FUZZY MNOŽINY A FUZZY ČÍSLA – ZÁKLADNÍ POJMY

1 Fuzzy množiny, inkluze a operace

Definice 1.1. Nechť $X \neq \emptyset$ je množina a $\mu_{\underset{\sim}{A}} : X \to \langle 0;1 \rangle$ je zobrazení. ***Fuzzy množinou*** $\underset{\sim}{A}$ na X (***fuzzy podmnožinou*** $\underset{\sim}{A}$ množiny X) rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $\{(x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x));\ x \in X,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in \langle 0;1 \rangle\}$ a píšeme $\underset{\sim}{A} = (X;\ \mu_{\underset{\sim}{A}})$. Množina X je ***univerzum***, zobrazení $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ je ***funkce příslušnosti*** fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$ a $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ je ***stupeň příslušnosti*** prvku x k $\underset{\sim}{A}$ pro $\forall\, x \in X$.

Poznámka 1.1. Zobrazení $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ je definováno pro $\forall\, x \in X$. Pro $x \notin \underset{\sim}{A}$ klademe $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$.

Poznámka 1.2. Pro každou obyčejnou (ostrou, nefuzzy) množinu $A \subset X$ platí $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1$ pro $\forall\, x \in A$ a $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$ pro $\forall\ x \notin A$. Funkce příslušnosti $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ je zobecněním charakteristické funkce množiny. Dále je $\mu_X(x) = 1$ pro $\forall\, x \in X$ a $\mu_{\emptyset}(x) = 0$ pro $\forall\, x \in X$.

Definice 1.2. ***Nosičem*** (***základem***) fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$ rozumíme množinu

$$\operatorname{Supp} \underset{\sim}{A} = \{x \in X;\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0\}.$$

Jádrem fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$ rozumíme množinu

$$\operatorname{Ker} \underset{\sim}{A} = \{x \in X;\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1\}.$$

Příklad 1.1. Nechť X je množina všech přirozených čísel. Fuzzy množina

$$\underset{\sim}{A} = \{(2;0{,}1), (3;0{,}5), (4;1{,}0), (5;0{,}6), (6;0{,}2)\}$$

představuje množinu přirozených čísel “přibližně rovných číslu 4“.

Příklad 1.2. Nechť $X = \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel. Fuzzy množina $\underset{\sim}{A}$ = $= (\mathbb{R};\ \mu_{\underset{\sim}{A}})$, kde $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \exp\left[-(x - x_0)^2\right]$, představuje množinu reálných čísel ″blízkých číslu x_0″.

Dále předpokládáme, že uvažované fuzzy množiny jsou definovány na tomtéž univerzu X.

Definice 1.3. Fuzzy množina $\underset{\sim}{A}$ je ***podmnožinou*** fuzzy množiny $\underset{\sim}{B}$ a píšeme $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$, jestliže $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ pro $\forall\, x \in X$.

Definice 1.4. Fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$ a $\underset{\sim}{B}$ jsou si ***rovny*** a píšeme $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$, jestliže $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ pro $\forall\, x \in X$.

Definice 1.5. ***Průnik*** fuzzy množin $\underset{\sim}{A}$ a $\underset{\sim}{B}$ je fuzzy množina $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$, kde

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \min\left\{ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \right\} \text{ pro } \forall\, x \in X.$$

Definice 1.6. ***Sjednocení*** fuzzy množin $\underset{\sim}{A}$ a $\underset{\sim}{B}$ je fuzzy množina $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$, kde

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \max\left\{ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \right\} \text{ pro } \forall\, x \in X.$$

Věta 1.1. Pro libovolné fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$ platí pro $\forall\, x \in X$

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \frac{1}{2}\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \left| \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \right| \right),$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \frac{1}{2}\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) + \left| \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \right| \right).$$

Definice 1.7. ***Doplňkem*** fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$ rozumíme fuzzy množinu $\overline{\underset{\sim}{A}}$, kde

$$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \text{ pro } \forall\, x \in X.$$

Věta 1.2. Pro libovolné fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}$ platí

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A} \cap \emptyset = \emptyset$
$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A} \cup \emptyset = \underset{\sim}{A}$
$\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cap \underset{\sim}{C}$	$\underset{\sim}{A} \cap X = \underset{\sim}{A}$
$\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cup \underset{\sim}{C}$	$\underset{\sim}{A} \cup X = X$
$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$	$\overline{(\overline{\underset{\sim}{A}})} = \underset{\sim}{A}$
$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$	$\overline{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} \cup \overline{\underset{\sim}{B}}$
$\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{C})$	$\overline{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}$
$\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})$	

Poznámka 1.3. Jestliže $\Phi(X)$ značí množinu všech fuzzy množin na X, pak $(\Phi(X), \cup, \cap)$ je distributivní svaz. Není však Booleovou algebrou, neboť $\underset{\sim}{A} \cup \overline{\underset{\sim}{A}} \neq X$ a $\underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{A}} \neq \emptyset$ (obecně).

