FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA

Požadavky ke zkoušce pro 2. ročník MI – 2011/12

I. Metrické vlastnosti a pojmy a mohutnost množin

1. **Mohutnost množin**

   (a) porovnávání mohutnosti množin, mohutnost množiny,
   (b) základní mohutnosti: konečná, spočetná N $(\aleph_0)$, kontinuum c $(\aleph_1)$, množiny funkcí na kontinuu f, $(\aleph_2)$; hypotéza kontinua,
   (c) mohutnost podmnožiny, sjednocení, kartézského součinu, posloupností, všech podmnožin $\exp A$.
   (d) mohutnost množin v $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, posloupností, funkcí, atd.

2. **Metrický prostor**

   (a) metrika, axiomy, ekvivalentní metriky,
   (b) podprostor, metrika na kartézském součinu,
   (c) koule $B(x, r)$, okolí, vnitřní a hraniční bod, vnitřek, otevřená množina, průnik a sjednocení otevřených množin,
   (d) uzavřená množina, průnik a sjednocení uzavřených množin, uzávěr a hranice množiny, obojetné množiny, souvislost množiny, komponenty,
   (e) konvergentní a cauchyovská posloupnost,
   (f) derivace — množina hromadných bodů množiny,
   (g) charakteristika pojmů uzávěru a hranice pomocí metriky,
   (h) charakteristika pojmů pomocí konvergentních posloupností.

3. **Omezené, úplné a kompaktní množiny**

   (a) množina omezená, totálně omezená a separabilní,
   (b) ε-síť a ε-„antisíť“, separabilní a totálně omezené množiny,
   (c) množina úplná a uzavřená,
   (d) zúplnění prostoru, věta o zúplnění,
   (e) kompaktní množiny.

4. **Funkce, zobrazení, pevný bod**

   (a) spojitost a omezenost funkcí a zobrazení na metrickém prostoru,
   (b) omezenost a extrémy spojitých reálných funkcí na kompaktní množině,
   (c) pevný bod zobrazení, kontraktivní zobrazení,
   (d) Banachova věta o pevném bodě kontraktivního zobrazení,
   (e) aplikace Banachovy věty.

II. Banachovy a Hilbertovy prostory

1. **Lineární prostor**
   (a) definice lineárního prostoru, operace, podprostor,
   (b) nezávislost, báze, dimenze, lineární funkcionály.
2. **Normovaný prostor**
   (a) norma, axiomy, ekvivalence norem, úplnost, Banachův prostor,
   (b) algebraická (Hamelova) a Schauderova báze.
3. **Spojité lineární funkcionály**
   (a) funkcionál, lineární funkcionál, spojitý a omezený funkcionál,
   (b) spojitost a omezenost lineárního funkcionálu, jeho norma,
   (c) Hahnova-Banachova věta,
   (d) duální prostor – prostor spojitých lineárních funkcionálů,
   (e) druhý duální prostor, reflexivní prostor,
   (f) slabá konvergence, kompaktnost omezené uzavřené množiny v prostorech konečné a nekonečné dimenze.
4. **Unitární prostor**
   (a) skalární součin na reálném a komplexním prostoru a jeho axiomy, příslušná norma, Cauchyova-Buniakovského nerovnost, úhel funkcí, Pytagorova věta, spojitost normy a skalárního součinu,
   (b) rovnoběžníková rovnost, vyjádření skalárního součinu pomocí normy, ryzí konvexnost koule,
   (c) ortogonalita a nezávislost, ortogonální a ortonormální posloupnosti, Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces,
   (d) abstraktní Fourierovy řady, koeficienty, Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost,
   (e) spojité lineární funkcionály, Rieszova věta,
   (f) projekce, ortogonální projekce na podprostor.

