmínky:

(a) $W(0, \omega) = 0$ — tj. proces vychází vždy z nuly.

(b) Přírůstek $\Delta_h W_t$ je náhodná veličina s normálním rozdělením $\mathsf{N}(0, h)$, tj. se střední hodnotou 0 a rozptylem h.

(c) pro libovolné $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ přírůstky

$$\Delta_{t_1 - t_0} W_{t_0}\ ,\ \Delta_{t_2 - t_1} W_{t_1}\ ,\ \ldots\ ,\ \Delta_{t_k - t_{k-1}} W_{t_{k-1}},$$

jsou navzájem nezávislé veličiny.

Definice

Stochastický proces W_t splňující podmínky (a) – (c) se nazývá Wienerův proces.

Poznámky

Přirozený je požadavek $W(0,\omega) = 0$ a nulová střední hodnota přírůstku $\Delta_h W_t$. Proč rozptyl přírůstku, který je kvadratickou veličinou, závisí lineárně na kroku h? Rozdělme krok H s rozptylem D na n stejných částí délky $h = N/n$ s rozptyly d. Protože přírůstky na jednotlivých krocích jsou navzájem nezávislé veličiny, při součtu se jejich rozptyly sčítají, odkud plyne $D = nd$. Proto „velikost“, přesněji směrodatná odchylka $\sqrt{D}$, se zmenšuje s druhou odmocninou kroku $\sqrt{h}$.

Trajektorie $W(\cdot,\omega)$ Wienerova procesu je „skoro jistě“ spojitá funkce, nemá však v žádném bodě derivaci.

Trajektorie $W(\cdot,\omega)$ má „skoro jistě“ nekonečnou variaci na každém intervalu $\langle a,b\rangle$ $(0 \le a < b)$, tj. supremum přes všechna dělení $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$ součtu absolutních hodnot přírůstků je nekonečné:

$$\sup \sum_{i=1}^{k} |W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega)| = \infty\,,$$

ale konečnou kvadratickou variaci, tj. supremum přes všechna dělení součtu čtverců přírůstků je rovno délce intervalu:

$$\sup \sum_{i=1}^{k} |W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega)|^2 = b - a\,.$$

Řešení modelové úlohy spočívá v integraci rovnice (1). Protože Wienerův proces W_t nemá konečnou variaci, klasickou definici pro integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}W_t$ nelze použít. V případě počáteční úlohy se užívá zvláštní stochastický tzv. Itôův integrál.

Stochastický integrál

Stieltjesův integrál $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\varphi(t)$ funkce $f(t)$ podle funkce $\varphi(t)$ je definován jako limita (pokud existuje) součtů

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]$$

přes dělení $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ při jeho zjemňování $\max|t_i - t_{i-1}| \to 0$, přičemž každý ξ_i je libovolný bod intervalu $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$. Tato limita existuje, pokud $\varphi(t)$ má konečnou variaci.

V našem případě integrujeme náhodnou funkci podle náhodné funkce. Problém působí skutečnost, že W_t nemá konečnou variaci. Body ξ_i nelze brát libovolně, závisí na volbě ξ_i. Pro různé volby $\xi_i \in \langle t_{i-1}, t_i\rangle$ dostáváme různé hodnoty integrálu.

Pro počáteční úlohu je vhodný Itôův integrál, ve kterém se za ξ_i volí levý koncový bod $\xi_i = t_{i-1}$ intervalu $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$.

Definice *Itôův integrál stochastické funkce $f(t,\omega)$ podle Wienerova procesu W_t je limita při zjemňujícím se dělení intervalu (a,b) součtů*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}W_t = \lim \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1},\omega)\,[W(t_i,\omega) - W(t_{i-1})]\,.$$

Limitu bereme ve smyslu konvergence náhodných veličin $S_n \to S$ podle středu, *tj. podle střední hodnoty čtverce rozdílu $E[|S_n - S|^2] \to 0$.*

Je to analog konvergence v Lebesgueově prostoru, kde $s_n \to s$, jestliže $\|s_n - s\|_2^2 = \int_a^b (s_n(t) - s(t))^2\,\mathrm{d}t \to 0$.

Poznámky

Spočítejme integrál $\int_a^b 2W_t \, \mathrm{d}W_t$. Zvolme dělení $t_i = a + i\,h$ pro $i = 0, \ldots, n$ intervalu $\langle a, b \rangle$ s krokem $h = (b-a)/n$ a označme $W_i = W(t_i, \omega)$. Hledáme limitu součtu $S_n = \sum_i^n 2\,W_{i-1}\,(W_i - W_{i-1})$. Pomocí vztahu $2a(b-a) = b^2 - a^2 - (b-a)^2$ můžeme psát

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 2W_{i-1}\,(W_i - W_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(W_i^2 - W_{i-1}^2\right) - \sum_{i=1}^{n} (W_i - W_{i-1})^2\,.$$

První suma dává $W_n^2 - W_0^2 = W_b^2 - W_a^2$. Lze ukázat, že druhá suma konverguje k délce intervalu $b - a$. Proto integrál je roven

$$\int_0^t 2\,W_t \, \mathrm{d}W_t = W_b^2 - W_a^2 - (b-a).$$

Proti deterministickému případu se zde objevil navíc člen $b - a$.

Poznamenejme, že jestliže body ξ_i zvolíme ve středu $\xi_i = (t_{i-1} + t_i)/2$ intervalu $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$, dostáváme tzv. *Stratonovichův* integrál. V jeho pojetí ale $\int_a^b 2\,W_t \, \mathrm{d}W_t = W_b^2 - W_a^2$, tj. bez členu navíc. Tento integrál však není vhodný pro počáteční úlohy.

