



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**ANALÝZA KVALITY OBRAZU UŽITÍM FOURIEROVY
TRANSFORMACE**

IMAGE QUALITY ANALYSIS USING FOURIER TRANSFORM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Markéta Tkadlecová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Jana Hoderová, Ph.D.

BRNO 2021

Zadaní bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Markéta Tkadlecová**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **Mgr. Jana Hoderová, Ph.D.**
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Analýza kvality obrazu užitím Fourierovy transformace

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Obrázky pořízené digitálním fotoaparátem nejčastěji ve formátu JPEG se od sebe kvalitativně liší například ostrostí, šumem, ... Zaměříme se na cca 10 různých obrázků pořízených při stejném ISO se stejnou ztrátovou kompresí a aplikujeme na ně Fourierovu transformaci. Na základě práce s amplitudovými spektry obrazů stanovíme uspořádání porovnávaných obrazů podle kvality.

Cíle bakalářské práce:

Jedním z cílů je sepsání matematického základu potřebného k pochopení myšlenky Fourierovy analýzy obrazů. Důraz bude kladen na logickou stavbu textu a vysvětlení potřebných pojmů a vlastností Fourierovy transformace.

Hlavním cílem práce je sestavení programu na testování kvality digitálního obrazu.

Seznam doporučené literatury:

PRATT, William K. Digital image processing: PIKS Scientific inside. 4th ed. Hoboken: Wiley-Interscience, c2007. ISBN 0471767778.

FREEMAN, Michael. Průvodce světem digitální fotografie. Praha: Svojtka & Co., c2004. ISBN 80-7237-962-3.

KLÍMA, Miloš. Zpracování obrazové informace. V Praze: České vysoké učení technické, 1996. ISBN 80-01-01436-3.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá dvourozměrnou Fourierovou transformací a její aplikací při určování kvality obrazu. Je zde uveden algoritmus založený na amplitudových spektrech, který je následně testován na několika sadách snímků. Jsou rozebrány možnosti využití algoritmu v praxi i jeho nedostatky. Pro pochopení základů, na kterých algoritmus stojí, je vyložena potřebný matematický aparát. Důraz je kladen na vysvětlení vlastností amplitudových spekter. Dále se práce věnuje digitálnímu obrazu a jeho charakteristikám, které ovlivňují jeho kvalitu. Pro otestování a seřazení snímků podle kvality byl sestaven demonstrační program.

Summary

This thesis deals with two-dimensional Fourier transform and its use in digital image quality assessment. An algorithm based on amplitude spectra is introduced and tested on different sets of images. Its possible use and disadvantages are described. For understanding the basics of the algorithm the fundamental mathematical theory is included. Mainly the properties of amplitude spectra are explained. Next, the theory of digital images and their characteristics, which can affect their quality, is described. For testing the quality of the image the demonstrative program has been developed.

Klíčová slova

Fourierova transformace, amplitudové spektrum, digitální obraz, šum, citlivost ISO, ztrátová komprese, ostrost

Keywords

Fourier transform, amplitude spectrum, digital image, image noise, ISO sensitivity, lossy compression, sharpness

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Analýza kvality obrazu užitím Fourierovy transformace* vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Jany Hoderové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Markéta Tkadlecová

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucí práce Mgr. Janě Hoderové, Ph.D. za její vedení, ochotu a cenné rady a připomínky, které vedly ke zvýšení kvality mé práce.

Markéta Tkadlecová

Obsah

1	Úvod	12
2	Fourierova transformace	13
2.1	Fourierova řada	14
2.2	Jednorozměrná Fourierova transformace	15
2.3	Dvourozměrná Fourierova transformace	17
2.3.1	Dvourozměrná diskrétní Fourierova transformace	18
3	Digitální obraz	25
3.1	Charakteristiky	26
3.1.1	Jas a kontrast	26
3.1.2	Šum	27
3.1.3	Ostrost	29
3.2	Komprese obrazu	29
3.3	Analýza kvality	30
3.3.1	Fourierova metoda	31
4	Testování algoritmu	37
4.1	Program	41
4.1.1	Uživatelské prostředí	42
5	Závěr	44
	Literatura	45
	Seznam příloh	46

1. Úvod

Ačkoliv si to neuvědomujeme, analýza kvality obrazu, ať už snímků nebo videa, tvoří důležitou část našeho každodenního života. Vnímáme a hodnotíme kvalitu obrazu při procházení galerie telefonu i při sledování televize. Proto není žádným překvapením, že se obrazová analýza stala klíčovou i v mnoha vědních oborech. V technické praxi se často pořizují stovky fotografií, z nichž se následně musí vybrat snímek s nejlepšími vlastnostmi. Typickým příkladem je focení astronomických objektů teleskopem, kdy se pořídí tisíce snímků jedné hvězdy. Subjektivní ohodnocení a seřazení tolika snímků by bylo velmi složité a časově náročné. Další úskalí subjektivního hodnocení je to, že dva lidé mohou vnímat stejný snímek zcela odlišně. Proto bylo zapotřebí vyvinout objektivní metody, které nám spolehlivě a efektivně určí pořadí hodnocených obrazů. Spousta takových metod je založena právě na Fourierově transformaci a o jedné z nich pojednává tato bakalářská práce.

Fourierova transformace je integrální transformace s velkým rozsahem využití, od řešení parciálních diferenciálních rovnic až po zpracovávání snímků z magnetické rezonance. Díky Fourierově transformaci získáme komplexní informace o zkoumaném objektu, a právě proto je důležitá i v obrazové analýze. V první kapitole popíšeme základní principy a vlastnosti Fourierovy transformace, teoreticky i na příkladech. Zaměříme se hlavně na vysvětlení chování amplitudových spekter. Právě na nich je popisovaná metoda postavena.

Ve třetí kapitole se budeme zabývat digitálním obrazem, jeho vznikem a charakteristikami, které mohou různým způsobem kvalitu snímku ovlivnit. Mezi nejdůležitější patří ostrost, která hraje při hodnocení obrazu významnou roli. Následně propojíme tyto poznatky s dvourozměrnou Fourierovou transformací. V této kapitole taktéž podrobně popíšeme úvahy vedoucí k sestavení algoritmu, který každému obrazu přiřadí číslo ostrosti α_o .

Poslední kapitola pojednává o testování algoritmu na konkrétních obrazech pořízených při konstantním nastavení ISO. Prozkoumáme a popíšeme jeho přesnost, využitelnost v praxi ale i nedostatky. Pro hodnocení kvality obrazů metodou, která je založená na tomto algoritmu, je sestaven program v MATLABu.

2. Fourierova transformace

Fourierova transformace je velmi mocný nástroj v mnoha vědních oborech a často v nich zaujímá velmi důležitou pozici. Stručně uvedeme teorii Fourierových řad, ze kterých přejdeme k jednorozměrné Fourierově transformaci. Ta tvoří základ pro naše úvahy, které následně rozšíříme na dvojrozměrný případ. Všechny definice a věty jsou převzaty z [6] a [3], pokud není uvedeno jinak. Nejprve připomeneme pojem periodických funkcí, které nás budou provázet v průběhu celé kapitoly. Dále zavedeme důležité prostory funkcí, s nimiž budeme pracovat.

Definice 2.1 (Periodická funkce). Funkci f nazveme *periodickou*, jestliže existuje číslo $p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ takové, že

$$f(x) = f(x + p) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Nejmenší číslo p splňující rovnici nazveme *periodou* funkce f .

Definice 2.2 (Lebesgueovský integrovatelná funkce). Funkci $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ nazveme *integrovatelnou* (v lebesgueově smyslu) na intervalu $I = (a, b)$, jestliže je měřitelná a integrál

$$\int_a^b |f(x)| \, dx \quad (2.2)$$

existuje a je konečný.

Definice 2.3 (Prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R})$). Prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ definujeme jako množinu funkcí $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ takových, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx \quad (2.3)$$

existuje a je konečný.

Definice 2.4 (Prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$). Prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definujeme jako množinu funkcí $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ takových, že

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| \, dx dy \quad (2.4)$$

existuje a je konečný.

Definice 2.5 (Prostor $\mathcal{L}^2(I)$). Prostor $\mathcal{L}^2(I)$ na intervalu $I = (a, b)$ definujeme jako

$$\mathcal{L}^2(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \text{ měřitelná; } \int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty\}. \quad (2.5)$$

Definice 2.6 (Skalární součin a ortogonalita). Necht funkce $f, g \in \mathcal{L}^2(I)$. Jejich *skalární součin* (f, g) definujeme jako

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx, \quad (2.6)$$

kde \bar{g} označuje komplexně sdruženou funkci k funkci g . Dvě funkce f, g nazveme *ortogonální*, jestliže platí $(f, g) = 0$.

2.1. FOURIEROVA ŘADA

Definice 2.7 (Úplný ortogonální systém). Podmnožinu A Hilbertova prostoru $\mathcal{L}^2(I)$ (prostor $\mathcal{L}^2(I)$ se skalárním součinem podle (2.6)) nazveme *ortogonálním systémem*, jestliže pro všechny $f, g \in A$, $f(x) \neq g(x)$ pro $\forall x \in I$ platí $(f, g) = 0$. Ortogonální systém A nazveme *úplným*, jestliže pro každou $f \in \mathcal{L}^2(I)$ takovou, že platí $(f, g) = 0 \ \forall g \in A$, potom $f(x) = 0$.

Věta 2.1 (Eulerova identita). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad (2.7)$$

kde i je imaginární jednotka.

2.1. Fourierova řada

Definice 2.8 (Fourierova řada). Necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je integrovatelná periodická funkce s periodou 2π a e^{ikx} úplný ortogonální systém. Pak řadu $\varphi_n(x)$ ve tvaru

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad (2.8)$$

kde koeficienty c_k jsou dány

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.9)$$

nazveme *částečným součtem Fourierovy řady funkce f* .

Jestli existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ částečného součtu, můžeme psát

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.10)$$

Tato nekonečná řada se nazývá *Fourierova řada funkce f* .

Pokud je funkce f reálná, můžeme použít Eulerovu identitu (2.7) a napsat řadu ve tvaru

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad (2.11)$$

kde koeficienty a_k, b_k jsou dány

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Řadu ve tvaru (2.11) nazýváme *trigonometrickou Fourierovou řadou funkce f* . Takto vyjádřený tvar Fourierovy řady je pravděpodobně nejznámější a často používaný. Více o Fourierových řadách a jejich konvergenci popisuje [1].

Poznámka 2.1. Dosud popsané vzorce jsou dosti konkrétní vzhledem k uvažovanému intervalu, proto provedeme zobecnění pro Fourierovu řadu reálné funkce na intervalu $\langle \frac{-T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$, $T \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Řada (2.10) a koeficient (2.9) přejdou na

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{ik\omega t} dx, \quad (2.12)$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Příklad 2.1. Stanovme Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$ na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Řešení. Spočítáme koeficienty trigonometrické Fourierovy řady

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0,$$

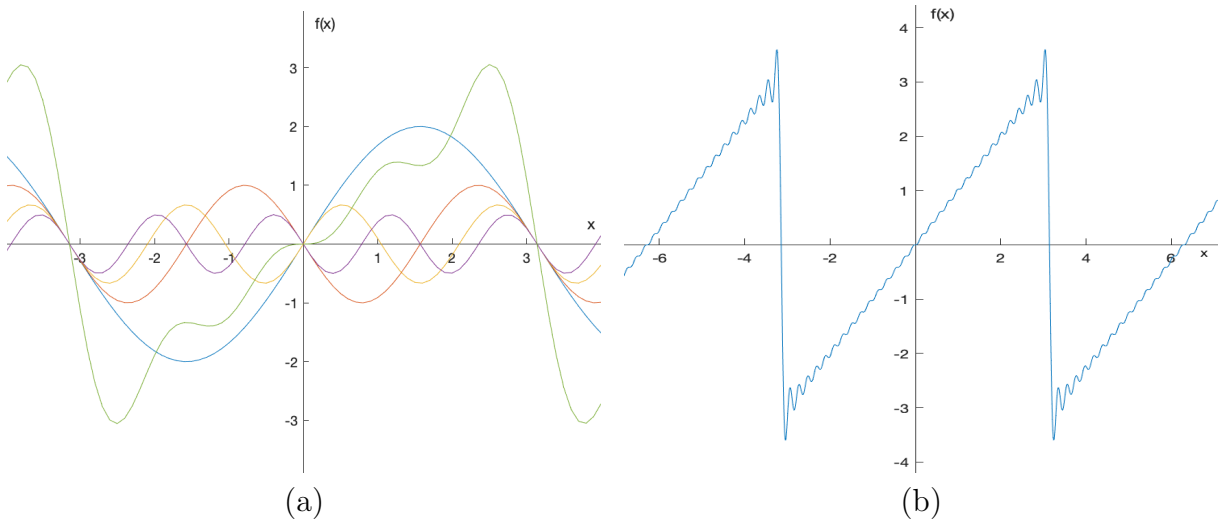
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(kx) \, dx = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) \, dx = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$

Výsledná Fourierova řada je tedy tvaru

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin(kx).$$

Výsledky jsou graficky vyobrazeny na obrázku 2.1. Z obrázku je patrné, že se zvyšujícím se počtem sčítanců řada lépe aproximuje funkci, která vznikne periodickým opakováním původní funkce na celé reálné ose s periodou T danou délkou intervalu. Můžeme tedy poznamenat, že Fourierova řada neperiodickou funkci rozložila na součet harmonických funkcí a převedla ji na funkci periodickou.



