

Aplikovaná statistika v průmyslu

Úvod.....	2
1 Popisná statistika.....	3
1.1 Základní pojmy	3
1.2 Jednorozměrný statistický soubor s kvantitativním znakem.....	4
1.3 Dvourozměrný statistický soubor s kvantitativními znaky	15
1.4 Statistické soubory s kvalitativními znaky	21
2 Odhady parametrů	22
2.1 Bodové a intervalové odhady	22
2.2 Odhady parametrů normálního rozdělení.....	27
2.3 Odhady parametru binomického rozdělení	29
3 Testování statistických hypotéz	32
3.1 Statistická hypotéza a její test	32
3.2 Testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení	36
3.3 Testy hypotéz o parametru binomického rozdělení	44
3.4 Testy hypotéz o rozdělení	47
3.3a Grafická metoda	47
3.3b Test chí-kvadrát (Pearsonův test)	49
4 Regresní analýza	52
4.1 Regresní funkce.....	52
4.2 Lineární regresní funkce.....	53
5 MSA-Analýza systému měření	62
5.1 Úvod do MSA	62
5.2 R&R studie.....	62
5.3 Příklad R&R studie	64
6 Sledování stability procesu.....	67
6.1 Úvod do regulačních diagramů	67
6.2 Typy regulačních diagramů.....	67
6.3 Testy vymezených příčin	68
6.4 Příklad	69
6.4.1 Špatně vyhodnocená data o zmetkovitosti	69
6.4.2 Správně vyhodnocená data o zmetkovitosti	70
7 Určování způsobilosti procesu	71
7.1 Úvod do způsobilosti procesů	71
7.2 Vhodné užití indexů způsobilosti.....	72
7.3 Uměle vytvořená toleranční mez.....	74
7.4 Nenormálně rozdělená data	74
8 Využití plánovaného experimentu (DoE) (nebude u zkoušky)	76
8.1 Úvod do DoE.....	76
8.2 Plán experimentu.....	76
8.3 Regresní model popisující pouze ručně dokončené modely	79
8.4 Závěr.....	80
9 Literatura	81
Učebnice a monografie.....	81
Učební texty	82

Úvod

1 Popisná statistika

1.1 Základní pojmy

Při statistickém zkoumání se zabýváme jevy a procesy, které mají hromadný charakter a vyskytují se u rozsáhlého souboru individuálních objektů (výrobky, osoby apod.), nazývaného **základní soubor** nebo také **populace**. Zkoumané objekty jsou tzv. **statistické jednotky** a sledujeme u nich vytypované vlastnosti - **statistické znaky** (veličiny, parametry atd.), které nabývají pozorovatelných **hodnot (úrovní)**.

Podle druhu hodnot dělíme statistické znaky na **kvantitativní**, které nabývají číselných hodnot (hmotnost, délka, pevnost, cena, doba, životnost, ...) a **kvalitativní**, které nemají číselný charakter a lze je vyjádřit slovně (barva, jakostní třída, podmínky provozu, tvar, ...). Sledujeme-li jen jeden znak, hovoříme o **jednorozměrném** znaku, naopak o **vícerozměrném** znaku.

Kvantitativní znaky dělíme na **diskrétní**, jestliže nabývají pouze oddělených číselných hodnot (počet zmetků, počet vad, kusová produkce apod.) a **spojité**, které nabývají všech hodnot z nějakého intervalu reálných čísel (rozměr výrobku, doba do poruchy, cenový index apod.).

Kvalitativní znaky dělíme na **ordinální**, jejichž slovní hodnoty má smysl uspořádat (jakostní třídy, klasifikace apod.) a **nominální**, jejichž slovní hodnoty postrádají význam pořadí (barva, tvar, dodavatelé apod.).

Podstatou statistických metod je, že informace o základním souboru nezjišťujeme u všech jeho jednotek, ale jen u některých, které získáme tzv. **výběrem**. Vedou nás k tomu různá omezení, např. dosažitelnost všech jednotek, velký rozsah základního souboru, způsob získávání informací (zkoušky životnosti, ověření opotřebení atd.), náklady na statistické sledování a další. Počet vybraných jednotek je **rozsah** výběru. Dle rozsahu dělíme výběry na **malé** (obvykle do 30 až 50) a **velké** (řádově stovky, tisíce i více). Toto dělení je relativní a závisí na okolnostech statistického sledování. Výběr by měl být **reprezentativní** (poskytovat informace bez omezení) a **homogenní** (bez vlivu dalších různých faktorů). To však často nelze v plné míře verifikovatelně zajistit a proto obvykle vybíráme statistické jednotky do výběru **náhodně**, ovšem s rizikem, že výběr může poskytnout více či méně zkreslené informace o základním souboru. Podle způsobu provedení rozlišujeme výběry:

- **bez opakování** (každá jednotka může být vybrána nejvýše jednou),
- **s opakováním** (každá jednotka může být vybrána vícekrát),

- **záměrný** (vybíráme typické jednotky),
- **oblastní** (základní soubor rozdělíme na podmnožiny a z nich provedeme části výběru),
- **systematický** nebo **mechanický** (vybíráme vždy několikátou jednotku co do pořadí při realizaci výběru).

Hodnoty znaku, pozorované či zjištěné na statistických jednotkách z výběru o rozsahu n , tvoří **statistický soubor s rozsahem n** . Pro jednorozměrný znak X získáme **jednorozměrný statistický soubor** (x_1, \dots, x_n) , kde x_i je **pozorovaná hodnota** znaku X u i -té statistické jednotky, $i = 1, \dots, n$. Analogicky pro dvourozměrný znak (X, Y) obdržíme **dvourozměrný statistický soubor** $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ apod.

1.2 Jednorozměrný statistický soubor s kvantitativním znakem

Získaný statistický soubor (x_1, \dots, x_n) s rozsahem n se také nazývá **neroztříděný statistický soubor**. Dle potřeby jej můžeme uspořádat podle rostoucích hodnot x_i a obdržíme **uspořádaný statistický soubor** $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$, kde $x_{(i)} \leq x_{(i+1)}$ pro všechny indexy i . Interval $\langle x_{(1)}; x_{(n)} \rangle$ je **variační obor** a jeho délka $x_{(n)} - x_{(1)}$ je **rozpětí** statistického souboru.

