MATEMATIKA 2

Požadavky ke zkoušce pro skupinu D – 1. ročník – 2015/16

I. Diferenciální počet funkcí více proměnných

1. **Funkce více proměnných**
   (a) Množiny v $\mathbb{R}^N$ (hlavně $N = 2, 3$): bod a jeho okolí, bod vnitřní, hraniční a izolovaný, otevřená a uzavřená množina, hranice množiny,
   (b) Definiční obor funkce a jeho určování.
   (c) Znázorňování funkcí $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: vrstevnice, řezy rovinami.
   (d) Limita a spojitost funkce více proměnných.
   (e) Parciální derivace, derivace podle vektoru (ve směru), gradient, diferenciál funkce, rovnice tečné (nad)roviny.
   (f) Parciální derivace a diferenciály vyšších řádů, smíšené derivace.
   (g) Taylorův polynom, Taylorův zbytek a jeho vyjádření.

2. **Extrémy**
   (a) Definice extrémů: minimum a maximum, extrém ostrý a neostrý, lokální a absolutní (globální), volný a vázaný.
   (b) Lokální volné extrémy: stacionární bod, nutná podmínka extrému.
   (c) Postačující podmínky pro lokální minimum a maximum, sedlový bod. Situace, kdy z druhých derivací nelze rozhodnout.
   (d) Vázané extrémy: metoda eliminační a metoda Lagrangeových multiplikátorů.
   (e) Absolutní (globální) extrémy. Body podezřelé z extrému. Věta o existenci extrému spojité funkce na uzavřené omezené množině.

3. **Implicitní funkce**
   (a) Pojem funkce zadané implicitně v $\mathbb{R}^2$.
   (b) Věta o implicitní funkci (lokální existence funkce zadané implicitně) výpočet derivace prvního, druhého a vyšších řádů funkce zadané implicitně.
   (c) Implicitní funkce v $\mathbb{R}^3$ - dvojrozměrné a jednorozměrné.

4. **Vektorové funkce**
   (a) Vektorové funkce, limity, spojitost, parciální derivace, gradient, diferenciál.
   (b) Diferenciální operátory: gradient (∇, nabla), divergence (div), operátor Laplaceův (Δ, delta), operátor rotace (rot, curl).

II. Integrální počet funkcí více proměnných

1. **Vícerozměrné integrály**

   (a) Integrační obor, vícerozměrný interval, dělení a jeho jemnost.
   (b) Definice dvojného (trojného) Riemannova intergálu:
   - horní a dolní součty, horní a dolní integrál,
   - limita součtu při zjemňování dělení nezávislá na volbě . . . .

   (c) Rozšíření integrálu: integrál přes podmnožinu, integrál z neomezené funkce, integrál přes neomezenou oblast, integrál z reálné funkce (kladná a záporná část); případy, kdy integrál neexistuje.
   (d) Fubiniova věta: normální množiny, rozpis dvojného integrálu na dvojnásobný a trojného integrálu na trojnásobný.
   (e) Věta o substituci. Regulární zobrazení, transformace oblasti, jakobián zobrazení, transformace integrálu.
   (f) Substituce integrálu do polárních souřadnic v $\mathbb{R}^2$; do válcových (cylindrických) a sférických souřadnic v $\mathbb{R}^3$.
   (g) Vlastnosti integrálů: linearita v integrandu, aditivita v integračním oboru, věta o střední hodnotě, odhad integrálu.
   (h) Aplikace dvojného a trojného integrálu: výpočet plošného obsahu a objemu, hmotnosti, souřadnic těžiště a momentů, momentu setrvačnosti plošného útvaru i tělesa.

2. **Křivkový integrál**

   (a) Pojem jednoduché hladké (regulární) a po částech hladké křivky v rovině a v prostoru, parametrizace křivky a její orientace, tečný a normálový vektor.
   (b) Zavedení křivkového integrálu prvního druhu (podle délky oblouku, z neorientované křivky), převod na jednorozměrný integrál, nezávislost na parametrizaci.
   (c) Zavedení křivkového integrálu druhého druhu (z orientované křivky) podle x, y (nebo z), převod na jednorozměrný integrál, nezávislost na parametrizaci, závislost na orientaci.
   (d) Gaussova-Ostrogradského věta v rovině (Greenova věta).
   (e) Potenciál vektorové funkce, podmínky existence potenciálu, výpočet potenciálu, nezávislost integrálu na křivce, výpočet křivkového integrálu pomocí potenciálu.
   (f) Aplikace křivkového integrálu: výpočet délky, hmotnosti, momentů, souřadnic těžiště a momentu setrvačnosti křivky v rovině i v prostoru, výpočet práce vykonané působením síly podél křivky.