Obrázek 2.1: Grafy: (a) První 4 členy Fourierovy řady funkce f a jejich součet (zelená), (b) součet 30 členů

2.2. Jednorozměrná Fourierova transformace

Definice 2.9 (Fourierova transformace). Nechť je funkce $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. *Fourierova transformace funkce f* je funkce $\mathcal{F}\{f\}(\xi) = F(\xi) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} \, dx. \quad (2.13)$$

Funkci F nazýváme taky *Fourierovým spektrem* funkce f . Říkáme, že $f(x)$ a $F(\xi)$ reprezentují tu stejnou funkci v prostorové oblasti a frekvenční oblasti.

Definice 2.10 (Inverzní Fourierova transformace). Nechť je funkce $G \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. *Inverzní Fourierova transformace funkce G* je funkce $\mathcal{F}^{-1}\{G\}(x) = g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi. \quad (2.14)$$

2.2. JEDNOROZMĚRNÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE

Poznámka 2.2 (Přechod od Fourierovy řady k Fourierově transformaci). Provedeme-li ve vzorcích (2.12) pro Fourierovu řadu s obecnou periodou limitní přechod $T \rightarrow \infty$, tj. $\omega \rightarrow \infty$ a nahradíme-li sumu integrálem, dostaneme následující výraz

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) d\omega. \quad (2.15)$$

Tento výraz se nazývá *dvojnásobný Fourierův integrál* a můžeme ho rozepsat do dvou funkcí: přímé a inverzní Fourierovy transformace. Detailnější odvození a podrobný vztah je popsán v [1], ale používá se zde odlišná konstantová konvence.

Poznámka 2.3. Je důležité poznamenat, že předpoklady v definicích Fourierovy transformace 2.9 a inverzní Fourierovy transformace 2.10 o funkci z prostoru $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ nelze vynechat. Předpoklad nám zaručí, že je Fourierova transformace i její inverze definována, tj. je konečná. Analogicky to funguje i ve vyšších dimenzích.

Při zpracovávání digitálních jednorozměrných signálů výpočetní technikou nepracujeme se spojitými daty, ale jen s konečným počtem vzorků. Proto zavádíme diskrétní Fourierovu transformaci.

Definice 2.11 (Diskrétní Fourierova transformace). Nechť je f diskrétní funkce, $f : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$. *Diskrétní Fourierova transformace funkce f* je funkce $\mathcal{D}\{f\}(\omega) = F(\omega) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná

$$\mathcal{D}\{f\}(\omega) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-2\pi i \omega x / N}, \quad (2.16)$$

kde $\omega = 0, 1, \dots, N-1$.

Definice 2.12 (Inverzní diskrétní Fourierova transformace). Nechť je f diskrétní funkce $f : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a F její Fourierova transformace. *Inverzní diskrétní Fourierova transformace funkce F* je funkce $\mathcal{D}^{-1}\{F\}(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná

$$\mathcal{D}^{-1}\{F\}(x) = \frac{1}{N} \sum_{\omega=0}^{N-1} F(\omega) e^{2\pi i \omega x / N}, \quad (2.17)$$

kde $\omega = 0, 1, \dots, N-1$.

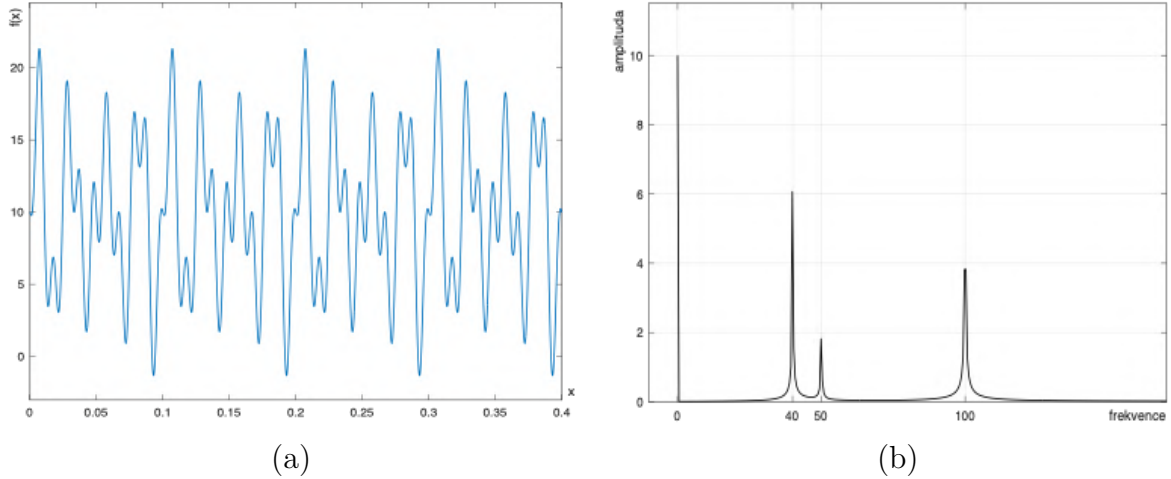
Příklad 2.2. Vysvětlíme si principy jednorozměrné Fourierovy transformace na příkladu. Uvedme funkci

$$f(x) = 10 + 2 \cdot \sin(2\pi f_1 x) + 6 \cdot \sin(2\pi f_2 x) - 4 \cdot \sin(2\pi f_3 x)$$

a frekvence položíme $f_1 = 50$ Hz, $f_2 = 40$ Hz, $f_3 = 100$ Hz.

Funkci f si můžeme představit jako jednorozměrný signál – například složení několika tónů. Dále budeme uvažovat, že nemáme předpis funkce k dipozici. Často se v praxi setkáváme s tím, že potřebujeme analyzovaný signál rozložit a určit, kolik vln ho tvoří a jaké mají vlastnosti. Z grafického průběhu funkce (obrázek 2.2 (a)) ale tyto informace nevyčteme. Proto na signál použijeme Fourierovu transformaci. Ze spektra (obrázek 2.2 (b)) můžeme přesně určit, že se signál skládá ze tří vln o frekvenci 40 Hz, 50 Hz a 100 Hz. Výška sloupců ve spektru nám říká, která z frekvencí je ve funkci nejvíce zastoupena – udává amplitudu jednotlivých složek. U nulové frekvence máme sloupec, který odpovídá konstantní hodnotě přičtené k funkci.

Fourierova transformace nám tedy úspěšně rozložila signál na jednotlivé složky.



Obrázek 2.2: (a) Graficky znázorněná funkce f a její Fourierova transformace (b)

2.3. Dvourozměrná Fourierova transformace

Obrazy interpretujeme jako funkce dvou proměnných a na ty nám jednorozměrná Fourierova transformace nestačí. Proto rozšíříme naše úvahy do vyšší dimenze.

Fourierova transformace má v analýze obrazů významné postavení. Přiřadí obrazu další objekt – spektrum, ze kterého získáme cenné informace o vlastnostech obrazu, kterých si pouhým okem nemusíme všimnout. Spektrum je opět funkce dvou proměnných, ty nazýváme frekvence. Nejprve uvedeme definice pro spojitý případ, ale stejně jako u signálů, ani při registraci obrazů počítač nepracuje se spojitými daty. Proto si i v této části představíme diskrétní případ transformace.

Definice 2.13 (Dvourozměrná Fourierova transformace). Necht $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. *Fourierova transformace funkce f* je funkce $\mathcal{F}\{f\}(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy. \quad (2.18)$$

Funkci F nazveme *Fourierovým spektrem* funkce f . Říkáme, že $f(x, y)$ a $F(\xi, \eta)$ reprezentují tu stejnou funkci v prostorové oblasti a frekvenční oblasti.

Vzor v prostorové oblasti a jeho transformace – obraz – tvoří tzv. *Fourierův pár*.

Definice 2.14 (Inverzní Fourierova transformace). Necht funkce $G \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. *Inverzní Fourierova transformace funkce G* je funkce $\mathcal{F}^{-1}\{G\}(x, y) = g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \eta) e^{i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta. \quad (2.19)$$

Poznámka 2.4. Vzorec (2.18) lze jednoduše odvodit. Máme funkci dvou proměnných f . Nejprve provedeme Fourierovu transformaci v proměnné x a proměnnou y považujeme za konstantu. Dostaneme spektrum $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-ix\xi} dx$. Následně na celou funkci použijeme Fourierovu transformaci v proměnné y s konstantním x . Obdržíme výraz $F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-ix\xi} dx \right) e^{-iy\eta} dy$. Z předpokladu definice víme, že funkce $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ je integrovatelná, tím pádem můžeme přepsat dvojnásobný integrál na dvojný [3], a tak dostaneme daný vzorec. Inverzní transformaci (2.19) odvodíme z jednorozměrné inverzní transformace obdobně.

2.3. DVOUROZMĚRNÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE

2.3.1. Dvourozměrná diskretní Fourierova transformace

Definice 2.15 (Dvourozměrná diskretní Fourierova transformace). Necht f je diskretní funkce $f : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, N-1\} = \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$. Diskretní Fourierova transformace funkce f je funkce $\mathcal{D}\{f\}(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) : \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ je definovaná

$$F(\xi, \eta) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N}(x\xi + y\eta)}. \quad (2.20)$$

Funkci F nazveme *Fourierovým spektrem funkce f* . Pojmy zavedené pro spojitý případ platí i pro případ diskretní.

Definice 2.16 (Inverzní dvourozměrná diskretní Fourierova transformace). Necht f je diskretní funkce $f : \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$ a necht F její Fourierovo spektrum. Inverzní diskretní Fourierova transformace funkce F je funkce $\mathcal{D}^{-1}\{F\}(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná

$$\mathcal{D}^{-1}\{F\}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{\eta=0}^{N-1} F(\xi, \eta) e^{\frac{2\pi i}{N}(x\xi + y\eta)}. \quad (2.21)$$

Poznámka 2.5. Vzorce (2.20), (2.21) lze odvodit analogicky jako u spojitého případu (viz poznámka 2.4), akorát s diskretními variantami transformací. Vícerozměrné transformace tedy interpretujeme jako složení jednorozměrných transformací.

Poznámka 2.6. Jelikož ve vzorcích (2.20), (2.21) sčítáme argumenty přes konečný počet prvků, diskretní Fourierova transformace i její inverze vždy existují a jsou konečné.

Definice 2.17 (Amplitudové spektrum, fázové spektrum). Necht f je funkce $f : \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$ a F její Fourierovo spektrum. Amplitudové spektrum funkce f je funkce $\mathcal{A} : \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná

$$\mathcal{A}(\xi, \eta) = |\mathcal{D}\{f(x, y)\}| = |F(\xi, \eta)|. \quad (2.22)$$

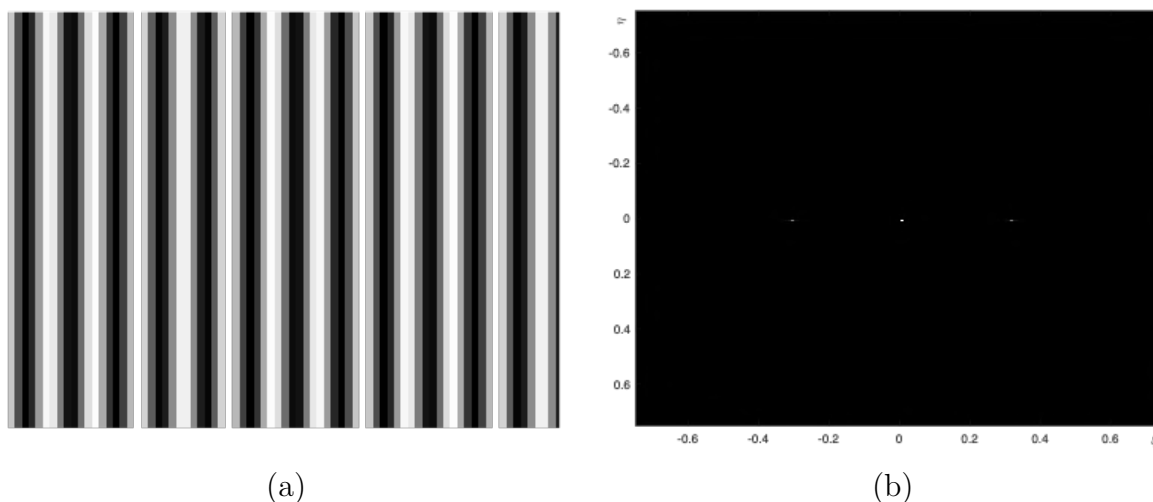
Fázové spektrum funkce f je funkce $\Phi : \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \langle 0, 2\pi \rangle$ definovaná

$$\Re F(\xi, \eta) = \mathcal{A}(\xi, \eta) \cos \Phi(\xi, \eta), \quad \Im F(\xi, \eta) = \mathcal{A}(\xi, \eta) \sin \Phi(\xi, \eta). \quad (2.23)$$

Pokud je $\mathcal{A}(\xi, \eta) = 0$ pro nějaké (ξ, η) , položíme $\Phi(\xi, \eta) = 0$.

