KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

Jan Franců

Křivkový a plošný integrál patří mezi integrály. Integrál je obecně zobrazení, které množině M zvané integrační obor a funkcím f z množiny tzv. integrovatelných funkcí na množině M přiřadí číslo. Tyto integrály jsou definovány stejným postupem jakým jsme zaváděli Riemannův integrál. Stručně jej lze popsat následovně:

(1) Integrační obor M rozdělíme na konečně mnoho disjunktních částí M_i, $i = 1 \dots n$. Získáme tím **dělení D integračního oboru** M, $D = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$. „Průměrem“ části M_i rozumíme supremum vzdáleností bodů z M_i: $d(M_i) = \sup\{|x-y|\,,\ x, y \in M_i\}$. Jemností $|D|$ dělení D rozumíme maximum z průměrů částí M_i, tj.

$$|D| = \max\{d(M_1), \dots, d(M_n)\}\,.$$

V každé části M_i zvolíme bod $\xi_i \in M_i$, dostaneme tak n-tici bodů $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

(2) Pro funkci f, dělení D, a body ξ utvoříme **integrální součet**

$$S(f, D, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot m(M_i)\,,$$

kde $f(\xi_i)$ je hodnota funkce f v nějakém bodě $\xi_i \in M_i$, $m(M_i)$ je jistým způsobem změřená „velikost“ části M_i – tento způsob určuje druh integrálu.

(3) Vezmeme posloupnost dělení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ množiny M na části $M_1^k, \dots, M_{n_k}^k$, která se zjemňují, tj. $|D_k| \to 0+$, a posloupnost příslušných bodů $\xi_k = (\xi_1^k, \dots, \xi_{n_k}^k)$, přičemž $\xi_i^k \in M_i^k$. Utvoříme posloupnost $\{S(f, D_k, \xi_k)\}_{k=1}^{\infty}$ příslušných integrálních součtů

$$S(f, D_k, \xi_k) = \sum_{i=1}^{n_k} (f(\xi_i^k) \cdot m(M_i^k).$$

(4) Pokud **limita integrálních součtů** $S(f, D_k, \xi_k)$ při zjemňování dělení ($|D_k| \to 0+$) **existuje a nezávisí na volbě** posloupnosti dělení $\{D_k\}$ ani na volbě příslušných bodů ξ_i^k, prohlásíme tuto limitu **integrálem z funkce $f(x)$ přes množinu** M.

1. Křivkový integrál

V případě křivkového integrálu je integračním oborem křivka Γ a podle hodnocení velikosti jejích částí Γ_i rozlišujeme křivkový integrál

(a) **prvního druhu**, kdy $m(\Gamma_i)$ je délka oblouku Γ_i, přičemž Γ je neorientovaná křivka,

(b) **druhého druhu**, kdy hodnocení $m(\Gamma_i)$ je přírůstek souřadnice x (y nebo z) na oblouku Γ_i a integračním oborem je orientovaná křivka $\vec{\Gamma}$.

Křivka a její parametrizace

Každou křivku Γ v rovině lze popsat tzv. **parametrizací**:

$$\Gamma = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = X(t), y = Y(t),\ t \in I = (a,b)\}\,,$$

přičemž předpokládáme, že křivka je **hladká (regulární)**, tj. funkce $X(t), Y(t)$, mají spojité první derivace na I a tečný vektor je stále nenulový: $(X'(t), Y'(t)) \neq (0,0)\,,\ \forall t \in I$.

V technické praxi se však vyskytují často **po částech hladké křivky**, kdy funkce $X(t), Y(t)$ jsou spojité a na celém intervalu I a mají spojité derivace mimo konečně mnoha bodů, tj. jsou spojité na intervalech $(t_{p-1}, t_p)\,, p = 1, 2, \dots, k\ \ (a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b)$.

Křivku Γ rozdělíme na n dílů tím, že zvolíme dělící body $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$ intervalu I splňující $a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Tyto body určují dělení D křivky Γ na n částí — oblouků $\Gamma_i = \{[X(t), Y(t)]\,,\ t \in I_i = (t_{i-1}, t_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Vzhledem k tomu, že velikost integrálu nezáleží na tom, zda koncové body oblouku patří nebo ne, obvykle bereme za I_i otevřené intervaly (t_{i-1}, t_i). Jednotlivé části křivky jsou oblouky Γ_i. Body $\xi_i \in \Gamma_i$ jsou body $[X(\tau_i), Y(\tau_i)]$, kde τ_i je libovolný parametr $\tau_i \in I_i = (t_{i-1}, t_i)\,.$

1A Křivkový integrál prvního druhu

V případě integrálu prvního druhu za „velikost“ $m(\Gamma_i)$ oblouku Γ_i bereme jeho délku Δs_i. Pro „krátké“ oblouky můžeme délku Δs_i oblouku Γ_i nahradit vzdáleností jeho koncových bodů $P_{i-1} = [X(t_{i-1}), Y(t_{i-1})]$ a $P_i = [X(t_i), Y(t_i)]$. Podle Pythagorovy věty platí

$$\Delta s_i = |P_{i-1}P_i| = \sqrt{(X(t_i) - X(t_{i-1}))^2 + (Y(t_i) - Y(t_{i-1}))^2}\,.$$

Rozdíly souřadnic nahradíme pomocí Věty o střední hodnotě, podle které platí $f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) = f'(c_i) \cdot \Delta t_i$, kde $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Dostáváme tím

$$\Delta s_i = \sqrt{[X'(c_i)(t_i - t_{i-1})]^2 + [Y'(\bar{c}_i)(t_i - t_{i-1})]^2} = \sqrt{[X'(c_i)]^2 + [Y'(\bar{c}_i)]}\,\Delta t_i$$

a integrální součet je

$$S(f, D, \tau) = \sum_{i=1}^{n} f(X(\tau_i), Y(\tau_i)) \sqrt{[X'(c_i)]^2 + [Y'(\bar{c}_i)]}\,\Delta t_i\,.$$

Přechodem k limitě $n \to \infty$ při zjemňování dělení dostáváme převod křivkového integrálu na jednorozměrný Riemannův integrál, pomocí kterého křivkový integrál také obvykle počítáme:

$$\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(X(t), Y(t)) \sqrt{(X'(t))^2 + (Y'(t))^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.1}$$

Křivkový integrál prvního druhu je nezáporný, tj. pro nezápornou funkci $f(x)$ je také integrál nezáporný.

