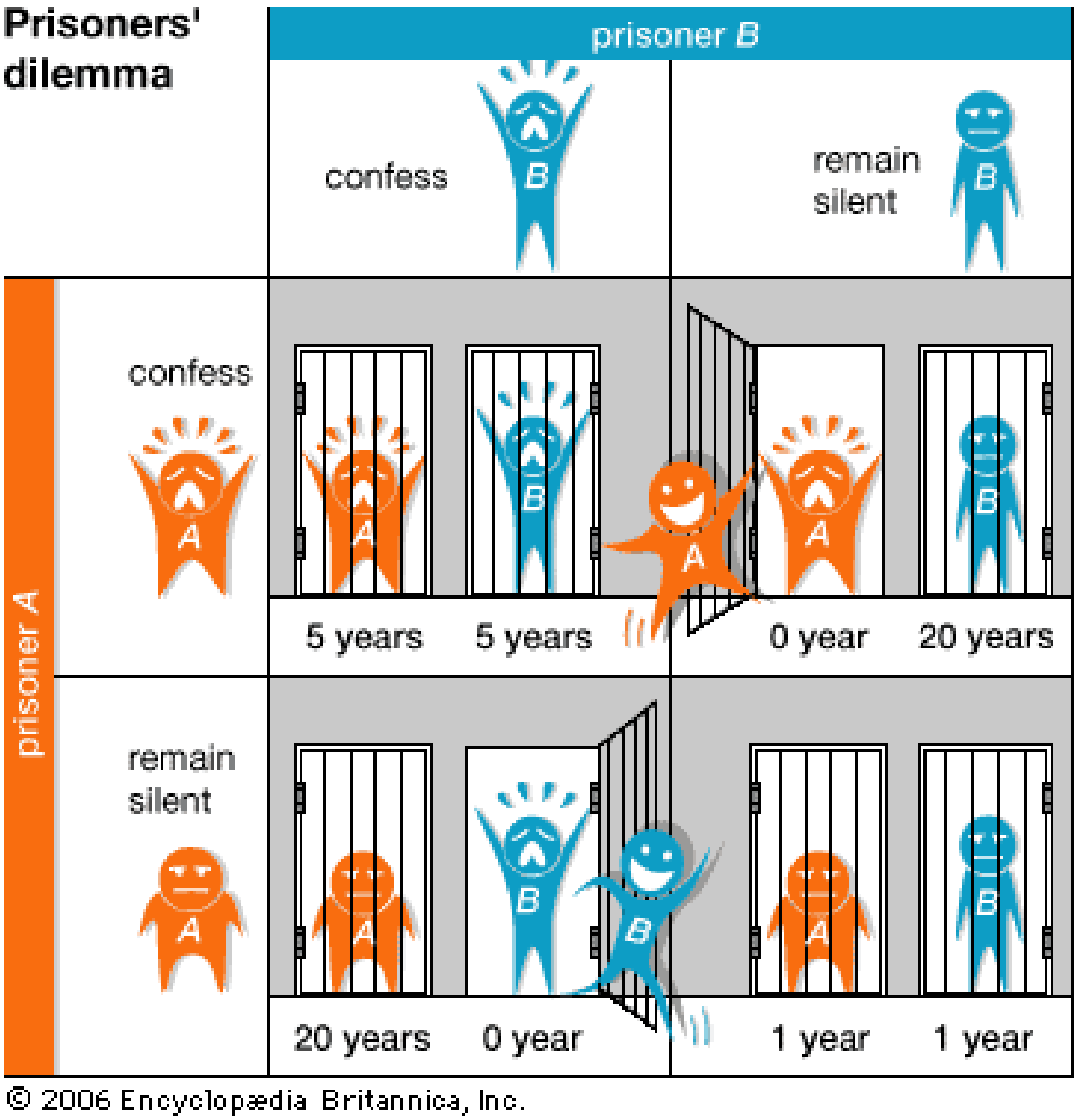
Úvod do teorie her

podzim 2010 v.1.0



Obsah

1 Matematická teorie her

1.1 Matematický model

Cílem teorie her je popsat situaci, která nás zajímá, jako hru. Proto, abychom mohli používat matematický aparát, musíme jasně definovat, co znamenají pojmy, které budeme při popisování používat.

Rozhodování - výběr jedné z více variant
Rozhodovací situace - situace, ve které je potřeba vykonat rozhodování
Výsledek - výběr variant vede k určitým výsledkům, které mohou být z hlediska zájmu rozhodujícího se subjektu horší nebo lepší.
Racionální účastník - rozhodující se subjekt vychází z pozorování možných výsledků a usiluje o výběr (v jistém smyslu) nejlepší varianty
Indiferentní (neracionální) účastník - subjekt, kterému je výsledek rozhodování lhostejný (počasí,...)

Předpokládáme, že rozhodovací situace má alespoň jednoho racionálního účastníka a hledáme odpověď, jaké rozhodování racionálního účastníka můžeme pokládat v dané rozhodovací situaci za optimální.

Dělení rozhodovacích situací:

1. (a) Rozhodovací situace se *skalárním ohodnocením* (rozhodnutí je možné hodnotit jednou charakteristikou)
   (b) Rozhodovací situace s *vektorovým ohodnocením* (rozhodnutí je možné hodnotit více charakteristikami)
2. (a) Rozhodovací situace s *jedním (nutně racionálním)* účastníkem
   (b) Rozhodovací situace s *více (alespoň jedním racionálním)* účastníky
3. (a) *Nekonfliktní* rozhodovací strategie (s jedním účastníkem a skalárním ohodnocením (matematické programování))
   (b) *Konfliktní* rozhodovací strategie (s větším počtem racionálních účastníků případně alespoň jedním indiferentním, nebo s vektorovým ohodnocením (jejich kombinace))

Teorie her řeší konfliktní rozhodovací situace s větším počtem racionálních účastníků a se skalárním ohodnocením

Jako další musíme zavést formalismus, který nám umožní zformulování matematického modelu. Uvažujeme tedy následující objekty:
$P = \{1, 2, \dots, n\}$ – množina racionálních účastníků.
$Q = \{1, 2, \dots, m\}$ – množina indiferentních účastníků.
Pro $p \in P$, $X_p = (X_p^1, \dots, X_p^{k_p})$ – množina alternativ rozhodování racionálního účastníka p.

Pro $q \in Q$, $Y_q = (Y_q^1, \dots, Y_q^{l_q})$ – množina možných stavů vzniklých v důsledku působení indiferentního účastníka q.
$V = \prod_{i=1}^{n} X_i \times \prod_{j=1}^{m} Y_j$ – výsledek rozhodovací situace.
Pro $(x, y) \in V$,

$$M_p(x,y) = \begin{pmatrix} M_p^1(x,y) \\ \vdots \\ M_p^n(x,y) \end{pmatrix},$$

kde $M_p^i : V \to \mathbb{R}$ – platba p–tého účastníka i– tému účastníkovi.

Definice 1. Matematickým modelem *rozhodovací situace v normálním tvaru nazýváme následující zápis:*

$$\begin{Bmatrix} P = \{1, \dots, n\} & X_1, \dots, X_n & M_1, \dots, M_n \\ Q = \{1, \dots, m\} & Y_1, \dots, Y_m & \end{Bmatrix}$$

Definice 2. Racionální účastník $p \in P$ *se chová tak, že pokud*

$$M_p^s(x_1, y_1) \geq M_p^s(x_2, y_2),\ \forall s = 1, \dots, n$$

a alespoň pro jedno s platí:

$$M_p^s(x_1, y_1) > M_p^s(x_2, y_2),$$

pak upřednostňuje alternativu (x_1, y_1) *před* (x_2, y_2).

Teorie her zkoumá konfliktní rozhodovací situace
Některé způsoby (rozhodně ne všechny), jak je možné teorii her dělit, jsou následující:

1. (a) Hry dvou hráčů.
   (b) Hry n hráčů.
2. (a) *Konečná hra* - konečné množiny strategií.
   (b) *Nekonečná hra* - množina strategií alespoň jednoho hráče je nekonečná.
3. (a) *Hra s konstantním součtem plateb* – $\forall (x, y) \in V$, $\sum_{p \in P} M_p(x, y) = c$.
   (b) *Hra s nulovým součtem plateb* – $\forall (x, y) \in V$, $\sum_{p \in P} M_p(x, y) = 0$.
4. (a) *Nekooperativní hry* – hry bez možnosti uzavírat koalice.
   (b) *Koaliční hry* – hry s možnosti uzavírat koalice.

Následující příklad ukazuje, jak ze slovního zadání vytvořit příslušný matematický model:

Příklad 1 (Hra plukovníka Blotta). *Boj o pozice B-Brno a O-Olomouc. Armáda A_1 o síle tří pluků pozice dobývá, armáda A_2 o síle dvou pluků pozice brání. Výsledek střetnutí kromě síly oddílů ovlivňuje i počasí. Armády A_2 a A_1 rozmístí své pluky do pozic B, O, aniž by znaly rozmístění protivníka. Pozici obsazuje armáda s větším počtem umístěných pluků. Pokud je pluků stejný počet, vyhrává v případě pěkného počasí útočník, v případě špatného obránce. Zisk je počet zničených jednotek $+1$.*

Matematický model:
Máme dva racionální účastníky, a to armády A_1 a A_2 a jednoho indiferentního, a to počasí. Množina racionálních účastníků je tedy $P = \{1, 2\}$ a množina indiferentních účastníků (počasí) je $Q = \{1\}$. Množina alternativ rozhodování racionálního účastníka 1 je pak $X_1 = (X_1^1 = (0, 3), X_1^2 = (1, 2), X_1^3 = (2, 1), X_1^4 = (3, 0))$ a množina alternativ rozhodování racionálního účastníka 2 je $X_2 = (X_2^1 = (0, 2), X_2^2 = (1, 1), X_2^3 = (2, 0))$. Množina možných stavů vzniklých v důsledku působení indiferentního účastníka 1 je konečně $Y_1 = (Y_1^1 = hezky, Y_1^2 = škaredě)$. Výsledky rozhodovací situace tvoří množinu $V = X_1 \times X_2 \times Y_1$. Platba prvního účastníka je funkce M_1 definovaná výčtem

$$\begin{array}{lll}
M_1(X_1^1, X_2^1, Y_1^1) = 3 & M_1(X_1^1, X_2^2, Y_1^1) = 2 & M_1(X_1^1, X_2^3, Y_1^1) = 1 \\
M_1(X_1^2, X_2^1, Y_1^1) = 4 & M_1(X_1^2, X_2^2, Y_1^1) = 4 & M_1(X_1^2, X_2^3, Y_1^1) = 1 \\
M_1(X_1^3, X_2^1, Y_1^1) = 0 & M_1(X_1^3, X_2^2, Y_1^1) = 4 & M_1(X_1^3, X_2^3, Y_1^1) = 4 \\
M_1(X_1^4, X_2^1, Y_1^1) = 1 & M_1(X_1^4, X_2^2, Y_1^1) = 2 & M_1(X_1^4, X_2^3, Y_1^1) = 4 \\
M_1(X_1^1, X_2^1, Y_1^2) = 4 & M_1(X_1^1, X_2^2, Y_1^2) = 2 & M_1(X_1^1, X_2^3, Y_1^2) = 1 \\
M_1(X_1^2, X_2^1, Y_1^2) = -1 & M_1(X_1^2, X_2^2, Y_1^2) = 1 & M_1(X_1^2, X_2^3, Y_1^2) = 0 \\
M_1(X_1^3, X_2^1, Y_1^2) = 0 & M_1(X_1^3, X_2^2, Y_1^2) = 1 & M_1(X_1^3, X_2^3, Y_1^2) = -1 \\
M_1(X_1^4, X_2^1, Y_1^2) = 1 & M_1(X_1^4, X_2^2, Y_1^2) = 2 & M_1(X_1^4, X_2^3, Y_1^2) = 3
\end{array}$$

a platba druhého účastníka je funkce M_2

$$\begin{array}{lll}
M_2(X_1^1, X_2^1, Y_1^1) = -1 & M_2(X_1^1, X_2^2, Y_1^1) = 0 & M_2(X_1^1, X_2^3, Y_1^1) = 1 \\
M_2(X_1^2, X_2^1, Y_1^1) = -2 & M_2(X_1^2, X_2^2, Y_1^1) = -2 & M_2(X_1^2, X_2^3, Y_1^1) = 1 \\
M_2(X_1^3, X_2^1, Y_1^1) = 2 & M_2(X_1^3, X_2^2, Y_1^1) = -2 & M_2(X_1^3, X_2^3, Y_1^1) = -2 \\
M_2(X_1^4, X_2^1, Y_1^1) = 1 & M_2(X_1^4, X_2^2, Y_1^1) = 0 & M_2(X_1^4, X_2^3, Y_1^1) = -2 \\
M_2(X_1^1, X_2^1, Y_1^2) = -2 & M_2(X_1^1, X_2^2, Y_1^2) = 0 & M_2(X_1^1, X_2^3, Y_1^2) = 1 \\
M_2(X_1^2, X_2^1, Y_1^2) = 3 & M_2(X_1^2, X_2^2, Y_1^2) = 1 & M_2(X_1^2, X_2^3, Y_1^2) = 2 \\
M_2(X_1^3, X_2^1, Y_1^2) = 2 & M_2(X_1^3, X_2^2, Y_1^2) = 1 & M_2(X_1^3, X_2^3, Y_1^2) = 3 \\
M_2(X_1^4, X_2^1, Y_1^2) = 1 & M_2(X_1^4, X_2^2, Y_1^2) = 0 & M_2(X_1^4, X_2^3, Y_1^2) = -1
\end{array}$$