Poznámka 2.7. Fourierova transformace je obecně komplexní funkce a podle definice 2.17 ji můžeme rozložit na dvě části: amplitudové spektrum a fázové spektrum. Amplitudové spektrum popisuje, která frekvence a s jakou vahou je zastoupena v obrazu. Naopak fázové spektrum ukazuje polohu frekvencí v obrazu. Pro analýzu kvality obrazů se v rámci této práce budeme zabývat jen amplitudovými spektry, ale například při rekonstrukci obrazů jsou nezbytná spektra obě.

Příklad 2.3. Nejprve si uvedeme jednoduchý příklad „vlnitého plechu“— harmonické funkce závislé jen na jedné prostorové proměnné. V druhé proměnné je konstantní. Vlna postupuje frekvencí 0,3 Hz (viz obrázek 2.3 (a)).

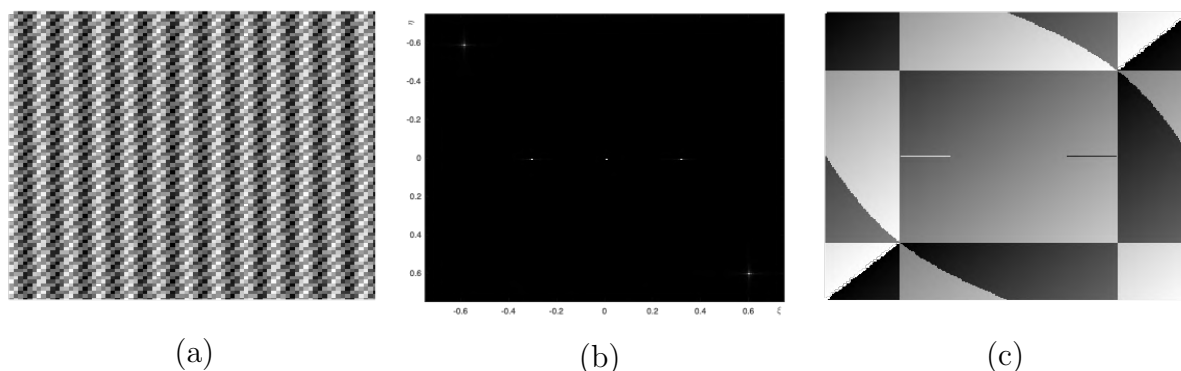


Obrázek 2.3: Funkce v prostorové oblasti (a) a její amplitudové spektrum (b)

Rozebereme si amplitudové spektrum této funkce (obrázek 2.3 (b)). Nejjasnější bod $[0, 0]$ odpovídá nulovým frekvencím a analogicky s jednorozměrným případem je dán konstantní hodnotou přičtenou k funkci. Další dva body o souřadnicích $[\pm 0.3, 0]$ určují frekvence dvou vln, jejichž složením vznikne původní vlna. Z polohy bodů můžeme usoudit, že se vlna šíří jen v horizontálním směru.

V celé práci budeme osy posouvat tak, aby byl bod s nulovými frekvencemi uprostřed spektra. Se zvyšující se vzdáleností od středu se tedy budou zvyšovat i frekvence.

Příklad 2.4. Další zkoumanou funkci dostaneme jako součet dvou vln o různé frekvenci a směru šíření (viz obrázek 2.4 (a)).



Obrázek 2.4: Funkce v prostorové oblasti (a), její amplitudové spektrum (b) a fázové spektrum (c)

Tentokrát máme v amplitudovém spektru 5 bodů (viz obrázek 2.4 (b)), jeden opět pro konstantní hodnotu a dva body pro každou sčítanou funkci. Body $[\pm 0.3, 0]$ jsou hodnoty frekvence první funkce, stejné jako v příkladu 2.3, a z dalších bodů $[\pm 0.3, \pm 0.3]$ určíme frekvenci druhé funkce. Rozložení bodů nám opět rozkládá, jak se jednotlivé funkce šíří – horizontálně a diagonálně.

Pro úplnost je zde znázorněno i fázové spektrum této funkce (obrázek 2.4 (c)). Na rozdíl od amplitudového spektra z něj ale moc informací o původní funkci nevyčteme, proto pro naše účely není fázové spektrum důležité.

2.3. DVOUROZMĚRNÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE

Vlastnosti dvourozměrné diskrétní Fourierovy transformace

V této části si uvedeme přehled několika důležitých vlastností dvourozměrné diskrétní Fourierovy transformace včetně jejich důkazů. Definice a věty jsou převzaty z [3] a [6] a jsou upraveny pro náš případ. V první části tabulky 2.1 jsou diskrétní funkce $f, g : \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$, v druhé části tabulky se nachází jejich Fourierovy transformace F, G a $\alpha, \beta, \xi_0, \eta_0 \in \mathbb{R}$. Operace $*$ značí konvoluci, jejíž dvourozměrný diskrétní případ uvedeme v definici 2.18.

1.	$\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$	$\alpha F(\xi, \eta) + \beta G(\xi, \eta)$
2.	$f(x - x_0, y - y_0)$	$F(\xi, \eta) \cdot e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)}$
3.	$(f * g)(x, y)$	$F(\xi, \eta) \cdot G(\xi, \eta)$
4.	$f(x, y) \cdot g(x, y)$	$\frac{1}{N^2}(F * G)(\xi, \eta)$

Tabulka 2.1: Přehled důležitých vlastností Fourierovy transformace

První vlastnost se nazývá linearita a říká nám, že když provedeme nějakou lineární kombinaci funkcí v prostorové oblasti, stejná kombinace se uskuteční i v oblasti frekvenční.

Věta 2.2 (Linearita). Nechtě jsou f, g diskrétní funkce $\{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$, F, G jejich Fourierovy transformace a α, β reálné konstanty. Pak platí

$$\mathcal{D}\{\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\} = \alpha F(\xi, \eta) + \beta G(\xi, \eta). \quad (2.24)$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\} &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] e^{-\frac{2\pi i}{N}(x\xi + y\eta)} = \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\alpha f(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N}(x\xi + y\eta)} + \beta g(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N}(x\xi + y\eta)}] = \\ &= \alpha \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N}(x\xi + y\eta)} + \beta \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} g(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N}(x\xi + y\eta)} = \\ &= \alpha F(\xi, \eta) + \beta G(\xi, \eta). \end{aligned}$$

□

Druhá vlastnost popisuje chování spektra při translaci – posunutí vzoru v prostorové oblasti.

Věta 2.3 (Translace). Nechtě je f_1 funkce $\{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$ a F_1 je její Fourierovo spektrum. Označme funkci f_2 jako

$$f_2(x, y) = f(x - x_0, y - y_0),$$

kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ a F_2 je její Fourierovo spektrum. Pak platí

$$\begin{aligned} F_2(\xi, \eta) &= F_1(\xi, \eta) e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi x_0 + \eta y_0)}, \\ A_2(\xi, \eta) &= A_1(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Pro dokázání první části věty o translaci potřebujeme následující vlastnost diskrétní Fourierovy transformace.

Lemma 2.1. Nechť je f funkce $\{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a F je její Fourierovo spektrum. Pro každé $k, l \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\mathcal{D}\{f(x, y)\} = \sum_{x=k}^{k+N-1} \sum_{y=l}^{l+N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi x + \eta y)}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} F_2(\xi, \eta) &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_1(x - x_0, y - y_0) e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi x + \eta y)} = \left| \begin{matrix} s = x - x_0 \\ t = y - y_0 \end{matrix} \right| = \\ &= \sum_{s=-x_0}^{N-1-x_0} \sum_{t=-y_0}^{N-1-y_0} f_1(s, t) e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi(s+x_0) + \eta(t+y_0))} = \\ &= e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi x_0 + \eta y_0)} \sum_{s=-x_0}^{N-1-x_0} \sum_{t=-y_0}^{N-1-y_0} f_1(s, t) e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi s + \eta t)} = F_1(\xi, \eta) e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi x_0 + \eta y_0)}. \end{aligned}$$

Důkaz druhé části tvrzení: Nechť jsou A_1, A_2 amplitudová spektra funkcí f_1, f_2 . Pak platí

$$A_2(\xi, \eta) = |F_1(\xi, \eta) e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)}| = |F_1(\xi, \eta)| \cdot |e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)}| = A_1(\xi, \eta) \cdot 1 = A_1(\xi, \eta).$$

□

Definice 2.18 (Dvourozměrná diskrétní konvoluce). Nechť f_1, f_2 jsou funkce $\{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$. Diskrétní konvolucí funkcí f_1, f_2 nazveme funkci f definovanou

$$f(x, y) = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} f_1(s, t) f_2(x - s, y - t). \quad (2.25)$$

Funkci označujeme $f(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y)$.

Následující dvě věty vyjadřují souvislost konvoluce dvou funkcí s jejich součinem, ať už v prostorové nebo frekvenční oblasti.

Věta 2.4. Nechť f_1, f_2 jsou funkce $\{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a F_1, F_2 jsou jejich Fourierova spektra. Pak platí

$$\mathcal{D}^{-1}\{f_1(x, y) * f_2(x, y)\} = F_1(\xi, \eta) \cdot F_2(\xi, \eta). \quad (2.26)$$

2.3. DVOUROZMĚRNÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE

Důkaz. Označme $f(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y)$. Platí

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}\{f(x, y)\} &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left(\sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} f_1(s, t) f_2(x-s, y-t) \right) e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi x + \eta y)} = \\
 &= \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} f_1(s, t) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_2(x-s, y-t) e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi x + \eta y)} = \left| \begin{matrix} p = x-s \\ q = y-t \end{matrix} \right| = \\
 &= \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} f_1(s, t) \sum_{p=-s}^{N-1-s} \sum_{q=-t}^{N-1-t} f_2(p, q) e^{-\frac{2\pi i}{N}[\xi(p+s) + \eta(q+t)]} = \\
 &= \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} f_1(s, t) e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi s + \eta t)} \sum_{p=-s}^{N-1-s} \sum_{q=-t}^{N-1-t} f_2(p, q) e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi p + \eta q)} = \\
 &= F_1(\xi, \eta) \cdot F_2(\xi, \eta).
 \end{aligned}$$

□

Věta 2.5. Necht f_1, f_2 jsou funkce $\{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a F_1, F_2 jsou jejich Fourierova spektra. Pak platí

$$\mathcal{D}^{-1}\{f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)\} = \frac{1}{N^2} (F_1(\xi, \eta) * F_2(\xi, \eta)). \quad (2.27)$$

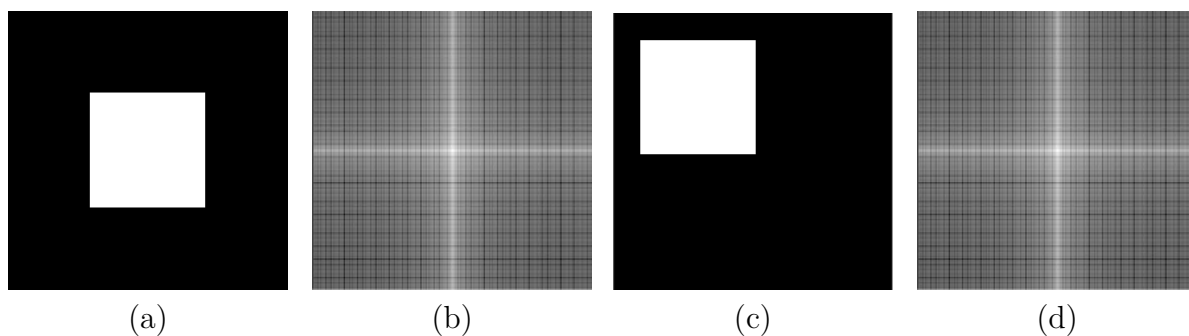
Důkaz. Označme $f(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)$. S využitím definice inverzní Fourierovy transformace platí

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}\{f(x, y)\} &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_1(x, y) f_2(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi x + \eta y)} = \\
 &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N^2} \sum_{\sigma=0}^{N-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} F_1(\sigma, \tau) e^{\frac{2\pi i}{N}(\sigma x + \tau y)} \right) f_2(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi x + \eta y)} = \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{\sigma=0}^{N-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} F_1(\sigma, \tau) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_2(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N}[(\xi-\sigma)x + (\eta-\tau)y]} = \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{\sigma=0}^{N-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} F_1(\sigma, \tau) F_2(\xi - \sigma, \eta - \tau) = \frac{1}{N^2} F_1(\xi, \eta) * F_2(\xi, \eta).
 \end{aligned}$$

□

Konvoluce je velmi důležitá vlastnost, zejména při filtrování obrazů ve frekvenční oblasti. Mnoho metod filtrace je založeno právě na tom, že násobíme frekvenční spektrum nějakou funkcí, a je užitečné následně zjistit, jak vypadá vzor takto upraveného spektra. Široké praktické využití má i dekonvoluce, opačný proces ke konvoluci. Ta se využívá při zaostřování snímků. Více o konvoluci se můžeme dočíst v [1], [8], [5].