1B Křivkové integrály druhého druhu

V případě integrálu druhého druhu potřebujeme orientovanou křivku $\vec{\Gamma}$, tj. křivku, ve které je určen směr pohybu po křivce. Orientace parametrizace je určena orientací pohybu bodu $[X(t), Y(t)]$ při rostoucím t. Orientaci křivky obvykle určíme tím, že řekneme, zda je křivka orientovaná buď v souhlasně s její parametrizací nebo proti její parametrizaci.

Předpokládejme, že křivka je orientovaná v souhlasně s její parametrizací. Při integrálu podle dx „velikostí“ oblouku Γ_i je rozdíl jeho x-ových souřadnic, který opět upravíme pomocí Věty o střední hodnotě

$$\Delta x_i = X(t_i) - X(t_{i-1}) = X'(c_i)(t_i - t_{i-1}) = X'(c_i) \cdot \Delta t_i$$

a integrální součet je

$$S(f, D, \tau) = \sum_{i=1}^{n} f(X(\tau_i), Y(\tau_i)) X'(c_i) \cdot \Delta t_i \, .$$

Přechodem k limitě při zjemňování dělení dostáváme převod křivkového integrálu na jednorozměrný integrál, pomocí kterého integrál také počítáme

$$\int_{\vec{\Gamma}} f(x, y)\,\mathrm{d}x = o \int_a^b f(X(t), Y(t))\, X'(t)\,\mathrm{d}t \, . \tag{1.2}$$

Do vzorce přidáváme konstantu o, která je $o = 1$ v případě, že křivka je orientovaná souhlasně se svou parametrizací. Jestliže orientace křivky je opačná ke své parametrizaci, klademe $o = -1$.

Pro křivkový integrál druhého druhu podle dy (orientace křivky a parametrizace bereme souhlasné) velikost oblouku Γ_i měříme rozdílem y-ových souřadnic, tj. $\Delta y_i = Y(t_i) - Y(t_{i-1})$. Díky Větě o střední hodnotě rovnost přepíšeme $\Delta y = Y'(c_i)\Delta t_i$ a integrální součet je

$$S(f, D, \tau) = \sum_{i=1}^{n} f(X(\tau_i), Y(\tau_i))\, Y'(c_i)\, \Delta t_i \, .$$

Přechodem k limitě dostáváme přepis na jednorozměrný integrál:

$$\int_{\vec{\Gamma}} f(x, y)\,\mathrm{d}y = o \int_a^b f(X(t), Y(t))\, Y'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

Oba integrály druhého druhu lze zapsat do jednoho integrálu:

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{f}(x, y) \cdot \,\vec{\mathrm{d}s} \equiv \int_{\vec{\Gamma}} (f_1, f_2)(x, y) \cdot (\,\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}y) \equiv \int_{\vec{\Gamma}} [f_1(x, y)\,\mathrm{d}x + f_2(x, y)\,\mathrm{d}y)] =$$

$$= o \int_a^b [f_1(X(t), Y(t))\, X'(t) + f_2(X(t), Y(t))\, Y'(t)]\,\mathrm{d}t \, , \tag{1.4}$$

kde $\vec{\mathrm{d}s}$ značí $(\,\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}y)$ a opět $o = 1$ pokud orientace křivky a její parametrizace jsou souhlasné a $o = -1$ pokud orientace jsou opačné. Integrály druhého druhu nejsou nezáporné, integrál z nezáporné funkce může být kladný, nulový i záporný.

Převod integrálů druhého druhu na integrál prvního druhu

Označme jednotkový tečný vektor $\vec{t} = (t_x, t_y)$, který v případě souhlasné orientace křivky a její parametrizace $X(t), Y(t)$ lze spočítat normalizací tečného vektoru $\vec{T} = (X', Y')$

$$\vec{t} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} \, , \quad \text{tj.} \quad t_x = \frac{X'}{\sqrt{(X')^2 + (Y')^2}} \, , \quad t_y = \frac{Y'}{\sqrt{(X')^2 + (Y')^2}} \, .$$

Jednotkový normálový vektor $\vec{n} = (n_x, n_y)$ je kolmý na tečný vektor $\vec{t}$. Takové vektory jsou dva, vezmeme vektor směřující vpravo při pohybu podle orientace křivky. Platí $n_x = t_y,\ n_y = -t_x$.