Poznámka 1.4. Operace $\cup$, $\cap$ rozšiřujeme pro libovolnou indexovou množinu I pomocí vztahů

$$\mu_{\bigcap\limits_{i\in I} \underset{\sim}{A}_i}(x) = \inf_{i\in I} \mu_{\underset{\sim}{A}_i}(x), \qquad \mu_{\bigcup\limits_{i\in I} \underset{\sim}{A}_i}(x) = \sup_{i\in I} \mu_{\underset{\sim}{A}_i}(x) \text{ pro } \forall\ x \in X.$$

Definice 1.8. ***Součinem*** fuzzy množin $\underset{\sim}{A}$ a $\underset{\sim}{B}$ rozumíme fuzzy množinu $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}$, kde

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \text{ pro } \forall\, x \in X.$$

Definice 1.9. ***Součtem*** fuzzy množin $\underset{\sim}{A}$ a $\underset{\sim}{B}$ rozumíme fuzzy množinu $\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}$, kde

$$\mu_{\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \text{ pro } \forall\, x \in X.$$

Věta 1.3. Pro libovolné fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}$ platí

$$\begin{array}{ll}
\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{A} + \emptyset = \underset{\sim}{A} \\
\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{A} \cdot X = A \\
\underset{\sim}{A} \cdot (\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}) \cdot \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{A} + X = X \\
\underset{\sim}{A} + (\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}) + \underset{\sim}{C} & \overline{\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} + \overline{\underset{\sim}{B}} \\
\underset{\sim}{A} \cdot \emptyset = \emptyset & \overline{\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} \cdot \overline{\underset{\sim}{B}}
\end{array}$$

Poznámka 1.5. Neplatí distributivita operací $\cdot$, + ani idempotence. Operace $\cdot$, + jsou distributivní vzhledem k $\cup$, $\cap$, nikoli naopak. Obecně platí

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}.$$

Pro obyčejné množiny je

$$A \cap B = A \cdot B \text{ a } A \cup B = A + B.$$

Definice 1.10. Nechť $m \in (0; +\infty)$. ***m-tou mocninou*** fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$ rozumíme množinu

$\underset{\sim}{A}^m$, kde $\mu_{\underset{\sim}{A}^m}(x) = \left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\right]^m$ pro $\forall\, x \in X$.

Příklad 1.3. Jestliže $\underset{\sim}{A}$ je množina reálných čísel ″blízkých číslu x_0″ (viz příklad 1.2), pak $\underset{\sim}{A}^2$ je množina reálných čísel ″velmi blízkých číslu x_0″ a $\underset{\sim}{A}^{0,5}$ je množina reálných čísel ″více nebo méně blízkých číslu x_0″.

Definice 1.11. Nechť $\alpha \in \langle 0\,;1\rangle$. $\alpha -$***násobkem*** fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$ rozumíme fuzzy množinu $\alpha \underset{\sim}{A}$, kde $\mu_{\alpha \underset{\sim}{A}}(x) = \alpha \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ pro $\forall\, x \in X$.

Definice 1.12. Nechť $\alpha \in \langle 0\,;\,1\rangle$. $\alpha -$***řezem*** fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$ rozumíme (obyčejnou) množinu

$$A_\alpha = \left\{ x \in X; \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \alpha \right\}.$$

Věta 1.4. Pro libovolné fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$ platí

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \sup_{\alpha \in \langle 0;1\rangle} \min\left(\alpha, \mu_{A_\alpha}(x)\right) \text{ pro } \forall\, x \in X,$$

$$\underset{\sim}{A} = \bigcup_{\alpha \in \langle 0;1\rangle} \alpha\, A_\alpha\,,$$

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1}.$$

Definice 1.13. Fuzzy množina $\underset{\sim}{A}$ je ***normální***, jestliže $\exists\; x \in X$ tak, že $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1$.

Definice 1.14. Fuzzy množina $\underset{\sim}{A}$ je ***konvexní***, jestliže jsou konvexní všechny její $\alpha -$ řezy.

Poznámka 1.6. $\underset{\sim}{A}$ je konvexní, právě když pro $\forall\, x_1 \in X$, $\forall\; x_2 \in X$ a $\forall \lambda \in \langle 0\,;\,1\rangle$ je

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\left\{ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1), \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2) \right\}$$

(pokud je definována konvexní kombinace na X). Funkce $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ konvexní fuzzy množiny $\underset{\sim}{A}$ nemusí být konvexní.

Příklad 1.4. Fuzzy množina $\underset{\sim}{A}$ z příkladu 1.2 je normální, neboť $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_0) = 1$ a je konvexní, protože $A_\alpha = \left\langle x_0 - \sqrt{-\ln \alpha}; x_0 + \sqrt{-\ln \alpha} \right\rangle$.

2 Fuzzy čísla, operace a vlastnosti

Definice 2.1. Nechť $X_1 \times \cdots \times X_n$ je kartézský součin univerz $X_1, \ldots, X_n$ a $\underset{\sim}{A}_1 = \left(X_1, \mu_{\underset{\sim}{A}_1} \right), \cdots, \underset{\sim}{A}_n = \left(X_n, \mu_{\underset{\sim}{A}_n} \right)$ jsou fuzzy množiny. ***Kartézský součin*** fuzzy množin je fuzzy množina $\underset{\sim}{A}_1 \times \ldots \times \underset{\sim}{A}_n = (X_1 \times \ldots \times X_n; \mu_{\underset{\sim}{A}_1 \times \ldots \times \underset{\sim}{A}_n})$, kde

