# FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA I

## Příklady a „teoretické“ otázky

## Příklady

1. Ověřte, že daný funkcionál je lineární, a vyšetřete, zda je na následujících prostorech posloupností $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ definovaný, spojitý (tj. omezený) a určete jeho normu:

   (a) $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x_k}{k}$, (b) $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x_k}{k^2}$, (c) $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x_k}{\sqrt{k}}$.

2. Ověřte, že daný funkcionál je lineární, a vyšetřete, zda je na následujících prostorech funkcí $L^1(I), L^2(I), L^\infty(I), C_b(I)$ se suprémovou normou a $C_b(I)$ s integrální normou $\|\cdot\|_1$ definovaný, spojitý (tj. omezený) a určete jeho normu:
   - $F(x) = \int_I x(t)\,\mathrm{d}t$, $F(x) = \int_I t\,x(t)\,\mathrm{d}t$, $F(x) = \int_I t^2\,x(t)\,\mathrm{d}t$
     na intervalech $I = (0,1)$, $I = (0,2)$, $I = (-1,1)$, $I = (-2,2)$ atd.
   - $F(x) = \int_I \sin(t)\,x(t)\,\mathrm{d}t$, $F(x) = \int_I \cos(t)\,x(t)\,\mathrm{d}t$, $F(x) = \int_I \mathrm{cotg}(t)\,x(t)\,\mathrm{d}t$
     na intervalech $I = (0, \frac{1}{2}\pi)$, $I = (0,\pi)$, $I = (-\pi,\pi)$, $I = (0,2\pi)$ atd.

3. Ortogonalizujte funkce $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ na intervalu $I$ a určete ortogonální projekci funkce $f$ do podprostoru generovaném funkcemi $\varphi_i$:
   - $\{1, t, t^2\}$ na $I = (0,1)$, $(0,2)$, $(-1,1)$, $(-2,2)$ a $f(t) = t^3$.
   - $\{1, \sin(t), \cos(t)\}$ na $(0,\pi)$, $(-\pi,\pi)$ a $f = \sin(2t)$.

4. Určete bodovou limitu $f^*(t)$ posloupnosti $f_n(t)$ na intervalu $I$. Zjistěte, zda lze zaměnit limitu a integrál, tj. zda platí $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f^*(t)\,\mathrm{d}t$. Jsou splněny předpoklady Lebesgueovy nebo Leviho věty?

   Konverguje posloupnost $\{x_n(t)\}$ v normě prostoru (a) $L^1(I)$, (b) $L^2(I)$, (c) $L^\infty(I)$?
   - $I = (0,1)$, $f_n(t) = n$ pro $t \in (0, \frac{1}{n})$, jinde $f_n(t) = 0$
   - $I = (0,1)$, $f_n(t) = n^2$ pro $t \in (0, \frac{1}{n})$, jinde $f_n(t) = 0$
   - $I = (0,1)$, $f_n(t) = \sqrt{n}$ pro $t \in (0, \frac{1}{n})$, jinde $f_n(t) = 0$
   - $I = (0,1)$, $f_n(t) = n$ pro $t \in (0, \frac{1}{\sqrt{n}})$, jinde $f_n(t) = 0$
   - $I = (0,\infty)$, $f_n(t) = \frac{1}{n}$ pro $t \in (0, n)$, jinde $f_n(t) = 0$
   - $I = (0,\infty)$, $f_n(t) = \frac{1}{n}$ pro $t \in (0, \sqrt{n})$, jinde $f_n(t) = 0$
   - $I = (0,\infty)$, $f_n(t) = \frac{1}{n}$ pro $t \in (0, n^2)$, jinde $f_n(t) = 0$
   - $I = (0,\infty)$, $f_n(t) = \frac{1}{n^2}$ pro $t \in (0, n)$, jinde $f_n(t) = 0$

5. Dokažte inkluzi $L^2(I) \subset L^1(I)$ a $L^4(I) \subset L^2(I)$, kde $I = (0, K)$!

   Návod: pomocí Hölderovy nerovnosti odhadněte normu prvku ve „větším“ prostoru pomocí normy „menšího“ prostoru.

6. Nechť $\rho$ je metrika na prostoru $P$. Je následující výraz také metrikou na $P$?
   - $\rho^*(x,y) = (\rho(x,y))^2$,
   - $\rho^*(x,y) = \sqrt{\rho(x,y)}$,
   - $\rho^*(x,y) = \max(1, \rho(x,y))$,
   - $\rho^*(x,y) = \min(1, \rho(x,y))$?