Příklad 2.5. Věta o translaci 2.3 se ověří snadno. Jako první funkci f_1 uvedeme čtverec o hraně 220 pixelů¹ uprostřed černého pozadí o rozměrech 512×512 (obrázek 2.5 (a)). Následně zvolíme $f_2 = f_1(x + 100, y - 100)$, tedy posuneme čtverec o 100 pixelů doleva



Obrázek 2.5:

- (a) původní funkce f_1 , (b) amplitudové spektrum funkce f_1
 (c) funkce $f_2 = f_1(x + 100, y - 100)$, (d) amplitudové spektrum funkce f_2

a o 100 pixelů nahoru (obrázek 2.5 (c)).

Fourierova spektra obou funkcí (obrázek 2.5 (b),(d)) vyšla stejná, což potvrzuje tvrzení věty.

Spektra snímků budeme vždy zobrazovat v logaritmickém měřítku, jinak by byl nejjasnější jediný bod uprostřed a neviděli bychom strukturu okolo. Je důležité si všimnout toho, že ostré hrany a rohy ve vzoru v prostorové oblasti jsou ve spektru rozeznatelné. V našem případě čtverce ostré přechody zastupuje ve spektru viditelný „kříž“. Tyto rychlé změny kontrastu vyžadují zastoupení vln všech různých frekvencí o velkých amplitudách – proto je „kříž“ tak výrazný. Tento poznatek využijeme při rozpoznávání ostroty snímku.

Rychlá Fourierova transformace

Klasický výpočet diskretní Fourierovy transformace obrazu o rozměrech $N \times N$ potřebuje z definice přibližně N^2 operací. Když si představíme obraz, který má rozměry v řádech statisíců, počet operací pro transformaci nabere obrovských rozměrů. I na supervýkonném počítači by doba pro uskutečnění výpočtu byla neúnosně dlouhá. Právě kvůli urychlení výpočtu byla vyvinuta metoda rychlé Fourierovy transformace FFT², která snižuje náklady na výpočet na $N \log_2 N$ operací. Pro představu můžeme vzít obraz o $N = 1024$ pixelů, což je často používaný rozměr. Jednoduchými výpočty můžeme dojít k tomu, že už i při takovém rozměru nám rychlá Fourierova transformace zrychlí výpočet stokrát. Podrobněji je rychlá Fourierova transformace rozebrána v [1]. Když zpracováváme obrazy v MATLABu, používáme příkaz `fft2`, který využívá algoritmus rychlé Fourierovy transformace.

Příklad 2.6. Uvedeme si další příklady obrázků a vedle každého z nich zobrazíme jejich amplitudové spektrum (obrázek 2.6). Omezíme se na obrázky s jednotvárným pozadím. Vliv pozadí na spektrum budeme řešit v následující kapitole. Nejvýraznější strukturu pozorujeme u písmena (obrázek 2.6 (a),(b)). Stejně jako u čtverce v příkladu 2.5 je to dáno tím, že jsou v obrázku ostré hrany, kde přechází černá barva přímo v bílou. Tentokrát je „kříž“ ve spektru pootočen díky natočení písmene. U ostatních obrázků nemáme tak ostře definovaný přechod, proto není struktura ve spektru tak výrazná.

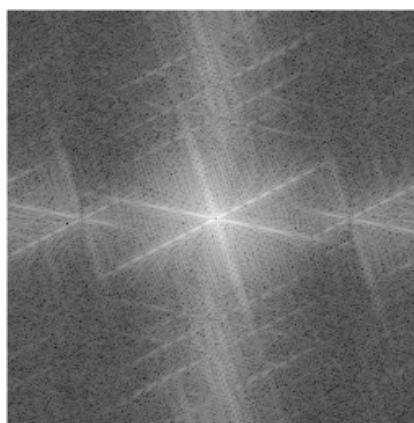
¹Obrázové body, název vychází z anglického picture element - zkráceně pix element.

²Fast Fourier Transform, poprvé publikována 1965 autory J. W. Cooley a J. W. Tuckey.

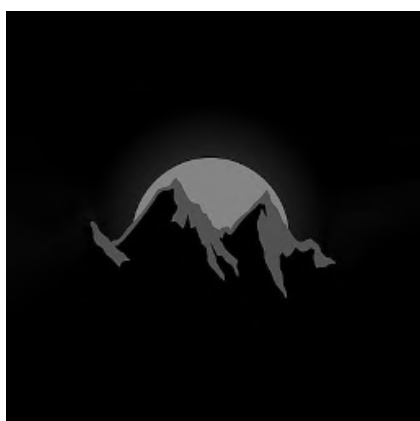
2.3. DVOUROZMĚRNÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE



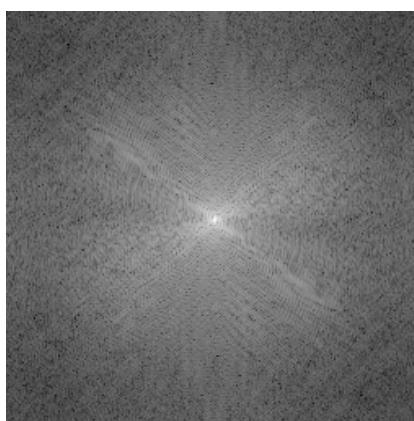
(a)



(b)



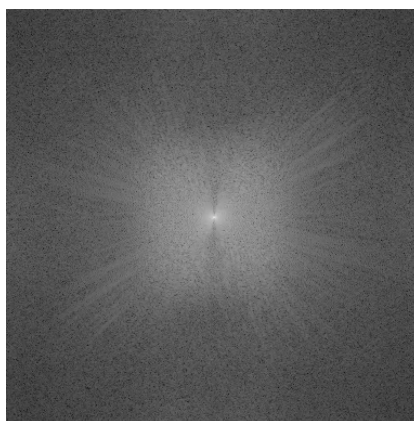
(c)



(d)



(e)



(f)

Obrázek 2.6: (a), (c), (e) původní obrazy, (b), (d), (f) amplitudová spektra

3. Digitální obraz

V předchozí kapitole jsme uvedli, že počítače umí pracovat jen s diskretními daty. Proto, abychom mohli zpracovávat obrazy z okolního světa, je musíme diskretizovat (vzorkovat). Vzorkováním obrazu rozumíme rozložení ho do matice obrazových bodů (pixelů) o rozměru $M \times N$. Tato matice se často označuje jako rastr – z toho vychází označení digitálního obrazu taky jako rastrový. Každý pixel má v matici přesně danou polohu. Dosud jsme označovali obraz jen jako funkci dvou proměnných, ale nijak blíž jsme ho nedefinovali. To teď napravíme.

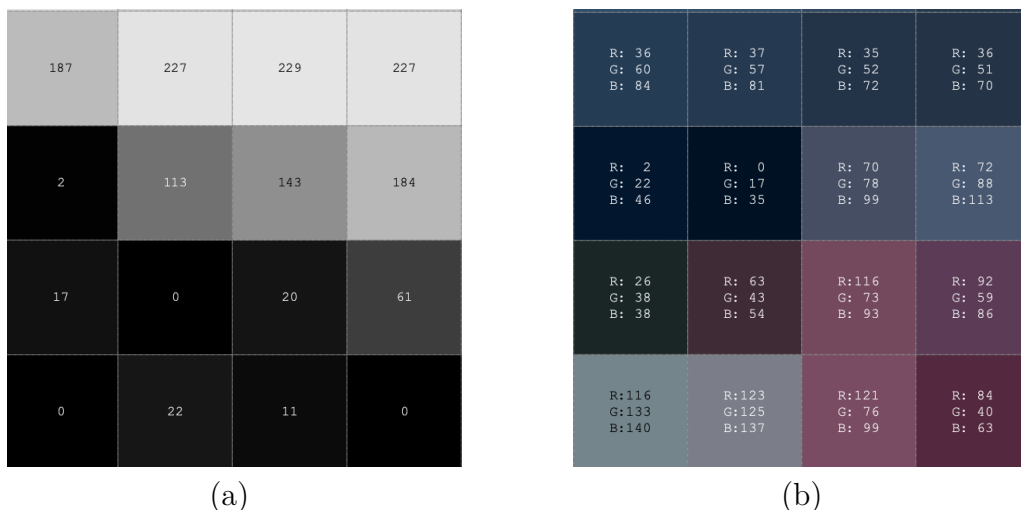
Definice 3.1 (Digitální černobílý obraz). [3] Buď $R = \{0, 1, \dots, M-1\} \times \{0, 1, \dots, N-1\}$, $M, N \in \mathbb{N}$ a $W = \{0, 1, \dots, w-1\}$, $w \in \mathbb{N}$. Funkci

$$f : R \rightarrow W \quad (3.1)$$

nazveme *digitálním černobílým obrazem*. M označuje *šířku* obrazu, N *výšku* obrazu. Prvky R označují *pixely*. Hodnota funkce f udává hodnotu pixelu v daném bodě. Číslo w vymezuje *dynamický rozsah* a říkáme, že obraz je n -bitový, jestliže $w = 2^n$.

Definice 3.2 (Digitální barevný obraz). [3] *Digitální barevný obraz* je takový obraz, kde každý pixel obsahuje informaci o třech složkách (r,g,b) – červené, zelené a modré barvy.

Poznámka 3.1. Počet bitů obrazu popisuje tzv. *bitovou hloubku*. Tedy udává, kolika odstíny dokážeme popsat jednotlivé pixely a platí, že čím více bitový máme obraz, tím více odstínů máme k dispozici. V běžných případech se používá obraz 8-bitový, kde můžeme použít 256 hodnot jasu, tj. funkce f nabývá celých čísel z intervalu $\langle 0, 255 \rangle$. Přitom 0 zastupuje nejtmavší odstín – černou, a naopak 255 nejsvětější – bílou. U barevného obrazu předepíšeme jednu hodnotu z tohoto intervalu každé základní barvě.



Obrázek 3.1: Pixely 8-bitového černobílého (a) a barevného obrazu (b)

Poznámka 3.2. V definici barevného obrazu 3.2 jsme popsali barevný model RGB, jehož jádro tvoří jen tři barvy. Další běžný barevný model je například CMYK, který obsahuje 4 barvy – azurovou (cyan), purpurovou (magenta), žlutou (yellow) a černou (označovanou jako key).

Získávání digitálního snímku [2]

U klasických fotoaparátů záznam fotografie probíhá jednoduše díky světlocitlivému materiálu – papíru nebo filmu. V místech, kam při záběru dopadlo nejvíce paprsků světla, je nejvyšší hodnota jasu a naopak. U digitálních fotoaparátů pořízení snímku pracuje ve své podstatě na stejném principu, akorát světlocitlivý materiál nahradil digitální senzor (také čip či snímač). Samotný čip je složen z množství fotodiod, které reagují na dopadající záření a díky fotoelektrickému jevu se v nich vytváří elektrický náboj. Ten je následně zesílen a snímán dalšími senzory. Fotodiody ale dokáží zaznamenat jen záření, tedy získáme pouze černobílý obraz. Abychom dosáhli barevné fotografie, používají se různé filtry, které propouští jen světlo určité vlnové délky (tedy i barvy). Nejvíce se používá Bayerova maska, která má takové filtry tři – červený, modrý a zelený. Tyto filtry jsou uloženy v pravidelné mřížce, přičemž převažují filtry zelené barvy. Lidské oko je totiž nejcitlivější právě na zelenou barvu. Průchodem světla tím pádem každý bod obrazu získá informaci o jedné barvě a abychom dostali kompletní informaci o barvě, musí se zbylé dvě složky barev dopočítat interpolací z barevné informace okolních bodů.

Abychom převedli barevný obraz zpět na černobílý, musíme hodnotu jasu pixelu vypočítat. V MATLABu máme k tomuto účelu funkci `rgb2gray`, která využívá výpočetní vztah $0,2989R + 0,5870G + 0,1140B$, kde R, G, B jsou hodnoty pro jednotlivé barvy.

Pro účely této práce budeme potřebovat pouze informace o jasu pixelů, proto se dále budeme zabývat jen černobílými obrazy.

3.1. Charakteristiky

V této části si rozebereme charakteristiky, které můžeme v obrazu vypožorovat a které nám mohou pomoci s analýzou jeho kvality. Mezi nejdůležitější patří jas, kontrast a ostrost. Kvalita snímku velmi závisí na poměru těchto tří vlastností. Dále uvedeme šum jako nepříznivou charakteristiku snižující kvalitu obrazu. Všechny snímky podkapitoly jsou převzaty z veřejně dostupné knihovny fotografií [9].