Pomocí těchto vektorů lze převádět integrály druhého druhu na integrál prvního druhu:

$$\int_{\vec{\Gamma}} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma} f(x,y)\,t_x\,\mathrm{d}s \equiv -\int_{\Gamma} f(x,y) n_y\,\mathrm{d}s\,,$$

$$\int_{\vec{\Gamma}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma} f(x,y)\,t_y\,\mathrm{d}s \equiv \int_{\Gamma} f(x,y) n_x\,\mathrm{d}s\,,$$

oba integrály zapsané dohromady

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{f}(x,y)\cdot \vec{\mathrm{d}s} \equiv \int_{\vec{\Gamma}} [f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y)] = \int_{\Gamma} \vec{f}(x,y)\,\vec{t}\cdot\mathrm{d}s \equiv \int_{\Gamma} [f_1(x,y)\,t_x + f_2(x,y)\,t_y]\,\mathrm{d}s.$$

Integrály na křivkách, které jsou grafem funkce

V případě, kdy křivka Γ je grafem spojité funkce $y = g(x)$, platí

$$\Gamma = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\,,\ y = g(x)\,,\ x \in (a,b)\}\,.$$

Položíme-li $X(t) = t$ a $Y(t) = g(X(t)) = g(t)$ a nahradíme-li t proměnnou x, převod křivkového integrálu prvního druhu na jednorozměrný lze přepsat ve tvaru

$$\int_{\Gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1 + (g'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

V případě křivky Γ orientované ve směru osy x pro křivkový integrál druhého druhu platí jednoduchý vzorec

$$\int_{\vec{\Gamma}} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x,g(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Pro převod integrálu druhého druhu podle $\mathrm{d}y$ potřebujeme vyjádřit křivku Γ jako graf funkce $x = g(y)$, $y \in (a,b)$ orientované ve směru osy y. Potom lze psát

$$\int_{\vec{\Gamma}} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(y),y))\,\mathrm{d}y\,.$$

1C Převod křivkového integrálu na dvojný integrál

V případě, kdy křivka Γ je hranicí nějaké oblasti Ω, lze převést křivkový integrál na dvojný integrál z derivace funkce přes oblast Ω. Pokud křivkový integrál vyjádříme pomocí normálového vektoru a křivkového integrálu prvního druhu, mluvíme o Gaussově-Ostrogradského větě. Hranice omezené oblasti je neprotínající se uzavřená křivka.

Věta 1.1. (Věta Gaussova-Ostrogradského) Nechť Ω je omezená oblast a její hranice $\partial\Omega$ je po částech regulární křivka. Nechť vektorová funkce $\vec{f} = (f_1, f_2)$ má derivace. Potom platí

$$\iint_{\Omega} \mathrm{div}\vec{f}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s\,, \tag{1.5}$$

kde div je operátor divergence: $\mathrm{div}\vec{f} = (\partial_x, \partial_y)\cdot(f_1, f_2) = \partial_x f_1 + \partial_y f_2$.

Uveďme také tvrzení věty rozepsané do složek

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} [f_1\,n_x + f_2\,n_y]\,\mathrm{d}s\,. \tag{1.6}$$

Často užívané tvary Gaussova-Ostrogradského vzorce pro diferencovatelné funkce f a g jsou

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f\,n_x\,\mathrm{d}s\,, \qquad \iint_\Omega \frac{\partial g}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} g\,n_y\,\mathrm{d}s\,. \tag{1.7}$$

Tvrzení (1.6) předchozí věty lze přepsat ve tvaru s křivkovým integrálem druhého druhu a dvourozměrným operátorem rotace (označovaným také symbolem „curl“)

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{g} = (\partial_x, \partial_y) \times (g_1, g_2) = \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\,.$$

Záměnami $f_1 = g_2$, $f_2 = -g_1$ a $n_x\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}y$, $n_y\,\mathrm{d}s = -\,\mathrm{d}x$ dostáváme Greenovu větu:

Věta 1.2. (Věta Greenova) Nechť Ω je omezená oblast a její hranici $\partial\Omega$ tvoří po částech regulární křivka $\vec{\Gamma}$ orientovaná tak, že oblast Ω je po levé straně křivky. Nechť $\vec{g} = (g_1, g_2)$ je diferencovatelná vektorová funkce. Potom platí

$$\iint_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{g}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\vec{\Gamma}} \vec{g}\cdot\vec{\mathrm{d}x}, \tag{1.8}$$

kde $\vec{\mathrm{d}s} = (\,\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}y)$. Uveďme ještě tvrzení věty rozepsané po složkách

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\vec{\Gamma}} [g_1\,\mathrm{d}x + g_2\,\mathrm{d}y]\ . \tag{1.9}$$

1D Integrály nezávislé na křivce

V případě tzv. potenciální vektorové funkce křivkový integrál druhého druhu nezávisí na tvaru křivky, závisí jenom na hodnotách potenciálu v koncových bodech orientované křivky.

Potenciální vektorová funkce

Vektorová funkce $\vec{f} = (f_1, f_2)(x, y)$ se nazývá **potenciální**, pokud má potenciál, tj. existuje funkce $p(x, y)$ taková, že

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y)\,. \tag{1.10}$$

Stejně jako v případě primitivní funkce, potenciálů (pokud existuje alespoň jeden) je nekonečně mnoho, liší se o konstantu, říkáme, že potenciál je určen jednoznačně až na aditivní konstantu.

Protože z předchozí definice potenciálu plyne

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial x}(x, y)\,, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}(x, y)$$

a smíšené derivace jsou záměnné, nutnou podmínkou existence potenciálu je rovnost derivací

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)\,. \tag{1.11}$$

Tato podmínka je i postačující, pokud oblast v rovině, na které hledáme potenciál, je jednoduše souvislá, tj. množina nemá „díry“.