7. Nechť $\rho_1$ a $\rho_2$ jsou dvě metriky na $P$. Je následující výraz také metrikou na $P$

(a) $\rho^*(x,y) = \max(\rho_1(x,y), \rho_2(x,y))$, (b) $\rho^*(x,y) = \min(\rho_1(x,y), \rho_2(x,y))$,
(c) $\rho^*(x,y) = \rho_1(x,y) \cdot \rho_2(x,y)$, (d) $\rho^*(x,y) = \rho_1(x,y) + \rho_2(x,y)$,
(e) $\rho^*(x,y) = \rho_1(x,y) - \rho_2(x,y)$, (f) $\rho^*(x,y) = \rho_1(x,y)/\rho_2(x,y)$ ?

# Otázky z teorie

## Základní nerovnosti

- Která nerovnost mezi následujícímu výrazy s reálnými čísly platí:
  (a) $\max\limits_k(a_k + b_k) \ \le \ $ (nebo $\ \ge$) $\max\limits_k a_k + \max\limits_k b_k$?
  (b) $\min\limits_k(a_k + b_k) \ \le \ $ (nebo $\ \ge$) $\min\limits_k a_k + \min\limits_k b_k$?
  Protipříkladem ukažte, že opačná nerovnost neplatí!
- Napište Cauchyovu nerovnost pro vektory v $\mathbb{R}^n$.
- Napište Cauchyovu nerovnost pro posloupnosti.
- Napište Cauchyovu nerovnost pro funkce.
- Napište Hölderovu nerovnost pro vektory v $\mathbb{R}^n$.
- Napište Hölderovu nerovnost pro posloupnosti.
- Napište Hölderovu nerovnost pro funkce.
- Napište Minkowského nerovnost pro vektory v $\mathbb{R}^n$.
- Napište Minkowského nerovnost pro posloupnosti.
- Napište Minkowského nerovnost pro funkce.

## Mohutnost množin

- Určete mohutnost množin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}$, $(0,1)$, $\langle 0,1\rangle \cap \mathbb{Q}$.
- Určete mohutnost množiny všech vektorů $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_M)$, (příp. matic typu $m \times n$) s prvky (a) $x_i \in \mathbb{Z}$, (b) $x_i \in \mathbb{Q}$, (c) $x_i \in \mathbb{R}$, (d) $x_i \in \mathbb{C}$, (e) $x_i \in \{0,1\}$.
- Určete mohutnost množiny všech nekonečných posloupností $\mathrm{x}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ s prvky (a) $x_i \in \{0,1\}$, (b) $x_i \in \mathbb{Z}$, (c) $x_i \in \mathbb{Q}$, (d) $x_i \in \mathbb{R}$, (e) $x_i \in \mathbb{C}$, (f) $x_i \in \{0,1\}$.
- Určete mohutnost množiny všech (reálných) (a) funkcí, (b) omezených funkcí, (c) spojitých funkcí, (d) lineárních funkcí, (e) rostoucích (f) neklesajících, (e) konstantních funkcí na intervalu $I = (0,1)$ případně na $(0,\infty)$, $\mathbb{R}$.

## Metrické prostory

- Napište definici metrického prostoru.
- Napište axiomy metriky.
- Kdy jsou dvě metriky na prostoru $P$ (a) ekvivalentní, (b) stejnoměrně ekvivalentní? Co platí pro prostory s ekvivalentními metrikami?
- Definujte okolí bodu v metrickém prostoru.
- Co je to vnitřní, vnější, hraniční, izolovaný a hromadný bod množiny?
- Charakterizujte hranici množiny $A$ pomocí (a) metriky, (b) okolí, (c) uzávěru a vnitřku (d) konvergentních posloupností.
- Charakterizujte vnitřek množiny $A$ pomocí (a) okolí, (b) metriky, (c) uzávěru a hranice, (d) uzávěru a doplňku.

- Charakterizujte uzávěr množiny $A$ pomocí (a) metriky, (b) okolí, (c) vnitřku a hranice, (d) konvergentních posloupností.
- Kolik nejvýše různých množin můžeme dostat opakováním operace (a) vnitřku, (b) uzávěru, (c) hranice, (d) derivace (množiny hromadných bodů) množiny?
- Jak je definovaná (a) otevřená, (b) uzavřená, (c) úplná, (d) omezená (e) totálně omezená, (f) separabilní, (g) kompaktní podmnožina metrického prostoru?
- Jaký je vztah mezi uzavřenou a úplnou množinou $A$ v metrickém prostoru $P$? Kdy oba pojmy splývají?

Pokud je odpověď v následujících 4 otázkách negativní, uveďte protipříklad.