3.1.1. Jas a kontrast

Kontrast obrazu úzce souvisí s jeho jasnem, proto si obě charakteristiky uvádíme zároveň. Kontrast v podstatě vyjadřuje lokální změny jasu ve snímku. Pokud v obrazu snižujeme nebo zvyšujeme hodnotu jasu, hladina kontrastu klesá (obrázek 3.2 (a), (b)). Při zvyšujícím se kontrastu se v obrazu zanedbá vliv šedé barvy a více vynikne černá a bílá. Naopak když kontrast snižujeme, rozdíly mezi barvami začnou splývat (obrázek 3.2 (c), (d)). Matematicky můžeme vyjádřit kontrast různými kritérii, my si zde uvedeme dva způsoby [6]:

- Weberův kontrast

$$c_W = \frac{L_{max} - L_{min}}{L_{min}},$$

- Michelsonův kontrast

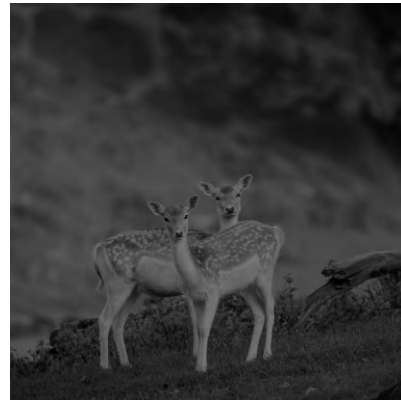
$$c_M = \frac{L_{max} - L_{min}}{L_{max} + L_{min}},$$

kde L_{max} je maximum hodnoty jasu v obraze, L_{min} minimum.

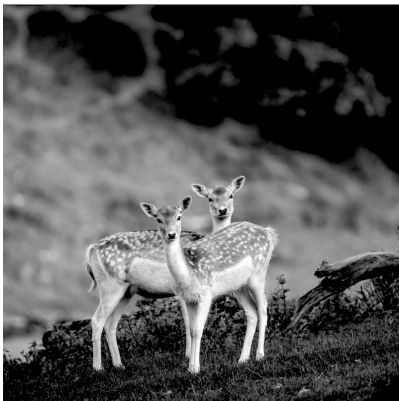
Pro představu pro snímek (c) na obrázku 3.2 vychází Michelsonův kontrast $c_M = 1$ a pro obrázek (d) $c_M = 0,522$, tedy má kontrast zhruba poloviční.



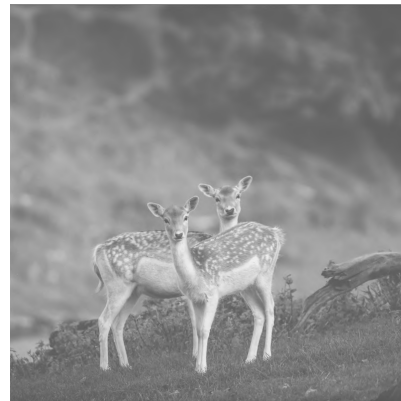
(a)



(b)



(c)



(d)

Obrázek 3.2: Snímek s vysokým jasnem (a), s nízkým jasnem (b), s vysokým kontrastem (c) a s nízkým kontrastem (d)

3.1.2. Šum

Šum obrazu můžeme interpretovat jako malou odchylku hodnoty pixelu od jeho reálné hodnoty. Tyto odchylky jsou v obraze obvykle rozmístěny náhodně, proto je popisujeme statisticky. Šum se vyskytuje v každém reálném obraze a vzniká většinou už při záběru v kameře nebo fotoaparátu. Je to jeden z nejvýznamnějších důvodů, proč některé techniky zpracovávání obrazu selhávají. Proto se snažíme zmenšit zastoupení šumu v obraze, při nejlepším se ho úplně zbavit.

Zmíníme dva nejdůležitější modely šumu v obraze [3].

Definice 3.3 (Impulsní šum). Buď f ideální digitální černobílý obraz (bez šumu) a h černobílý obraz s hodnotami pixelů

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{jestli } Y(x, y) = 0, \\ m(x, y) & \text{jestli } Y(x, y) = 1, \end{cases}$$

3.1. CHARAKTERISTIKY

kde Y je realizace náhodné veličiny X s alternativním rozdělením a m je nezávislá realizace nějaké náhodné veličiny Z , u které obecně nevíme její rozdělení. Pokud je Y nezávislá, říkáme, že se v obrazu h vyskytuje *impulsní šum*.

Tento šum se taky nazývá šum soli a pepře – z anglického salt and pepper noise. Toto pojmenování je velice příhodné, protože ho v obrazu pozorujeme jako náhodně rozmístěné černé a bílé tečky (obrázek 3.3 (b)). Může být způsoben neživými pixely, které jsou vždy černé, a nebo naopak horkými pixely, které budou vždy bílé.

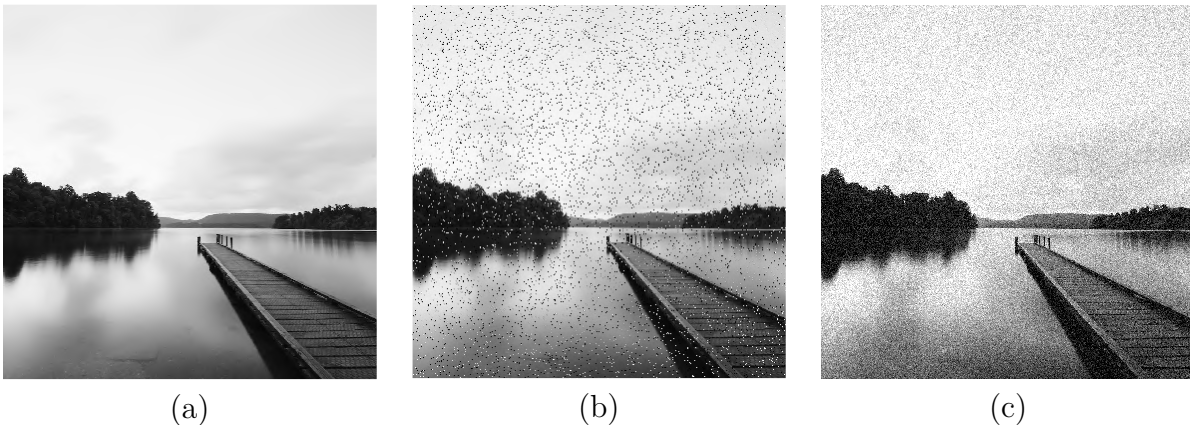
Definice 3.4 (Aditivní šum). Nechtě je f digitální černobílý obraz reprezentující ideální obraz a n digitální černobílý obraz o stejné velikosti, jehož pixely jsou zaokrouhlené realizace nezávislé náhodné veličiny X .

Nechtě platí

$$h = f + n,$$

pak řekneme, že obraz h obsahuje *aditivní šum*. Náhodná veličina X má obvykle normální rozdělení, díky tomu se tento šum často označuje jako *Gaussův* a za určující se považuje jeho směrodatná odchylka σ .

Gaussův šum velmi dobře aproximuje šum v reálném obrazu a je často používán v praxi. Více o šumu a hlavně filtraci šumu v prostorové i ve frekvenční oblasti můžeme najít v [5].

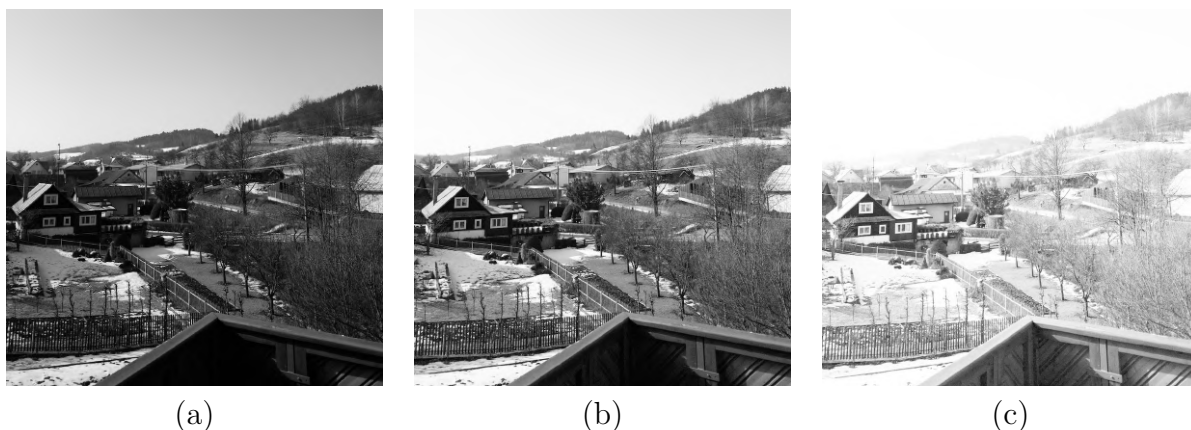


Obrázek 3.3: (a) Původní obraz, (b) obraz s impulzním šumem, (c) obraz s aditivním šumem se směrodatnou odchylkou $\sigma = 0,01$

Citlivost ISO [7]

ISO je jeden z významných aspektů při pořizování snímku, kterým můžeme ovlivnit jeho kvalitu. Udává, jak moc je snímací čip fotoaparátu citlivý na světlo, tedy jak ovlivňuje zesílení elektrického signálu. Hodnoty ISO se běžně pohybují v rozmezí 100–3200, ale tento rozsah se u různých značek fotoaparátů může lišit. Pokud máme při pořizování snímku dobré světelné podmínky, nastavíme ISO na co nejmenší hodnotu. Při horších podmínkách, kdy máme světla méně, potřebujeme hodnotu ISO zvýšit, aby snímek nebyl tmavý. Se zvyšující se citlivostí ISO ale roste šum ve snímku, proto se vždy vyhýbáme příliš vysokým hodnotám.

Na obrázku 3.4 můžeme vidět tři snímky pořízené mým mobilním telefonem s různým ISO. Na fotoaparátu je rozsah citlivosti 25–2000. Jak jde vidět, už při hodnotě 800 je snímek příliš světlý, málo kontrastní a je možné zpozorovat zvýšený podíl šumu.



Obrázek 3.4: Snímek s ISO=25 (a), ISO=200 (b), ISO=800 (c)

3.1.3. Ostrost

Ostrost je velmi důležitá vlastnost obrazu. Když budeme analyzovat kvalitu, budeme se zabývat hlavně ostrostí, protože právě na ostrosti obrazu záleží, do jaké míry jsme schopni rozeznat jednotlivé detaily. Jas i kontrast se dají částečně upravit v post-processingu, ale pokud se obraz nezachytí ostře, dodatečné zaostření může zvýšit výskyt šumu. Existují i takové způsoby rozmazání obrazu, které se v post-processingu běžnými metodami odstraňují velmi těžko, například rozmazání pohybem (anglicky motion blur).

Ostrost jako taková nemá exaktní matematické vyjádření, ale můžeme pozorovat, že velmi souvisí s kontrastem. Obraz se zdá ostřejší, pokud jsou ostré přechody objektů v obrazu, tedy pokud je mezi nimi vysoký kontrast. My očima dokážeme lehce rozeznat, jestli je obraz ostrý nebo ne, ale pro software je to obtížnější, především když nemá k dispozici referenční obraz.



Obrázek 3.5: Ostrý obraz (a), rozmazaný obraz (b)

3.2. Komprese obrazu

Obvykle chceme co nejvyšší kvalitu obrázků s co nejvyšším rozlišením, zaplatíme za to ale počtem pixelů. Současně s počtem pixelů roste i rozměr snímku, tím pádem i jeho paměťová náročnost. Abychom dokázali obrazy efektivně přenášet, uchovávat a zpracovávat,

3.3. ANALÝZA KVALITY

je důležité jejich velikost zredukovat za současného zachování co nejlepší kvality. Jedna z možností uložení obrazů je jejich komprese. Kompresi známe dvojího typu: ztrátovou a bezztrátovou. Ztrátová komprese je založena na odstranění nadbytečné informace z pixelů snímku. To jsou většinou drobné detaily, které ani okem nerozeznáme a vizuální kvalita zůstane zachována. Místo, které obraz zabírá v paměti, lze takto zredukovat opravdu značně, proto se používá ve většině praktických aplikacích. Nevýhodou je, že ze zredukováného obrazu nemůžeme dostat zpět obraz původní. Naopak to je u komprese bezztrátové, kde díky tomu, že ke ztrátě informací nedochází, je tento zpětný proces možný. Bezztrátová komprese ale neposkytuje takovou úsporu místa, jaká je často potřeba. V tabulce 3.1 si přehledně uvedeme časté formáty uložení, jejich typ a charakteristickou vlastnost [8].