III. Lebesgueova míra a integrál

1. **Míra množiny v $\mathbb{R}$**
   (a) míra obecně: σ-algebra měřitelných množin, axiomy míry, úplnost míry,
   (b) konstrukce Lebesgueovy míry v $\mathbb{R}$: vnější a vnitřní míra omezené množiny, zobecnění na neomezenou množinu,

(c) míra konečných, spočetných a Borelovských množin, Cantorovo diskontinuum a jeho vlastnosti, příklad neměřitelné množiny.

2. **Měřitelné a integrovatelné funkce na $\mathbb{R}$**

   (a) měřitelné funkce: hladinové množiny, struktura měřitelných funkcí: uzavřenost na operace: sčítání, násobení, dělení, maximum, minimum, bodovou konvergenci, konvergenci skoro všude, rovnost skoro všude,
   (b) integrál z jednoduché funkce a měřitelné nezáporné funkce,
   (c) zobecnění na integrál z reálné (komplexní) funkce,
   (d) srovnání Newtonova, Riemannova a Lebesgueova integrálu.

3. **Míra a integrál v $\mathbb{R}^N$**

   (a) otevřené intervaly v $\mathbb{R}^N$ a jejich míra, konstrukce vnější míry množiny, měřitelné množiny a jejich míra,
   (b) měřitelné funkce a Lebesgueův integrál, Fubiniova věta a věta o substituci.

4. **Limitní přechody**

   (a) limitní přechody: Leviho věta o monotónní konvergenci a Lebesgueova věta o majorizované konvergenci,
   (b) konvergence: bodová, skoro všude, stejnoměrná, v L^p-normě.

IV. Konkrétní prostory

1. **Reálná čísla $\mathbb{R}$**

   (a) různé metriky a norma na $\mathbb{R}$,
   (b) vlastnosti prostoru a podmnožin.

2. **Rovina $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^n$, konečněrozměrné prostory**

   (a) normy, p-normy, koule v p-normách a ekvivalence p-norem,
   (b) sítě a separabilní, totálně omezené, úplné a kompaktní množiny,
   (c) lineární funkcionály na $\mathbb{R}^n$, jejich norma.

3. **Prostory posloupností**

   (a) prostory a normy: $\ell^1, \ell^2, \ell^p, \ell^\infty$, prostor konečných c_{00} a konvergentních posloupností c_0, c a jejich vztah,
   (b) separabilita a úplnost prostorů v jednotlivých normách,
   (c) spojité lineární funkcionály a jejich reprezentace, duální prostor,
   (d) konvergentní a slabě konvergentní posloupnosti.

4. **Prostory spojitých funkcí**
   (a) spojité omezené funkce na kompaktním a otevřeném intervalu, normy,
   (b) prostory úplné a separabilní, kompaktní množiny.
5. **Prostory integrovatelných funkcí**
   (a) L^p-normy, axiom rozlišování bodů – rovnost skoro všude, řešení problému,
   (b) prostory $L^1(I), L^2(I), L^p(I), L^\infty(I)$ a jejich vztah,
   (c) prostory úplné a separabilní,
   (d) spojité lineární funkcionály a jejich reprezentace, duální prostory,
   (e) konvergentní a slabě konvergentní posloupnosti.

Písemná praktická část zkoušky

- příklad 1: spojitost a výpočet normy funkcionálu na prostoru posloupností,
- příklad 2: spojitost a výpočet normy funkcionálu na prostoru funkcí,
- příklad 3: ortogonalizace a projekce funkcí,
- příklad 4: vyšetření záměny limity a integrálu posloupnosti funkcí.

Písemná teoretická část zkoušky

Definice, věty, otázky z uvedené látky, příklady, ...

Literatura:

J. Franců: Funkcionální analýza I, FSI VUT, Brno, 2010.
A. Ženíšek: Lebesgueův integrál a základy funkcionální analýzy, skripta FSI VUT 1999.
J. Lukeš: Úvod do funkcionální analýzy, Karolinum, Praha 2005.

V Brně 18. dubna 2012 J. Franců