3. **Plošný integrál**
   (a) Pojem (po částech) hladké (regulární) plochy v $\mathbb{R}^3$, její parametrizace a orientace, tečné vektory a normálový vektor.
   (b) Zavedení plošného integrálu prvního druhu a jeho převod na dvojný integrál, nezávislost na parametrizaci.
   (c) Zavedení plošného integrálu druhého druhu a jeho převod na dvojný integrál, nezávislost na parametrizaci.
   (d) Gaussova-Ostrogradského věta.
   (e) Stokesova věta.
   (f) Aplikace: výpočet obsahu, hmotnosti, momentů, těžiště, momentu setrvačnosti plošného útvaru v prostoru, výpočet toku přes plochu.

4. **Společné vlastnosti integrálu**
   (a) Linearita v integrované funkci a aditivita v integrační množině.
   (b) Nezápornost, monotonie a odhady integrálů.

Písemná praktická část zkoušky

Doporučen vlastnoručně vypracovaný podepsaný „tahák“: list A4 se vzorci (primitivní funkce, a další vzorce podle úvahy studenta) — vzorce by měly být správně!

1. úloha — Diferenciální počet v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

- Určení a náčrt definičního oboru funkce.
- Výpočet parciálních derivací funkce, případně derivace podle vektoru.
- Výpočet diferenciálu, určení tečné roviny ke grafu funkce.
- Výpočet Taylorova polynomu prvního (druhého, třetího) stupně,

2. úloha — Extrémy funkcí a implicitní funkce

- Vyšetřování lokálních volných extrémů funkce.
- Vyšetřování vázaného extrému funkce.
- Vyšetřování absolutních extrémů na omezené uzavřené množině.
- Implicitní funkce $F(x, y) = 0$: Určení bodů funkce, kterými neprochází funkce (větev) $y = f(x)$, určení bodů, ve kterých je $f'(x) = 0$, náčrt grafu funkce. Výpočet první a druhé derivace funkce dané implicitně.

3. úloha — Integrální počet v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

- Výpočet dvojného nebo trojného integrálu.
- Výpočet plošného obsahu, objemu tělesa, výpočet souřadnic těžiště, momentu setrvačnosti.

4. úloha — Křivkový a plošný integrál

- Výpočet křivkového integrálu prvního a druhého druhu.
- Výpočet křivkového integrálu z potenciální vektorové funkce přímo a pomocí potenciálu.
- Výpočet plošného integrálu prvního nebo druhého druhu.

Písemná teoretická část zkoušky (Žádné pomůcky nejsou povoleny.)

Šest otázek z uvedené teorie, případně jednoduché příklady: výpočet parciální derivace, rozpis dvojného (trojného) integrálu na dané množině na dvojnásobný (trojnásobný) integrál, parametrizace křivky nebo plochy.

Ústní část zkoušky

Ústní část zkoušky je povinná. Spočívá v opravě písemky se studentem případně doplněná otázkami z teorie nebo jednoduchými příklady.

Hodnocení zkoušky

Ze zápočtu student může mít 12–25 bodů, úlohy 1 až 4 (včetně teoretické části) jsou hodnoceny: 1. úloha: 0–10 bodů, 2. úloha: 0–25 bodů, 3. úloha: 0–20 bodů, 4. úloha: 0–20 bodů.

- 90–100 bodů — výborně (A),
- 80–89 bodů — velmi dobře (B),
- 70–79 bodů — dobře (C),
- 60–69 bodů — uspokojivě (D),
- 50–59 bodů — dostatečně (E),
- 0–49 bodů — nevyhovující (F).

Výkon u ústní části může změnit celkové hodnocení zkoušky.

Studijní materiály:

1. Učební texty, řešené i neřešené příklady na internetové adrese: `http://math.fme.vutbr.cz` — Matematika II.
2. J. Karásek: Matematika II, skripta FSI VUT 2002.
3. K. Rektorys: Přehled užité matematiky I, Prometheus, Praha 1995.
4. J. Škrášek, Z. Tichý: Základy aplikované matematiky I a II, SNTL, Praha 1989.
5. Texty na stránce `http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/francu/`

V Brně 28. dubna 2016 prof. Jan Franců

Ukázka zadání písemné praktické části zkoušky

1. Dána funkce
$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}}\,.$$

(a) Určete a načrtněte definiční obor funkce.
(b) Spočítejte parciální derivace funkce.
(c) V bodě $[5,4]$ určete derivaci funkce $f(x,y)$ podle vektoru (ve směru $(2,-1)$) a napište rovnici tečné roviny v tomto bodě.

2a Vyšetřete lokální extrémy funkce $F(x,y)=x^3-y^3-3\,x+3\,y$. Jak je to s absolutními extrémy?

2b Rovnice $F(x,y)=x^2-x\,y+y^2-12=0$ určuje implicitní funkci. Kterými body křivky neprochází větev $y=f(x)$? Určete derivaci $f'(x)$ a body, ve kterých je $f'(x)=0$. Je zde funkce konvexní nebo konkávní? Pomocí předchozích výsledků implicitní funkci načrtněte.