Výpočet potenciálu

Pokud je splněna podmínka (1.11), lze potenciál spočítat integrací. První podmínku ve vztahu (1.10) integrujeme podle x, čímž získáme funkce $F_1(x,y)$

$$p(x,y) = \int f_1(x,y)\,\mathrm{d}x = F_1(x,y) + c_1(y)$$

a integrační „konstantu“ $c_1(y)$ závislou na y. Spočítanou funkce $F_1(x,y)$ dosadíme do druhé rovnosti v (1.10)

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}y}(y) = f_2(x,y)\,,$$

z které lze vyjádřit $c_1'(y)$, přičemž všechny členy s proměnnou x se navzájem zruší. Integrací spočítáme konstantu $c_1(y)$. Pokud proměnná x v rovnici zůstala, vektorová funkce není potenciální, nebo jsme ve výpočtu někde udělali chybu.

Potenciál lze počítat i v opačném pořadí: integrovat druhou podmínku v (1.10) podle y, a přidat integrační „konstantu“ $c_2(x)$, kterou určíme z první podmínky v (1.10).

Potenciál lze spočítat také křivkovým integrálem druhého druhu podél libovolné křivky spojující vhodný bod $[x_0,y_0]$, například $[0,0]$, s obecným bodem $[x,y]$. Vhodnou křivkou je lomená čára $[x_0,y_0]\to[x,y_0]\to[x,y]$ nebo lomená čára $[x_0,y_0]\to[x_0,y]\to[x,y]$:

$$p(x,y) = \int_{x_0}^{x} f_1(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} f_2(x,t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad p(x,y) = \int_{y_0}^{y} f_2(x_0,t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} f_1(t,y)\,\mathrm{d}t\,.$$

Křivkový integrál, který nezávisí na průběhu křivky

Věta 1.3. Nechť vektorová funkce $\vec{f} \equiv (f_1,f_2)(x,y)$ je potenciální s potenciálem $p(x,y)$ na oblasti Ω v $\mathbb{R}^2$ a $\vec{\Gamma}$ orientovaná křivka v Ω s počátečním bodem A a koncovým bodem B. Potom pro křivkový integrál druhého druhu platí

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{f}(x,y)\cdot\vec{\mathrm{d}s} \equiv f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y = p(B) - p(A)\,,$$

tj. křivkový integrál nezávisí na „integrační cestě“ $\vec{\Gamma}$, ale jenom na počátečním bodě A a koncovém bodě B křivky. Pro uzavřenou křivku $\vec{\Gamma}$ platí $p(A) = p(B)$ a integrál je roven nule.

Podmínky pro oblast s „dírou“

Jestliže oblast Ω není jednoduše souvislá, tj. má díru, například mezikruží

$$\Omega = B(0,R)\setminus\overline{B(0,r)} = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2\,, r^2 < x^2+y^2 < R^2\}\,,$$

kde $0 < r < 1 < R$, potom podmínka (1.11) nestačí. Například funkce $\vec{f} = (f_1,f_2)$

$$f_1(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,, \qquad f_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

splňuje podmínku (1.11):

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) + y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

ale není potenciální. Ukážeme, že křivkový integrál přes jednotkovou kružnici Γ není nulový. Parametrizace jednotkové kružnice $x^2+y^2=1$ je $x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in(0,2\pi)$. Platí $\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y=\cos t\,\mathrm{d}t$. Jednoduchý výpočet s využitím $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ dává

$$\int_{\vec\Gamma}\left[\frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\right]=\int_0^{2\pi}\left[\frac{(-\sin t)(-\sin t)}{\cos^2 t+\sin^2 t}+\frac{\cos t\cdot\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\right]\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}t=2\pi.$$

Poznamenejme, že kdyby funkci $\vec f$ bylo možno spojitě rozšířit do nuly, tj. dodefinovat v počátku $[0,0]$ na spojitou funkci, potenciál by existoval.

V případě oblasti s jednou nebo více dírami musíme vedle podmínky (1.11) požadovat, aby pro každou „díru“ integrál $\int_{\vec\Gamma}\vec f\cdot\mathrm{d}\vec s$ přes křivku $\vec\Gamma$, která obíhá jenom tuto díru, byl nulový.

1E Křivkový integrál v prostoru

Křivku v prostoru popíšeme parametrizací rozšířenou o souřadnici z:

$$\Gamma=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ x=X(t),y=Y(t),z=Z(t),\ t\in I=(a,b)\}\,,$$

přičemž předpokládáme, že křivka je regulární, tj. funkce $X(t),Y(t),Z(t)$, mají spojité první derivace na I a $(X'(t),Y'(t),Z'(t))\neq(0,0,0)\,,\forall t\in I$, nebo je alespoň po částech regulární.

Křivkové integrály zavedeme podobně jako v dvojrozměrném případě:

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(X(t),Y(t),Z(t))\,\sqrt{(X'(t))^2+(Y'(t))^2+(Z'(t))^2}\,\mathrm{d}t\,, \tag{1.12}$$

$$\int_{\vec\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x=o\int_a^b f(X(t),Y(t),Z(t))\,X'(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{1.13}$$

$$\int_{\vec\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y=o\int_a^b f(X(t),Y(t),Z(t))\,Y'(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{1.14}$$

$$\int_{\vec\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y=o\int_a^b f(X(t),Y(t),Z(t))\,Z'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.15}$$

a integrály druhého druhu z vektorové funkce $\vec f=(f_1,f_2,f_3)$ lze zapsat do jednoho integrálu:

$$\int_{\vec\Gamma}\vec f(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec s\equiv\int_{\vec\Gamma}[f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x+f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}y+f_3(x,y,z)\,\mathrm{d}z]=$$

$$=o\int_a^b[f_1(X,Y,Z)(t)\,X'(t)+f_2(X,Y,Z)(t)\,Y'(t)+f_3(X,Y,Z)(t)\,Z'(t)]\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.16}$$