Matematický model je pak

$$\left\{\begin{array}{ccc} P = \{1, 2\} & X_1, X_2 & M_1, M_2 \\ Q = \{1\} & Y_1 & \end{array}\right\}$$

Příklad 2 (Operátoři)**.** *Dva operátoři T–Mobile a O_2 chtějí postavit vysílač do jednoho ze čtyř měst A, B, C, D, které jsou od sebe vzdáleny následujícím způsobem:*

$$\bigcirc_0^A \text{——} \bigcirc_{20}^B \text{————————} \bigcirc_{60}^C \text{————————} \bigcirc_{100}^D$$

Každé dominantní pokrytí odpovídá proporcionálně délce úseku. Pokud například T–Mobile postaví vysílač v bodě B a O_2 v bodě C, bude T–Mobile dominantní na úseku AB a na půlce *úseku BC (to dělá 40% celého území), kdežto O_2 bude dominantní na úseku CD a na půlce úseku BC (to dělá ale 60% území). Vysílač musí být umístěn v jednom z bodů A, B, C, D.*

Matematický model:

$P = \{1, 2\}$

$Q = \emptyset$

$X_1 = (X_1^1 = A, X_1^2 = B, X_1^3 = C, X_1^4 = D)$

$X_2 = (X_2^1 = A, X_2^2 = B, X_2^3 = C, X_2^4 = D)$

$V = X_1 \times X_2$

$$\begin{array}{llll}
M_1(X_1^1, X_2^1) = 50 & M_1(X_2^1, X_2^2) = 10 & M_1(X_3^1, X_2^3,) = 30 & M_1(X_4^1, X_2^2) = 50 \\
M_1(X_1^1, X_2^1) = 90 & M_1(X_2^1, X_2^2) = 50 & M_1(X_3^1, X_2^3,) = 40 & M_1(X_4^1, X_2^2) = 60 \\
M_1(X_1^1, X_2^1) = 70 & M_1(X_2^1, X_2^2) = 60 & M_1(X_3^1, X_2^3,) = 50 & M_1(X_4^1, X_2^2) = 80 \\
M_1(X_1^1, X_2^1) = 50 & M_1(X_2^1, X_2^2) = 40 & M_1(X_3^1, X_2^3,) = 20 & M_1(X_4^1, X_2^2) = 50
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
M_2(X_1^1, X_2^1) = 50 & M_2(X_2^1, X_2^2) = 90 & M_2(X_3^1, X_2^3,) = 70 & M_2(X_4^1, X_2^2) = 50 \\
M_2(X_1^1, X_2^1) = 10 & M_2(X_2^1, X_2^2) = 50 & M_2(X_3^1, X_2^3,) = 60 & M_2(X_4^1, X_2^2) = 40 \\
M_2(X_1^1, X_2^1) = 30 & M_2(X_2^1, X_2^2) = 40 & M_2(X_3^1, X_2^3,) = 50 & M_2(X_4^1, X_2^2) = 20 \\
M_2(X_1^1, X_2^1) = 50 & M_2(X_2^1, X_2^2) = 60 & M_2(X_3^1, X_2^3,) = 80 & M_2(X_4^1, X_2^2) = 50
\end{array}$$

1.2 Maticové hry

Všimněme si, že u příkladu telefonních operátorů máme dva hráče a zisk jednoho znamená automaticky ztrátu druhého. Takové hře se říká antagonistická hra dvou hráčů a není těžké si představit, že je možné takovou hru reprezentovat maticí. Hrám, které lze reprezentovat maticí, se říká maticové hry. Formálně je maticová hra konečná hra dvou hráčů s konstantním (nulovým součtem). To, že je hru dvou hráčů s konstantním součtem možné reprezentovat jen maticí plateb prvního hráče M_1, plyne přímo z následjuícího faktu. Pokud je hra s konstantním součtem, platí

$$M_1(x, y) + M_2(x, y) = c$$

a je tedy možné vyjádřit matici plateb druhého hráče pomocí matice plateb prvního:

$$M_2(x, y) = c - M_1(x, y).$$

Definice 3. Hrou dvou hráčů v normální formě s konstantním součtem (maticovou hru) *nazýváme hru* $\big\{P = \{1, 2\} \quad X, Y \quad M(x, y) \quad c\big\}$.

Z definice je jasné, že nedává smysl uvažovat možnou spolupráci hráčů (čím víc jeden získá tím víc druhý ztratí). Takové hry se nazývají **antagonistické (nekooperativní)**.

Definice 4. Maticí plateb *rozumíme matici*

$$M = \begin{pmatrix} M(x_1, y_1) & \cdots & M(x_1, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M(x_m, y_1) & \cdots & M(x_m, y_n) \end{pmatrix}.$$

Příklad 3 (Hra s prsty). *Každý ze dvou hráčů ukáže jeden nebo dva prsty. Pokud je celkový počet ukázaných prstů sudé číslo, pak zaplatí druhý hráč prvnímu sumu rovnající se tomuto číslu. V opačném případě inkasuje od prvního hráče příslušnou sumu druhý hráč.*

Strategie prvního hráče jsou

$i = 1$	*ukázat jeden prst*
$i = 2$	*ukázat dva prsty*

Strategie druhého hráče jsou

$j = 1$	*ukázat jeden prst*
$j = 2$	*ukázat dva prsty*

Jde tedy o maticovou hru s maticí plateb

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

a konstantou $c = 0$

Příklad 4 (Hra plukovníka Blotta (Př. 1)). *Pokud v Příkladě 1 vynecháme indiferentního účastníka tak, že předpokládáme, že bude škaredě, dostaneme maticovou hru, kde:*

Strategie prvního hráče jsou

$i = 1$	*(3,0)*
$i = 2$	*(2,1)*
$i = 3$	*(1,2)*
$i = 4$	*(0,3)*

Strategie druhého hráče jsou

$j = 1$	*(2,0)*
$j = 2$	*(1,1)*
$j = 3$	*(0,2)*

Jde tedy o maticovou hru s maticí plateb

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a konstantou $c = 2$.

Příklad 5 (Operátoři (Př. 2)). *V příkladě s operátory jde jednoznačně o maticovou hru s maticí plateb:*

$$\begin{pmatrix} 50 & 10 & 30 & 50 \\ 90 & 50 & 40 & 60 \\ 70 & 60 & 50 & 80 \\ 50 & 40 & 20 & 50 \end{pmatrix}$$

a konstantou $v = 100$.

Maticová hra se tedy hraje tak, že první hráč vybírá řádek a druhý hráč sloupec. Příslušné číslo v matici je pak platba prvního hráče.

Definice 5. *Strategie* $i = 1, \ldots, m$ *a* $j = 1, \ldots n$ *nazýváme* čisté strategie *prvního a druhého hráče.*

Pokud první hráč volí i–tou čistou strategii, potom může s určitostí zabezpečit, že jeho platba bude alespoň

$$\min_j a_{ij}.$$

Vzhledem k tomu, že chce ale zabezpečit co možná nejvyšší platbu uvažuje přinejmenším o platbě

$$\max_i \min_j a_{ij}.$$

Druhý hráč chce minimalizovat platbu prvního hráče, ta však nebude vyšší než

$$\max_i a_{ij}$$

a druhý hráč tedy volí strategii

$$\min_j \max_i a_{ij}.$$

Z toho tedy vyplývá, že volbou čisté strategie může první hráč zabezpečit, že jeho platba nebude nižší než $\max_i \min_j a_{ij}$, přičemž druhý hráč může vhodnou volbou strategie zajistit, aby jeho platba nebyla vyšší než $\min_j \max_i a_{ij}$ Pokud by tyto úvahy obou hráčů nebyly ve sporu znamenalo by to, že svou volbou zaručí, že případná změna protihráčovy strategie, by pro něj nebyla výhodná. Můžeme říct, že *kdo pak uhne, tak si nepolepší.* Toto dává smysl následujícím definicím:

Definice 6. Sedlovým bodem matice $A = (a_{ij})$ *nazýváme takový její prvek* a_{ij} *pro který platí* $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$.

Definice 7. *Takové strategie* i_0, j_0*, že* (i_0, j_0) *je sedlový bod matice plateb* A*, nazýváme* čistými optimálními strategiemi *prvního a druhého hráče v maticové hře. Číslo* $v = a_{i_0 j_0}$ *nazýváme* hodnotou *této hry. Trojici* (i_0, j_0, v) *nazýváme* řešením *maticové hry v čistých strategiích.*

V následujícím dokážeme, že tyto úvahy jsou obecně platné.

Věta 1. *Nechť $f(x,y)$ je reálná funkce definovaná pro $x \in X$ a $y \in Y$ a předpokládejme že existují veličiny*

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y), \ \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Potom

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Důkaz. Z definice minima a maxima víme, že pro libovolné zadané $x \in X$ platí

$$\min_{y\in Y} f(x,y) \le f(x,y)$$

a pro libovolné zadané $y \in Y$ platí

$$f(x,y) \le \max_{x\in X} f(x,y).$$

Proto pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$ platí

$$\min_{y\in Y} f(x,y) \le \max_{x\in X} f(x,y).$$

Vzhledem k tomu, že pravá strana nerovnice nezávisí na $x \in X$ tedy

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \le \max_{x\in X} f(x,y).$$

A vzhledem k tomu, že levá strana nerovnice nezávisí na $y \in Y$, dostaneme celkem

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

□

Definice 8. *Nechť $f(x,y)$ je reálná funkce definovaná pro $x \in X$ a $y \in Y$.* Sedlovým bodem *této funkce vzhledem k množině $X \times Y$ nazýváme takový bod $(x_0, y_0) \in X \times Y$, že pro všechny $x \in X$ a $y \in Y$ platí*

$$f(x, y_0) \le f(x_0, y_0) \le f(x_0, y).$$

Věta 2 (Věta o sedlovém bodu). *Nechť $f(x,y)$ je reálná funkce definovaná pro $x \in X$ a $y \in Y$ a nechť existují veličiny $\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)$ a $\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)$. Pak funkce $f(x,y)$ má sedlový bod na množině $X \times Y$ právě tehdy, když platí*

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Navíc pokud (x_0, y_0) je sedlový bod funkce $f(x,y)$ na množině $X \times Y$, pak

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Důkaz. **1.** Nechť $(x_0, y_0) \in X \times Y$ je sedlový bod funkce $f(x, y)$. Pak podle Definice 8. pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$ platí $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y)$. Z toho vyplývá, že $\max_{x \in X} f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq \min_{y \in Y} f(x_0, y)$. Vzhledem k tomu, že

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) \leq \max_{x \in X} f(x, y_0)$$

a

$$\min_{y \in Y} f(x_0, y) \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y),$$

platí

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

Avšak podle předešlé věty platí

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

A tedy celkem

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

a z důkazu je zřejmé, že se výraz také musí rovnat $f(x_0, y_0)$.