Při velkém rozsahu statistického souboru nebo z důvodu dalšího zpracování (některá grafická vyjádření anebo užití matematicko - statistických metod) původní soubor **roztřídíme**. **Roztříděný statistický soubor** získáme pokrytím variačního oboru systémem disjunktních intervalů (obvykle zleva otevřených a zprava uzavřených), tzv. **tříd** o počtu m , které mají obvykle stejnou **délku** h . Každá třída je reprezentována uspořádanou dvojicí (x_j^*, f_j) , kde x_j^* je **střed** j -té třídy, $x_j^* < x_{j+1}^*$, a f_j je **absolutní četnost** j -té třídy, $j = 1, \dots, m$. Absolutní četnost f_j je počet prvků x_i původního neroztříděného statistického souboru, které leží v j -té třídě. Číslo $\frac{f_j}{n}$ je **relativní četnost** a uvádí se též v %. Platí $\sum_{j=1}^m f_j = n$.

Počet tříd m volíme obvykle přibližně $1 + 3,3 \log n$ (pro statistický soubor symetrického charakteru) anebo \sqrt{n} až $2\sqrt{n}$ (pro statistický soubor asymetrického charakteru). **Délka** třídy je $h \approx \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{m}$ a stanovujeme ji tak, aby odpovídala přesnosti získání hodnot x_i a aby střed třídy x_j^* byl zaokrouhlené číslo. U diskrétního znaku volíme obvykle za středy tříd přímo hodnoty, kterých tento znak může nabývat. Pokud třídění

provádíme na PC, měli bychom zkontrolovat, zda nastavení parametrů m , resp. h použitého statistického software odpovídá našim požadavkům.

Číslo $F_j = \sum_{k=1}^j f_k$ je **kumulativní absolutní četnost**, číslo $\frac{F_j}{n}$ je **kumulativní relativní**

četnost, $j = 1, \dots, m$, a uvádí se též v %. Platí, že $F_{j+1} = F_j + f_{j+1}$ pro $j = 1, \dots, m-1$, kde

$F_1 = f_1$, takže $F_m = n$.

Roztříděný statistický soubor zapisujeme do tzv. **četnostní tabulky** pro různé typy četností, např. pro absolutní četnosti:

x_j^*	x_1^*	\dots	x_m^*
f_j	f_1	\dots	f_m

Významné vlastnosti statistického souboru vyjadřují v koncentrované formě jeho následující **číselné (empirické) charakteristiky**. Jde zejména o **charakteristiky polohy, proměnlivosti a souměrnosti**.

Základní **charakteristiky polohy** statistického souboru jsou:

1. Aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{pro neroztříděný soubor,}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m f_j x_j^* \quad \text{pro roztříděný soubor.}$$

Vlastnosti aritmetického průměru jsou:

- a) $y = ax + b \Rightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b$ pro reálné konstanty a, b ,
- b) $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$,
- c) $x_{(1)} \leq \bar{x} \leq x_{(n)}$,
- d) \bar{x} má tentýž rozměr jako znak X .

Někdy se užívá též **vážený aritmetický průměr**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i},$$

kde $w_i \geq 0$ jsou **váhy** (vhodně stanovená reálná čísla, z nichž aspoň jedno je nenulové)

hodnot x_i , které vyjadřují jejich význam, např. přesnost.

2. **Medián** pro neroztříděný statistický soubor

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{pro lichá } n, \\ \frac{1}{2} \left[x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right] & \text{pro sudá } n. \end{cases}$$

Vlastnosti mediánu:

- a) $y = ax + b \Rightarrow \tilde{y} = a\tilde{x} + b$ pro reálné konstanty a, b ,
- b) $x_{(1)} \leq \tilde{x} \leq x_{(n)}$,
- c) \tilde{x} má tentýž rozměr jako znak X .

Medián rozděljuje statistický soubor na "dolní polovinu" a "horní polovinu" hodnot x_i (viz obr. 1.1). Jde o **robustní** charakteristiku, která je oproti aritmetickému průměru málo citlivá na extrémně odchýlené hodnoty. Pro roztříděný soubor se k výpočtu mediánu užívá vhodná aproximace.

3. **Modus** \hat{x} je číslo, v jehož okolí je nejvíce hodnot x_i , resp. je to střed x_j^* třídy s největší absolutní četností f_j . Modus má tytéž vlastnosti jako aritmetický průměr i medián a dle potřeby se počítá vhodnou aproximací (např. pro roztříděný soubor).

Základní **charakteristiky proměnlivosti (variability)** statistického souboru jsou:

1. **Rozptyl (disperze, variance)**

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2 \quad \text{pro neroztříděný soubor,}$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m f_j (x_j^* - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m f_j x_j^{*2} \right) - \bar{x}^2 \quad \text{pro roztříděný soubor.}$$

Dle potřeby a také pro zdůraznění znaku X někdy píšeme $s^2(x)$ apod. Vlastnosti rozptylu jsou:

- a) $s^2 \geq 0$,
- b) $y = ax + b \Rightarrow s^2(y) = a^2 s^2(x)$ pro reálné konstanty a, b ,
- c) $s^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n$, resp. $x_1^* = \dots = x_m^*$,
- d) s^2 má rozměr rovný kvadrátu rozměru znaku X .

Větší proměnlivosti znaku X odpovídá větší rozptyl a naopak. Při výpočtech se také užívá jiný

vzorec pro rozptyl, když výraz $\frac{1}{n}$ zaměníme výrazem $\frac{1}{n-1}$. Takto vypočtený rozptyl je

roven číslu $\frac{n}{n-1}s^2 > s^2$ (pro $s^2 \neq 0$). Tento rozptyl je často počítán v statistickém software např. MINITAB 15.

2. **Směrodatná odchylka** $s = \sqrt{s^2}$.

Dle potřeby také píšeme $s(x)$. Vlastnosti směrodatné odchylky jsou:

- a) $s \geq 0$,
- b) $y = ax + b \Rightarrow s(y) = |a|s(x)$ pro reálné konstanty a, b ,
- c) $s = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n$, resp. $x_1^* = \dots = x_m^*$
- d) s má tentýž rozměr jako znak X .

Větší proměnlivosti znaku X odpovídá větší směrodatná odchylka a naopak.

3. **Variační koeficient** $v = \frac{s}{\bar{x}}$.

Dle potřeby také píšeme $v(x)$. Vlastnosti variačního koeficientu jsou:

- a) $v(ax) = \frac{a}{|a|}v(x)$ pro reálnou konstantu $a \neq 0$,
- b) v je bezrozměrné číslo.

Jde o relativní míru variability znaku X a uvádí se též v %. Má smysl pouze pro znak X , který nabývá pouze kladných anebo záporných hodnot. Není proto např. vhodný pro znak X vyjadřující odchylky od nějaké nominální hodnoty.