3. Spočítejte souřadnice těžiště horní poloviny koule $x^2+y^2+z^2<R^2$, $z>0$.

4a Přímo spočítejte křivkový integrál $\int_{\overrightarrow{\Gamma}}\big((x^2-2xy)\,\mathrm{d}x+(y^2-x^2)\,\mathrm{d}y\big)$, kde $\overrightarrow{\Gamma}$ je oblouk paraboly $y=x^2$ pro $x\in(0,2)$ orientovaný doprava. Ověřte, že integrovaná funkce je potenciální, potenciál spočítejte a pomocí něj vyčíslete hodnotu integrálu. Oba výsledky porovnejte.

4b Spočítejte plošný integrál $\iint_S z\,\mathrm{d}S$, kde S je část rotačního paraboloidu $z=x^2+y^2$ omezená $x^2+y^2<R^2$.

Ukázka otázek teoretické části zkoušky

- Kdy řekneme, že bod $[x,y]$ je vnitřním (hraničním) bodem množiny M? Kdy podle definice je množina M v $\mathbb{R}^N$ otevřená a kdy je uzavřená?
- Kdy podle definice je funkce $f(x,y)$ definovaná v kruhu $B(0,1)$ spojitá v bodě $[0,0]$? Uveďte příklad funkce spojité a funkce nespojité v bodě.
- Napište definici parciální derivace funkce $f(x,y,z)$ podle y v bodě $[1,2,3]$.
- Napište definici derivace funkce $f(x,y)$ v bodě (a,b) podle vektoru $(-2,3)$.
- Jestliže je parciální derivace (derivace podle vektoru) funkce kladná (záporná), jakou vlastnost má funkce?
- Napište první (druhý) diferenciál funkce $f(x,y)=x^3+x\,y+y^2$.
- Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce dvou proměnných.
- Napište definici lokálního/absolutního extrému funkce $f(x,y)$.
- Které podmínky zaručí, že funkce má absolutní extrémy na množině M?

- Co říká věta o Lagrangeových multiplikátorech? Jak budete hledat extrémy funkce $f(x, y)$ na uzavřeném kruhu $\overline{B(0, r)}$?
- Jak budete hledat extrémy funkce $f(x, y)$ na trojúhelníku ABC?
- Kdy řekneme, že $y = f(x)$ je funkce daná implicitně $F(x, y) = 0$?
- Odvoďte vzorec pro derivaci $f'(x)$ funkce $y = f(x)$ dané $F(x, y) = 0$.
- Která podmínka zaručí, že bodem (x_0, y_0) prochází funkce $y = f(x)$ daná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$?
- Co je to gradient (operátor divergence, Laplaceův, rotace) a pro které funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m =?, n =?)$ je definován?
- Napište operátor rotace, pro které funkce je definován a ve kterých větách se vyskytuje?
- Spočítejte výraz $\operatorname{div}(\nabla f)$ pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- Co je to vícerozměrný interval a jeho dělení? Co je to jemnost dělení a jak se využívá při definici dvojného integrálu přes jednotkový čtverec?
- Napište vzorec pro integrální součet z definice dvojného integrálu funkce $f(x, y)$ na jednotkovém čtverci s dělením na 10×10 dílků.
- Rozepište dvojný integrál přes kruh, trojúhelník, parabolickou úseč, ... na dvojnásobný. Rozepište trojný přes kouli, čtyřstěn, válec, ... na trojnásobný. Rozepište trojný integrál přes množinu M určenou nerovnostmi: (a) $x+2y+3z < 6, x > 0, y > 0, z > 0$, (b) $x+y+z > 0, x < 2, y < 2, z < 2$, (c) $x + y + z < 3, x > -1, y > 0, z > 1$. Množinu načrtněte!
- Kdy řekneme, že množina je hladká křivka (plocha)?
- Popište parametricky kružnici se středem $[a, b]$ a poloměrem r.
- Popište parametricky část sféry se středem v počátku, poloměru R v prvním oktantu. Je to hladká plocha?
- Napište vzorec pro integrální součet z definice křivkového integrálu prvního (druhého) druhu.
- Kdy řekneme, že vektorová funkce má potenciál? Jak toho lze využít při výpočtu křivkového integrálu druhého druhu?
- Napište vzorec pro integrální součet z definice plošného integrálu prvního (druhého) druhu pro plochu $S = \{[x, y, z] \mid z = \varphi(x, y);\ (x, y) \in (0, 1)^2\}$ a integrál převeďte na dvojný integrál.
- Napište Greenovu, (Gaussovu-Ostrogradského, Stokesovu) větu.
- Napište vzorec pro výpočet souřadnic těžiště $T = [x_T, y_T, z_T]$ tělesa o hustotě ρ a objemu V (plochy S, křivky Γ).
- Které veličiny lze počítat křivkovým integrálem prvního (druhého) druhu?
- Které veličiny lze počítat plošným integrálem prvního (druhého) druhu?