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_1 \times \ldots \times \underset{\sim}{A}_n}(x_1, \ldots, x_n) = \min\left\{ \mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\underset{\sim}{A}_n}(x_n) \right\} \text{ pro } \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n.$$

Definice 2.2. (***Zadehův princip rozšíření***). Nechť $\underset{\sim}{A}_1 = \left(X_1, \mu_{\underset{\sim}{A}_1}\right), \cdots, \underset{\sim}{A}_n = \left(X_n, \mu_{\underset{\sim}{A}_n}\right)$ jsou fuzzy množiny a $f : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$ je zobrazení. Říkáme, že fuzzy množina $\underset{\sim}{B} = f(\underset{\sim}{A}_1, \ldots, \underset{\sim}{A}_n)$ je ***fuzzy hodnotou funkce f podle principu rozšíření***, jestliže

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{(x_1,\ldots,x_n) \\ f(x_1,\ldots,x_n)=y}} \min\left\{\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_1),\ldots,\mu_{\underset{\sim}{A}_n}(x_n)\right\}, \\ \\ 0, \text{ když } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

kde $f^{-1}(y)$ je množina všech n – tic $(x_1, \ldots x_n)$ takových, že $y = f(x_1, \ldots x_n)$.

Poznámka 2.1. Nechť $n = 1$ a f je prosté zobrazení. Pak pro $\underset{\sim}{B} = f(\underset{\sim}{A})$ platí

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(f^{-1}(y)).$$

Věta 2.1. Nechť $\underset{\sim}{B} = f(\underset{\sim}{A}_1, \ldots, \underset{\sim}{A}_n)$. Pak pro $\forall\ \alpha \in \langle 0\ ;\ 1\rangle$ platí

$$B_\alpha = \left[f(\underset{\sim}{A}_1, \ldots, \underset{\sim}{A}_n)\right]_\alpha = f(\underset{\sim}{A}_{1\alpha}, \ldots, \underset{\sim}{A}_{n\alpha}),$$

právě když $\forall\ y \in Y\ \exists\ (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$ tak, že $\mu_{\underset{\sim}{B}}(y) = \mu_{\underset{\sim}{A}_1 \times \ldots \times \underset{\sim}{A}_n}(x_1 \ldots x_n)$.

Dále se budeme zabývat fuzzy množinami na množinami na $X = \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel.

Definice 2.3. Fuzzy množina $\underset{\sim}{a} = (\mathbb{R};\ \mu_{\underset{\sim}{a}})$ se nazývá ***fuzzy číslo***, jestliže fuzzy množina $\underset{\sim}{a}$ je konvexní a normální a $\mu_{\underset{\sim}{a}}$ je po částech spojitá funkce. Jestliže existuje právě jedno a $\in \mathbb{R}$ takové, že $\mu_{\underset{\sim}{a}}$(a) = 1, pak říkáme, že a je ***hlavní hodnota*** fuzzy čísla $\underset{\sim}{a}$. Je-li funkce příslušnosti $\mu_{\underset{\sim}{a}}$ spojitá, říkáme, že $\underset{\sim}{a}$ je ***spojité fuzzy číslo***. Množinu všech fuzzy čísel na $\mathbb{R}$ značíme $\mathcal{A}$. Klademe $a = \{a\}$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.1. Fuzzy množina z příkladu 1.2 je spojité fuzzy číslo.

Definice 2.4. Nechť φ je unární operace na $\mathbb{R}$. ***Rozšířenou unární operací na*** $\mathcal{A}$ rozumíme (podle principu rozšíření) operaci $\varphi(\underset{\sim}{a}), \underset{\sim}{a} \in \mathcal{A}$, kde $\mu_{\varphi(\underset{\sim}{a})}(y) = \sup\limits_{\substack{x \\ \varphi(x)=y}} \mu_{\underset{\sim}{a}}(x)$. Pro φ prosté viz poznámku 2.1.

Definice 2.5. Je-li $\varphi(x) = -x$, pak $-\underset{\sim}{a}$ se nazývá ***opačné fuzzy číslo*** k fuzzy číslu $\underset{\sim}{a}$. Je-li $\varphi(x) = x^{-1}$, pak $\underset{\sim}{a}^{-1}$ se nazývá ***inverzní fuzzy číslo*** k číslu $\underset{\sim}{a}$. Je-li $\varphi(x) = \lambda\, x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pak $\lambda\,\underset{\sim}{a}$ se nazývá ***λ - násobek fuzzy čísla*** $\underset{\sim}{a}$. Je-li $\varphi(x) = e^x$, pak $e^{\underset{\sim}{a}}$ se nazývá ***exponenciála fuzzy čísla*** $\underset{\sim}{a}$. Říkáme, že fuzzy číslo $\underset{\sim}{a}$ je ***kladné*** a píšeme, resp. ***záporné***, jestliže $\mu_{\underset{\sim}{a}}(x) = 0$ pro $\forall x < 0$, resp. $\forall x > 0$. Píšeme $\underset{\sim}{a} > 0$, resp. $\underset{\sim}{a} < 0$.