Název	Typ	Vlastnosti
GIF	bezeztrátová komprese	omezeno na 8-bitové obrazy
JPEG	ztrátová komprese	nejběžnější v praxi
PNG	bezeztrátová komprese	navrhnutý pro nahrazení GIFu
TIF/TIFF	bezeztrátová komprese	velmi flexibilní a adaptabilní, vhodný pro další zpracovávání

Tabulka 3.1: Přehled formátů uložení snímku

Jednotlivé formáty se hodí pro různé použití. GIF formát je nejstarší typ a používá se pro jednoduché obrazy s 256 úrovněmi šedi. JPEG je suverénně nejpoužívanější a nejznámější formát. Dokážeme v něm uložit až 24-bitový obraz v RGB. Výhoda při ukládání do JPEGu je volitelná kvalita obrazu, ale při opakovaném ukládání se kvalita postupně zhoršuje. PNG je druhý nejběžnější formát. Má vlastnosti odpovídající JPEGu, ale díky bezztrátové kompresi zabírá více paměti. TIFF je díky své bezztrátové kompresi a možnostem uložení velkého rozsahu obrazových forem vhodný pro prvotní uložení obrazu, který chceme dále zpracovávat. Je to vhodné uložení například pro tisk na velký formát papíru.

3.3. Analýza kvality

Měření a analýza kvality s novými technologiemi začaly hrát velmi významnou roli v mnoha odvětvích zpracování obrazu. Často potřebujeme i v běžném životě posoudit kvalitu, ať už při registraci obrazu, jeho tisku nebo rekonstrukci.

Obecně můžeme zhodnotit kvalitu dvěma způsoby: subjektivně nebo objektivně. Subjektivní metoda je založena na lidském faktoru, tedy konečný uživatel rozhoduje o kvalitě obrazu. Je to způsob spolehlivý právě kvůli tomu, že hodnotí sám uživatel, ale je náročný na čas, drahý a hlavně ho není možné zautomatizovat pro větší množství obrazů. Proto bylo nutné vynalézt objektivní metody, které tyto nevýhody pokryjí a zároveň budou mít podobné výsledky. Těch byla vynalezena spousta a můžou být založeny na rozdílných principech – například na hodnotách pixelů, na statistickém popisu pixelů a jejich korelaci nebo na transformaci obrazu. Obvykle rozdělujeme objektivní metody do tří kategorií [4]:

- Full-Reference metodu,

- Reduced-Reference metodu,
- No-Reference metodu.

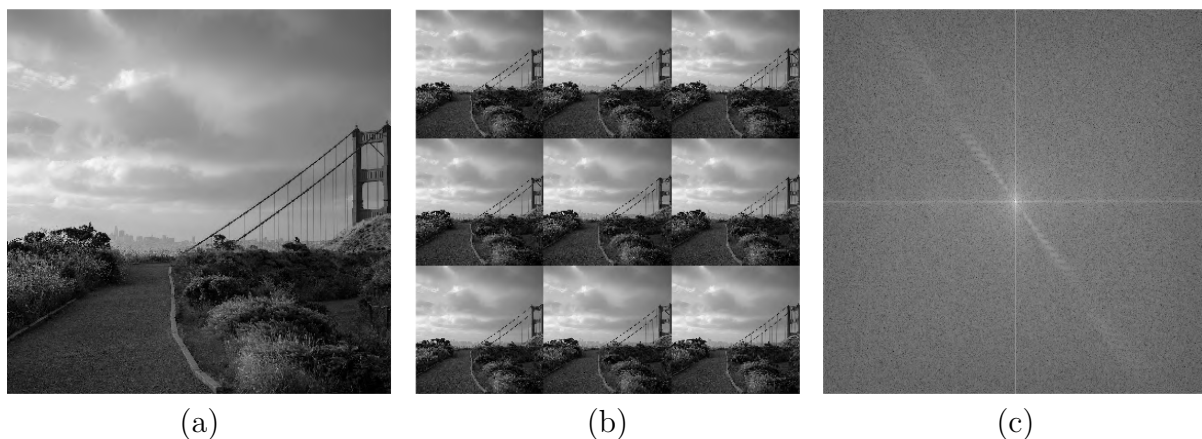
Tyto metody se liší tím, jak velkou část původního obrazu máme k dispozici. U Full-Reference metody porovnáváme hodnocený snímek s původním. Toho se využívá v praxi hlavně při testování algoritmů. Reduced-Reference metody jsou užitečné při rekonstrukci obrazu a vyznačují se tím, že známe z původního obrazu jen jeho část. No-Reference metoda, tj. pokud nemáme žádnou referenci původního obrazu, je nejnáročnější a zároveň nejvíce využitelná v praxi. My se v práci budeme zabývat právě No-Reference metodou, ale testovat budeme i s původními obrazy.

I přes všechnu snahu se mohou výsledky subjektivní a objektivní metody lišit. Člověk je citlivější na detaily, které počítač nedokáže vyhodnotit. Cílem je najít právě takovou metodu, která se odlišuje jen v minimu případech.

3.3.1. Fourierova metoda

Fourierova metoda je objektivní metoda založená na transformaci, tudíž posuzujeme obraz v jeho frekvenční oblasti. V této části tedy propojíme znalosti z druhé kapitoly, kde jsme se zabývali Fourierovou transformací a chováním funkce v její frekvenční oblasti, a charakteristiky obrazu popsané v první části třetí kapitoly. Jak jsme již zmiňovali v sekci 2.3, spektrum je funkce dvou proměnných nazývaných frekvence. Připomeňme, že v práci pracujeme pouze s amplitudovými spektry.

Fourierova transformace nezpracovává obraz jako takový, ale předpokládá, že se snímek v prostoru nekonečně opakuje, tj. do transformace vstupuje periodicky se opakující snímek. Reálné snímky mají většinou velmi různorodé pozadí a touto periodizací dochází u okrajů ke skokům – vzniká tzv. okrajový efekt. Tyto přechody mohou mít velmi vysoký kontrast (na obrázku 3.6 (b) viditelný mezi oblohou a zemí) a díky tomu se promítnou do výsledného spektra.



Obrázek 3.6: Původní obraz (a), jeho periodické opakování v prostoru (b) a amplitudové spektrum původního obrazu (c)

Ve spektru snímku na obrázku 3.6 (c) je okrajový vliv zastoupen viditelným křížem. Je nutné tyto vlivy potlačit, protože při zkoumání samotného obrazu nemají v prostorové oblasti opodstatnění. Obraz se proto vynásobí vhodnou funkcí g , tzv. window funkcí. Window funkcí je používána celá řada, ale všechny se vyznačují tím, že mají nulovou

3.3. ANALÝZA KVALITY

hodnotu u okrajů a směrem ke středu obrazu plynule přechází v jedničku. Uvedeme si zde dvě často používané window funkce.

Definice 3.5 (Window funkce). [3] Necht jsou A, B množiny definované

$$A = \langle -a, a \rangle \times \langle -b, b \rangle \quad a, b \in \mathbb{R}_0^+,$$

$$B = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq r^2\}, \quad r \in \mathbb{R}_0^+$$

a $\sigma \in \mathbb{R}^+$ zvolené číslo. Dále buď $\rho(X, A)$ vzdálenost bodu $X = (x, y)$ od množiny A , tedy

$$\rho(X, A) = \inf\{d \in \mathbb{R}, d = \rho(X, Y), Y \in A\},$$

kde $\rho(X, Y)$ vyjadřuje euklidovskou metriku.

(a) Funkci

$$g_{GC}(x, y) = e^{-\frac{\rho^2(X, B)}{\sigma^2}} \quad (3.2)$$

nazveme *kruhovou Gaussovou window funkcí*.

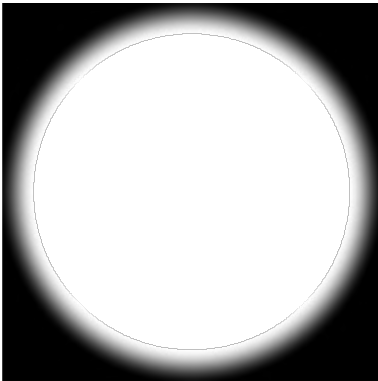
(b) Funkci

$$g_{HC}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi \rho(X, B)}{\sigma}, & \text{když } \rho(X, B) \leq \sigma \\ 0, & \text{když } \rho(X, B) > \sigma \end{cases} \quad (3.3)$$

označíme jako *kruhovou Hanningovu window funkci*.

Číslo σ v definici vyjadřuje šířku přechodové oblasti, tedy v jak širokém pásu přechází window funkce z 0 do 1. Obě definice jsou pro kruhové tvary window funkcí, ale existují i funkce obdélníkové. Ty jsou výhodné v případech, kdy máme v rohu obrazu výrazný prvek, který by kruhová funkce potlačila.

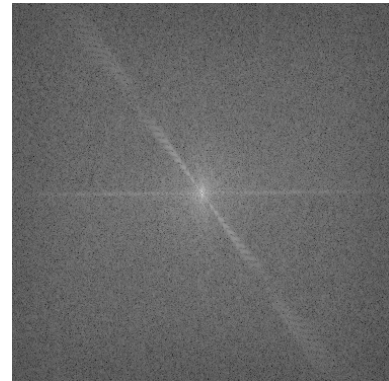
V práci budeme používat funkci Hanningovu, a to s hodnotou $\sigma = 0,1 \cdot N$, kde N je rozměr obrazu $N \times N$. Parametr byl určen experimentálně, aby funkce neměla ostrý přechod a zároveň aby přechodový pás nebyl příliš široký.



(a)



(b)



(c)

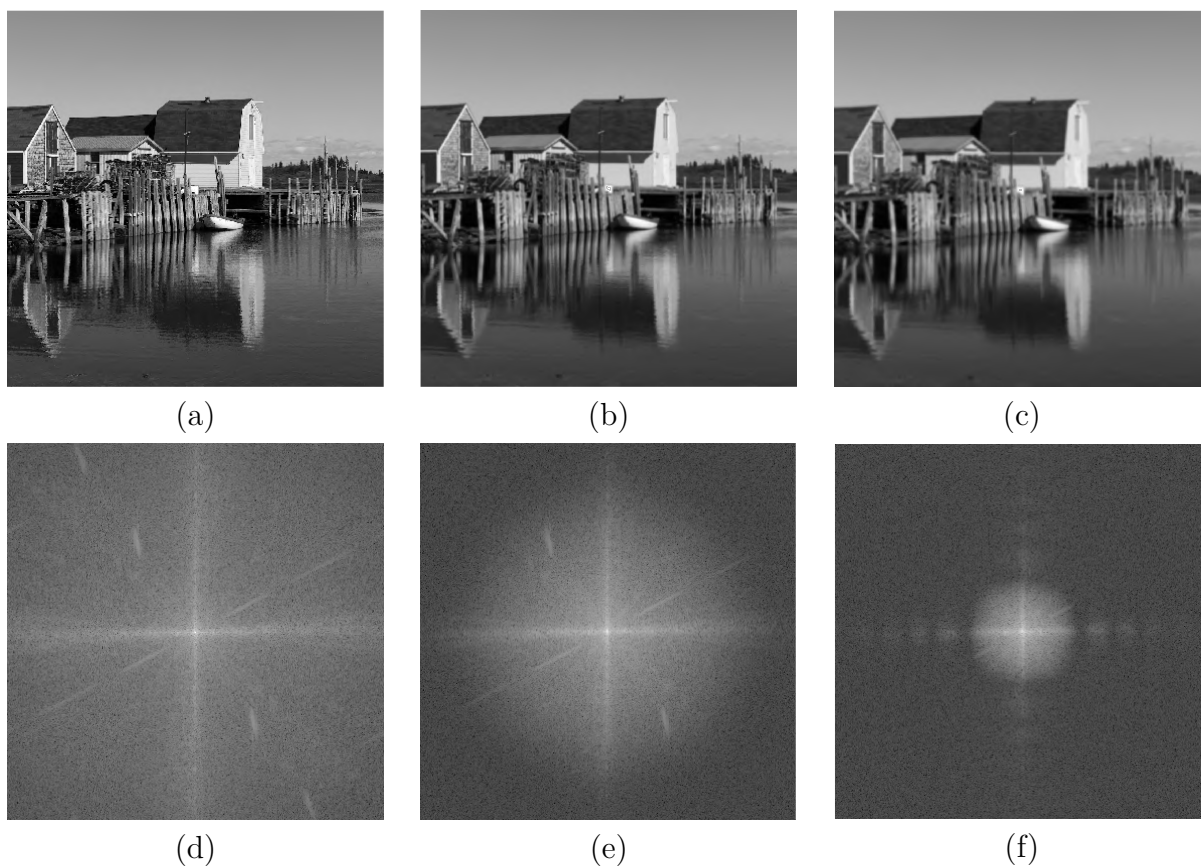
Obrázek 3.7: (a) Naprogramovaná window funkce g , (b) snímek vynásobený funkcí g , (c) amplitudové spektrum upraveného obrazu

Ze spektra na obrázku 3.7 (c) je jasně vidět, že kříž daný okrajovým vlivem zmizel a ve spektru jsou jen frekvence samotného obrazu, tedy window funkce splnila účel. Horizontální čára ve spektru je nejspíše obrazem pilíře mostu na pravé straně obrazu a čáru

diagonální způsobují pravděpodobně lana mostu.