Převod integrálů druhého druhu na integrál prvního druhu

Označme jednotkový tečný vektor $\vec t=(t_x,t_y,t_z)$, který v případě souhlasné orientace křivky a její parametrizace $X(t),Y(t)$ lze spočítat normalizací tečného vektoru $\vec T=(X',Y',Z')$, tj.

$$\vec t=\frac{\vec T}{|T|}=\frac{1}{\sqrt{(X')^2+(Y')^2+(Z')^2}}\,(X',Y',Z')\,.$$

V prostoru integrály druhého druhu lze převést na integrál prvního druhu:

$$\int_{\vec{\Gamma}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma} f(x,y,z)\,t_x\,\mathrm{d}s\,, \qquad \int_{\vec{\Gamma}} g(x,y,z)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma} g(x,y,z)\,t_y\,\mathrm{d}s\,,$$

$$\int_{\vec{\Gamma}} h(x,y,z)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma} h(x,y,z)\,t_z\,\mathrm{d}s$$

a všechny tři integrály s vektorovou funkcí $\vec{f} = (f_1, f_2.f_3)$ a $\vec{\mathrm{d}s} = (\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z)$ vektorově

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{\mathrm{d}s} = \int_{\Gamma} \vec{f}(x,y)\cdot\vec{t}\,\mathrm{d}s\,,$$

rozepsáno po složkách

$$\int_{\vec{\Gamma}} [f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}y + f_3(x,y,z)\,\mathrm{d}z] = \int_{\Gamma} [f_1(x,y)\,t_x + f_2(x,y)\,t_y + f_3\,t_z]\,\mathrm{d}s.$$

1F Věty o křivkových integrálech v prostoru

Protože hranicí oblasti v prostoru je plocha a ne křivka, nelze trojný integrál přes objem převést na křivkový přes hranici. Také směr normály ke křivce Γ v prostoru není jednoznačně určen. Věta analogická Gaussově-Ostrogradského větě bude až v části Plošný integrál.

Potenciální vektorová funkce

Vektorová funkce $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)(x,y)$ se nazývá potenciální, pokud existuje potenciál, tj. funkce $p(x,y,z)$ taková, že

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial y}(x,y,z) = f_2(x,y,z)\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial z}(x,y,z) = f_3(x,y,z)\,. \quad (1.17)$$

Potenciálů je nekonečně mnoho, liší se o konstantu, potenciál je určen jednoznačně až na aditivní konstantu. Nutnou podmínku pro existenci potenciálu jsou tři rovnosti

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z)\,, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z)\,. \quad (1.18)$$

Tyto podmínky jsou i postačující, pokud v oblasti Ω lze všechny uzavřené křivky spojitě „stáhnout“ do bodu. Takovou oblastí je například koule a dutá koule. Podmínku nesplňuje třeba anuloid (duše pneumatiky). V něm potřeba doplnit podmínku nulového integrálu dané funkce přes kružnici, „která obtáčí otvor“.

Nezávislost integrálu na integrační cestě

Věta 1.4. Nechť vektorová funkce $\vec{f} \equiv (f_1, f_2, f_3)(x,y,z)$ je potenciální s potenciálem $p(x,y,z)$ na oblasti Ω v $\mathbb{R}^3$ a $\vec{\Gamma}$ orientovaná křivka v Ω s počátečním bodem A a koncovým bodem B. Potom pro křivkový integrál druhého druhu platí

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{f}(x,y,z)\,\vec{\mathrm{d}s} \equiv f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}y + f_3(x,y,z)\,\mathrm{d}z = p(B) - p(A)\,,$$

tj. křivkový integrál nezávisí na tzv. integrační cestě $\vec{\Gamma}$, ale jenom na počátečním a koncovém bodě A, B křivky. Pokud křivka $\vec{\Gamma}$ je uzavřená, tj. $A = B$, integrál je nulový.

1G Aplikace křivkových integrálů

Křivkovým integrálem prvního druhu lze spočítat délku l křivky Γ, souřadnice jejího těžiště $T = [x_T, y_T]$ v rovině nebo $T = [x_T, y_T, z_T]$ v prostoru

$$l = \int_\Gamma 1 \, \mathrm{d}s \,, \quad x_T = \frac{1}{l} \int_\Gamma x \, \mathrm{d}s \,, \quad y_T = \frac{1}{l} \int_\Gamma y \, \mathrm{d}s \,, \quad z_T = \frac{1}{l} \int_\Gamma z \, \mathrm{d}s \,.$$

Moment setrvačnosti J křivky Γ vzhledem k ose o se počítá křivkovým integrálem prvního druhu z funkce $f(x, y, z)$ rovnou druhé mocnině vzdálenosti bodu (x, y, z) od osy o. V případě osy z nebo osy $x = x_0, y = y_0$ rovnoběžné s osou z, jsou to integrály

$$J_z = \int_\Gamma (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}s \,, \qquad J_z^* = \int_\Gamma \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right] \, \mathrm{d}s \,.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose y nebo ose z jsou dány vzorci

$$J_x = \int_\Gamma (y^2 + z^2) \, \mathrm{d}s \,, \qquad J_y = \int_\Gamma (x^2 + z^2) \, \mathrm{d}s \,.$$

Křivkovým integrálem prvního druh můžeme počítat vlastnosti prutu, tj. tělesa tvaru zahnuté tyče s malým průřezem. V jednotlivých případech integrovanou funkci násobíme délkovou hustotou ρ, tj. hmotností prutu jednotkové délky. Takto můžeme spočítat hmotnost m nebo souřadnice těžiště T prutu:

$$m = \int_\Gamma \rho \, \mathrm{d}s \,, \quad x_T = \frac{1}{m} \int_\Gamma x\rho \, \mathrm{d}s \,, \quad y_T = \frac{1}{m} \int_\Gamma y\rho \, \mathrm{d}s \,, \quad z_T = \frac{1}{m} \int_\Gamma z\rho \, \mathrm{d}s \,.$$