2. Nechť je splněna rovnost ve znění věty. Předpokládejme, že funkce $\min_{y \in Y} f(x, y)$ nabývá svého maxima v bodě $x_0 \in X$ a funkce $\max_{x \in X} f(x, y)$ svého minima v bodě $y_0 \in Y$, tj. platí

$$\min_{y \in Y} f(x_0, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

$$\max_{x \in X} f(x, y_0) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Ukážeme, že dvojice $(x_0, y_0) \in X \times Y$ je sedlovým bodem funkce $f(x, y)$. Na základě předpokladu o splnění rovnosti máme

$$\min_{y \in Y} f(x_0, y) = \max_{x \in X} f(x, y_0).$$

Z definice minima vyplývá

$$\min_{y \in Y} f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0),$$

a tedy

$$\max_{x \in X} f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0).$$

Celkem

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{pro všechna } x \in X.$$

Analogicky

$$f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{pro všechna } y \in Y,$$

a tedy $(x_0, y_0) \in X \times Y$ je z definice sedlovým bodem. □

Všimněme si ještě jedné důležité vlastnosti maticových her. Pokud je některý řádek matice ve všech sloupcích větší než jiný, nemá pro prvního hráče smysl příslušnou strategii hrát.

Definice 9. *Řekneme, že vektor* $a = (a_1, \cdots, a_n)^T$ dominuje (ostře) *vektoru* $b = (b_1, \cdots, b_n)^T$, *pokud pro všechna* $j = 1, \cdots, n$ *platí* $a_j \geq b_j$ $(a_j > b_j)$.

Věta 3. *Optimální strategie hráčů v maticové hře se nezmění, pokud k matici plateb připočteme libovolnou konstantu* ξ *nebo pokud matici plateb vynásobíme libovolnou kladnou konstantou* β.

Příklad 6 (Prsty (Př. 3.))**.** *V tomto příkladě jde o maticovou hru s maticí plateb*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Máme tedy

$$\min_j a_{1j} = -3 \qquad \min_j a_{2j} = -3$$
$$\max_i \min_j a_{ij} = -3 \qquad \max_i a_{i1} = 2$$
$$\max_i a_{i2} = 4 \qquad \min_j \max_i a_{ij} = 2.$$

Platí tedy $\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}$ *a čistá optimální strategie neexistuje.*

Příklad 7. *Mějme maticovou hru určenou maticí*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Máme tedy

$$\min_j a_{1j} = 2$$
$$\min_j a_{2j} = -1 \qquad \max_i \min_j a_{ij} = 2$$
$$\max_i a_{i1} = 4 \qquad \max_i a_{i2} = 2$$
$$\min_j \max_i a_{ij} = 2$$

a tedy $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$ *a čistá optimální strategie je* $(1, 2)$.

Příklad 8. *Pokud v Příkladě 1 vynecháme indiferentního účastníka, tj. počasí dostaneme maticovou hru s maticí plateb*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Máme tedy

$$\min_j a_{1j} = 1$$

$$\min_j a_{2j} = -1 \qquad \min_j a_{3j} = 0$$

$$\min_j a_{4j} = 1 \qquad \max_i \min_j a_{ij} = 1$$

$$\max_i a_{i1} = 3 \qquad \max_i a_{i2} = 2$$

$$\max_i a_{i3} = 3 \qquad \min_j \max_i a_{ij} = 2$$

a opět $\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}$ *a čistá optimální strategie neexistuje.*

Příklad 9 (Operátoři (Př. 2))**.** *V příkladě s operátory se jedná o maticovou hru s maticí plateb:*

$$\begin{pmatrix} 50 & 10 & 30 & 50 \\ 90 & 50 & 40 & 60 \\ 70 & 60 & 50 & 80 \\ 50 & 40 & 20 & 50 \end{pmatrix}.$$

Máme tedy:

$$\min_j a_{1j} = 10$$

$$\min_j a_{2j} = 40 \qquad \min_j a_{3j} = 50$$

$$\min_j a_{4j} = 20 \qquad \max_i \min_j a_{ij} = 50$$

$$\max_i a_{i1} = 90 \qquad \max_i a_{i2} = 60$$

$$\max_i a_{i3} = 50 \qquad \max_i a_{i4} = 80$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = 50$$

a tentokrát $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$*, existuje tedy čistá optimální strategie a jde o strategii, kdy si oba operátoři postaví vysílač na stejném místě, a to na místě C.*

Příklad 10 (Vězňovo dilema).

$$\begin{pmatrix} & zradit & nezradit \\ zradit & (-6,-6) & (0,-9) \\ nezradit & (-9,0) & (-1,-1) \end{pmatrix}$$

Příklad 11 (Kámen, nůžky, papír).

$$\begin{pmatrix} & kámen & nůžky & papír \\ kámen & (0,0) & (1,-1) & (-1,1) \\ nůžky & (-1,1) & (0,0) & (1,-1) \\ papír & (1,-1) & (-1,1) & (0,0) \end{pmatrix}$$

Příklad 12 (Hra pohlaví).

$$\begin{pmatrix} & divadlo & fotbal \\ divadlo & (3,1) & (1,1) \\ fotbal & (0,0) & (2,3) \end{pmatrix}$$

Příklad 13 (Semafory). *Při programování chování semaforů na křižovatkách se zvažuje nakolik se má semafor přizpůsobovat aktuálnímu provozu (například z ohledem na statistiku průjezdnosti ve všech směrech upravit přepínání mezi červenou a zelenou). První hráč je počítač řídící křižovatku, druhý hráč je účastník dopravního provozu. Pro počítač máme dva stavy "přizpůsobuje / nepřizpůsobuje" a pro druhého hráče máme dva stavy "respektuje / nerespektuje (projede klidně i na červenou)". Pokud se počítač přizpůsobuje a účastníci semafor respektují, vznikne malá časová prodleva "d"během které se čeká na zelenou. Pokud hráč semafor nerespektuje a semafor se tomu přizpůsobuje zpoždění bude nula. Pokud hráč semafor respektuje, ale semafor se nepřizpůsobuje musí si navíc počkat další čas "D". Pokud hráč semafor nerespektuje, ale semafor se nepřizpůsobuje prodleva všech je "D". Jedná se o maticovou hru z maticí plateb:*

$$\begin{pmatrix} d & d+D \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že pro počítač dokonce dominuje druhý sloupec tedy "nepřizpůsobuje". Nejlepší strategie pro semafor je nepřizpůsobovat se*, takže je často červená i na prázdné křižovatce. Přidáme zásadu, že na křižovatce bude dopravní policie s pravděpodobností p zastavovat řidiče kteří poruší předpisy a zdržovat je o další čas f. Zavedeme pak funkci plateb c.*

$$\begin{pmatrix} c(d,p,0) & c(d+D,p,0) \\ c(0,p,f) & c(D,p,f) \end{pmatrix}.$$

Pokud bude funkce lineární, tj. $c(x,p,f) = x + pf$ *pak máme matici plateb*

$$\begin{pmatrix} d & d+D \\ 0+pf & D+pf \end{pmatrix}.$$

Zvolíme–li $pf > d$, tj. vhodně zvolíme pravděpodobnost kontrol a míru prostojů je optimální strategií semaforu přizpůsobit se.

1.3 Bi–maticové hry

Pro konečnou hru dvou hráčů, která nemá konstantní součet, a tedy nemusí být ani antagonistická, se vžilo označení *bimaticová hra.* Jediný rozdíl od maticové hry tedy je, že každý hráč má svou vlastní matici plateb.

Definice 10. *Nechť X, Y jsou neprázdné množiny. Bi–maticovou hrou dvou hráčů rozumíme hru v normálním tvaru:*

$$\{Q = \{1,2\}, X, Y, M_1(x,y), M_2(x,y)\}$$

s nekonstantním součtem

$$M_1(x,y) + M_2(x,y) = \mu(x,y).$$

Musíme proto modifikovat definici rovnovážného bodu pro dva hráče.

Definice 11. *Dvojice strategií (x, y) se nazývá rovnovážný bod, právě tehdy když platí:*

$$u_1(s, y) \leq u_1(x, y), \quad \textit{pro každé } s \in S$$

$$u_2(x, t) \leq u_1(x, y), \quad \textit{pro každé } t \in T$$

Příklad 14. *Hru určená dvojmaticí*

Strategie	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Y_1	*(3,3)*	*(2,2)*	*(3,10)*	*(6,9)*	*(10,11)*
Y_2	*(-3,-2)*	*(1,15)*	*(1,8)*	*(10,2)*	*(-1,2)*
Y_3	*(10,2)*	*(0,0)*	*(1,2)*	*(1,2)*	*(0,2)*

má rovnovážný bod (X_2, Y_1)

Příklad 15. *Hru určená dvojmaticí*

Strategie	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Y_1	*(3,3)*	*(2,2)*	*(3,10)*	*(6,9)*	*(10,11)*
Y_2	*(3,-2)*	*(7,15)*	*(6,8)*	*(10,2)*	*(3,2)*
Y_3	*(10,2)*	*(0,0)*	*(1,2)*	*(1,2)*	*(0,2)*

nemá rovnovážný bod.

Všimněme si, že bi–maticová hra

$$\begin{pmatrix} (4,1) & (-9,8) \\ (3,4) & (-4,5) \end{pmatrix}$$

má dvě rovnovážné strategie $(4, 1)$ a $(-4, 5)$. Pokud první hráč volí $x = 1$, tedy svou rovnovážnou strategii a druhý hráč volí $y = 2$ také svou rovnovážnou strategii, je pak výsledek nejhorší možný. Existuje možnost výhodnější volby strategie $x = 2, y = 1$, ale je potřeba dohody o strategii.

Definice 12. *Nechť $(\bar{x}, \bar{y})$ je dvojice rovnovážných strategií s vlastností, že*

$$M_1(x, \bar{y}) \geq M_1(\bar{x}, \bar{y})$$

$$M_2(\bar{x}, y) \geq M_2(\bar{x}, \bar{y}),$$

kde (x, y) je libovolná jiná dvojice rovnovážných strategií hry. Potom dvojici (x, y) nazveme dominující dvojicí rovnovážných strategií hry.

1.4 Smíšené optimální strategie

Pokud nemá maticová hra optimální strategii, platí

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}.$$

V tomto případě se při opakování hry, tj. při jednotlivých partiích, bude první i druhý hráč snažit opakovat čisté strategie s takovou pravděpodobností, aby v průměru, první hráč získal více než jen $\max_i \min_j a_{ij}$ a druhý hráč se snaží zajistit aby, první získal méně než $\min_j \max_i a_{ij}$. Tady každý hráč přiřazuje každé své čisté strategii určitou pravděpodobnost, s jakou jí bude používat.

Definice 13. Smíšenou strategií prvního hráče *nazýváme m–rozměrný vektor* $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$, *pro který platí*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0.$$

Smíšenou strategií druhého hráče *nazýváme n–rozměrný vektor* $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, *pro který platí*

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1,\ y_i \geq 0$$

Množiny

$$S_m = \{x \in E_m,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0\}$$

$$S_n = \{y \in E_n,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 1,\ y_i \geq 0\}$$

nazýváme množinou smíšených strategií *prvního a druhého hráče.*

Každá čistá strategie odpovídá smíšené

$$x = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T.$$

Definice 14. *Funkci*

$$E(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^T A y$$

definovanou pro $x \in S_m$ a $y \in S_n$ nazýváme funkcí střední hodnoty platby *v maticové hře.*

Stejnými úvahami odvodíme, že první hráč volbou smíšené strategie může docílit toho, že střední hodnota jeho platby bude nižší než

$$\max_{x \in S_n} \min_{y \in S_m} E(x, y),$$

přičemž druhý hráč může zajistit, aby střední hodnota plateb prvního byla nižší než

$$\min_{y \in S_m} \max_{x \in S_n} E(x, y).$$

Víme, že pro každou funkci platí

$$\max_{x \in S_n} \min_{y \in S_m} E(x, y) \leq \min_{y \in S_m} \max_{x \in S_n} E(x, y)$$

a pokud platí rovnost

$$\max_{x \in S_n} \min_{y \in S_m} E(x, y) = \min_{y \in S_m} \max_{x \in S_n} E(x, y),$$

existuje sedlový bod.