Věta 2.2. Nechť $\underset{\sim}{a}$ je fuzzy číslo. Pak platí:

1. $-\underset{\sim}{a}$ je fuzzy číslo a $\mu_{-\underset{\sim}{a}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{a}}(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\mu_{\underset{\sim}{a}^{-1}}(x) = \begin{cases} \mu_{\underset{\sim}{a}}(x^{-1}), \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \\ 0, \qquad x = 0, \end{cases}$$

a pro $\underset{\sim}{a} > 0$ anebo $\underset{\sim}{a} < 0$ je $\underset{\sim}{a}^{-1}$ fuzzy číslo.

3. $\lambda\,\underset{\sim}{a}$ je fuzzy číslo, přičemž pro $\lambda \neq 0$ je $\mu_{\lambda \underset{\sim}{a}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{a}}(x/\lambda)$ a pro $\lambda = 0$ je

$\mu_{\lambda \underset{\sim}{a}}(x) = \mu_{\{0\}}(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$,

4. $e^{\underset{\sim}{a}}$ je fuzzy číslo a $\mu_{e^{\underset{\sim}{a}}}(x) = \begin{cases} \mu_{\underset{\sim}{a}}(\ln x), x > 0, \\ 0, \qquad x \leq 0. \end{cases}$

Definice 2.6. Nechť $*$ je binární operace na $\mathbb{R}$. ***Rozšířenou binární operací na*** $\mathcal{A}$ rozumíme podle principu rozšíření operaci $\circledast$, přičemž

$$\mu_{\underset{\sim}{a} \circledast \underset{\sim}{b}}(z) = \sup\limits_{\substack{x,y \\ x*y=z}} \min\left\{\mu_{\underset{\sim}{a}}(x); \mu_{\underset{\sim}{b}}(y)\right\}.$$

Definice 2.7. Binární operace $*$ na $\mathbb{R}$ se nazývá ***rostoucí***, resp. ***klesající***, jestliže pro libovolné $x_1 > x_2$ a $y_1 > y_2$ platí $x_1 * y_1 > x_2 * y_2$, resp. $x_1 * y_1 < x_2 * y_2$.

Věta 2.3. Nechť $*$ je spojitá rostoucí anebo klesající binární operace na $\mathbb{R}$ a $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ jsou spojitá fuzzy čísla. Pak $\underset{\sim}{a} \circledast \underset{\sim}{b}$ je spojité fuzzy číslo a $\underset{\sim}{a} \circledast \underset{\sim}{b} = \bigcup_{\alpha \in \langle 0;1 \rangle} \alpha(a_\alpha * b_\alpha)$, kde a_α, b_α jsou α – řezy fuzzy čísel $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$.

Důsledek 2.1. Jsou-li $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ spojitá fuzzy čísla a $*$ je spojitá binární operace na $\mathbb{R}$, pak platí

$$\underset{\sim}{a} \circledast \underset{\sim}{b} = \begin{cases} \bigcup_{\alpha \in \langle 0;1 \rangle} \alpha \left\langle a_{1\alpha} * b_{1\alpha}; a_{2\alpha} * b_{2\alpha} \right\rangle \text{ pro } * \text{rostoucí,} \\ \bigcup_{\alpha \in \langle 0;1 \rangle} \alpha \left\langle a_{2\alpha} * b_{2\alpha}; a_{1\alpha} * b_{1\alpha} \right\rangle \text{ pro } * \text{klesající.} \end{cases}$$

Poznámka 2.2. Větu 2.3 a důsledek 2.1 lze snadno zobecnit pro rostoucí, resp. klesající, n–ární operace na $\mathbb{R}^n$, $n > 2$.

Poznámka 2.3. Důsledek 2.1 je vhodný pro aproximaci charakteristické funkce rozšířené binární operace při výpočtu na počítači, když nahradíme fuzzy číslo $\underset{\sim}{a}$ diskretizací

$$\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_k = 1$$

fuzzy množinou $\bigcup_{i=1}^{k} \alpha_i a_{\alpha_i}$.

Z poznámky 2.3 vyplývá následující algoritmus pro aproximaci rozšířené binární operace $\circledast$.

Algoritmus 2.1 (Diskrétní aproximace $\underset{\sim}{a} \circledast \underset{\sim}{b}$).

1. Nahradíme $\underset{\sim}{a}$ tzv. ***diskrétními*** α - řezy

$$\hat{a}_{\alpha_i} = \left\{ x_j \in \mathbb{R}; x_1 < \ldots < x_{k_i}; \mu_{\underset{\sim}{a}}(x_1) = \ldots \mu_{\underset{\sim}{a}}(x_{k_i}) \ge \alpha_i \right\}, \; i = 1, \ldots, k.$$

2. Nahradíme $\underset{\sim}{b}$ analogicky jako 1.
3. Určíme $\hat{a}_{\alpha_i} * \hat{b}_{\alpha_i} = \left\{ x_{j1} * y_{j2}; x_j \in \hat{a}_{\alpha_i}, y_j \in \hat{b}_{\alpha_i}, j_1, j_2 = 1 \ldots k_i \right\}, \; i = 1, \ldots, k.$
4. Vypočteme $\bigcup_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot (\hat{a}_{\alpha_i} * \hat{b}_{\alpha_i})$, jež je aproximací $\underset{\sim}{a} \circledast \underset{\sim}{b}$.