4. **Rozpětí** $x_{(n)} - x_{(1)}$. Rozpětí má stejné vlastnosti jako směrodatná odchylka.

Základní **charakteristikou souměrnosti** statistického souboru je **koeficient šikmosti** (**koeficient asymetrie**)

$$A = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{s^3} \quad \text{pro neroztříděný soubor,}$$

$$A = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m f_j (x_j^* - \bar{x})^3}{s^3} \quad \text{pro roztříděný soubor.}$$

Dle potřeby také píšeme $A(x)$. Vlastnosti koeficientu šikmosti jsou:

- a) $A > 0 \Leftrightarrow$ většina hodnot x_i je menší než (leží pod) \bar{x} ,
- b) $A = 0 \Leftrightarrow$ hodnoty x_i jsou rozloženy souměrně vzhledem k \bar{x} ,
- c) $A < 0 \Leftrightarrow$ většina hodnot x_i je větší než (leží nad) \bar{x} ,
- d) $y = ax + b \Rightarrow A(y) = \frac{a}{|a|} A(x)$ pro reálné konstanty $a, b, a \neq 0$,
- e) A je bezrozměrné číslo.

Existuje řada dalších číselných charakteristik statistického souboru. Např. pro poměrové znaky (cenové a objemové indexy, úrokové míry apod.) se místo aritmetického průměru užívá **geometrický průměr**

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

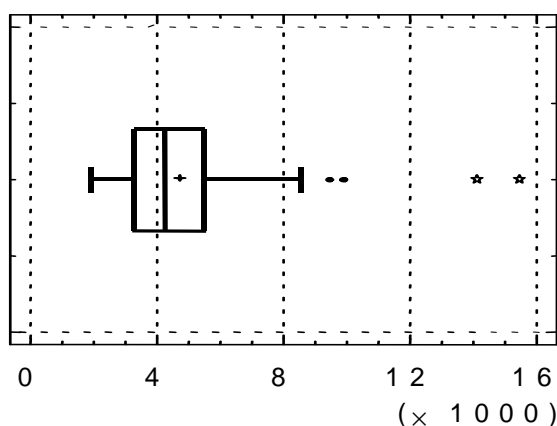
a ve speciálních případech (např. pro znaky vyjadřující rychlost nějakého děje) počítáme **harmonický průměr**

$$\bar{x}_h = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{-1}.$$

Dle potřeby se také někdy počítá **koefficient špičatosti (koefficient excesu)**

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{s^4} - 3,$$

který vyjadřuje specifickým způsobem míru koncentrace hodnot statistického souboru.

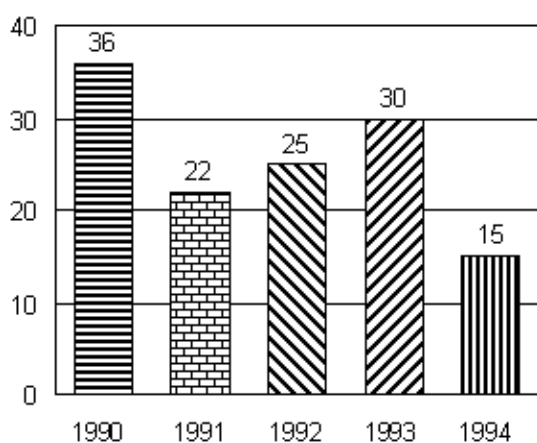


Obr. 1.1

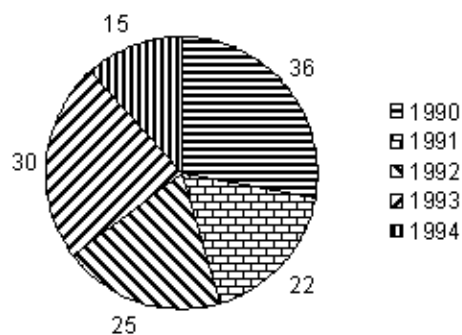
Mnoho rychlých a cenných informací poskytují o statistických souborech jejich **grafická vyjádření**. Pro jednorozměrný neroztříděný resp. uspořádaný statistický soubor se zejména užívá **krabicový graf** - obr. 1.1, kde tučně vyznačený obdélník obsahuje střední část uspořádaného souboru (cca polovinu všech jeho hodnot) tak, že nalevo a napravo od

obdélníku leží vždy cca čtvrtina hodnot uspořádaného souboru. Levá (pravá) svislá strana obdélníku odpovídá tzv. **dolnímu (hornímu) kvartilu** statistického souboru a svislá čára uvnitř je v místě **mediánu**. Výška obdélníku je úměrná rozsahu souboru a úsečky ("vousy") vlevo a vpravo zakončené krátkými svislými čarami vyjadřují přijatelné obory pro zbývající dolní a horní čtvrtinu souboru. Hodnoty mimo tyto úsečky jsou považovány za podezřelé, případně extrémně odchýlené. Existují další modifikace tohoto grafu a jiná vyjádření.

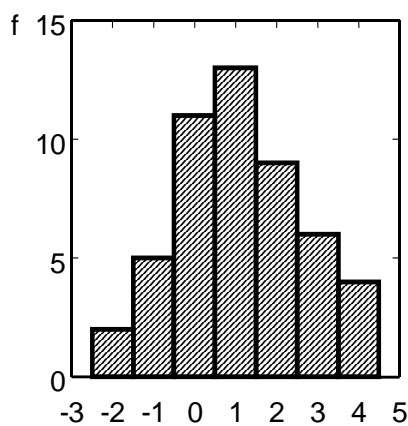
Pro jednorozměrný roztříděný statistický soubor s diskretním znakem X se užívají obvykle následující grafy. **Sloupcový graf** na obr. 1.2 je podobný histogramu z obr. 1.4, avšak vyznačené obdélníky na sebe nenavazují a někdy se kreslí ve vodorovné poloze. **Koláčový (výsečový) graf** na obr. 1.3 je kruh rozdělený na výseče, jejichž úhel odpovídá četnostem tříd, případně jsou některé zvolené výseče vysunuty z kruhu. V uvedených grafech se různými barvami nebo šrafováním zvýrazňují potřebné informace a mnohdy se dále geometricky a výtvarně prezentačně modifikují.