Křivkovým integrálem druhého druhu můžeme spočítat třeba práci A, kterou vykoná síla $\vec{f}$ působící podél dráhy (křivky) $\vec{\Gamma}$ v prostoru

$$A = \int_{\vec{\Gamma}} \vec{f} \cdot \vec{\mathrm{d}}s = \int_{\vec{\Gamma}} [f_1 \, \mathrm{d}x + f_2 \, \mathrm{d}y + f_3 \, \mathrm{d}z]$$

i v rovině, případně potenciál silového pole $\vec{f}$.

2. Plošný integrál

Plošný integrál je integrál, ve kterém integračním oborem je plocha. Jeho konstrukce je podobná integrálu funkce dvou reálných proměnných. Plochu S rozdělíme dělením D na konečně mnoho částí S_{ij}, zvolíme body $\xi_{ij} \in S_{ij}$ a utvoříme integrální součet

$$S(f, D, \xi) = \sum_{i,j} f(\xi_{ij})\, m(S_{ij})\,,$$

kde $m(S_{ij})$ je „hodnocení“ části S_{ij}. Vezmeme posloupnost integrálních součtů $S(f, D_k, \xi_k)$ při zjemňujících se děleních $|D_k| \to 0+$ a posloupnost příslušných bodů ξ_k. Pokud limita posloupnosti integrálních součtů $S(f, D_k, \xi_k)$ existuje a nezávisí na volbě posloupnosti dělení D_k ani na odpovídajících bodech ξ_k, prohlásíme ji plošným integrálem.

Rozlišujeme plošný integrál prvního a druhého druhu. Plošný integrál prvního druhu je z neorientované plochy, přitom část plochy S_{ij} v integračním součtu je přitom hodnocena svojí velikostí, tzv. plošným obsahem.

Plošné integrály druhého druhu v $\mathbb{R}^3$ jsou z orientované plochy $\vec{S}$ a jsou podle volby průmětu tři: $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Část plochy S_{ij} je přitom hodnocena $m(S_{ij})$ velikostí jejího průmětu do příslušné roviny xy, xz, yz.

Každá plocha má lokálně dvě strany. Plocha je orientovaná tím, že prohlásíme jednu její stranu za vnější. Tím je určeno, která ze dvou orientací normálového vektoru (vektoru kolmého na plochu) je vnější. Avšak ne každou plochu lze celkově orientovat. Příkladem neorientovatelné plochy je tzv. Möbiova páska nebo Kleinova láhev, kdy pohybem po jedné straně plochy se po čase dostaneme na druhou stranu plochy.

Plošné integrály počítáme převodem na dvojný integrál.

2A Integrály na grafech funkcí

Některé plochy lze vyjádřit jako graf funkce $z = g(x, y)$ nad množinou $D_{xy} \subset \mathbb{R}^2$

$$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = g(x, y),\; (x, y) \in D_{xy}\}\,, \tag{2.1}$$

přičemž předpokládáme, že funkce g má spojité derivace prvního řádu. Případná orientace plochy je přitom ve směru osy z. Potom plošný integrál prvního druhu lze převést na dvou dvojný integrál

$$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, g(x, y))\sqrt{(g'_x(x, y))^2 + (g'_y(x, y))^2 + 1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.2}$$

Pokud plocha S je orientovaná souhlasně s osou z, plošný integrál druhého druhu je prostě

$$\iint_{\vec{S}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} f(x, y, g(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.3}$$

Analogicky v případě plochy, která je grafem funkce $y = g(x, z)$, tj.

$$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \;:\; y = g(x, z),\; (x, z) \in D_{xz} \subset \mathbb{R}^2\}\,, \tag{2.4}$$

plošné integrály prvního a druhého druhu (plocha $\vec{S}$ orientovaná podle osy y) jsou:

$$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xz}} f(x, g(x, z), z)\sqrt{(g'_x)^2 + 1 + (g'_z)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,, \tag{2.5}$$

$$\iint_{\vec{S}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \iint_{D_{xz}} f(x,g(x,z),z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,. \tag{2.6}$$

V případě plochy, která je grafem funkce $x = g(y,z)$, tj.

$$S = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \;:\; x = g(y,z),\; (y,z) \in D_{yz} \subset \mathbb{R}^2\}, \tag{2.7}$$

lze přepsat plošné integrály prvního a druhého druhu

$$\iint_{S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{yz}} f(g(y,z),y,z)\sqrt{1+(g'_y)^2+(g'_z)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \tag{2.8}$$

$$\iint_{\vec{S}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_{yz}} f(g(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \tag{2.9}$$

Poznamenejme, že také plošný integrál prvního druhu je nezáporný: integrál z nezáporné funkce je nezáporný. Pro plošný integrál druhého druhu toto neplatí, integrál může být kladný, nulový i záporný.