Věta 2.4. Nechť $*$ je binární operace na $\mathbb{R}$. Pak platí:

1. $*$ komutativní $\Rightarrow$ $\circledast$ komutativní
2. $*$ asociativní $\Rightarrow$ $\circledast$ asociativní
3. $\circledast$ je distributivní vzhledem k $\cup$.

Důsledek 2.2. Protože + je spojitá rostoucí binární operace na $\mathbb{R}$, je rozšířený součet $\oplus$ spojitých fuzzy čísel spojité fuzzy číslo. Platí $-(\underset{\sim}{a}\oplus \underset{\sim}{b}) = (-\underset{\sim}{a}) \oplus (-\underset{\sim}{b})$. $\oplus$ je komutativní a asociativní, avšak obecně neplatí $\underset{\sim}{a}\oplus (-\underset{\sim}{a}) = 0$.

Důsledek 2.3. Protože násobení $\cdot$ je spojitá operace, která je rostoucí na $\mathbb{R}^{+}$ a klesající na $\mathbb{R}^{-}$, je rozšířený součin $\otimes$ kladných anebo záporných spojitých fuzzy čísel spojité fuzzy číslo. Platí $-(\underset{\sim}{a}) \otimes \underset{\sim}{b}) = -(\underset{\sim}{a}\otimes \underset{\sim}{b})$. $\otimes$ je komutativní a asociativní, avšak obecně neplatí $\underset{\sim}{a}\otimes \underset{\sim}{a}^{-1} = 1$.

Věta 2.5. Nechť $\underset{\sim}{a}$ je kladné anebo záporné spojité fuzzy číslo, $\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ spojitá fuzzy čísla. Pak je $\underset{\sim}{a}\otimes (\underset{\sim}{b}\oplus \underset{\sim}{c}) \subset (\underset{\sim}{a}\otimes \underset{\sim}{b}) \oplus (\underset{\sim}{a}\otimes \underset{\sim}{c})$. Jsou-li $\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ současně kladná anebo záporná spojitá fuzzy čísla, je $\underset{\sim}{a}\otimes (\underset{\sim}{b}\oplus \underset{\sim}{c})$ spojité fuzzy číslo a platí $\underset{\sim}{a}\otimes (\underset{\sim}{b}\oplus \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a}\otimes \underset{\sim}{b}) \oplus (\underset{\sim}{a}\otimes \underset{\sim}{c})$.

Poznámka 2.4. Platí $e^{\underset{\sim}{a}} \otimes e^{\underset{\sim}{b}} = e^{\underset{\sim}{a}\oplus\underset{\sim}{b}}$ a $e^{\underset{\sim}{a}}$>0. Pro spojitá fuzzy čísla $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ je $e^{\underset{\sim}{a}\oplus\underset{\sim}{b}}$ spojité fuzzy číslo. Protože $\underset{\sim}{a}\,\Theta\,\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a}\oplus (-\underset{\sim}{b})$, je $\underset{\sim}{a}\,\Theta\,\underset{\sim}{b}$ spojitých fuzzy čísel $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ spojité fuzzy číslo. Pro $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ kladná anebo záporná spojitá fuzzy čísla je $\underset{\sim}{a}\oslash \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a}\otimes (\underset{\sim}{b}^{-1})$ spojité fuzzy číslo.

Při realizaci rozšířených operací $\oplus, \otimes, \Theta, \oslash$: pomocí α - řezů spojitých fuzzy čísel lze ve smyslu poznámky 2.2 a důsledku 2.1 použít tzv. ***intervalovou aritmetiku***.

Definice 2.7. ***Intervalovým číslem*** rozumíme interval $\langle a;b\rangle, a \le b, (a,b) \in \mathbb{R}^2$. ***Aritmetické operace s intervalovými čísly*** definujeme vztahy:

$$\langle a;b\rangle + \langle c;d\rangle = \langle a+c; b+d\rangle$$
$$\langle a;b\rangle - \langle c;d\rangle = \langle a-d; b-c\rangle$$
$$\langle a;b\rangle \cdot \langle c;d\rangle = \langle \min\{ac,ad,bc,bd\}; \max\{ac,ad,bc,bd\}\rangle$$
$$\langle a;b\rangle / \langle c;d\rangle = \langle a;b\rangle \cdot \langle 1/d; 1/c\rangle \text{ pro } 0 \notin \langle c;d\rangle.$$

Pro $\forall a \in \mathbb{R}$ klademe $a = \langle a;a\rangle$. Jestliže $a > 0$, pak píšeme $\langle a;b\rangle > 0$ apod.

Věta 2.6. Nechť J, K, L, M jsou intervalová čísla. Platí:

$$J + K = K + J$$
$$J + (K + L) = (J + K) + L$$
$$J \cdot K = K \cdot J$$
$$J \cdot (K \cdot L) = (J \cdot K) \cdot L$$
$$0 + J = J$$
$$1 \cdot J = J$$
$$J \cdot (K + L) \subset JK + JL.$$

Pro $K \cdot L > 0$ je $J \cdot (K + L) = J \cdot K + J \cdot L.$ Jestliže $J \subset L$ a $K \subset M$, pak

$$\begin{aligned} &J + K \subset L + M \\ &J - K \subset L - M \\ &J \cdot K \subset L \cdot M \\ &J / K \subset L / M \qquad (0 \notin M) \end{aligned}$$

Příklad 2.2. Jestliže $J = \langle a; b \rangle$ a $K = \langle c; d \rangle$, pak pro $a \geq 0,\ c \geq 0$ je $J \cdot K = \langle ac; bd \rangle$ a pro $b \leq 0,\ d \leq 0$ je $J \cdot K = \langle bd; ac \rangle$.