Ve středu amplitudového spektra obrazů jsou zobrazeny nejnižší frekvence, které korespondují s pomalu se měnícími hodnotami jasu. To může být například jednotvárné pozadí, jako je obloha bez mraků. Vyšší frekvence naopak zastupují detaily v obraze a šum, a jsou umístěny blíže k okrajům spektra. Na vysokých frekvencích jsou také zastoupeny takové informace o snímku, které jsou nepotřebné a ani je okem nedokážeme ve snímku rozeznat. Hrany a ostré přechody jsou ve spektru zastoupeny velkým množstvím frekvencí, proto jsou často viditelné v celém spektru.

Na obrázku 3.8 je zobrazen ostrý obraz a různé stupně jeho rozmazání. Amplitudová spektra jsou zobrazena po aplikaci window funkce. Je jasně viditelné, že se zvyšujícím se rozmazáním se podíl vysokých frekvencí snižuje, tj. u okrajů se spektrum ztmavuje. Spektrum na obrázku 3.8 (f) je ztmaveno výrazně, z čehož můžeme usuzovat, že detaily (jako je vzor na domu vlevo nebo plot v pravé části) jsou méně rozeznatelné. Na tomto poznatku je založena Fourierova metoda, tedy i podstata této práce.



Obrázek 3.8:

(a) Původní ostrý obraz, (b) jemně rozmazaný obraz, (c) více rozmazaný obraz
(e),(f),(g) amplitudová spektra odpovídající (a), (b), (c)

Chování amplitudových spektrech popsané výše indikuje, že nejnižší frekvence jsou pro kvalitu obrazu méně důležité než frekvence vysoké. Nízké frekvence jsou také nejjasnější v celém spektru, tím pádem by při zkoumání amplitud ve spektru zkreslily výsledky. Nemůžeme se ale plně spolehnout ani na vysoké frekvence, protože právě na nich jsou ve spektru uloženy informace o šumu. Problém se šumem je ten, že vysoké frekvence jím způsobeny jsou nerozeznatelné od frekvencí daných detaily, tím pádem ho nemůžeme

3.3. ANALÝZA KVALITY

úplně odstranit bez ztráty údajů o ostrosti. Existují účinné metody, které tento problém řeší, ale nelze je obecně aplikovat na více různých obrazů. Navíc jak ilustruje obrázek 3.9, malé množství šumu může způsobit, že obrázek subjektivně vnímáme jako ostřejší. Při práci se snímky pořízenými při stejném ISO ale budeme předpokládat, že se světelné podmínky nebudou příliš lišit, tedy nedojde k markantnímu zvýšení šumu ve snímku.



(a)

(b)

Obrázek 3.9: (a) Původní obraz (b) obraz s malým množstvím šumu

Abychom alespoň trochu zamezili vlivu šumu, vynásobíme spektrum vhodnou váhovou funkcí, která „odřízne” ze spektra nejvyšší frekvence. Tato funkce zároveň ze spektra vyliminovala stejným způsobem i nízké frekvence. Výsledná váhová funkce je tedy v určité oblasti kolem středu nulová, pak plynule přechází v jedničku, a směrem k okrajům spektra opět přechází v nulu. Tím pádem zaměříme svoji pozornost jen na střední frekvence v nezakrytém pásu. Dále v této práci budeme pracovat pouze se čtvercovými snímky. Uvedeme si zde často používaný typ takové váhové funkce.

Definice 3.6 (High-pass, low-pass váhová funkce). [3] Necht jsou $r_1, r_2, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+$ takové, že $r_1 < r_2$. Funkci $H_{r_1\sigma_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ definovanou jako

$$H_{r_1\sigma_1}(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{když } \frac{4}{N^2}(\xi^2 + \eta^2) < (r_1 - \sigma_1)^2, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi(r_1 - \frac{2}{N}\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\sigma_1}, & \text{když } (r_1 - \sigma_1)^2 \leq \frac{4}{N^2}(\xi^2 + \eta^2) < r_1^2, \\ 1 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.4)$$

nazveme *high-pass váhovou funkcí*. Funkci $H^{r_2\sigma_2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ definovanou jako

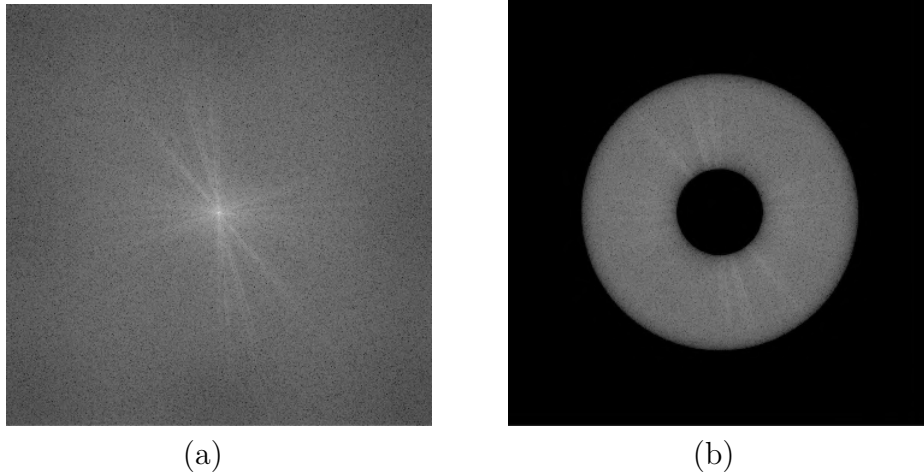
$$H^{r_2\sigma_2}(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{když } \frac{4}{N^2}(\xi^2 + \eta^2) > r_2^2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi(r_2 - \frac{2}{N}\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\sigma_2}, & \text{když } r_2^2 \leq \frac{4}{N^2}(\xi^2 + \eta^2) < (r_2^2 + \sigma_2^2), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.5)$$

nazveme *low-pass váhovou funkcí*. Funkci $H_{r_1\sigma_1}^{r_2\sigma_2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ definovanou

$$H_{r_1\sigma_1}^{r_2\sigma_2} = H_{r_1\sigma_1} \cdot H^{r_2\sigma_2}$$

nazveme *high-pass low-pass váhovou funkcí*.

Obdobně jako u window funkce určíme konstanty r_1 , r_2 , σ_1 , σ_2 váhové funkce experimentálně. Nejlepší výsledky pro naše účely vykazují hodnoty $r_1 = 0,35$, $r_2 = 0,55$, $\sigma_1 = 0,15$ a $\sigma_2 = 0,1$. Mohlo by se zdát, že necháváme nezakrytou jen malou část amplitudového spektra, ale tyto frekvence plně postačí k určení kvality obrazu.



Obrázek 3.10: (a) původní amplitudové spektrum, (b) spektrum po aplikaci high-pass low-pass funkce

Určení ostrosti [6]

Amplitudové spektrum hodnoceného snímku vynásobíme high-pass low-pass funkcí, tím pádem nám zůstanou ve spektru pouze střední frekvence. V tuto chvíli spočítáme dvojný integrál přes celou oblast. Jelikož pracujeme s diskrétními daty, kdy známe pouze funkční hodnoty v určitých bodech, aproximujeme dvojný integrál dvěma sumami. Tedy můžeme napsat

$$I = \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{\eta=0}^{N-1} F(\xi, \eta) \cdot 1,$$

kde jednička odpovídá obsahu čtverce pixelu, na kterém uvažujeme hodnotu funkce F . Protože se můžeme setkat s obrazy různých rozměrů, vydělíme sumy velikostí obrazu, aby to na něm nezáleželo. Dostaneme průměrnou hodnotu amplitud, která tvoří základ pro určování ostrosti, a označíme ji jako koeficient α , pro který platí

$$\alpha = \frac{1}{N^2} \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{\eta=0}^{N-1} F(\xi, \eta).$$

Dále musíme mít na mysli to, že jsme v této práci nadefinovali Fourierovu transformaci a její inverzi s normalizační konstantou v inverzi, tedy dělíme výraz velikostí obrazu (viz rovnice (2.21)). Stejně vyjádřená je transformace i v MATLABu. To nám dává určitou

3.3. ANALÝZA KVALITY

nesymetrii Fourierovy transformace. Abychom dosáhli symetrie a vyrovnaní transformací, „rozdělíme” normalizační konstantu mezi oba výrazy a získáme

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N}(x\xi + y\eta)},$$

$$\mathcal{D}^{-1}\{F\}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{\eta=0}^{N-1} F(\xi, \eta) e^{\frac{2\pi i}{N}(x\xi + y\eta)}.$$

Abychom promítli symetrii i do koeficientu α , vydělíme výraz taktéž velikostí obrazu N , tedy

$$\alpha_s = \frac{\sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{\eta=0}^{N-1} F(\xi, \eta)}{N^3}.$$

Takto upravený koeficient α_s bychom už mohli považovat za číslo ostrosti, ale dostáváme velký rozsah hodnot. Pro velmi rozmazané obrazy vychází α_s menší než jedna, naopak pro ostré obrazy může být vyšší než 10. Pro zredukování hodnot na interval $\langle 0, 1 \rangle$, využijeme ohraničenosti inverzního tangentu:

$$\alpha_o = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\alpha_s}{k}\right), \quad (3.6)$$

kde pro náš případ zvolíme $k = 2$.

Po této transformaci tedy platí, že čím blíže je koeficient ostrosti α_o k jedničce, tím kvalitnější je obraz. U nekvalitních obrazů můžeme dostat hodnoty blízké nule.

Shrňme si tedy algoritmus, podle kterého budeme postupovat při programování:

- Načteme obraz f a převedeme ho na černobílý,
- použijeme na obraz window funkci, dostaneme f_w ,
- spočítáme rychlou Fourierovu transformaci F snímku f_w příkazem `fft2` a posuneme střed příkazem `fftshift`,
- spočítáme amplitudové spektrum A transformace,
- vynásobíme spektrum A high-pass low-pass funkcí, dostaneme A_w ,
- spočítáme průměrnou hodnotu amplitudy α ve spektru A_w , vydělíme velikostí obrazu a získáme α_s ,
- transformujeme výsledky na interval $\langle 0, 1 \rangle$ podle vzorce (3.6), dostaneme výsledný koeficient α_o .

4. Testování algoritmu

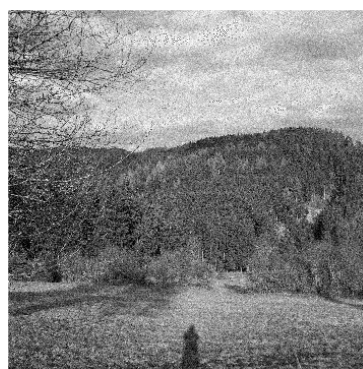
V této kapitole se zaměříme na testování algoritmu na konkrétních obrazech. Popíšeme jeho nedostatky a hranice použitelnosti.

Algoritmus byl testován na zhruba 20 obrazech ve formátu JPEG pořízených při hodnotě $\text{ISO} = 100$. Hodnoty váhové funkce, viz definice 3.6 a obrázek 3.10, byly určeny na základě subjektivního hodnocení těchto snímků a porovnání s výsledkem metody.

Příklad 4.1. Nejprve demonstrujeme výsledky pro snímek, který různým způsobem upravíme v MATLABu, abychom viděli, jak metoda zareaguje. V tomto příkladu budeme porovnávat s referenčním obrazem.



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

Snímek	Úprava	Koeficient α_o
(a)	původní snímek	0,670640
(b)	aditivní šum	0,734498
(c)	změna jasu a kontrastu	0,584002
(d)	jemné rozmazání	0,195730
(e)	větší rozmazání	0,019195
(d)	rozmazání v pohybu	0,082544

Z hodnot koeficientu α_o můžeme jasně vyvodit, že metoda vyhodnotila všechny upravené snímky jako méně kvalitní, až na ten s aditivním šumem. Je to dáno tím, jak jsme poznamenali dříve, že šum vytváří v obraze rychlé přechody jasu a metoda díky tomu posoudí obraz jako ostřejší. Low-pass high-pass funkce šum trochu potlačila, ale stále má ve spektru vliv.

Příklad 4.2. Ve druhé části testování budeme postupovat tak, že pořídíme několik snímků stejné scenerie při konstantním ISO, ale budeme měnit ostatní parametry fotoaparátu. V našem případě měníme expoziční čas a samotnou hodnotu expozice, za stálé hodnoty ISO a clony. Fotky byly pořízeny telefonem, takže jsou naše možnosti omezeny. Představená hodnota clony je 1,8/f, ISO udržujeme stále na hodnotě 100. Uvedeme dvě sady snímků.