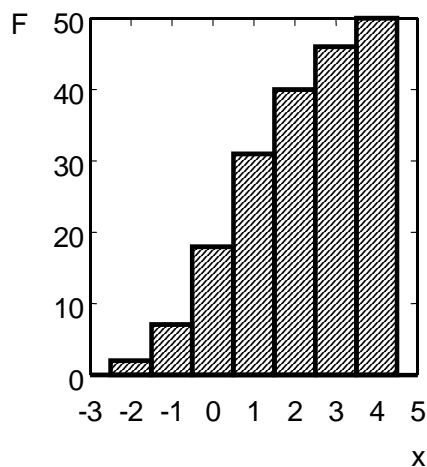
Obr. 1.2



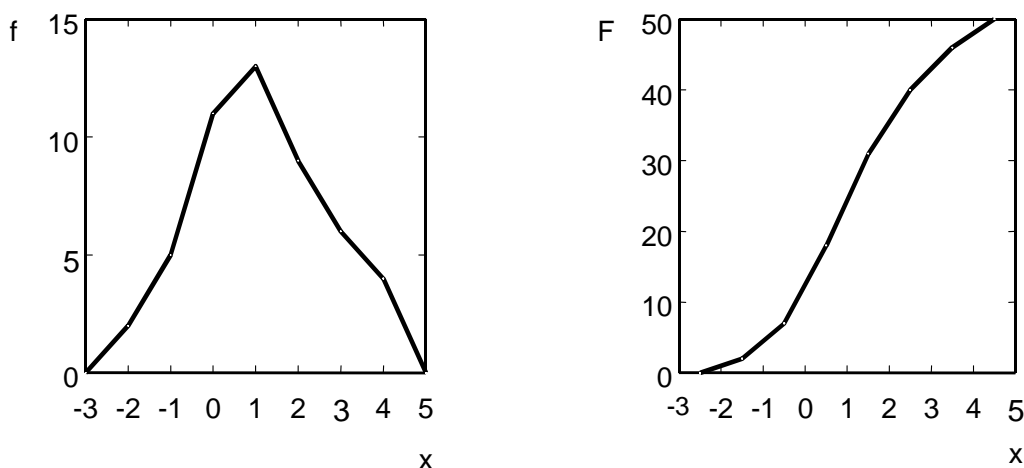
Obr. 1.3



Obr. 1.4



Pro jednorozměrný roztríděný statistický soubor se v případě spojitého znaku X užívají nejčastěji následující dva typy grafů. **Histogram** na obr. 1.4 je soustava obdélníků v kartézské souřadné soustavě, jejichž základny jsou třídy a výšky jsou četnosti tříd (absolutní, relativní, kumulativní atd.). **Polygon** na obr. 1.5 je lomená čára v kartézské souřadné soustavě spojující body, jejichž x -ová souřadnice je střed třídy, příp. horní hranice třídy pro kumulativní četnosti, a y -ová souřadnice je četnost třídy.



Obr. 1.5

Řešený příklad 1.1

Měřením délky X (mm) 10 válečků byly získány hodnoty: 5,38; 5,36; 5,35; 5,40; 5,41; 5,34; 5,29; 5,43; 5,42; 5,32. Určete rozsah, variační obor, variační rozpětí, aritmetický průměr, rozptyl, směrodatnou odchylku, variační koeficient a medián statistického souboru.

Ř e š e n í:

Rozsah daného souboru je $n = 10$, takže nemá smysl jej třídit. Protože $x_{(1)} = 5,29$ mm a

$x_{(10)} = 5,43$ mm, je variační obor $<5,29; 5,43>$ mm a variační rozpětí je $5,43 - 5,29 =$

0,14 mm. Dále je:

$$\bar{x} = (5,38 + \dots + 5,32)/10 = 53,70/10 = 5,37 \text{ mm} \dots \text{průměrná délka,}$$

$$s^2 = (5,38^2 + \dots + 5,32^2)/10 - 5,37^2 = 288,388/10 - 28,8369 = 0,0019 \text{ mm}^2,$$

$$s = \sqrt{0,0019} \approx 0,0435889894 \approx 0,044 \text{ mm,}$$

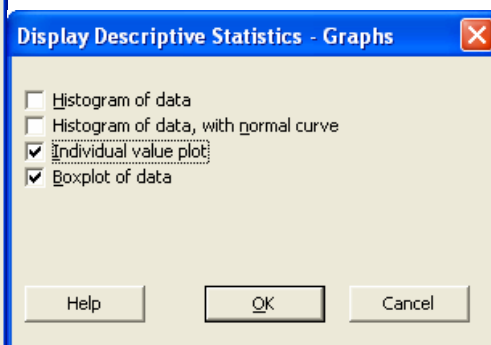
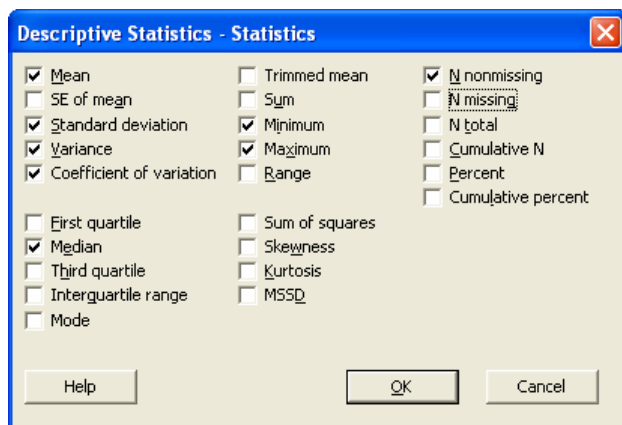
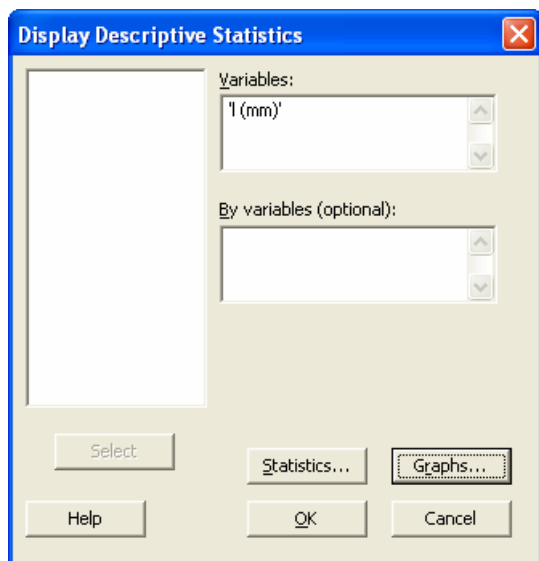
$$v = \sqrt{0,0019}/5,37 \approx 0,0435889894/5,37 \approx 0,00811713 \approx 0,8117 \%,$$