Poznámka 2.5. Intervalová čísla jsou speciálním případem fuzzy čísel, neboť $\langle a; b \rangle = (\mathbb{R}; \mu_{\langle a;b \rangle})$, kde

$$\mu_{\langle a;b \rangle}(x) = \begin{cases} 1, x \in \langle a; b \rangle, \\ 0, x \notin \langle a; b \rangle, \end{cases}$$

takže aritmetické operace s intervalovými čísly mají vlastnosti operací s fuzzy čísly. Naopak lze fuzzy čísla vyjádřit podle důsledku 2.1 pomocí intervalových čísel – viz příklad 2.3. Přitom nelze vždy redukovat výpočet aritmetického významu s intervalovými čísly na realizaci daných aritmetických operací – viz příklad 2.4.

Příklad 2.3. Nechť

$$\underset{\sim}{a} = (\mathbb{R}, \mu_{\underset{\sim}{a}}), \mu_{\underset{\sim}{a}}(x) = \exp\left[-\left(x - x_0\right)^2\right], \underset{\sim}{b} = (\mathbb{R}, \mu_{\underset{\sim}{b}}),\ \mu_{\underset{\sim}{b}}(y) = \exp\left[-\left(y - y_0\right)^2\right].$$

Řešením rovnic $\mu_{\underset{\sim}{a}}(x) = \alpha$ a $\mu_{\underset{\sim}{b}}(x) = \alpha$ obdržíme α - řezy

$$a_\alpha = \left\langle x_0 - \sqrt{-\ln \alpha}; x_0 + \sqrt{-\ln \alpha} \right\rangle,\ b_\alpha = \left\langle y_0 - \sqrt{-\ln \alpha}; y_0 + \sqrt{-\ln \alpha} \right\rangle.$$

Pro $\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} \oplus \underset{\sim}{b}$ je pomocí intervalové aritmetiky

$$c_\alpha = a_\alpha + b_\alpha = \left\langle x_0 + y_0 - 2\sqrt{-\ln \alpha}; x_0 + y_0 + 2\sqrt{-\ln \alpha} \right\rangle,$$

takže $\mu_{\underset{\sim}{c}}(z) = \exp\left[-\left(\left(z - \left(x_0 + y_0\right)\right)/2\right)^2\right]$. Snadno lze tento výsledek zobecnit na větší počet sčítanců; přitom je výsledný součet fuzzy číslo stejného "typu" jako jsou sčítanci.

Poznámka 2.6. Hodnotu $D = J + K - J \cdot K$ je nutno vypočítat podle principu rozšíření, protože nelze užít intervalových operací jako v případě $J + K - L \cdot M$, kdy vlastně předpokládáme "nezávislost" J, K, L, M . Např. pro $J = \langle a; b \rangle \subset \langle 0; 1 \rangle, K = \langle c; d \rangle \subset \langle 0; 1 \rangle$ se jedná o rostoucí binární operaci $x + y - xy$, takže $D = \langle a + c - ac; b + d - bd \rangle$ a nikoli $\langle a + c - bd; b + d - ac \rangle$. Platí však $D = 1 - (1 - J) \cdot (1 - K)$.

3 Fuzzy funkce, integrál a derivace

Pojem fuzzy funkce není jednotně definován a obvykle je použita taková definice, kdy fuzzy funkce dostatečně vyjadřuje popisovanou reálnou situaci. Vychází se většinou z pojmu fuzzy relace a principu rozšíření.

Definice 3.1. Nechť $X_1, \dots X_n$ jsou univerza. ***n-ární fuzzy relací*** $\underset{\sim}{\varrho}$ v $X_1 \times \dots \times X_n$ je fuzzy množina $\underset{\sim}{\varrho} = (X_1 \times \dots X_n, \mu_{\underset{\sim}{\varrho}})$, kde $\mu_{\underset{\sim}{\varrho}} : X_1 \times \dots \times X_n \to \langle 0;1 \rangle$ je její funkce příslušnosti.

Zřejmě je "obyčejná" relace zvláštním případem fuzzy relace.

Příklad 3.1. Nechť $n = 2, X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ a $\mu_{\underset{\sim}{\varrho}}(x, y) = \exp\left[-(x-y)^2\right], (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Fuzzy relace $\underset{\sim}{\varrho}$ vyjadřuje "přibližně rovno".

Zavedeme následující dva typy fuzzy funkcí.

Definice 3.2. Nechť *X*, *Y* jsou univerza, $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ a $\Phi(Y)$ je množina všech fuzzy množin na *Y*. ***Fuzzy korespondence*** je zobrazení $\underset{\sim}{f}$ z X do $\Phi(Y)$ takové, že $x \mapsto \underset{\sim}{f}(x)$.

Poznámka 3.1. Pojmy fuzzy korespondence a fuzzy relace jsou ekvivalentní: $\underset{\sim}{f}$ je spojena s fuzzy relací $\underset{\sim}{\varrho}$ tak, že $\mu_{\underset{\sim}{f}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{\varrho}}(x, y), \forall (x, y) \in X \times Y$. Přitom $\underset{\sim}{f}(x)$ je řezem relace $\underset{\sim}{\varrho}$ pro dané *x*.