(a) $\alpha_o = 0,5986$



(b) $\alpha_o = 0,7110$



(c) $\alpha_o = 0,6594$



(d) $\alpha_o = 0,7723$



(e) $\alpha_o = 0,6637$



(f) $\alpha_o = 0,6089$

(g) $\alpha_o = 0,7258$ (h) $\alpha_o = 0,6996$

Jako nejkvalitnější z této sady vyšel snímek (d). Je to hlavně proto, že u něj můžeme pozorovat velké množství detailů, které jsou velmi ostře definovány i za cenu toho, že na cestě se se světlem ztratily vzory. Takže můžeme poznamenat, že nám metoda našla v rámci možností nejostřejší obraz. Dál si můžeme povšimnout, že čím je obraz tmavší, tím více detaily splývají a tím menší vyjde koeficient ostrosti. Platí to i u obrazu světlejšího, jak demonstruje snímek (h). Uvedeme druhou sadu snímků pořízených při stejně nastavených parametrech. Zároveň zde zařadíme snímek při značně horších světelných podmínkách (c).

(a) $\alpha_o = 0,7066$ (b) $\alpha_o = 0,7894$ (c) $\alpha_o = 0,5313$ (d) $\alpha_o = 0,7954$



(e) $\alpha_o = 0,7147$



(f) $\alpha_o = 0,7257$



(g) $\alpha_o = 0,8013$



(h) $\alpha_o = 0,7791$

V této sadě metoda vyhodnotila jako nejostřejší snímek (g). Když se zaměříme na stromy vlevo, můžeme potvrdit, že ve snímku (g) je máme hezky definovány za ne přílišné světlosti snímku. Snímek (c) vyšel nejhůře ze sady, což potvrzuje tvrzení z předchozí kapitoly, že při horších světelných podmínkách bychom museli nastavit vyšší ISO. V našem případě je tento výsledek v souladu se subjektivním hodnocením. Obecně lze konstatovat, že platí stejné závěry jako u předchozích snímků. Můžeme si ale povšimnout, že celkově vychází koeficienty v této sadě vyšší než většina koeficientů v první sadě. Je to dáno celkovou scénérií snímku. Případ rozdílných objektů na snímku budeme podrobně rozebírat v dalším příkladu.

Dále bychom mohli namítnout, že se od sebe všechny snímky lehce liší posunutím, po aplikaci window funkce se ale tyto rozdíly srovnají. Navíc jsme dokázali (viz věta 2.3), že amplitudová spektra nezávisí na posunutí, tudíž to neovlivní výsledek koeficientu.

Můžeme tedy shrnout, že nám metoda v obou případech našla v rámci možností nejostřejší snímek. To je velmi užitečné v praxi, kdy se pořídí desítky až stovky snímků jedné scény a potřebujeme vybrat ten nejlepší pro další analýzu.

Příklad 4.3. V další ukázce budeme porovnávat obrazy různé scénérie pořízené opět při ISO 100, ale nebudeme ovlivňovat jiné parametry, tedy budou nastaveny automaticky. Tato sada obrazů demonstruje, že u naší metody velmi záleží na tom, co je na snímku vyobrazeno. Jako nejméně kvalitní vyšel snímek (c), ale při bližším rozboru můžeme vidět, že snímky (b) a (e) jsou rozmazané a vyfocené za horšího světla, ale jelikož je snímek (c) jednotvárnější, vychází hůře. U snímku (d) je možné zachytit více detailů než u ostatních snímků, proto nám vychází koeficient ostrosti mnohem vyšší.

(a) $\alpha_o = 0,5337$ (b) $\alpha_o = 0,3465$ (c) $\alpha_o = 0,2769$ (d) $\alpha_o = 0,7457$ (e) $\alpha_o = 0,2899$ (f) $\alpha_o = 0,4734$

Celkově nám tedy z uvedených příkladů vyplývá, že je metoda vhodná spíše pro porovnávání snímků jedné scenerie. Pro objektivní srovnání obrazů různých scén bychom je museli pečlivě volit, aby nebyly úplně odlišné, jako se nám to podařilo v příkladu 4.3. Metoda je zaměřená na ostrost, tedy na detaily ve snímku. Čím větší podíl detailů ve snímku můžeme zaznamenat, tím vyšší koeficient dostaneme. Dále můžeme říct, že metoda spolehlivě rozezná, zda byl snímek nějak upraven k horšímu, až na aditivní šum, kde metoda selže.

4.1. Program

Pro určení kvality snímků a jejich seřazení sestavíme aplikaci v MATLAB App Designeru. Do aplikace je možné nahrát jakýchkoliv 8 snímků ve formátu JPEG, PNG nebo TIFF. My jsme se v práci omezili na obrazy čtvercové, pro které byly nadefinovány window funkce i low-pass high-pass funkce, ale dají se nahrát i snímky obdélníkové. Uživatel může vybrat libovolné obrazy v uvedených formátech, které chce srovnat podle kvality. Musíme mít ale na paměti, že metoda má určité limity, které jsme popsali výše, a u různých obrazů v různých formátech nemusí odpovídat subjektivnímu hodnocení.

Dále musíme poznamenat, že program je pouze ilustrační pro určení kvality snímků a testování metody. Některé chybové stavy v programu nejsou ošetřeny. To se nabízí jako možnost vylepšení do budoucna. Dále by bylo možné program rozšířit pro větší množství obrazů, aby měl širší praktické využití. Pro otevření je potřeba mít nainstalován MATLAB a jeho balíček pro zpracovávání obrazů Image Processing.

4.1. PROGRAM

4.1.1. Uživatelské prostředí

Okno, které uvidí uživatel po otevření aplikace je vyobrazeno na obrázku 4.1. Pomocí tlačítka **procházet** uživatel načte jeden po druhém obrázky, které chce porovnat. Následně se snímky zobrazí v jednotlivých oknech i s jejich názvy. Po stisknutí tlačítka **spočítat ostrost** se po chvíli v kolonkách **číslo snímku** objeví čísla snímku, která jsou zobrazena nad jednotlivými snímky, seřazená od nejostřejšího snímku k nejméně ostrému. Koeficienty ostrosti α_o odpovídajících snímků se ukážou v kolonkách **číslo ostrosti**. Dále je možné přepínačem v pravé dolní polovině aplikace zobrazit načtené obrázky černobíle, tedy tak, jak je bude metoda hodnotit, nebo zobrazit jejich amplitudová spektra.

Na obrázku 4.2 je ukázáno okno aplikace s načtenými obrázky z příkladu 4.2 po stisknutí tlačítka **spočítat ostrost**, tedy výsledek aplikace.

Seřazení snímků podle kvality

Načtete obrázky:

1. snímek	2. snímek	3. snímek	4. snímek
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
5. snímek	6. snímek	7. snímek	8. snímek
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

☒ Barevně ☐ Černobíle ☐ Spektrum

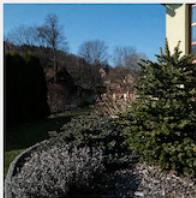
Pořadí :	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Číslo snímku:	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
Číslo ostrosti:	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Obrázek 4.1: Okno aplikace po otevření

Seřazení snímků podle kvality


Načtěte obrázky:

1. snímek




zahrada1.jpg

2. snímek



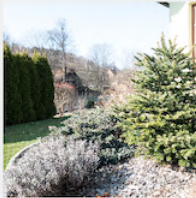
zahrada2.jpg

3. snímek



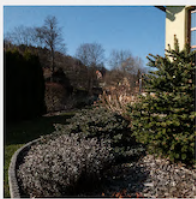
zahrada3.jpg

4. snímek




zahrada4.jpg

5. snímek



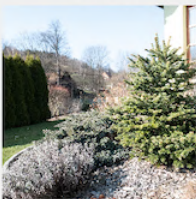
zahrada5.jpg

6. snímek



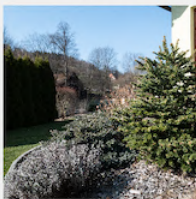
zahrada6.jpg

7. snímek



zahrada7.jpg

8. snímek



zahrada8.jpg

☒ Barevně
 ☐ Černobíle
 ☐ Spektrum

Pořadí :	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Číslo snímku:	7	4	2	8	6	5	1	3
Číslo ostrosti:	0.80125	0.79543	0.78943	0.77907	0.72566	0.71478	0.70661	0.53127

Obrázek 4.2: Okno aplikace po vyhodnocení výsledků

5. Závěr

Jedním z cílů práce bylo seznámit se s teorií Fourierovy transformace, která tvoří základ pro Fourierovu analýzu obrazů. Nejdříve byla stručně uvedena problematika Fourierových řad, ze kterých jsme přešli na teorii Fourierovy transformace. V práci byl zaveden matematický aparát pro potřeby řešeného zadání. V příkladech a obrázcích vysvětlujících teorii byl kladen důraz na amplitudová spektra, která tvoří podstatu navržené metody.

Na základě chování amplitudových spekter při změně ostrosti původního obrazu byl uveden algoritmus, který přiřadí snímku koeficient ostrosti α_o z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Následně byla metoda založená na tomto algoritmu testována na konkrétních obrazech. Obrazy byly pořízeny při hodnotě citlivosti ISO 100 a byly hodnoceny ve stejné ztrátové kompresi, abychom nastavili stejné podmínky. Z příkladů vyplývá, že je metoda velmi vhodná pro nalezení těch nejostřejších exemplářů ze sady snímků stejné scenerie, což je užitečné v technické praxi. Pokud máme snímky různých objektů, výsledky metody a subjektivního hodnocení se mohou lišit. Metoda je tedy závislá na tom, co je na snímcích vyobrazeno. Dalším nedostatkem metody je to, že při více zašumělém obrazu metoda může selhat i po použití low-pass high-pass váhové funkce na spektrum.

To naznačuje, že metoda má rezervy a je možné ji vylepšit. Do budoucna by se dalo využít mimo váhovou funkci ještě další metody pro detekci nebo filtraci šumu. Dále by bylo možné navrženou metodu spojit s jiným způsobem hodnocení kvality obrazu — např. gradientní metodou, S_3 metodou. Pro zlepšení objektivity by bylo možné zapracovat do úvah i fázová spektra obrazů a lidský faktor, kdy naše oko reaguje jinak na rozmazání jednotvárného pozadí a textury.

Hlavním cílem práce bylo sestavit program na testování kvality obrazu. Pro tyto účely byla naprogramována aplikace v MATLAB App Designeru. Do aplikace může uživatel nahrát 8 snímků ve formátech JPEG, PNG nebo TIFF, které chce porovnat podle ostrosti. Lze nahrát libovolné snímky, uživatel si ale musí být vědom, že u snímků různé scenerie se výsledné pořadí podle koeficientu ostrosti nemusí shodovat se subjektivním hodnocením.

Literatura

- [1] BROKEŠOVÁ, Johana. *Teoretické základy Fourierovy spektrální analýzy* [online]. Praha, 2008 [cit. 2021-02-03]. Dostupné z: <http://geo.mff.cuni.cz/studium/Broksova-FourierovaSpektralniAnalyza.pdf>. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.
- [2] DANNHOFEROVÁ, Jana. *Velká kniha barev: Kompletní průvodce pro grafiky, fotografy a designéry*. Praha: Computer Press, 2012. ISBN 978-80-251-3785-7.
- [3] DRUCKMÜLLEROVÁ, Hana. *Phase-correlation based image registration* [online]. Brno, 2010 [cit. 2021-01-31]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=27760. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství.
- [4] FERZLI, Rony a Lina J. KARAM. *A No-Reference Objective Image Sharpness Metric Based on the Notion of Just Noticeable Blur (JNB)* [online], 717 - 728 [cit. 2021-03-9]. Dostupné z: doi:10.1109/TIP.2008.2011760.
- [5] GONZALEZ, Rafael C. a Richard E. WOODS. *Digital Image Processing* [online]. Pearson Education Limited, 2017 [cit. 2021-02-29]. ISBN 978-12-922-2304-9. Dostupné z: http://sdeuoc.ac.in/sites/default/files/sde_videos/Digital%20Image%20Processing%203rd%20ed.%20%20R.%20Gonzalez%2C%20R.%20Woods-ilo-vepdf-compressed.pdf
- [6] IVIČIČ, Vojtěch. *Numerical characteristics of digital image quality* [online]. Brno, 2013 [cit. 2021-01-31]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=67550. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství.
- [7] OUJEZDSKÝ, Aleš. *Tvorba digitální fotografie a její zpracování v PC* [online]. Ostrava, 2014 [cit. 2021-02-28]. Dostupné z: <https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=73279&view=11595>. Ostravská univerzita v Ostravě.
- [8] SOLOMON, Chris a Toby BRECKON. *Fundamentals of Digital Image Processing: A Practical Approach with Examples in Matlab*. John Wiley & Sons, Ltd, 2011. ISBN 978-0-470-68977-6.
- [9] StockSnap [online]. © 2021 [cit. 2021-03-02]. Dostupné z: <https://stocksnap.io>.

Seznam příloh

- Algoritmy v programu MATLAB
- Testovací snímky
- Demonstrační program