2B Integrály na plochách popsaných parametricky

Mnohé plochy však nelze vyjádřit jako graf nějaké funkce, například sféra nebo anuloid. Takovou plochu popíšeme parametricky

$$S = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \;:\; x = X(u,v), y = Y(u,v), z = Z(u,v)\,,\; (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2\}\,,$$

případně rozdělíme na několik částí S_i a každou z nich popíšeme parametricky. Předpokládáme, že funkce X, Y, Z mají první derivace po částech spojité a zobrazení $(u,v) \mapsto (x,y,z)$ není degenerované, tj. matice parciálních derivací ma maximální možnou hodnost dvě:

$$\mathrm{h}\begin{pmatrix} X'_u & Y'_u & Z'_u \\ X'_v & Y'_v & Z'_v \end{pmatrix} = 2\,.$$

Plošný integrál prvního druhu

Malý obdélníček D_{ij} o stranách $\Delta u, \Delta v$ v D_{uv} se zobrazí na (mírně zakřivený) rovnoběžníček S_{ij} se stranami $\vec{T}_u \cdot \Delta u_i$ a $\vec{T}_v\,\Delta v_j$, kde $\vec{T}_u$ a $\vec{T}_v$ jsou tečné vektory ve směrech souřadných os parametrů u a v:

$$\vec{T}_u = (X'_u, Y'_u, Z'_u) \qquad \vec{T}_v = (X'_v, Y'_v, Z'_v)$$

Vektorový součin vektorů je vektor kolmý, proto vektorový součin těchto tečných vektorů je vektor kolmý na plochu, tedy vektor normálový. Označme ho proto symbolem $\vec{N}$

$$\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v = (Y'_u\,Z'_v - Z'_u\,Y'_v, Z'_u\,X'_v - X'_u\,Z'_v, X'_u\,Y'_v - Y'_u\,X'_v)\,.$$

Velikost vektoru $\vec{N}$ je díky vlastnosti vektorového součinu rovna plošnému obsahu rovnoběžníku se stranami tečných vektorů $\vec{T}_u$ a $\vec{T}_v$, proto obdelníček D_{ij} se stranami $\vec{T}_u\,\Delta u$ a $\vec{T}_v\,\Delta v$ se zobrazí na rovnoběžníček S_{ij} s plošným obsahem

$$|\Delta S| = |(\vec{T}_u \times \vec{T}_v)\,\Delta u \Delta v| = |\vec{N}\,\Delta u\,\Delta v|\,.$$

Dostáváme tak vzorec pro převod plošného integrálu prvního druhu na integrál dvojný:

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v))|\vec{N}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

$$|\vec{N}| = \sqrt{N_x^2+N_y^2+N_z^2} = \sqrt{(Y'_u Z'_v - Z'_u Y'_v)^2 + (Z'_u X'_v - X'_u Z'_v)^2 + (X'_u Y'_v - Y'_u X'_v)^2}.$$

Plošný integrál druhého druhu

Složky vektoru $\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$ určují plošný obsah průmětu rovnoběžníku ΔS do rovin yz, xz a xy. Dostáváme tak vzorec pro převod jednotlivých plošných integrálů druhého druhu na integrály dvojné:

$$\iint_{\vec{S}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = o\iint_D f(X,Y,Z)N_x\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \equiv o\iint_D f(X,Y,Z)\,(Y'_u Z'_v - Z'_u Y'_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

$$\iint_{\vec{S}} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = o\iint_D g(X,Y,Z)N_y\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \equiv o\iint_D g(X,Y,Z)\,(Z'_u X'_v - X'_u Z'_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

$$\iint_{\vec{S}} h(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = o\iint_D h(X,Y,Z)N_z\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \equiv o\iint_D h(X,Y,Z)\,(X'_u Y'_v - Y'_u X'_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

kde $o = 1$ pokud daná orientace plochy a vektoru $\vec{N}$ jsou shodné, a $o = -1$ pokud orientace jsou opačné.

Označíme-li $\mathrm{d}\vec{S} = (\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$ a $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, jednotlivé plošné integrály druhého druhu lze zapsat do jednoho vzorce se skalárním součinem vektorů

$$\iint_{\vec{S}} \vec{f}\cdot\,\mathrm{d}\vec{S} = o\iint_D \vec{f}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

rozepsané po složkách

$$\iint_{\vec{S}} (f_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + f_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = o\iint_D (f_1N_1 + f_2N_2 + f_3N_3)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Pozor, pořadí parametrů u, v určuje orientaci normálového vektoru $\vec{N}$ a tím i orientaci parametrizace plochy: změnou pořadí se mění i orientace vektoru $\vec{N}$.

Převod integrálů druhého druhu na integrál prvního druhu

Orientaci plochy $\vec{S}$ určuje jednotkový vektor vnější normály $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ k ploše S, tj. normalizovaný vektor $\vec{N}$ směřující ven z Ω, tj.

$$\vec{n} = (n_x,n_y,n_z) = o\,\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \equiv o\left(\frac{N_x}{\sqrt{N_x^2+N_y^2+N_z^2}}, \frac{N_y}{\sqrt{N_x^2+N_y^2+N_z^2}}, \frac{N_z}{\sqrt{N_x^2+N_y^2+N_z^2}}\right)\,.$$

Potom integrály druhého druhu lze přepsat na integrály prvního druhu

$$\iint_{\vec{S}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_S f(x,y,z)n_x\,\mathrm{d}S\,,$$

$$\iint_{\vec{S}} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \iint_S g(x,y,z)n_y\,\mathrm{d}S\,,$$

$$\iint_{\vec{S}} h(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_S h(x,y,z)n_z\,\mathrm{d}S\,.$$

Orientaci plochy $\vec{S}$ přitom určuje orientace vnější normály $\vec{n}$.

2C Věty o plošných integrálech

Pro křivkové integrály platí tvrzení, které převádí křivkový integrál přes hranici $\partial\Omega$ omezené množiny Ω v rovině na dvourozměrný integrál z derivace funkce přes Ω. Toto tvrzení je speciálním případem Gaussovy-Ostrogradského věty, která platí v prostorech konečné dimenze. Uvedeme větu pro případ oblasti v trojrozměrném prostoru.