Definice 3.3. Nechť *X*, *Y* jsou univerza, $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ a Y^X je množina všech funkcí $f : X \to Y$. ***Fuzzy svazek*** $\underset{\approx}{f}$ je fuzzy množina na Y^X, $\underset{\approx}{f} = (Y^X, \mu_{\underset{\approx}{f}})$, kde $\mu_{\underset{\approx}{f}}(f)$ je stupeň příslušnosti funkce f k $\underset{\approx}{f}$.

Poznámka 3.2. Pojmy fuzzy korespondence a fuzzy relace nejsou ekvivalentní. Fuzzy korespondence $\underset{\sim}{f}$ je fuzzy svazkem v tom smyslu, že pro $\forall \alpha \in \langle 0;1 \rangle$ může rovnice $\mu_{\underset{\sim}{f}(x)}(y) = \alpha$ mít více řešení $f_{i,\alpha}$ (funkcí z X do *Y*) a lze položit $\underline{f} = \bigcup_i \underset{\approx}{f}_i$, kde $\underset{\approx}{f}_i = \bigcup_{\alpha \in \langle 0;1 \rangle} \alpha \cdot f_{i,\alpha}$. Opačně fuzzy svazek nemusí být fuzzy korespondencí, neboť může obsahovat takové dvě funkce *f*, *g* z X do *Y*, že $\exists x \in X$, pro něž je $f(x) = g(x) = y$ a $\mu_{\underset{\approx}{f}}(f) \neq \mu_{\underset{\approx}{f}}(g)$. Fuzzy svazek lze redukovat na fuzzy korespondence různými způsoby. V dalším volíme redukci v tom smyslu, že klademe

$$\mu_{\underset{\sim}{\varrho}}(x, y) = \sup_{\substack{f \\ y = f(x)}} \mu_{\underset{\sim}{f}}(f)$$

a místo fuzzy korespondence a fuzzy svazku používáme pojem ***fuzzy funkce*** a značíme ji $\underset{\sim}{f}$.

Definice 3.4. Nechť $\underset{\sim}{A}$ je fuzzy množina na X a $\underset{\sim}{f}$ je fuzzy funkce z X do Y. Fuzzy množina $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{A}) = (Y; \mu_{\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{A})})$, kde $\mu_{\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{A})} = \sup\limits_{x\in X} \min\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{\rho}}(x,y)\}$ je ***fuzzy obraz fuzzy vzoru*** $\underset{\sim}{A}$.

Věta 3.1. Nechť $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$ jsou fuzzy množiny na X a $\underset{\sim}{f}$ je fuzzy funkce z X do Y. Pak

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{A}) \cup \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{B})$$
$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \subset \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{A}) \cap \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{B})$$
$$\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B} \Rightarrow \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{A}) \subset \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{B})$$

Pro mnohé aplikace je vhodná fuzzy funkce definovaná následujícím způsobem. Jedná se vlastně o fuzzy funkci ve smyslu redukce fuzzy svazku podle principu rozšíření parametrické funkce $f(x,s)$, $s \in \mathbb{R}^m$ na fuzzy funkci.

Definice 3.5. Nechť $f : X \times \mathbb{R}^m \to Y$ je funkce $f(x,s)$ s parametrem $s \in \mathbb{R}^m, x \in X$ a $\underset{\sim}{S} = (\mathbb{R}^m, \mu_{\underset{\sim}{S}})$. ***Fuzzy parametrickou funkcí*** (***funkcí s fuzzy parametrem*** $\underset{\sim}{S}$) rozumíme fuzzy svazek $\underset{\sim}{f}(x,\underset{\sim}{S}) = (Y^{(X\times\mathbb{R}^m}, \mu_{\underset{\sim}{f}(x,\underset{\sim}{S})})$, kde $\mu_{\underset{\sim}{f}(x,\underset{\sim}{S})} = \sup\limits_{\substack{s \\ y=f(x,s)}} \mu_{\underset{\sim}{S}}(s)$.

Důsledek 3.1. Nechť $\underset{\sim}{S}_1, \underset{\sim}{S}_2$ jsou fuzzy parametry na $\mathbb{R}^m$. Pak pro $\forall x \in X$ platí

$$\underset{\sim}{f}(x, \underset{\sim}{S}_1 \cup \underset{\sim}{S}_2) = \underset{\sim}{f}(x, \underset{\sim}{S}_1) \cup \underset{\sim}{f}(x, \underset{\sim}{S}_2),$$
$$\underset{\sim}{f}(x, \underset{\sim}{S}_1 \cap \underset{\sim}{S}_2) \subset \underset{\sim}{f}(x, \underset{\sim}{S}_1) \cap \underset{\sim}{f}(x, \underset{\sim}{S}_2),$$
$$\underset{\sim}{S}_1 \subset \underset{\sim}{S}_2 \Rightarrow \underset{\sim}{f}(x, \underset{\sim}{S}_1) \subset \underset{\sim}{f}(x, \underset{\sim}{S}_2).$$

Integrál a derivace fuzzy funkce se definují podle Zadehova principu rozšíření. Uvedeme je pro případ $X = Y = \mathbb{R}$. Analogicky lze postupovat v obecnějších případech.