$$\tilde{x} = (5,36 + 5,38)/2 = 5,37 \text{ mm} \dots \text{medián délky.}$$

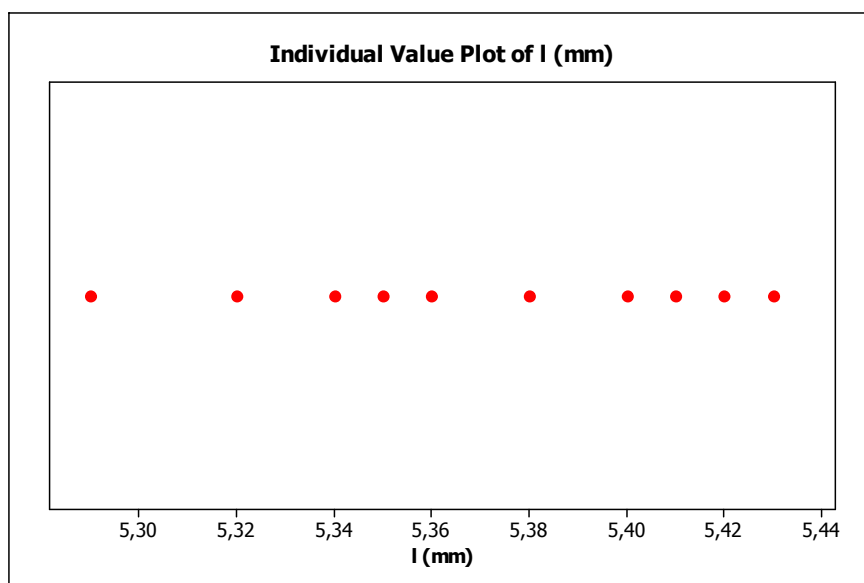
Pro grafické vyjádření tohoto statistického souboru by byl vhodný krabicový graf.

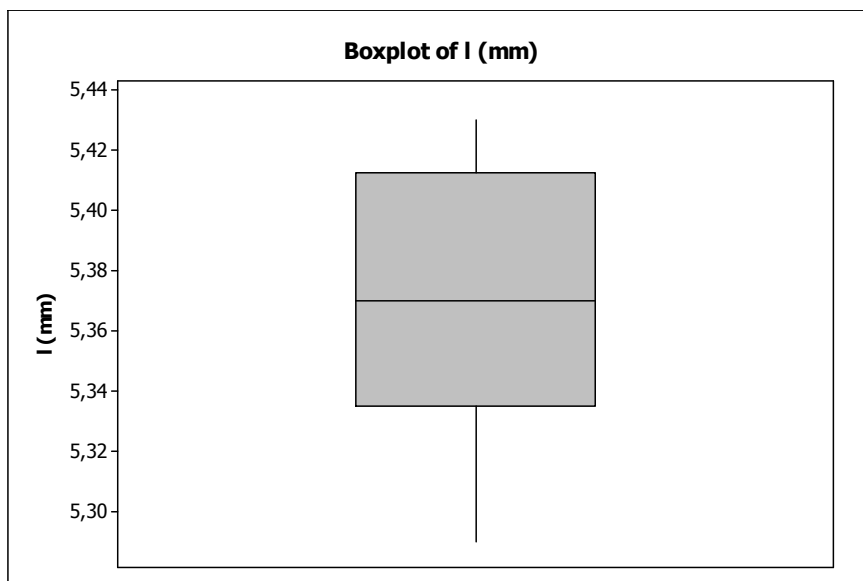
Postup v Minitabu:

Stat > Basic Statistics > Display Descriptive Statistics



Grafický výstup:





Textový výstup:

Descriptive Statistics: I (mm)

Variable	N	N*	Mean	SE Mean	StDev	Minimum	Q1	Median	Q3
l (mm)	10	0	5,3700	0,0145	0,0459	5,2900	5,3350	5,3700	5,4125

Variable	Maximum
l (mm)	5,4300

Řešený příklad 1.2

Při kontrole byl zjišťován objem nápoje X v 50 lahvích a byly naměřeny následující odchylky (ml) od hodnoty na etiketě:

1,2; 2,1; 1,7; 0,9; 0,3; 2,0; -1,3; -0,1; 3,2; 2,8;
 0,8; 4,4; 2,9; 1,2; 0,0; -2,3; 1,2; 0,9; 2,3; -0,2;
 0,1; 1,9; -1,9; -0,2; -1,3; 1,5; 0,5; 2,0; -1,3; 3,7;
 0,9; 1,0; 0,4; 1,9; 1,4; -1,3; 1,6; 1,4; 3,1; -0,1;
 1,8; 0,0; 4,1; 1,3; 3,0; 0,4; 3,8; -0,8; 3,1; 0,9.

Roztřídte daný statistický soubor, graficky jej znázorněte a vypočtěte \bar{x} , s^2 , s , \hat{x} , A .

Ř e š e n í:

Rozsah souboru $n = 50$; $x_{(1)} = -2,3$ ml a $x_{(50)} = 4,4$ ml, takže variační obor je $<-2,3;$

$4,4>$ ml a rozpětí je $4,4 - (-2,3) = 6,7$ ml. Volíme počet tříd $m = 7$ (tj. asi $\sqrt{50}$) a délku

třídy $h = 1$ (tj. asi $6,7/7$). Volba tříd a jejich středů, roztřídění do tříd a výpočet

absolutních a kumulativních četností je v následující tabulce, kde např. // značí 2

hodnoty a /// značí 5 hodnot ležících v dané třídě:

j	třída	x_j^*	zařazení do tříd	f_j	F_j
1	-2,5; -1,5	-2	//	2	2
2	-1,5; -0,5	-1	###	5	7
3	-0,5; 0,5	0	### ### /	11	18
4	0,5; 1,5	1	### ### ///	13	31
5	1,5; 2,5	2	### ////	9	40
6	2,5; 3,5	3	### /	6	46
7	3,5; 4,5	4	////	4	50

Histogramy a polygony tohoto statistického souboru jsou na obr. 1.4 a 1.5. Další výpočty jsou pro přehlednost znázorněny v následující tabulce, ze které dostaneme:

$$\bar{x} = 56/50 = 1,12 \text{ ml}; s^2 = 180/50 - 1,12^2 = 2,3456 \text{ ml}^2; s = \sqrt{2,3456} \approx 1,532 \text{ ml};$$