- Je sjednocení nekonečně mnoha otevřených množin množina otevřená?
- Je průnik nekonečně mnoha otevřených množin množina otevřená?
- Je sjednocení nekonečně mnoha uzavřených množin množina uzavřená?
- Je průnik nekonečně mnoha uzavřených množin je množina uzavřená?
- Co je to $\varepsilon$-síť a které vlastnosti lze pomocí tohoto pojmu definovat?
- Co je to $\varepsilon$-antisíť? Které vlastnosti lze pomocí ní vyvrátit?
- Je sjednocení konečně/spočetně mnoha kompaktních množin kompaktní?
- Kdy je množina $A$ hustá v množině $M$?
- Které podmínky zaručí, že reálná funkce $f$ na metrickém prostoru $P$ nabude na podmnožině $M \subset P$ svého maxima (minima)?
- Kdy je zobrazení mezi metrickými prostory (a) spojité, (b) omezené.
- Kdy je zobrazení mezi metrickými prostory $(P, \rho)$ a $(Q, \sigma)$ spojité? Uveďte alespoň 3 podmínky.
- Buď $T$ spojité zobrazení z metrického prostoru $(P, \rho)$ do $(Q, \sigma)$ a $M \subset P$. Které z následujících tvrzení platí: (a) Je-li $M$ otevřená, je i $T(M)$ otevřená, (b) Je-li $M$ uzavřená, je i $T(M)$ uzavřená, (c) Je-li $M$ kompaktní, je i $T(M)$ kompaktní. Pokud tvrzení neplatí, uveďte protipříklad.
- Kdy je zobrazení mezi metrickými prostory (a) spojité, (b) stejnoměrné spojité, (c) lipschitzovské, (d) kontraktivní?
- Formulujte Banachovu větu o pevném bodě.

**Lineární prostory**

- Co je to lineární prostor? Uveďte axiomy operací lineárního prostoru.
- Co je to lineární kombinace?
- Kdy je konečná podmnožina nezávislá?
- Kdy je nekonečná podmnožina nezávislá?
- Co je to (algebraická, Hamelova) báze lineárního prostoru?
- Co je to dimenze lineárního prostoru?
- Kdy je podmnožina $M$ lineárního prostoru $X$ lineárním podprostorem?
- Vyjádřete úsečku v lineárním prostoru $X$ s krajními body $a$ a $b$!
- Kdy je množina $M$ v lineárním prostoru $X$ konvexní?
- Co je to (a) konvexní, (b) lineární obal množiny $A$?
- Vyjádřete konvexní obal bodů $x_1, \ldots, x_k$!
- Vyjádřete lineární obal bodů $x_1, \ldots, x_k$!
- Co je to kužel, konvexní kužel?
- Co je to kužel, lineární množina?

**Normované prostory**

- Napište axiomy normy.
- Porovnejte axiomy metriky a normy.
- Jaký je vztah mezi metrikou a normou? Které vlastnosti musí splňovat metrika na lineárním prostoru, aby určovala normu?
- Kdy jsou dvě normy na prostoru $X$ ekvivalentní? Jaký to má důsledek?
- Jak jsou definovány topologické pojmy (okolí, otevřená, uzavřená, úplná, omezená, kompaktní, souvislá množina, spojité zobrazení) v normovaném prostoru?
- Co je to Banachův prostor?
- Formulujte Hahnovu-Banachovu větu.
- Co je to Schauderova báze separabilního normovaného prostoru.
- Jaký je rozdíl mezi Hamelovou (algebraickou) a Schauderovou bází lineárního prostoru. Která má víc prvků? Jak je to v případě prostoru konečné dimenze?
- Co je to funkcionál? Kdy je funkcionál (a) lineární, (b) spojitý, (c) omezený?
- Jaký je vztah mezi omezeností a spojitostí (a) obecného (b) lineárního funkcionálu?
- Co je to (topologický) duální prostor? Jak je na něm definovaná norma?
- Jak je definovaná slabá konvergence na normovaném prostoru?
- Uveďte příklad slabě konvergentní posloupnosti v prostoru (a) $\ell^2$, (b) $L^2(0, 2\pi)$, která nekonverguje silně (v normě).
- Jaký je vztah mezi slabě a silně konvergentní posloupností v prostoru konečné dimenze?
- Co je to druhý duál $X^{**}$ a kanonické zobrazení z $X$ do $X^{**}$. Kdy je prostor refkexivní? Které z prostorů $\ell^p$, $L^p(I)$ jsou reflexivní?
- Kdy lze z každé omezené posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost?
- Kdy lze z omezené posloupnosti vybrat slabě konvergentní podposloupnost?
- Kdy je prostor reflexivní? Jaký to má význam pro omezenou posloupnost?