Definice 3.6. Pro $\underset{\sim}{I}(a,b) = \int_a^b \underset{\sim}{f}\,dx$ je

$$\mu_{\underset{\sim}{I}(a,b)}(z) = \sup_{\substack{f \\ \int_a^b f dx = z}} \mu_{\underset{\sim}{f}}(f), \text{ kde } \mu_{\underset{\sim}{f}}(f) = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} \mu_{\underset{\sim}{f}(x)}(f(x)).$$

Pro $I(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \int_{\underset{\sim}{a}}^{\underset{\sim}{b}} f\,dx$ je $\mu_{I(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})}(z) = \sup\limits_{\substack{x,y \\ \int_x^y f dt = z}} \min\{\mu_{\underset{\sim}{a}}(x), \mu_{\underset{\sim}{b}}(y)\}$.

Pro $\underset{\sim}{I}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \int_{\underset{\sim}{a}}^{\underset{\sim}{b}} \underset{\sim}{f}\,dx$ je $\mu_{\underset{\sim}{I}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})}(z) = \sup\limits_{\substack{f, x\le y \\ \int_x^y f dt = z}} \min\{\mu_{\underset{\sim}{a}}(x), \mu_{\underset{\sim}{b}}(y), \mu_{\underset{\sim}{f}}(f)\}$.

Pro $\underset{\sim}{I}(\underset{\sim}{S}) = \int_{x_0}^{x} \underset{\sim}{f}(t,\underset{\sim}{S})dt$ je $\mu_{\underset{\sim}{I}(\underset{\sim}{S})}(z) = \sup\limits_{\substack{s \\ \int_{x_0}^x f(t,s)dt = z}} \mu_{\underset{\sim}{S}}(s)$.

Věta 3.2. Platí:

1. $I(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = F(\underset{\sim}{b})\Theta F(\underset{\sim}{a})$, kde $F(x)$ je primitivní funkce k funkci f.

2. $\int_a^b (\underset{\sim}{f} \oplus \underset{\sim}{g})dx = \int_a^b \underset{\sim}{f}dx \oplus \int_a^b \underset{\sim}{g}dx$.

3. $\int_{\underset{\sim}{a}}^{\underset{\sim}{b}} (f + g)dx = \int_{\underset{\sim}{a}}^{\underset{\sim}{b}} f dx \oplus \int_{\underset{\sim}{a}}^{\underset{\sim}{b}} g dx$.

Definice 3.7. ***Derivace*** $\underset{\sim}{D} = \dfrac{d\underset{\sim}{f}(x)}{dx}$ ***fuzzy funkce*** $\underset{\sim}{f}$ je pro $\forall x \in \mathbb{R}$ fuzzy funkce s funkcí příslušnosti

$$\mu_{\underset{\sim}{D}}(y) = \sup_{\substack{f_\alpha \\ \frac{df_\alpha(x_0)}{dx} = y}} \mu(f_\alpha)\ ,$$

kde f_α je α-řez fuzzy funkce $\underset{\sim}{f}$. ***Derivace fuzzy funkce s parametrem*** $\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{S}) = \dfrac{d\underset{\sim}{f}(x,\underset{\sim}{S})}{dx}$ je fuzzy funkce s fuzzy parametrem s funkcí příslušnosti

$$\mu_{\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{S})}(y) = \sup_{\substack{s \\ \frac{df(x,s)}{dx} = y}} \mu_{\underset{\sim}{S}}(s)\ .$$

Výpočet integrálů a derivací fuzzy funkcí je obvykle složitý i pro jednoduché fuzzy funkce. V některých případech je možno užít následující větu.

Věta 3.3. Nechť $\underset{\sim}{f}(x,\underset{\sim}{S})$ je pro $\forall x \ge x_0$ konvexní fuzzy množina a $f(x,s)$ je spojitá pro $\forall(t,s) \in \langle x_0, x\rangle \times \mathrm{Supp}\ \underset{\sim}{S}$. Pak je

$$\int_{x_0}^{x} \underset{\sim}{f}(t,\underset{\sim}{S})dt = \bigcup_{\alpha\in\langle 0;1\rangle} \alpha \left\langle \int_{x_0}^{x} f_{1\alpha}(t)dt; \int_{x_0}^{x} f_{2\alpha}(t)dt \right\rangle,$$

kde $f_{1\alpha}(t) = \min\limits_s f(t,s), f_{2\alpha}(t) = \max\limits_s f(t,s)$ pro $\mu_{\underset{\sim}{f}(x,\underset{\sim}{S})}(f) = \alpha$ a $\mu_{\underset{\sim}{S}}(s) \le \alpha$.

LITERATURA

1. Klir, G. J., Yuan, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. 1st ed. New Jersey: Prentice Hall, 1995, ISBN 0-13-101171-5.
2. Kolesárová, A., Kováčová, M. *Fuzzy množiny a ich aplikácie*. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2004, ISBN 80-227-2036-4.
3. Novák, V. *Fuzzy množiny a jejich aplikace.* Praha: SNTL, 1990.
4. Novák, V. *Základy fuzzy modelování*. Praha: BEN, 2000, ISBN 80-7300-009-1.