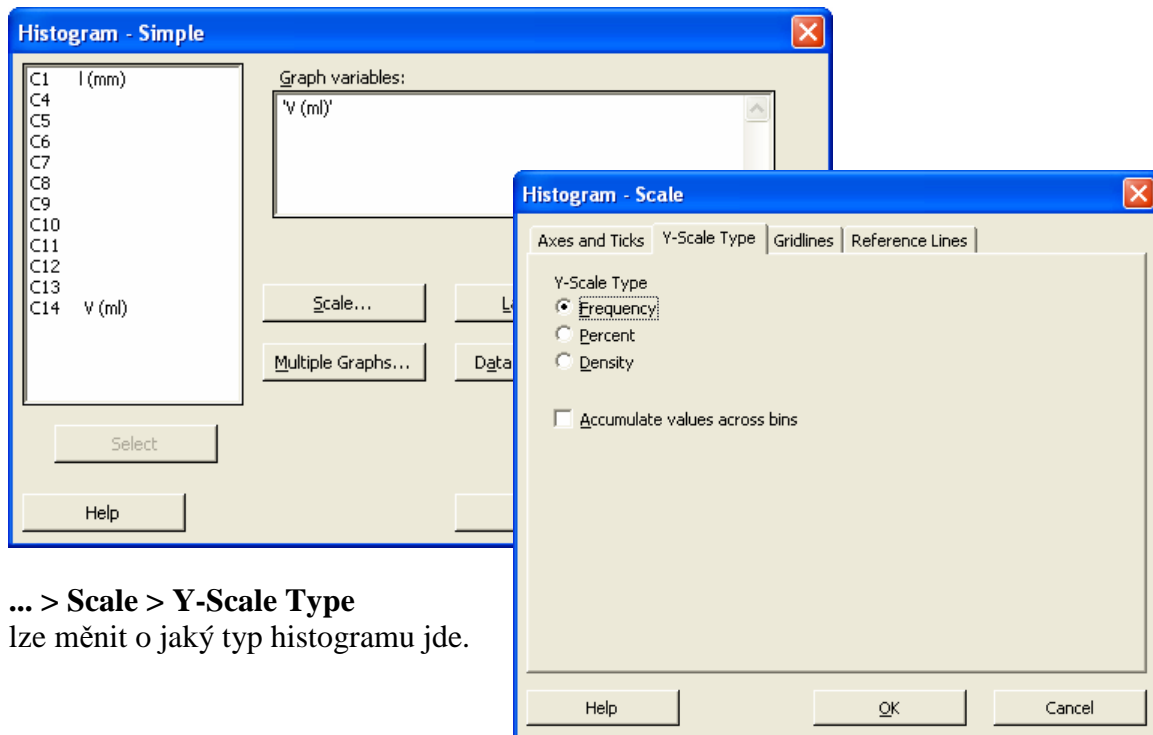
střed třídy s největší četností $\hat{x} = 1 \text{ ml}$; dalším výpočtem obdržíme $A \approx 0,098502$.

j	x_j^*	f_j	$f_j x_j^*$	$f_j x_j^{*2}$
1	-2	2	-4	8
2	-1	5	-5	5
3	0	11	0	0
4	1	13	13	13
5	2	9	18	36
6	3	6	18	54
7	4	4	16	64
Σ	—	50	56	180

Postup v Minitabu:

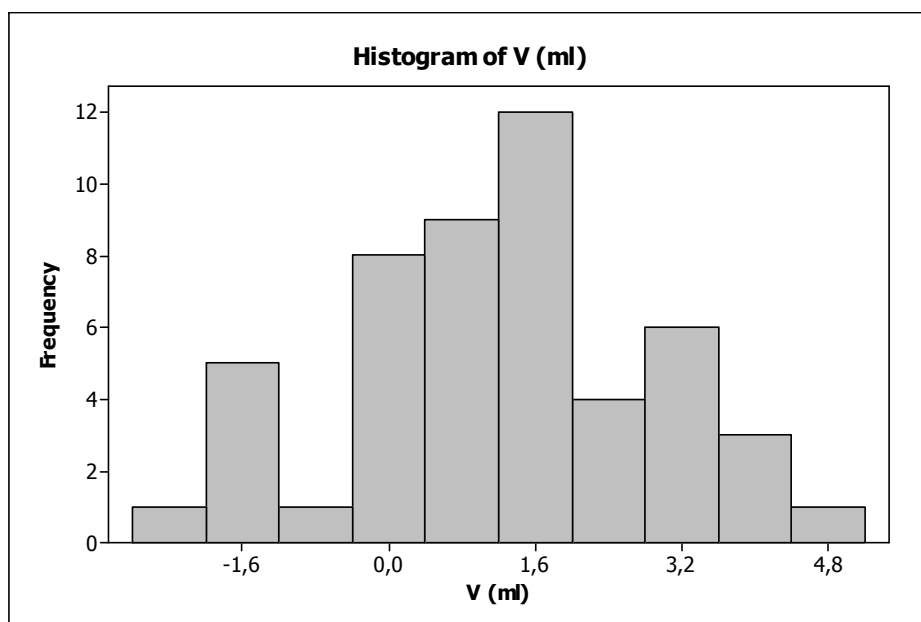
Minitab číselné charakteristiky roztržiděného statistického souboru nepočítá, statistický soubor zpracovává neroztržiděný, ale lze vytvořit histogramy.

Graph > Histogram > choose Simple

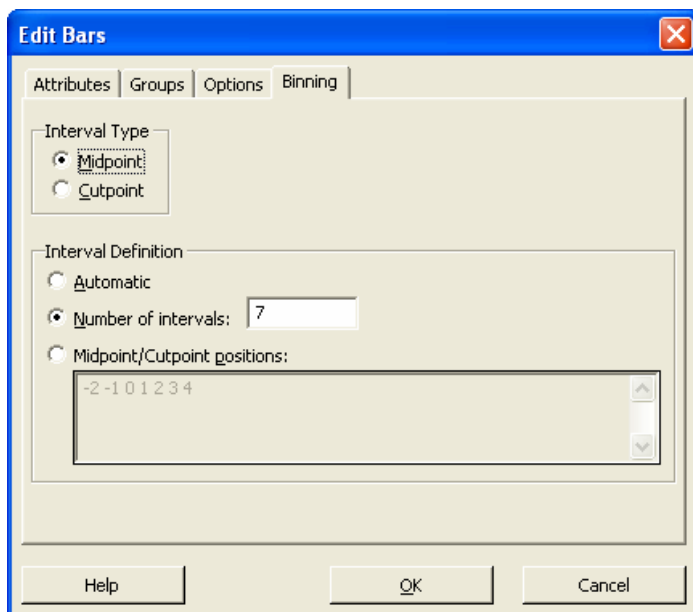


... > Scale > Y-Scale Type
lze měnit o jaký typ histogramu jde.