Gaussova-Ostrogradského věta

Hranice omezené oblasti Ω v $\mathbb{R}^3$ je plocha, kterou orientujeme „ven“ z oblasti Ω. Budeme předpokládat, že hranice $S = \partial\Omega$ je po částech hladká. Označme $\vec{n}$ jednotkový vektor vnější normály, tj. normalizovaný vektor $\vec{N}$ v bodě plochy S směřující „ven“ z Ω.

Věta 2.1. (Věta Gaussova-Ostrogradského) Buď Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^3$ s po částech hladkou hranicí $S = \partial\Omega$ a $\vec{n}$ jednotkový vektor vnější normály a f, g, h diferencovatelné funkce na Ω. Potom platí

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} f\,n_x\,\mathrm{d}S\,, \qquad \iiint_\Omega \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} g\,n_y\,\mathrm{d}S\,,$$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial h}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} h\,n_z\,\mathrm{d}S\,.$$

Tři předchozí vzorce lze zapsat do jednoho s vektorovou funkcí $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ vektorově

$$\iiint_\Omega \mathrm{div}\vec{f}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\,. \tag{2.10}$$

nebo rozepsané po složkách

$$\iiint_\Omega \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} [f_1\,n_x + f_2\,n_y + f_3\,n_z]\,\mathrm{d}S\,.$$

Stokesova věta

Předchozí věta dávala do souvislosti trojný integrál přes omezený objem Ω s plošných integrálem přes plochu $\partial\Omega$, která je povrchem hranicí Ω. Následující věta dává souvislost plošného integrálu přes omezenou plochu S a křivkového integrálu přes její okraj, kterým je křivka Γ.

Označme $\mathrm{d}\vec{S} = (\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$ a připomeňme operátor rotace (označovaný také „curl“), který vektorové diferencovatelné funkci přiřadí přiřadí vektorovou funkci

$$\mathrm{r\vec{o}t}\vec{f} = \nabla\times\vec{f} = (\partial_x, \partial_y, \partial z)\times\vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$$

Věta 2.2. (Věta Stokesova) Buď $\vec{S}$ - omezená orientovaná po částech hladká plocha, jejíž okraj ∂S je uzavřená po částech hladká křivka $\vec{\Gamma}$ orientovaná souhlasně s plochou, tj. položíme-li dlaň pravé ruky na okraj plochy kolmo k ploše $\vec{S}$, přičemž palec ukazuje směr normály, prsty ukazují orientaci křivky $\vec{\Gamma}$. Potom platí rovnost – zapsána vektorově

$$\iint_{\vec{S}} \mathrm{r\vec{o}t}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{\vec{\Gamma}} \vec{f}\cdot\,\mathrm{d}\vec{s}\,. \tag{2.11}$$

Rozepišme levou stranu rovnosti (2.11)

$$\iint_{\vec{S}} \mathrm{r\vec{o}t}\, \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\vec{S}} [(\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (f_1, f_2, f_3)] \cdot (\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y) =$$

$$= \iint_{\vec{S}} \left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right],$$

rozepsaná pravá strana rovnosti (2.11) dává

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\vec{\Gamma}} (f_1\,\mathrm{d}x + f_2\,\mathrm{d}y + f_3\,\mathrm{d}z)\ .$$

V případě, že plocha S leží v rovině $z = 0$ a $f_3 = 0$, dostaneme Greenovu větu 1.2.

2D Aplikace plošných integrálů

Plošným integrálem prvního druhu lze spočítat plošný obsah $|S|$ plochy S a souřadnice jejího těžiště $T = [x_T, y_T, z_T]$

$$|S| = \iint_S \mathrm{d}S\,, \quad x_T = \frac{1}{|S|} \iint_S x\,\mathrm{d}S\,, \quad y_T = \frac{1}{|S|} \iint_S y\,\mathrm{d}S\,, \quad z_T = \frac{1}{|S|} \iint_S z\,\mathrm{d}S\,.$$

Moment setrvačnosti J plochy S vzhledem k ose o se počítá plošným integrálem prvního druhu $\iint_S f\,\mathrm{d}S$, kde funkce $f(x, y, z)$ je druhá mocnina vzdálenosti bodu (x, y, z) od osy o. V případě osy z nebo osy $x = x_0, y = y_0$ rovnoběžné s osou z jsou to integrály

$$J_z = \iint_S (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S\,, \qquad J_z^* = \iint_S \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right] \mathrm{d}S\,.$$

Moment setrvačnosti plochy S vzhledem k ose x a ose y jsou dány vzorci

$$J_x = \iint_S (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}S\,, \qquad J_y = \iint_S (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}S\,.$$

Plošný integrál můžeme použít výpočet vlastností skořepiny, tj. tělesa malé tloušťky tvaru plochy S. Přidáme-li k integrované funkci plošnou hustotou ρ, tj. hmotnost jednotkového plošného obsahu skořepiny, dostaneme hmotnost m a souřadnice těžiště příslušné skořepiny

$$m = \iint_S \rho\,\mathrm{d}S\,, \quad x_T = \frac{1}{m} \iint_S x\rho\,\mathrm{d}S\,, \quad y_T = \frac{1}{m} \iint_S y\rho\,\mathrm{d}S\,, \quad z_T = \frac{1}{m} \iint_S z\rho\,\mathrm{d}S\,,$$

podobně lze počítat i momenty setrvačnosti skořepiny a další veličiny.

Plošným integrálem druhého druhu lze spočítat tok T vektorového pole $\vec{f}$ plochou S

$$T = \int_{\vec{S}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,.$$

při popisu elektrického nebo magnetického pole.