Definice 15. *Nechť* $(\bar{x}, \bar{y})$ *je sedlový bod funkce* $E(\bar{x}, \bar{y})$ *vzhledem k* $S_m \times S_n$*. Vektory* $\bar{x}$ *respektive* $\bar{y}$ *nazýváme* optimálními smíšenými strategiemi *prvního respektive druhého hráče v příslušné maticové hře a číslo* $v = E(\bar{x}, \bar{y})$ *nazýváme* hodnotou *této hry. Trojici* $(\bar{x}, \bar{y}, v)$ *nazýváme* řešením maticové hry ve smíšených strategiích.

Příklad 16. *Mějme maticovou hru s maticí plateb*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$

přičemž už víme, že čistá optimální strategie neexistuje (ověřte). Hra má řešení ve smíšených strategiích $\bar{x} = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12})^T$ *a* $\bar{y} = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12})^T$*. Toto řešení teď jen ověříme:*

$$E(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12}) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}$$

$$E(x, \bar{y}) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix} =$$
$$-\frac{1}{12} x_1 - \frac{1}{12} x_2 = -\frac{1}{12}(x_1 + x_2) = -\frac{1}{12}$$

$$E(\bar{x}, y) = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12}) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}$$

Věta 4 (J. von Neuman, J. Nash). *Pro každou maticovou hru platí*

$$\max_{x \in S_n} \min_{y \in S_m} E(x, y) = \min_{y \in S_m} \max_{x \in S_n} E(x, y)$$

a tedy existuje sedlový bod funkce $E(x, y)$ *na množině* $S_m \times S_n$*. Tedy každá hra má řešení ve smíšených strategiích.*

Důkaz. Důkaz, který zde stručně nastiňujeme, je založený na technikách lineárního programování. Lineární programování řeší úlohy, při kterých maximalizujeme nebo minimalizujeme lineární funkci vzhledem k nějaké množině rovnic a nerovnic. Zformulujeme si dvě takové úlohy:

$$\begin{gathered} \text{Maximalizovat } \omega \text{ za podmínek:} \\ -\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i + \omega \leq 0,\ \forall j \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{gathered}$$

Minimalizovat u za podmínek:

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + u \geq 0,\ \forall i$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$
$$y_j \geq 0$$

pro $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

Tyto dvě úlohy jsou duální a to z hlediska lineárního programování znamená, že mají stejnou množinu přípustných řešení (tj. řešení, která splňují dané nerovnosti) a současně, pokud existuje optimální řešení jedné, existuje i optimální řešení druhé a výsledná hodnota účelové funkce je stejná.

Pokud zvolíme za příslušná a_{ij} prvky matice hry A, dostaneme optimální řešení, které bude rovno sedlovému bodu funkce $E(x, y)$, a tedy optimální strategií příslušné maticové hry. Poznamenejme nakonec, že toto řešení není dané jednoznačně. $\square$

Bez důkazu uvádíme následující dvě věty:

Věta 5. *1. Pokud ve hře s maticí plateb $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ platí, že pro nějaké k ($1 \leq k \leq m$) existují čísla α_i ($i \neq k$) taková, že pro všechna $j = 1, \ldots, n$ máme*

$$\sum_{i \neq k} \alpha_i a_{ij} \geq a_{kj},\ \sum_{i \neq k} \alpha_i = 1,$$

potom existuje optimální strategie prvního hráče $\bar{x} \in S_m$ které složka je $\bar{x}^0 = 0$.

2. Pokud ve hře s maticí plateb $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ platí, že pro nějaké t ($1 \leq t \leq n$) existují čísla β_j ($j \neq t$) taková, že pro všechna $i = 1, \ldots, m$ máme

$$\sum_{j \neq t} \beta_i a_{ij} \leq a_{it},\ \sum_{j \neq t} \beta_j = 1,$$

potom existuje optimální strategie druhého hráče $\bar{x} \in S_n$ které složka je $\bar{y}^0 = 0$.

Příklad 17. *V maticové hře s maticí plateb*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

existuje $k = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ takové, že pro všechna $j = 1, 2, 3$ platí $\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} \geq a_{3j}$. Existuje tedy optimální strategie pro kterou je $x_3 = 0$.

Z důkazu Nashovy věty víme, že optimální smíšená strategie maticové hry s maticí A je optimálním řešením dvojice úloh lineárního programování. Potřebujeme ale tyto úlohy převést na tvar, který umíme řešit. Jako výchozí úlohu použijeme

$$\begin{aligned}
&\text{Minimalizovat } u \text{ za podmínek:}\\
&-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + u \geq 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i = 1\\
&y_j \geq 0
\end{aligned}$$

pro $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$. Z předešlých vět víme, že matici plateb můžeme přičtením vhodné konstanty upravit tak aby $a_{ij} \geq 0$, tedy i hodnota účelové funkce u je kladná a můžeme nerovnosti dělit beze změny směru nerovnosti.

$$\begin{aligned}
&\text{Minimalizovat } u \text{ za podmínek:}\\
&-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{y_j}{u} + 1 \geq 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{u} = \frac{1}{u}\\
&\frac{y_i}{u} \geq 0
\end{aligned}$$

zavedeme substituci $p_i = \frac{y_i}{u}$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
&\text{Minimalizovat } u \text{ za podmínek:}\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \leq 1,\\
&\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{u}\\
&p_i \geq 0
\end{aligned}$$

Minimalizovat funkci u je to samé jako maximalizovat $\sum_{i=1}^{n} p_i$ a dostáváme výsledný tvar:

$$\text{Maximalizovat} \sum_{i=1}^{n} p_i \text{ za podmínek:}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \leq 1,$$

$$p_i \geq 0$$

tedy tvar, který umíme řešit jak uvidíme v další kapitole.

1.5 Simplexová metoda

Úlohu lineárního programování můžeme chápat jako nalezení extrému (maxima nebo minima) lineární funkce více proměnných při vedlejších podmínkách vyjádřených lineárními rovnicemi, nebo nerovnicemi. Existuje několik formulací základní úlohy lineárního programování, my budeme pracovat s následujícími omezujícími podmínkami:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

kde $m < n$ a $x_i \geq 0$. Jako první krok doplníme soustavu o pomocné proměnné $\bar{x}_1, \cdots \bar{x}_m$ tak, aby platila následující soustava rovnic:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \bar{x}_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \bar{x}_2 = b_2$$

$$\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + \bar{x}_m = b_m$$

kde $m < n$ a $b_i \geq 0$. Všimněme si, že soustava má řešení:

$$x_1 = x_n = 0,\ \bar{x}_1 = b_1, \cdots, \bar{x}_n = b_m.$$

Proměnné $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$ jsou, ale pomocné a řešení v základních proměnných je $x_1 = x_n = 0$.

Našim cílem je maximalizovat funkci

$$z = c_1x_1 + \cdots c_nx_n + d,$$

přičemž pro naše řešení $x_1 = \cdots = x_n = 0$ je hodnota účelové funkce rovna d.

Přidáme si jako další řádek soustavy účelovou funkci

$$z - c_1x_1 - \cdots - c_nx_n = d,$$

tím ale přidáme ještě jednu proměnnou z (kterou chceme maximalizovat). Matice soustavy pak vypadá následovně:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & |b_1 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & |b_2 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & |b_m \\ 1 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & |d \end{pmatrix}.$$

Zamysleme se teď nad tím, jak najít jiné řešení. Máme soustavu m rovnic o $m+n$ neznámých takovou, že m proměnných je základních. Další řešení můžeme získat tak, že pomocí řádkových elementární úprav vynulujeme nějaký další sloupec. Abychom se rozhodli který, musíme se podívat na poslední řádek soustavy

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n = d$$

Protože všechna x_i jsou kladná můžeme zvýšit hodnotu účelové funkce z jen pokud vybereme takové c_i, které je záporné. V našem algoritmu pak vybereme to nejmenší číslo (číslo s největší absolutní hodnotou), protože u něho je předpoklad, že účelovou funkci zvýšíme nejvíce.

Vybraný sloupec bychom pak chtěli přidat k jednotkové matici, ale ještě nevíme, vůči kterému řádku budeme sloupec nulovat.

Představme si tedy, jak budou vypadat příslušná řešení pro $x_i = 0,\ i \neq k$:

$$x_1 = b_1 - a_{1k}x_k$$

$$x_2 = b_2 - a_{2k}x_k$$

$$\vdots$$

$$x_m = b_m - a_{mk}x_k.$$

S ohledem na podmínky nezápornosti musí platit:

$$x_k \leq \frac{b_i}{a_{ik}}.$$

To znamená, že musí platit:

$$x_k \leq \min \frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_s}{a_{sk}}.$$

pro $i = 1, 2, \ldots, m$, tj. předpokládáme, že nejmenší podíl je v s–té řádce soustavy. Proměnnou x_k nazýváme vstupující proměnnou a proměnnou x_s vystupující proměnnou.

Příklad 18. *Maximalizujte* $z = 4x_1 + 2x_2$ *za podmínek*

$$-x_1 - 3x_2 \leq 9$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$2x_1 - x_2 \leq 10.$$

kde $x_i \geq 0$. *Simplexová matice má tvar*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & |9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & |18 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & |10 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}.$$

Záporné hodnoty v posledním řádku jsou dvě, -4 a -2, vybereme tu menší, podělíme sloupec pravých stran příslušnými koeficienty (pokud jsou kladné) a dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & |9 & - \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & |18 & \frac{18}{2} \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & |10 & \frac{10}{2} \\ 1 & \underline{-4} & -2 & 0 & 0 & 0 & |0 & - \end{pmatrix}.$$

Vybereme ten nejmenší podíl, tedy $\frac{10}{2}$ *a nulujeme druhý sloupec vzhledem k podržené dvojce v třetím řádku*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & |9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & |18 \\ 0 & \underline{2} & -1 & 0 & 0 & 1 & |10 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}.$$

Po provedení příslušných řádkových elementárních úprav tedy dostaneme.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & |14 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & |8 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & |5 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 2 & |20 \end{pmatrix}.$$

Zlepšené řešení je

$$x_1 = 5, x_2 = 0, \bar{x}_1 = 14, \bar{x}_2 = 8, \bar{x}_3 = 0$$

a hodnota účelové funkce je $z = 20$.

V posledním řádku je už jen jedno záporné číslo -4, a opět porovnáme podíly.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & |14 & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & |8 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & |5 & - \\ 1 & 0 & \underline{-4} & 0 & 0 & 2 & |20 & - \end{pmatrix}$$

a vyberme druhý řádek

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{9}{8} & |9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & |2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & |6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & |28 \end{pmatrix}.$$

Výsledné řešení je

$$x_1 = 6, x_2 = 2, \bar{x}_1 = 9, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0$$

a hodnota účelové funkce je $z = 28$.

Výchozí úloha pro maticovou hru s maticí plateb $\{a_{ij}\}$ je

$$\text{Maximalizovat} \sum_{i=1}^{n} p_i \text{ za podmínek:}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \leq 1,$$

$$p_i \geq 0.$$

Pokud $p = (p_1, \ldots, p_n)$ je libovolné optimální řešení, pak

$$x_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$$

je optimální smíšenou strategií prvního hráče a číslo

$$u = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$$

je hodnotou v příslušné maticové hře.