Výstup:



Select bars > Editor > Edit Bars > Binning lze měnit parametry třídění.



1.3 Dvourozměrný statistický soubor s kvantitavními znaky

Získaný statistický soubor $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ s rozsahem n je **neroztříděný statistický soubor**. Vynecháním první, resp. druhé, hodnoty v každé dvojici obdržíme jednorozměrné statistické soubory (x_1, \dots, x_n) a (y_1, \dots, y_n) . Zpracováním těchto souborů získáme jejich číselné charakteristiky \bar{x} , \bar{y} , $s^2(x)$, $s^2(y)$ atd.

Roztříděný dvourozměrný statistický soubor získáme roztříděním jednorozměrných statistických souborů (x_1, \dots, x_n) a (y_1, \dots, y_n) , přičemž oba roztříděné soubory mohou mít různé počty tříd i jejich délky. Dostaneme tak dvourozměrné třídy se **středy** (x_j^*, y_k^*) a **absolutními četnostmi** f_{jk} , $j = 1, \dots, m_1$ a $k = 1, \dots, m_2$. Dle potřeby se dále určují **relativní četnosti** $\frac{f_{jk}}{n}$, **kumulativní četnosti** F_{jk} atd.

Roztříděný dvourozměrný statistický soubor zapisujeme do **četnostní tabulky** pro různé typy četností. Následující tabulka je pro absolutní četnosti f_{jk} , kde čísla f_{xj} a f_{yk} jsou **marginální (okrajové) četnosti** a platí

$$f_{xj} = \sum_{k=1}^{m_2} f_{jk}, \quad f_{yk} = \sum_{j=1}^{m_1} f_{jk}, \quad \sum_{j=1}^{m_1} f_{xj} = \sum_{k=1}^{m_2} f_{yk} = \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} f_{jk} = n.$$

$\begin{matrix} y_k^* \\ x_j^* \end{matrix}$	y_1^*	\dots	$y_{m_2}^*$	f_{xj}
x_1^*	f_{11}	\dots	f_{1m_2}	f_{x1}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$x_{m_1}^*$	f_{m_11}	\dots	$f_{m_1m_2}$	f_{xm_1}
f_{yk}	f_{y1}	\dots	f_{ym_2}	n

Pro roztríděné jednorozměrné statistické soubory (x_j^*, f_{xj}) , $j = 1, \dots, m_1$, a

(y_k^*, f_{yk}) , $k = 1, \dots, m_2$, obdržíme jejich číselné charakteristiky \bar{x} , \bar{y} , $s^2(x)$, $s^2(y)$ atd.

Mírou závislosti znaků X a Y je **koeficient korelace (korelační koeficient)**

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s(x)s(y)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{s(x)s(y)} \quad \text{pro neroztríděný soubor,}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} f_{jk} (x_j^* - \bar{x})(y_k^* - \bar{y})}{s(x)s(y)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} f_{jk} x_j^* y_k^* - \bar{x}\bar{y}}{s(x)s(y)} \quad \text{pro roztríděný soubor,}$$

přičemž čitatele ve všech zlomcích vyjadřují tzv. **kovarianci**, kterou značíme cov .

Někdy pro zdůraznění znaků X , Y píšeme $r(x, y)$, resp. $cov(x, y)$. Vlastnosti koeficientu korelace:

$$a) \quad u = ax + b, v = cy + d \Rightarrow r(u, v) = \frac{ac}{|ac|} r(x, y) \quad \text{pro reálné konstanty } a, b, c, d,$$