Stochastický diferenciál

Protože výpočet Itôova integrálu pomocí definice je obtížný, hodnotu integrálu nejprve odhadneme a diferencováním výsledek ověříme. Bez důkazu, viz [1]–[3], uvedeme tvrzení o stochastickém diferencování složené funkce:

Věta (Itôova formule) *Buď X_t stochastický proces s diferenciálem*

$$\mathrm{d}X_t = u(t)\,\mathrm{d}t + v(t)\,\mathrm{d}W_t\,.$$

Potom stochastický proces Y_t definovaný vztahem $Y_t = g(t, X_t)$ pomocí reálné funkce $g(t, x)$ má diferenciál

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(\,\mathrm{d}X_t)^2\,. \tag{2}$$

Při dalším výpočtu využijeme vztahy:

$$\mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}W_t = \mathrm{d}W_t \cdot \mathrm{d}t = 0 \qquad \mathrm{d}W_t \cdot \mathrm{d}W_t = \mathrm{d}t\,. \tag{3}$$

podle kterých $(\,\mathrm{d}X_t)^2 = v^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Poznamenejme, že v případě jiného, např. Stratonovichova integrálu, je formule pro výpočet diferenciálu jiná.

Řešení modelové úlohy

Vydělením rovnice (1) neznámou X_t modelovou úlohu zapíšeme ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} = r\,\mathrm{d}t + q\,\mathrm{d}W_t\,. \tag{4}$$

Rovnici potřebujeme integrovat. Integrál pravé strany je $r\,t + q\,W_t$, integrál levé strany $\mathrm{d}X_t/X_t$ neumíme přímo spočítat, protože neplatí vztah o derivování složené funkce $[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, ale Itôova formule (2).

Inspirováni vzorcem $\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln x$ hledejme integrál na levé straně (4) ve tvaru $Y_t = g(t, X_t)$ s funkcí $g(t,x) = \ln x$. Pomocí Itôovy formule (2) spočítáme stochastický diferenciál. Protože $\partial_t g = 0$, $\partial_x g = 1/x$ a $\partial_x^2 g = -1/x^2$, platí

$$\mathrm{d}Y_t \equiv \mathrm{d}\left[\ln(X_t)\right] = \frac{1}{X_t}\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X_t^2}\right)(\,\mathrm{d}X_t)^2\,.$$

Diferenciál $\mathrm{d}X_t$ ani X_t dosud neznáme. V případě integrování rovnice (4) jsme funkci $g(t,x)$ zvolili vhodně, protože za $\mathrm{d}X_t/X_t$ i za $(\,\mathrm{d}X_t/X_t)^2$ můžeme dosadit z rovnice (4). Skutečně, máme $\mathrm{d}X_t/X_t = r\,\mathrm{d}t + q\,\mathrm{d}W_t$ a vzorce (3) dávají

$$(\,\mathrm{d}X_t/X_t)^2 = (r\,\mathrm{d}t + q\,\mathrm{d}W_t)^2 = q^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Platí tedy $\mathrm{d}Y_t \equiv \mathrm{d}\left[\ln(X_t)\right] = r\,\mathrm{d}t + q\,\mathrm{d}W_t - q^2/2\,\mathrm{d}t$. Integrace poslední rovnice od 0 do t s využitím počáteční podmínky dává

$$\ln(X_t) - \ln(x_0) = (r - q^2/2)t + q\,W_t$$

odkud odlogaritmováním dostáváme řešení stochastické diferenciální rovnice (1) ve tvaru stochastického procesu X_t obsahující Wienerův proces W_t

$$X_t = x_0 \exp\left((r - q^2/2)\,t + q\,W_t)\right)\,. \tag{5}$$

Z výsledného vzorce je vidět, že hlavní člen řešení je $\exp((r - q^2/2)t)$. Proto:
v případě $r - q^2/2 > 0$ trajektorie skoro jistě konvergují do nekonečna,
v případě $r - q^2/2 < 0$ trajektorie skoro jistě konvergují k nule,
v případě $r - q^2/2 = 0$ některé trajektorie konvergují k nule, jiné divergují.

Závěr

Řešením deterministické obyčejné diferenciální rovnice $x' = a\,x$ je exponenciální funkce $x(t) = x_0\,e^{at}$. Přidáme-li ke koeficientu a „šum“, dostáváme rovnici stochastickou $X_t' = A_t\,X_t$, kterou už nelze řešit klasickou metodou separace proměnných, protože pro stochastický diferenciál neplatí klasický vzorec o diferencování složené funkce. Pomocí Itôovy formule s vhodnou volbou funkce $g(x,t)$ závislé i na pravé straně rovnice jsme úlohu spočítali. Pro integrování StDR není obecný postup, nutno postupovat případ od případu.

Řešení ve tvaru stochastického procesu daného vzorcem (5) obsahuje opět funkci e^x a Wienerův proces W_t. Neočekávaný je však faktor $\exp(-q^2t/2)$, který „přitahuje“ řešení k nule, hraniční stav není pro $r = 0$, ale pro $r - q^2/2 = 0$.

Literatura

[1] B. Øksendal: *Stochastic differential equations, An introduction with applications,* Springer, Berlin 2000.

[2] J. M. Steele: *Stochastic calculus and finantial applications,* Springer, Berlin 2001.

[3] L. C. Evans: *An introduction to stochastic differential equations,* elektronický dokument UC Berkeley zrcadlený na adrese.
`http://www.ian.pv.cnr.it/~ulisse/biblioteca/evans_SDE.pdf`

[4] E. Kolářová: *Stochastické řešení elektrických RC obvodů,* Sborník z 12. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, VŠB-TU Ostrava, 2003.