1.6 Kooperativní hry

Definice 16. *Hrou n hráčů v normálním tvaru nazýváme model*

$$\left\{ P = \{1, 2, \ldots, n\} \quad X_1, \ldots X_n \quad M_1, \ldots M_n \right\},$$

kde P *je množina hráčů,* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *jsou množiny strategií hráčů a* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *jsou funkce plateb hráčů definované na množině výsledků*

$$X = \prod_{p=1}^{n} X_p$$

Každé strategii $x_p \in X_p$ přiřadíme přirozené číslo $j_p \in \{1, \ldots, m_p\}$. Místo množiny strategií pak zkoumáme množinu indexů $J_p = \{1, \ldots, j_p, \ldots m_p\}$ V této notaci odpovídá každé strategii ostatních hráčů

$$(j_1, \ldots, j_{p-1}, j_{p+1}, \ldots, j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_{p-1} \times J_{p+1} \times \cdots \times J_n$$

Toto je konečný počet strategií a my je uspořádáme pomocí přirozených čísel $k_p = 1, 2, \ldots, t_p$. Můžeme pak každý výsledek hry psát jako

$$(j_p, k_p).$$

Platbu hodnot p–tého hráče odpovídající tomuto výsledku můžeme napsat jako:

$$M_p(j_1, \ldots, j_p, \ldots, j_n) = M_p(j_p, k_p) = a^p_{jk}$$

a všechny hodnoty funkce plateb M_p můžeme pak zapsat ve tvaru

$$A^p = (a^i_{jk}).$$

Definice 17. Konečnou hrou n hráčů v normálním tvaru nazýváme model

$$\begin{Bmatrix} P = \{1, 2, \ldots, n\} & J_1, \ldots J_n \\ K_1, \ldots K_n & A^1, \ldots A^n \end{Bmatrix},$$

kde P je množina hráčů, J_p je uspořádaná konečná množina strategií p–tého hráče, K_p je uspořádaná množina souborů strategií protivníků p–tého hráče a A^p je matice plateb p–tého hráče ($p \in P$).

Příklad 19. *Mějme následující hru. Hrají ji tři hráči a každý má dvě karty. První má červenou pětku a černou pětku, druhý červenou trojku a černou pětku, třetí hráč červenou pětku a černou trojku. Hráči navzájem svoje karty znají. Současně vyloží na stůl karty. Pokud mají všechny stejnou barvu, nikdo nikomu nic neplatí, pokud ne, tak ten hráč, jehož barva je jediná, ostatním dvěma součet karet, které vyložili. Příslušný matematický model:*

1. hráč	$j_1 = 1$	*volil červenou 5*
	$j_1 = 2$	*volil černou 5*
2. hráč	$j_2 = 1$	*volil červenou 3*
	$j_2 = 2$	*volil černou 5*
3. hráč	$j_3 = 1$	*volil červenou 5*
	$j_3 = 2$	*volil černou 3*

Uspořádané množiny strategií hráčů jsou:

$$J_1 = (1, 2) \quad J_2 = (1, 2) \quad J_3 = (1, 2)$$

Uspořádané množiny strategií protihráčů jsou:

$$K_1 = (1, 2, 3, 4) = ((1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2))$$

$$K_2 = (1, 2, 3, 4) = ((1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2))$$

$$K_3 = (1, 2, 3, 4) = ((1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2))$$

A matice plateb jednotlivých hráčů jsou pak:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & -8 \\ -8 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -8 \\ -10 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & -10 \\ -8 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Všimněme si, že jde o hru s konstatním (dokonce nulovým) součtem.

Definice 18. *Nechť J_p je množina čistých strategií p–tého hráče v konečné hře n hráčů v normálním tvaru. Smíšenou strategií p–tého hráče nazýváme m_p–rozměrný vektor*

$$y^p = (y_1^p, y_2^p, \dots, y_{m_p}^p)$$

takový, že

$$\sum_{i \in J_p} y_i^p = 1,\ y_i^p \geq 0,$$

kde $p \in P, j \in J_p$.

Definice 19. *Nechť $P = \{1, 2, \dots\}$ je množina hráčů. Koalicí ve hře nazveme každou podmnožinu $S \subset P$.*

Definice 20. *Koaliční strukturou je soubor neprázdných podmnožin $B = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ množiny P, pro které platí $\bigcup_{j=1}^{k} B_j = P$ (každý je členem nějaké koalice)*

Protikoalici ke koalici $K \subset P$ se rozumí množina hráčů $\bar{K} = \{i \in P : i \notin K\}$. Množina všech hráčů se nazývá velká koalice, její protikoalice pak prázdná koalice. Pokud $B_i \cup B_j \neq \emptyset\ \forall i, j$ pak hovoříme o disjunktní koaliční struktuře.

Poznámka 1. *Existuje $2^n - 1$ koalic pro n–hráčů a*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^k \binom{k}{j} (k-j)^n$$

disjunktních koaličních struktur.

Definice 21. *Zevšeobecněnou hrou n–hráčů v normálním tvaru nazveme model:*

$$\begin{Bmatrix} P = \{1, \dots, n\} & X_1, \dots, X_n \\ M_1, \dots, M_n & K = (K_1, K_2, \dots, K_m) \end{Bmatrix},$$

kde $K = (K_1, K_2, \dots, K_m)$ je koaliční struktura.

Definice 22. *Mějme hru n–hráčů $P = (1, 2, \dots, n)$. Charakteristickou funkcí nazýváme funkci $\nu : K \to \mathbb{R}$, pro kterou platí:*

$$\nu(\emptyset) = 0,$$
$$\nu(K_1 \cup K_2) \geq \nu(K_1) + \nu(K_2).$$

A dvojici (P, ν) pak kooperativní hrou ve tvaru charakteristické funkce. Hra se nazývá nepodstatná, pokud

$$\forall K_i, K_j \subset P,\ \nu(K_1 \cup K_2) = \nu(K_1) + \nu(K_2).$$

Jinak se hra nazývá podstatná.

V dalším se budeme zabývat kooperativními hrami, které umožňují přerozdělení zisku.

Definice 23. *Mějme hru (P, ν), n–tice a reálných čísel nazýváme* imputace*, jsou–li splněny následující podmínky:*

- *individuální racionalita: pro každého hráče i je $a_i \geq \nu(\{i\})$,*
- *kolektivní racionalita platí $\sum_{i=1}^{n} a_i = \nu(P)$.*

Individuální racionalita vede k potřebě vytvářet koalice a kolektivní racionalita působí proti vytváření velkých koalic. Bez důkazu uvedeme následující větu:

Věta 6. *Nechť (P, ν) je hra ve tvaru charakteristické funkce. Je-li nepodstatná, pak má právě jednu imputaci, a to*

$$a = (\nu(1), \nu(2), \ldots, \nu(N)).$$

Je-li v podstatná, pak má nekonečně mnoho imputací.

Definice 24. *Nechť (P, ν) je hra ve tvaru charakteristické funkce, K je koalice, a, b jsou imputace. Řekneme, že a dominuje b pro koalici K, jestliže platí:*

- *$a_i > b_i$ pro všechna $i \in K$,*
- *$\sum_{i \in K} a_i \leq \nu(K)$.*

Dominanci budeme značit symbolem $a \succ_K b$.

Druhá podmínka říká, že imputace je dosažitelná.

Definice 25. *Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce.* Jádro hry *je tvořeno všemi imputacemi, které nejsou dominovány žádnou jinou imputací pro žádnou jinou koalici.*

Následující věta nám usnadňuje nalezení jádra, opět si ji uvedeme bez důkazu

Věta 7. *Nechť (P, ν) je hra ve tvaru charakteristické funkce s N hráči a nechť a je N–tice čísel. Potom a je imputace v jádru právě, když platí:*

- *$\sum_{i=1}^{N} a_i = \nu(P)$*
- *$\sum_{i \in K} a_i \leq \nu(K)$ pro každou koalici K.*

Je-li tedy imputace ξ v jádru dané hry, nemá žádná skupina hráčů důvod vytvořit jinou koalici a nahradit ξ jinou imputací.

Příklad 20. *Uvažujme hru tří hráčů s charakteristickou funkcí:*

$$\begin{aligned}
\nu(\{1\}) &= -\frac{1}{2}\\
\nu(\{2\}) &= 0\\
\nu(\{3\}) &= -\frac{1}{2}\\
\nu(\{1,2\}) &= \frac{1}{4}\\
\nu(\{1,3\}) &= 0\\
\nu(\{2,3\}) &= \frac{1}{2}\\
\nu(\{1,2,3\}) &= 1
\end{aligned}$$

Jádro je pak:

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 &= 1\\
a_1 &\geq -\frac{1}{2}\\
a_2 &\geq 0\\
a_3 &\geq -\frac{1}{2}\\
a_1 + a_2 &\geq \frac{1}{4}\\
a_1 + a_3 &\geq 0\\
a_2 + a_3 &\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, prvkem jádra je například trojice $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Následujícím příklad popisuje postup při hledání jádra pro hru v normálním tvaru. Základem je nalezení charakteristické funkce, která bude pro každou koalici odpovídat příslušným platbám rovnovážných startoviště bimaticové hry koalice vs. příslušná protikoalice. Dostaneme tak hru ve tvaru charakteristické funkce a příslušné jádro. Toto jádro lze nalézt pro jakoukoli maticovou hru a každé takto nalezené jádro nese informaci o původní hře v normálním tvaru. *Pokud, ale chceme aby jádro odpovídalo přesně všem možným rozdělením plateb v příslušných koalicích musíme zaručit, že vznikem koalice budou ostatní hráči přinuceni vytvořit protikoalici. Tedy, že příslušná hodnota charakteristické funkce opravdu maximalizuje platbu koalice tím, že současně minimalizuje platbu proti koalice.*

Příklad 21. *Mějme konečnou hru tří hráčů, kde každý hráč má dvě strategie:*

(j_1,j_2,j_3)	M_1	M_2	M_3
1,1,1	*2*	*1*	*3*
1,1,2	*1*	*3*	*1*
1,2,1	*3*	*2*	*1*
1,2,2	*-1*	*1*	*4*
2,1,1	*0*	*2*	*-1*
2,1,2	*3*	*0*	*2*
2,2,1	*1*	*3*	*-2*
2,2,2	*2*	*-2*	*3*

Předokládáme, že jde o kooperativní hru, tj. jsou přípustné všechny koalice. Matice plateb koalice $\{$*1*$\}$ *vypadá následovně:*

	(11)	*(12)*	*(21)*	*(22)*
1	*2*	*1*	*3*	*1*
2	*0*	*3*	*1*	*2*

Optimální smíšenou strategií je vektor $(\frac{2}{7}, \frac{5}{7})$ *a hodnotou hry je číslo* $\frac{4}{7}$*. Hodnotu koalice tedy představuje hodnota*

$$\nu(\{1\}) = \frac{4}{7}.$$

Matice plateb koalice $\{$*2*$\}$ *vypadá následovně:*

	(11)	*(12)*	*(21)*	*(22)*
1	*1*	*3*	*2*	*0*
2	*2*	*1*	*3*	*-2*

Optimální smíšenou strategií je vektor $(1, 0)$ *a hodnotou hry je číslo* 0*. Hodnotu koalice tedy představuje hodnota*

$$\nu(\{2\}) = 0.$$

Matice plateb koalice $\{$*3*$\}$ *vypadá následovně:*

	(11)	*(12)*	*(21)*	*(22)*
1	*3*	*1*	*-1*	*-2*
2	*1*	*4*	*2*	*3*

Optimální smíšenou strategií je vektor $(\frac{1}{4}, \frac{4}{5})$ *a hodnotou hry je číslo* $\frac{7}{5}$*. Hodnotu koalice tedy představuje hodnota*

$$\nu(\{3\}) = \frac{7}{5}$$

Matice plateb koalice $\{$*1,2*$\}$ *vypadá následovně:*

	1	*2*
(11)	*3*	*4*
(12)	5	*0*
(21)	*2*	*3*
(22)	*4*	*0*

Optimální smíšenou strategií je vektor $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$ *a hodnotou hry je číslo* $\frac{10}{3}$*. Hodnotu koalice tedy představuje hodnota*

$$\nu(\{1,2\}) = \frac{10}{3}.$$

Matice plateb koalice {1,3} vypadá následovně:

	1	*2*
(11)	*5*	*4*
(12)	*2*	*3*
(21)	*-1*	*-1*
(22)	*5*	*5*

Optimální smíšenou strategií je vektor $(0, 0, 0, 1)$ *a hodnotou hry je číslo* $\frac{10}{3}$*. Hodnotu koalice tedy představuje hodnota*

$$\nu(\{1,3\}) = 5$$

Matice plateb koalice {2,3} vypadá následovně:

	1	*2*
(11)	*4*	*1*
(12)	*4*	*2*
(21)	*3*	*1*
(22)	*5*	*1*

Optimální smíšenou strategií je vektor $(0, 1, 0, 0)$ *a hodnotou hry je číslo* $\frac{10}{3}$*. Hodnotu první koalice tedy představuje hodnota*

$$\nu(\{2,3\}) = 2.$$

Hodnotu charakteristické funkce koalice všech hráčů dostaneme jako maximum součtu plateb a to je 6 *pro vektory* $(1, 1, 1)$ *a* $(1, 2, 1)$*. Tedy* $\nu(\{1, 2, 3\}) = 6$*.*

Charakteristická funkce této hry je tedy:

$$\begin{aligned}
\nu(\emptyset) &= 0 \\
\nu(\{1\}) &= \frac{4}{7} \\
\nu(\{2\}) &= 0 \\
\nu(\{3\}) &= \frac{7}{5} \\
\nu(\{1,2\}) &= \frac{10}{3} \\
\nu(\{1,3\}) &= 5 \\
\nu(\{2,3\}) &= 2 \\
\nu(\{1,2,3\}) &= 6
\end{aligned}$$

a jedná se o podstatnou hru s nekonstantním součtem. V jádru jsou pak imputace splňující následující podmínky:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 6 \\ a_1 &\geq \frac{4}{7} \\ a_2 &\geq 0 \\ a_3 &\geq \frac{4}{7} \\ a_1 + a_2 &\geq \frac{10}{3} \\ a_1 + a_3 &\geq 5 \\ a_2 + a_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

A to je například $(3, 1, 2)$*, ale i* $(4, 0, 2)$*.*

Příklad 22. *Honza má starý automobil, který nepoužívá a je pro něj bezcenný, pokud jej nebude moci prodat. O koupi se zajímají dva lidé, Marie a František. Marie automobil cení na 50 000 Kč František na 70 000 Kč. Hra spočívá v tom, že zájemci navrhnou cenu Davidovi a ten buď příjme jednu z nabídek, nebo obě odmítne.*

1.7 Opakované hry

Jako motivaci k této kapitole si uvedeme opakovanou verzi vězňova dilematu, přeformulovanou na problém placení nebo neplacení koncesionářských poplatků.

Příklad 23 (Koncesionářovo dilema)**.** *Mějme maticovou hru založenou na placení/neplacení koncesionářských poplatků. Koncesionářské poplatky jsou hlavním příjmem veřejnoprávní televize a pokud by většina diváku poplatky přestala platit, vedlo by to k neodvratnému zániku stanice. Pokud ale přestane platit jeden, kvalita se nezmění a může si tak užívat vysílání zdarma. Realizujeme si tuto hru jako bimaticou hru dvou hráčů.*

	zaplatí	*nezaplatí*
zaplatí	*(10,10)*	*(20,5)*
nezaplatí	*(5,20)*	*(6,6)*

Hra obsahuje rovnovážnou strategii ve které oba hráči nezaplatí. Pokud by se ale dohodli a oba zaplatili získají při opakovaní této hry mnohem více. Představme si tedy, že se hra opakuje, přičemž v každém kole je pravděpodobnost, že se uskuteční ještě i kolo následující, rovna $\frac{2}{3}$. Budou–li hráči spolupracovat, pak očekávaná hodnota výhry je pro oba rovna

$$\pi_n = 10 + 10 \cdot \frac{2}{3} + 10 \cdot (\frac{2}{3})^2 + 10 \cdot (\frac{2}{3})^3 + \cdots 10 \cdot (\frac{2}{3})^n + \cdots$$

Protože strategií v opakované hře je *plán* jak se chovat v průběhu celé hry, můžeme uvažovat například strategie :

nevraživec: Spolupracuj, dokud tě druhý nepodrazí.

Je jasné, že potkají-li se dva nevraživci, budou do konce hry spolupracovat a získají tak oba hodnotu π_n. Další strategií může být

padouch: Spolupracuje a pak zradí.

Předpokládejme, že k odchylce došlo v kole $n+1$ a padouch i nevraživec od tohoto kola zrází.

$$\pi_p = 10 + 10 \cdot \frac{2}{3} + 10 \cdot (\frac{2}{3})^2 + 10 \cdot (\frac{2}{3})^3 + \cdots 10 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1} + 20 \cdot (\frac{2}{3})^n + 6 \cdot (\frac{2}{3})^{n+1} + \cdots$$

Protože, ale $\pi_n > \pi_d$ zůstává strategie nevraživec/nevraživec rovnovážná. Další strategií pak může být:

půjčka na oplátku: Prvním tahem spolupracuje a pak opakuje protivníkův tah.

Strategie půjčka na oplátku/půjčka na oplátku také představuje rovnovážný bod. Nějaké další strategie mohou být:

Pavlov: Spolupracuje právě tehdy, když v předchozím kole zvolili oba hráči stejnou strategii jinak zradí.

Hard Joss (Joss – čínská modla): Hraje jako půjčka za oplátku, ale spolupracuje jen s pravděpodobností 0,9

Abychom mohli opakované hry zkoumat, potřebujeme opět matematickou formalizaci problému:
Pravidla hry – předpis, který stanovuje, jakým způsobem určují hráči výběr svých alternativ.
Tah – volba elementární alternativy
Osobní tah – tah uskutečněný hráči
Náhodný tah – tah uskutečnění náhodnými mechanismy.
Partie – posloupnost tahů

Libovolné konečné množině n hráčů můžeme přiřadit nějaký strom $S(T)$. Vrcholy stromu pak nazýváme *pozicemi*. Množinu všech tahů i–tého hráče označujeme T_i a množinu všech koncových pozic jako $T^\star$. Tedy každému myslitelnému průběhu hry odpovídá jedna cesta stromu $S(T)$ od počátku do některé z koncových pozic v $T^\star$.

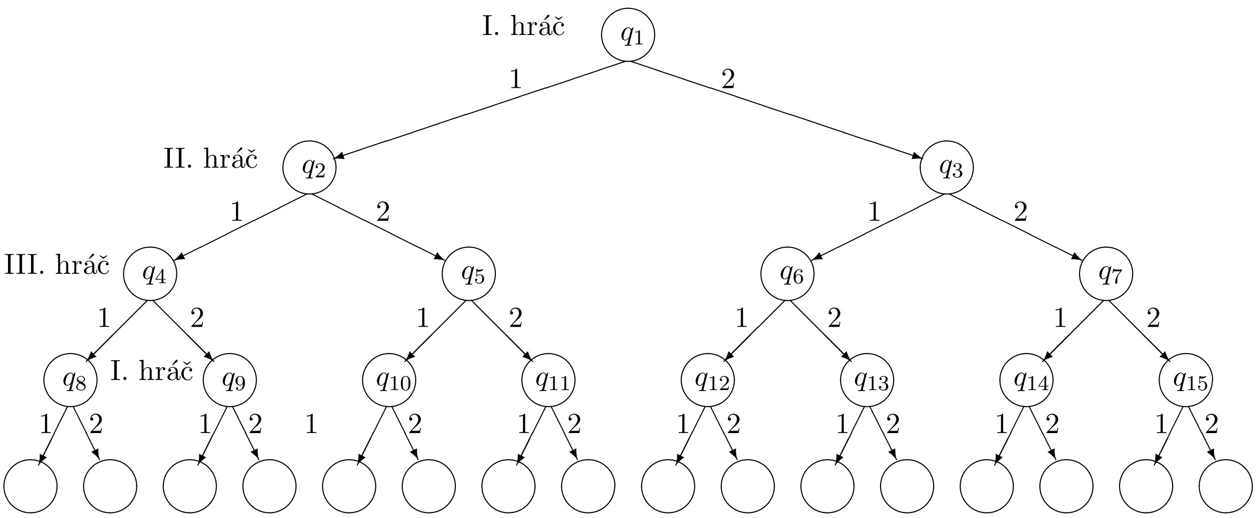
Příklad 24. *Mějme hru při které je jedna partie posloupností čtyř tahů*

1. tah	*první hráč volí číslo $\alpha_1 \in \{1, 2\}$*
2. tah	*druhý hráč volí číslo $\beta \in \{1, 2\}$*
3. tah	*třetí hráč volí číslo $\delta \in \{1, 2\}$*
4. tah	*první hráč volí číslo $\alpha_2 \in \{1, 2\}$*

Druhý hráč nezná výsledky prvního tahu, třetí hráč už je zná, ale nezná výsledky druhého tahu. Poslední tah provede první hráč také se znalostí prvního tahu. Výsledné platby M_p pak obsahuje následující tabulka:

$(\alpha_1, \beta, \delta, \alpha_2)$	F_1	F_1	F_1
$(1, 1, 1, 1)$	-1	-1	2
$(1, 1, 1, 2)$	3	-4	1
$(1, 1, 2, 1)$	4	2	-6
$(1, 2, 1, 1)$	1	0	-1
$(2, 1, 1, 1)$	6	-2	4
$(1, 1, 2, 2)$	-3	1	2
$(1, 2, 2, 1)$	-1	2	-1
$(2, 2, 1, 1)$	0	2	-2
$(2, 1, 2, 1)$	2	-4	2
$(1, 2, 1, 2)$	-1	3	-2
$(2, 1, 1, 2)$	4	-4	0
$(1, 2, 2, 2)$	0	-3	3
$(2, 2, 2, 1)$	-2	2	0
$(2, 1, 2, 2)$	-2	-2	4
$(2, 2, 1, 2)$	-1	-1	2
$(2, 2, 2, 2)$	3	0	-3

Celkem máme 16 možných průběhů partie hry, tedy strom bude mít 16 cest z kořene na jeden z listů. Tabulka je tabulkou hry v případě, že se žádná informace nepřenáší, tedy zejména by první hráč při svém druhém tahu neznal svůj první což je nepravděpodobné. Příslušný strom je naznačený v následujícím obrázku:



Přičemž příslušné množiny tahů hráčů jsou následující:

$$T_1 = \{q1, q8, q9, q10, q11, q12, q13, q14\}$$

$$T_2 = \{q2, q3, \}$$

$$T_3 = \{q4, q5, q6, q7\}$$

Abychom mohli při výpočtu zohlednit informaci, kterou má každý hráč k dipozici, zavedeme následující pojem informační množiny:

Definice 26. Informační množinou *i–tého* hráče *v konečné hře n–hráčů v rozvinutém tvaru rozumíme nějakou podmnožinu T_{is} množiny všech jeho pozic T_i, kde $s = s_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ pro kterou platí:*

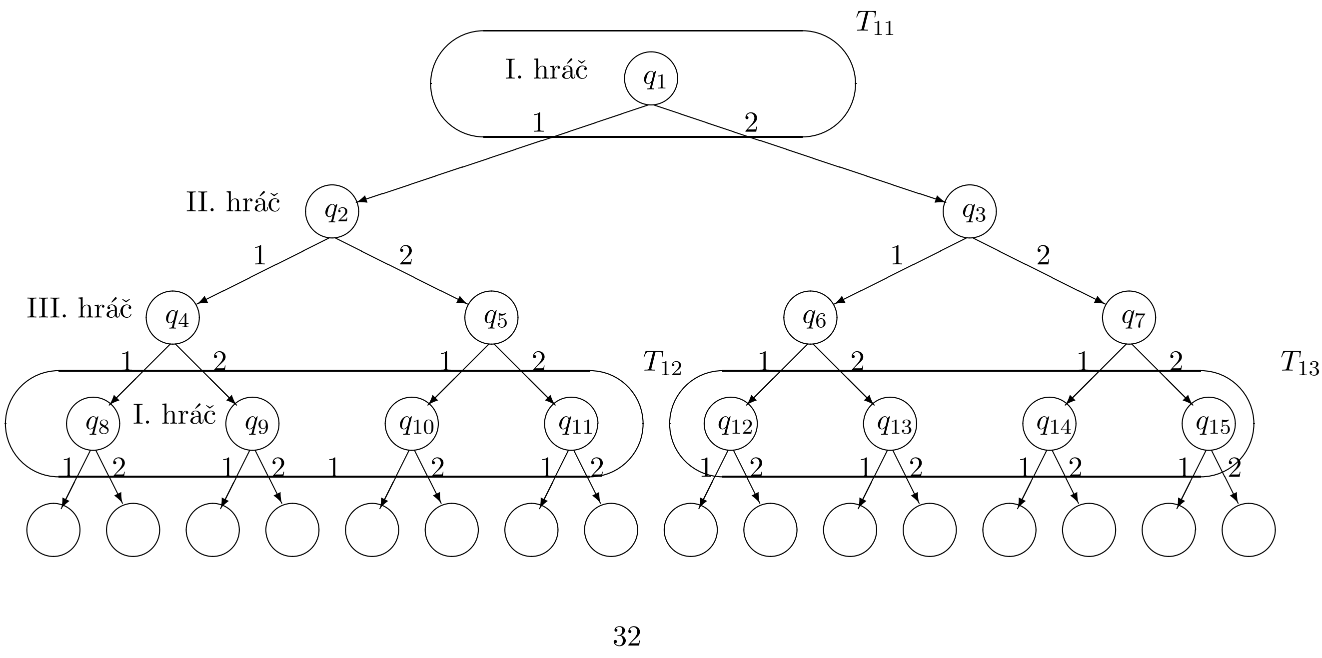
1. $\bigcup_i T_{is} = T_i$
2. $T_{is} \cap T_{ir} = \emptyset$ *pro libovolné* s, r *takové, že* $s \neq r$
3. *ze všech pozic* $q \in T_{is}$ *té stejné informační množiny vychází stejný počet hran stromu* $S(T)$
4. *Pokud platí* $q_1, q_2 \in T_{is}$ *potom nemůže platit* $q_1 < q_2$ *ani* $q_2 < q_1$

Počet alternativ, které má i–tý hráč v každé pozici své informační množiny T_{is}, označíme jako V_{is}. Hrany vycházející z každé pozice $q \in T_{is}$ uspořádáme pomocí indexu $v_{is} = 1, 2, \ldots V_{is}$.