**Unitární prostory**

- Co je to unitární prostor?
- Co je to Hilbertův prostor?
- Napište axiomy skalárního součinu. Jak se liší komplexní případ od reálného?
- Vyjádřete normu pomocí skalárního součinu!
- Napište Cauchyovu nerovnost. Dokažte ji!
- Napište rovnoběžníkovou rovnost. Odvoďte ji!
- Kdy lze na normovaném prostoru zavést odpovídající skalární součin?
- Vyjádřete skalární součin pomocí normy (v reálném prostoru)!
- Uveďte příklad, že rovnoběžníková rovnost neplatí v $\mathbb{R}^2$ s normou $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$.
- Jak lze určit úhel dvou prvků unitárního prostoru?
- Kdy jsou dva prvky (dvě množiny) ortogonální?
- Kdy existují prvky $a \in A$ a $b \in B$ takové, že $\|a - b\| = \text{dist}(A, B)$?
- Co je to ortogonální (ortonormální) množina?
- Kdy je ortogonální množina úplná?
- Co je to ortogonální (ortonormální) báze prostoru?
- Co tvrdí Gramova-Schmidtova věta o ortogonalizaci?

- Co je to linární/ortogonální projekce na uzavřený podprostor $X_0$?
- Odvoďte vzorec pro ortogonální projekci bodu $x$ na podprostor generovaný prvky $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, které jsou navzájem (a) ortogonální, (b) ortonormální.
- Napište Fourierův rozvoj funkce $f(t)$ pomocí (a) ortogonální, (b) ortonormální posloupnosti $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \dots\}$!
- Odvoďte vzorec pro výpočet koeficientů Fourierovy řady vzhledem k (a) ortogonální, (b) ortonormální posloupnosti $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$!
- Napište Besselovu nerovnost. Kdy platí rovnost?
- Napište Parsevalovu rovnost. Kdy platí?

**Lebesgueova míra**

- Jak vypadají otevřené množiny na přímce? Jak se počítá jejich míra?
- Co je to vnitřní míra? Pro jaké množiny ji definujeme?
- Co je to vnější míra? Pro jaké množiny ji definujeme?
- Kdy je omezená množina měřitelná?
- Kdy je neomezená množina měřitelná?
- Definujte míru množiny $M \subset \mathbb{R}$.
- Určete míru množiny (a) $M = \langle 0, 2\rangle \cap \mathbb{Q}$, (b) $M = \langle 0, 2\rangle \setminus \mathbb{Q}$, zdůvodněte!
- Jak velká může být míra (a) konečné, (b) spočetné, (c) nespočetné množiny?
- Existuje neměřitelná množina? Uveďte ideu její konstrukce.
- Co je to $N$-rozměrný otevřený interval? Jaká je jeho míra?
- Definujte vnější míru na $\mathbb{R}^N$!
- Kdy je množina v $\mathbb{R}^N$ měřitelná?
- Co je to Cantorovo diskontinuum, jaké jsou jeho vlastnosti?
- Co jsou to Borelovské množiny?
- Co je to míra obecně? Co je základní prostor, $\sigma$-algebra a míra, jaké axiomy splňují? Kdy řekneme, že míra je (a) úplná, (b) konečná, (c) $\sigma$-konečná?

**Lebesgueovsky měřitelné a integrovatelné funkce**

- Co jsou to (a) jednoduché, (b) měřitelné, (c) integrovatelné funkce? Je každá měřitelná funkce integrovatelná?
- Které měřitelné/spojité funkce nemají Lebesgueův integrál?
- Dokažte, že každá spojitá funkce je měřitelná!
- Co je to Dirichletova, Riemannova funkce? Dokažte, že jsou měřitelné! Lze je napsat jako bodovou limitu funkcí spojitých?
- Jak se zavádí Lebesgueův integrál z (a) jednoduché funkce, (b) nezáporné měřitelné funkce, (c) libovolné měřitelné funkce?
- Kdy Lebesgueův integrál z měřitelné funkce neexistuje?
- Má každá (a) spojitá, (b) Riemannovsky integrovatelná, (c) Newtonovsky integrovatlená funkce Lebesgueův integrál? Pokud ne, uveďte protipříklad!
- Co říká Fubiniova věta? Který integrál zaručí existenci ostatních integrálů?
- Napište Lebesgueovu větu!
- Napište Leviho větu!
- Které konvergence (skoro všude bodová, bodová, stejnoměrná) zachovávají (a) měřitelnost, (b) spojitost, (c) omezenost funkce?

**Prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^N$**

- Které z následujících funkcí jsou metriky na $\mathbb{R}$? (a) $\rho(x,y)=|x-y|$, (b) $\rho(x,y)=|x-y|^2$, (c) $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$, (d) $\rho(x,y)=|\sqrt{x}-\sqrt{y}|$, (e) $\rho(x,y)=\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right|$, (f) $\rho(x,y)=\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right|$, (g) $\rho(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}$, (h) $\rho(x,y)=\sin(|x-y|)$, (i) $\rho(x,y)=\operatorname{arctg}(x-y)$, (j) $\rho(x,y)=\operatorname{arctg}(|x-y|)$, (k) $\rho(x,y)=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y$, (l) $\rho(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$.
- Napište vzorce pro $p$-normy na $\mathbb{R}^N$. Pro která $p$ je to norma?
- Co je to diskrétní metrika? Jak vypadají koule $B(x,\frac{1}{2})$ a $B(x,2)$ v prostoru $\mathbb{R}$ s diskrétní metrikou? Které body neprázdné množiny $A$ v tomto prostoru jsou (a) vnitřní, (b) hraniční, (c) hromadné, (e) izolované? Které množiny v tomto prostoru jsou (a) otevřené, (b) uzavřené, (c) úplné, (d) souvislé (e) kompaktní?

**Prostory posloupností**

- Napište $p$-normy na prostorech posloupností. Pro která $p$ jsou to normy?
- Definujte prostory (a) $c_{00}$ posloupností s konečně mnoha nenulovými členy, (b) $c_0$ posloupností konvergujícími k nule, (c) $c$ konvergentních posloupností, (d) $\ell^1$, (e) $\ell^2$, (f) $\ell^p$, (g) $\ell^\infty$. Které jsou na nich přirozené normy?
- Jaké inkluze platí mezi prostory $\ell^1$, $\ell^2$, $\ell^p$, $\ell^\infty$, $c_{00}$, $c_0$ a $c$?
- Ve kterých z předchozích inkluzí je „menší“ prostor hustý ve „větším“ prostoru a kdy je to uzavřený podprostor?
- Které z prostorů $\ell^1$, $\ell^2$, $\ell^p$, $\ell^\infty$, $c_{00}$, $c_0$ a $c$ jsou úplné, separabilní, reflexivní?
- Jaký tvar mají všechny spojité lineární funkcionály na (a) $\ell^1$, (b) $\ell^2$, (c) $\ell^p$. Jaká je situace v případě $\ell^\infty$?
- Na kterém z prostorů $\ell^p$ lze zavést skalární součin? Napište ho!
- Uveďte příklad úplné ortogonální posloupnosti na $\ell^2$!
- Napište Parsevalovu rovnost pro Fourierovův rozvoj vzhledem k ortonormální posloupnosti $\{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3,\dots\}$.

**Prostory funkcí**

- Jaký je vztah mezi prostory spojitých funkcí na otevřeném intervalu $(0,K)$ a uzavřeném intervalu $\langle 0,K\rangle$?
- Jakou normu na prostoru (a) $C(\langle a,b\rangle)$, (b) $C((a,b))$, (c) $C_b((a,b))$, (d) $C_b(\mathbb{R})$ můžeme zvolit? Jakou metriku lze zvolit na prostoru $C(\mathbb{R})$?
- Napište vzorce pro $p$-normy na prostorech funkcí.
- Definujte prostor (a) $L^1(I)$, (b) $L^2(I)$, (c) $L^\infty(I)$. Co jsou jeho prvky? Jaká je na nich (přirozená) norma?
- Jaké inkluze platí mezi prostory $L^1(I)$, $L^2(I)$, $L^\infty(I)$, $C_b(I)$ v případě, že $I$ je (a) omezený, (b) neomezený interval v $\mathbb{R}$.?
- Které z prostorů $L^1(I)$, $L^2(I)$, $L^\infty(I)$ (s přirozenou normou) jsou (a) úplné, (b) separabilní, (c) omezené, (d) reflexivní?
- Jaký tvar mají všechny spojité lineární funkcionály na (a) $L^1(I)$, (b) $L^2(I)$, (c) $L^p(I)$? Jaká je situace na prostoru $L^\infty(I)$?
- Na kterém z prostorů $L^p(I)$ lze zavést skalární součin? Napište ho!
- Uveďte příklad úplné ortogonální posloupnosti na $L^2((0,2\pi))$!

25. dubna 2012 J. Franců