První a druhá podmínka v definici říká, že příslušné informační množiny každého hráče tvoří rozklad na množině jeho tahů. Čtvrtá podmínka říká, že informační množiny nemohou obsahovat prvky z různých pater stromu. Nepřipouštíme tedy informační množinu, která obsahuje tahy z různých kol a není tedy možné, aby hráč neměl informaci o svých vlastních předešlých tazích. Třetí podmínka navíc určuje, že v dané informační množině má každý tah stejný počet strategií.

V předcházejícím příkladě má první hráč tři informační množiny

$$T_{11} = \{q0\}$$
$$T_{12} = \{q7, q8, q9, q10\}$$
$$T_{11} = \{q11, q12, q13, q14\}$$

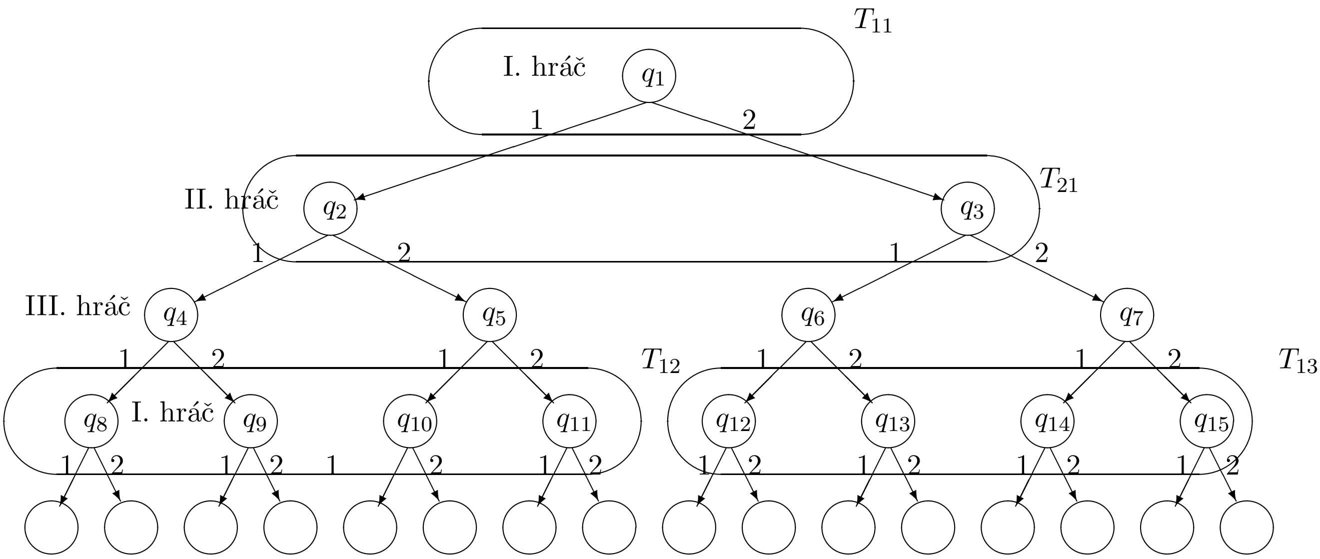


přičemž

$$v_{11} = 1, 2$$
$$v_{12} = 1, 2$$
$$v_{11} = 1, 2$$

druhý hráč má jednu informační množinu

$$T_{21} = \{q1, q2\}$$

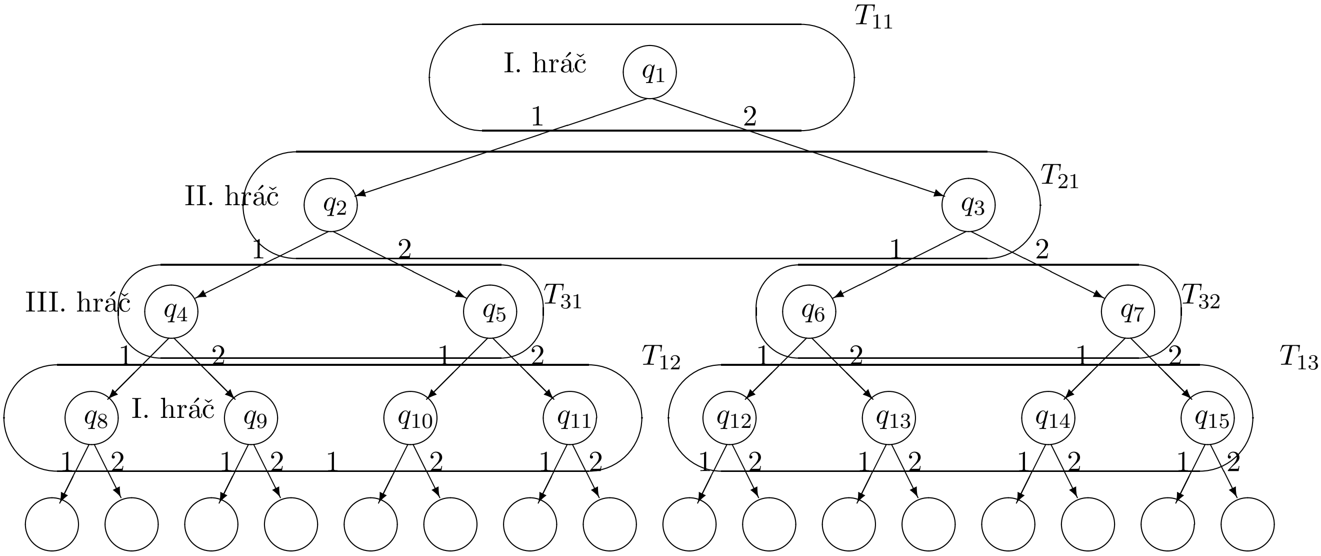


přičemž

$$v_{21} = 1, 2$$

a třetí hráč má dvě informační množiny

$$T_{31} = \{q3, q4\}$$
$$T_{32} = \{q5, q6\}$$



přičemž

$$v_{31} = 1, 2$$
$$v_{32} = 1, 2$$

Našim cílem je vytvořit normální tvar hry n–hráčů tak, aby výsledná hra již obsahovala příslušnou informaci.

Čistou strategií p–tého hráče ve hře s rozvinutým tvaru nazveme diskrétní funkci

$$g_p(T_{ps}) = v_{ps}$$

kde $s = s_p = 1, 2, \dots S_p$ definovanou na množině informačních množin

$$T_{p1}, \dots, T_{ps}, \dots, T_{ps_p}$$

potom jeho čistou strategii můžeme napsat jako soubor přirozených čísel.

$$(v_{p1}, \dots, v_{ps}, \dots, v_{ps_p})$$

pro p–tého hráče existuje

$$m_p = V_{p1} \times \cdots \times V_{ps} \times \cdots \times V_{ps_p}$$

takových čistých strategií.

Pokud uspořádáme strategie, tj. každé funkci g_p přiřadíme přirozené číslo $j_p = 1, 2, \dots m_p$ dostaneme množinu J_p strategií p–tého hráče.

Funkce plateb je

$$M_p(j_1, j_2, \dots, j_n) = F_p(q)$$

První hráč z předešlého příkladu má tři informační množiny T_{11}, T_{12}, T_{13} přičemž

$$v_{11} = 1,\ 2$$
$$v_{12} = 1,\ 2$$
$$v_{13} = 1,\ 2$$

První hráč má tedy $2 \times 2 \times 2 = 8$ čistých strategií, který můžeme uspořádat takto:

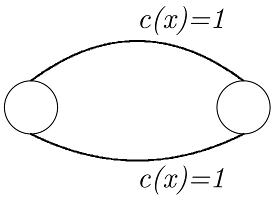
$$j_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Příklad 25. *Podnik může vyrábět dva výrobky* $\{1, 2\}$ *v množství buď* z_1 *kusů 1. výrobku, nebo* z_2 *kusů druhého výrobku, přičemž na výrobu obou dvou výrobků používá*

2 Aplikace teorie her

2.1 Dopravní hry

Příklad 26 (Pigou 1920). *Mějme následující diagram:*



*$x\ldots$ jednotka dopravy.
Pokud má n hráču dohromady jednu jednotku dopravy a chtějí minimalizovat platbu c je dolní cesta rovnovážnou strategií a hodnota této strategie je* $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

Optimální startegie *je strategie, která minimalizuje společnou platbu tedy strategie kdy půlka jede spodem a půlka horem* $\sum_{n=1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + \sum_{n=\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$.

U her, kde se optimální strategie liší od rovnovážné hraje roli jejich poměr a definujeme:

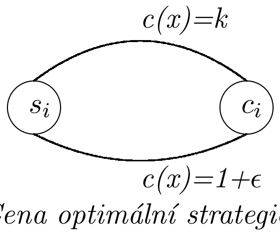
$$\text{Míra anarchie} = \frac{\text{Nejhorší rovnovážná strategie}}{\text{Optimální strategie}}.$$
$$\text{Míra stability} = \frac{\text{Nejlepší rovnovážná strategie}}{\text{Optimální strategie}}.$$

V našem příkladě se míra stability a míra anarchie rovnají číslu (existuje jen jedna rovnovážná strategie, která je současně nejlepší i nejhorší)

$$\frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$$

Shapleyho model síťové hry:
Nechť G je orientovaný graf (V, E) spolu s funkcí $E \to \mathbb{R}_+$ a nechť číslo c_e je hodnotou funkce c na hraně $e \in E$. Mějme k hráčů, kde každý hráč $i \in \{1, \ldots, k\}$ má přiřazenou dvojici start-cíl (s_i, c_i) a jeho strategie jsou cesty z s_i do c_i tvořící množinu P_i. Síť na které se hra odehrává je tedy $P = \sum_{e \in \cup_i P_i} c_e$. Každý hráč při užití hrany e platí $\frac{c_e}{f_e}$, kde f_e je počet hráčů, kteří danou hranu využívají.

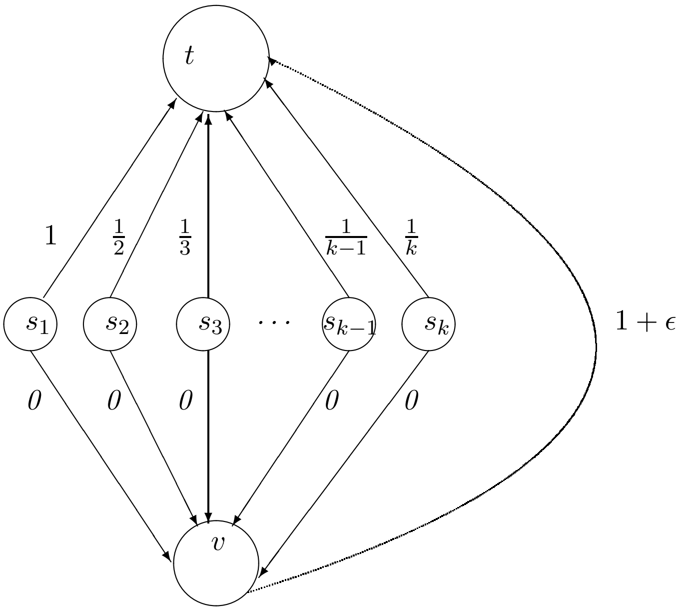
Příklad 27. *Mějme následující diagram:*



*$x\ldots$ jednotka dopravy
$\epsilon \in \mathbb{R}_+$ je dostatečně malé
dolní cesta je rovnovážnou i optimální strategí
horní cesta je rovnovážnoustrategí*

Cena optimální strategie, je $1+\epsilon$ a to je i cena lepší ze dvou rovnovážných strategií, cena hroší rovnovážné strategie je k. Míra stability je 1 a míra anarchie se blíží ke "k" spolu s tím jak se ϵ blíží k nule.

Příklad 28. *Mějme pro nějaké $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ dostatečně malé následující diagram:*



Optimální strategií je v tomto příkladě ta kdy si každý z hráčů vybere delší cestu $s_i \to v \to c_i$ a hodnota hry je pak $1+\epsilon$, ale to není rovnovážná strategie. Rovnovážnou strategií je naopak pro všechny hráče volba kratší cesty $s_i \to c_i$ v tomto případě je, ale hodnota hry $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \approx \ln(k)$. Míra stability a míra anarchie pak konvergují k $\ln(k)$ pro $k \to \infty$ a $\epsilon \to 0$

Tyto dva příklady měly za cíl demonstrovat nějaké klasické příklady teorie her v dopravě, přejděme ale k systematičtějšímu přístupu.

Neatomické hry.

Síť pro nás bude orientovaný graf $G = (V, E)$, spolu s množinou uspořádaných dvojic (komodit) (s_i, c_i) pro $i \in \{1, \dots, k\}$, Každý hráč se identifikuje s jednou komoditou a množina možných cest z s_i do c_i označovaná jako P_i je množinou jeho strategií. Předpokládáme, že $P_i \neq \emptyset$ tedy, že pro každou komoditu existuje cesta, kterou jí můžeme přepravit. Nakonec označíme množinu všech cest

$$P = \sum_{i=1}^{k} P_i$$

Výběr cest pro jednotlivé komodity reprezentujeme tokem v síti, který charakterizujeme nezáporným vektorem indexovaným množinou P. Tedy hodnota p–té souřadnice vektoru, tj. f_p je oběm komodity i, který je přepravovaný cestou $p \in P_i$.

V našem modelu, je doprava "neelastická" a tedy je nutné přepravit předepsané množství komodity i označované jako r_i. Tok je *uskutečnitelný* pro vektor r pokud pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

platí $\sum_{p \in P_i} = r_i$.

Každá hrana e je navíc vybavena cenovou funkcí $c_e : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takovou, že c je nezáporná, spojitá a neklesající. Příkladem může být třeba zpoždění.

Neatomická dopravní hra je tedy síť (G, r, c), strategie jsou výběry příslušných cest a hodnota cesty vzhledem k toku f je pak

$$c_p(f) = \sum_{e \in p} c_e(f_e), \text{ kde } f_e = \sum_{p \in P : e \in p} f_p$$

Hodnota f_e určuje objem libovolné komodity přepravené přes hranu e a hodnota $c_p(f)$ určuje platbu za přepravení komodity i cestou $p \in P_i$.

Definice 27. Rovnovážný tok *je přípustný tok v neatomické dopravní hře* (G, r, c) *je takový tok, že pro každou komoditu* $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *a každou dvojici* $p, \bar{p} \in P_i$ *takovou, že* $f_{\bar{p}} \geq 0$ *platí, že*

$$c_p(f) \leq c_{\bar{p}}(f)$$

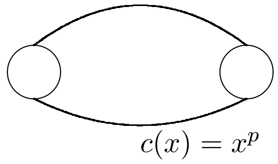
Předešlá definice vlastně říká, že hodnotu podíváme li se na každou komoditu a na libovolné dvě cesty kudy jí lze přepravit tak jsou obě platby stejné, nebo je jedna nulová.

Hodnota toku je pak

$$C(f) := \sum_{p \in P} c_p(f) f_p = \sum_{e} c_e(f_e) f_e$$

a říkáme, že tok je optimální pokud minimalizuje hodnotu přes všechny přípustné toky.

Příklad 29 (Nelineární – Pigou)**.** *Mějme následující diagram:*

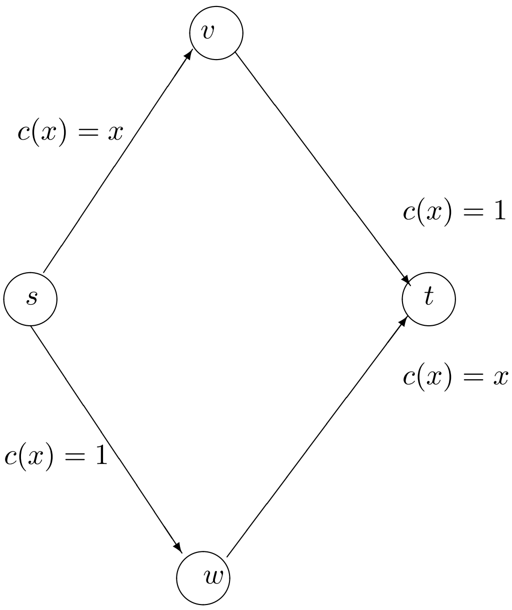


p je dostatečně velké
hráči mají dohromady jednu jednotku dopravy

Existuje jediná rovnovážná, všichni jedou spodem a hodnota je jedna. Optimální výsledek je strategie kdy malé množství $\epsilon = 1 - (p+1)^{\frac{-1}{p}}$ *jede horem a hra má hodnotu* $\epsilon + (1-\epsilon)^p = 1 - (p+1)^{\frac{-1}{p}} + (p+1)^{-1} = 1 - (p+1)^{\frac{-1}{p}} + (p+1)^{-1}$, *pro* $p \to \infty$ *hodnota optimálního toku* $\to 0$ *a míra anarchie* $\to \infty$

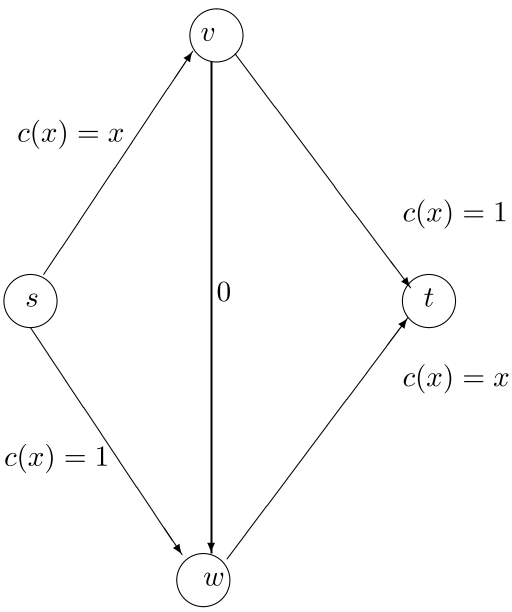
Uvedeme si teď jeden ze základních příkladů teorie her v dopravě.

Příklad 30 (Braessův paradox)**.** *Mějme schéma:*



hráči mají dohromady jednu jednotku dopravy jediná rovnovážná strategie je když půlka hráčů jede vrchem a půlka spodem, cena toku je pak $\frac{3}{2}$ *a je to i optimální strategií.*

Paradox je to proto, že pokud vybudujeme rychlostní komunikaci mezi body v *a* w *cena rovnovážného toku se paradoxně zvýší:*



hráči mají dohromady jednu jednotku dopravy rovnovážná strategie je pro všechny hráče $s \to v \to w \to c$ *to není optimální strategií, protože cena tohoto toku je 2.*

Míra anarchie této hry se tedy zvýšila na $\frac{4}{3}$

Atomické hry Mějme

- orientovaný graf $G = (V, E)$

- k dvojic komodit (s_i, c_i) pro $i \in \{1, \ldots, k\}$,
- kladnou hodnotu r_i určující množství komodit, které musíme přepravit,
- nezápornou, spojitou, neklesající funkci $c_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro každou hranu $e \in E$.

Mějme k hráčů, kde každý je spojen s jednou komoditou a jeho strategie jsou jsou pak množiny cest P_i.

Poznamenejme, že zatím co v neatomických hrách reprezentují komodity velké množství individualit kontrolujících zanedbatelnou část dopravy, v atomických hrách každou komoditu reprezentuje jeden hráč, který musí přepravit určité množství jednou cestou.

Tok f je nyní nezáporný vektor indexovaný hráči a cestami $f_p^{(i)}$ označuje objem dopravy hráče i, po cestě p. Tok je přípustný pokud

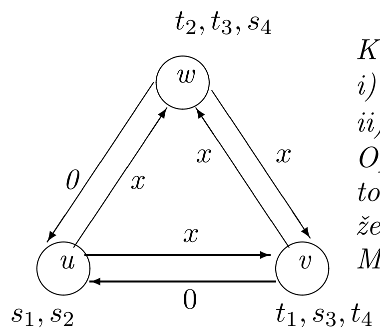
$$\begin{aligned} \forall i : f_p^{(i)} &= r_i \text{ pro právě jednu cestu} \\ &= 0 \text{ pro ostatní cesty} \end{aligned}$$

Definice 28 (Atomická rovnovážná strategie)**.** *Nechť f je přípustný tok pro atomický model (G, r, c) pak tok je rovnovážný pokud pro každého hráče $i \in \{1, \ldots, k\}$ a každou dvojici $p, \bar{p} \in P_i$ ($f_p^{(i)} > 0$) platí*

$$c_p(f) \leq c_{\bar{p}}(\bar{f}),$$

kde $\bar{f}$ je stejný jako f až na $\bar{f}_P^i = 0$, $\bar{f}_{\bar{p}}^{(i)} = r_i$

Příklad 31 (AAE–model)**.** *Mějme následující diagram:*



Každý ze čtyř hráčů má k dispozici jednu jednotku a dvě strategie:
i) přes jednu hranu grafu,
ii) přes dvě hrany grafu.
Optimální strategie je, že všichni jedou přes jednu hranu a hodnota toku je 4, toto je také rovnovážná, druhá rovnovážná je, že všichni jedou přes dvě hrany, hodnota toku je pak 10.
Míra anarchie je tu 2.5

Věta 8. *Nechť (G, r, c) je neatomický model*

1. *Model připouští minimálně jednu rovnovážný tok*
2. *Pokud f $\bar{f}$ jsou rovnovážné toky pak $c_e(f_e) = c_e(\bar{f}_e)$ pro každé e.*

Věta 9. *Nechť (G, r, c) je atomický model ve kterém platí alespoň jedna z sledujících vlastností:*

1. *každý objem dopravy je roven stejnému číslu, tj. $r_i = r \in \mathbb{R}_+$*
2. *c je lineární funkce*

pak (G, r, c) připouští alespoň jeden rovnovážný tok.

Reference

[CHK] Michal Chobot, Akkuĺ Turnovcová, *Metody rozhodovania v konfliktných situáciách a za neurčitosti*, Alfa, Bratislava, 1980

[K] J. McKinsey, *Introduction to the Theory of Games*, The Rand series, Stanford university, 1952

[H] Magdalena Hykšová, Teorie her a optimální rozhodování, online texty (http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_ her/)

[GGF] Julio González-Díaz, Ignacio García-Jurado, M. Gloria Fiestras-Janeiro, *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, AMS Graduate Studies in Mathematics, vol. 114 (2010)

[ERTV] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani, *Algorithmic Game Theory*, pp. 776 pages, Cambridge University Press (2007)