$$a \neq 0, c \neq 0,$$

$$b) \quad r(y, x) = r(x, y),$$

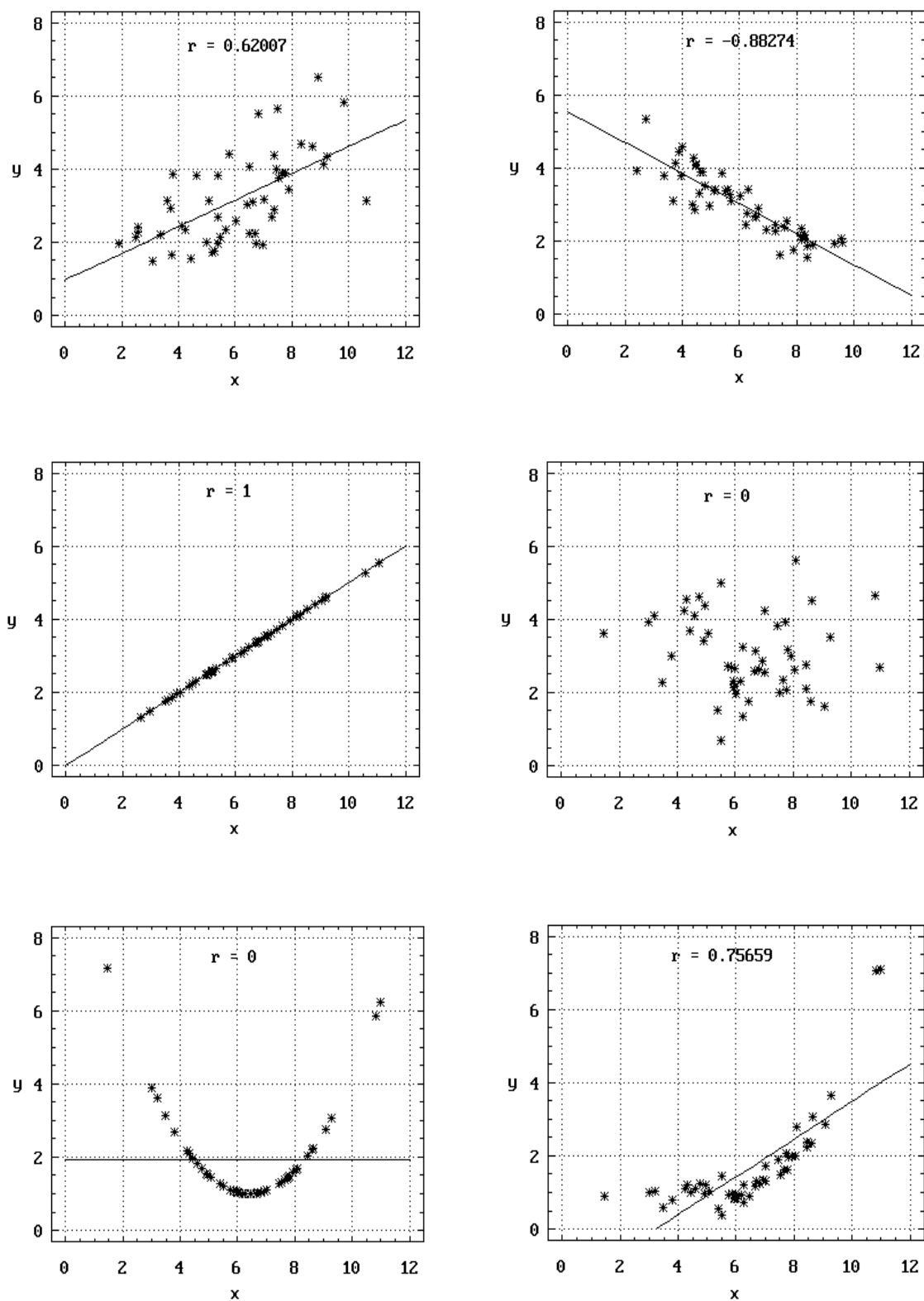
$$c) \quad -1 \leq r \leq 1,$$

$$d) \quad r = \pm 1 \Leftrightarrow y = ax + b, a \neq 0,$$

$$e) \quad r \text{ je bezrozměrné číslo.}$$

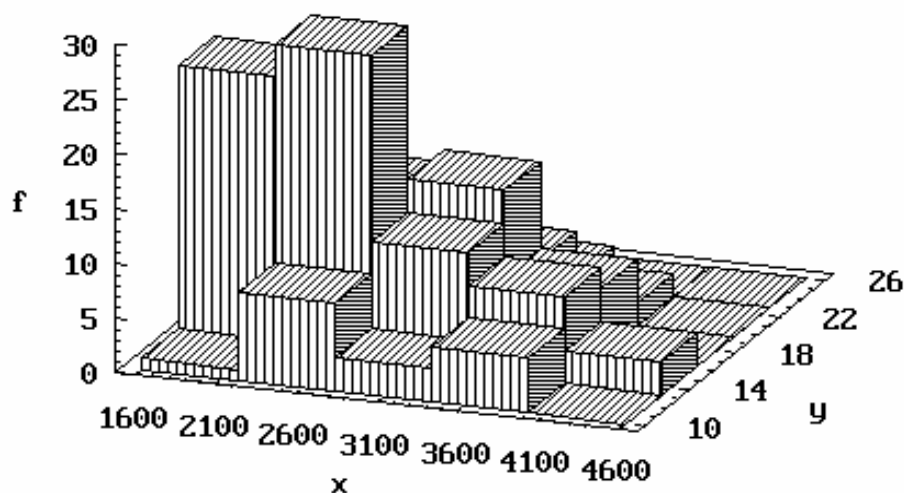
Koeficient korelace r je pouze mírou lineární závislosti mezi znaky X a Y . Čím je jeho hodnota blíže 1 anebo -1, tím je závislost blíže lineární závislosti a body (x_i, y_i) blíže přímce. Jeho kladná (záporná) hodnota odpovídá celkově

rostoucí (klesající) závislosti mezi X a Y . Hodnota blízká 0 vyjadřuje, že závislost není lineární a znaky X , Y mohou být nezávislé.



Obr. 1.6

Pro grafické vyjádření dvourozměrného neroztříděného statistického souboru se užívá **rozptylový graf** na obr.1.6, kde jsou rovněž uvedeny pro ilustraci hodnoty koeficientu korelace, a pro dvourozměrný roztříděný statistický soubor třírozměrný **histogram** na obr. 1.7, případně třírozměrný **sloupcový graf** pro diskrétní znaky X, Y .



Obr. 1.7

Řešený příklad 1.3

Statistickým šetřením nákladů X (Kč) a cen Y (Kč) pro stejný výrobek u 10 výrobců byl získán dvourozměrný statistický soubor:

(30,18; 50,26), (30,19; 50,23), (30,21; 50,27), (30,22; 50,25), (30,25; 50,22),
(30,26; 50,32), (30,26; 50,33), (30,28; 50,29), (30,30; 50,37), (30,33; 50,42).

Vypočtěte \bar{x} , \bar{y} , $s^2(x)$, $s^2(y)$, $s(x)$, $s(y)$, c , r .

Ř e š e n í:

Vzhledem k malému rozsahu $n = 10$ soubor netřídíme. Použitím výše uvedených vztahů dostaneme:

$$\bar{x} = (30,18 + \dots + 30,33)/10 = 30,248 \text{ Kč} \dots \text{průměrné náklady,}$$

$$\bar{y} = (50,26 + \dots + 50,42)/10 = 50,296 \text{ Kč} \dots \text{průměrná cena,}$$

$$s^2(x) = (0,18^2 + \dots + 30,33^2)/10 - 30,248^2 = 0,002096 \text{ Kč}^2,$$

$$s^2(y) = (50,26^2 + \dots + 50,42^2)/10 - 50,296^2 = 0,003684 \text{ Kč}^2,$$

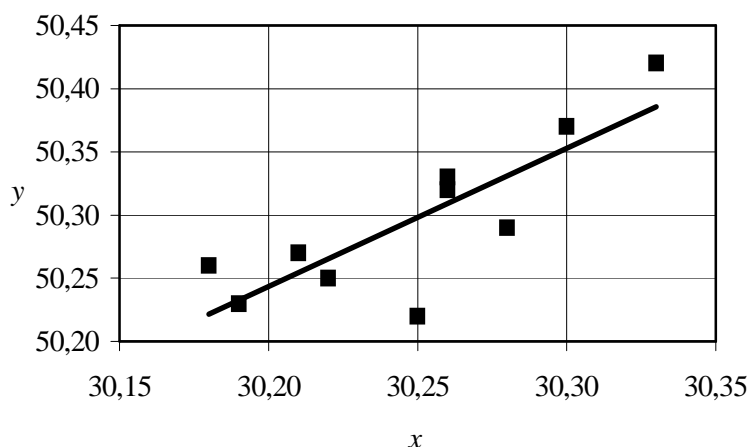
$$s(x) = \sqrt{0,002096} \approx 0,0457821 \text{ Kč} \approx 0,0458 \text{ Kč},$$

$$s(y) = \sqrt{0,003684} \approx 0,0606960 \text{ Kč} \approx 0,0607 \text{ Kč},$$

$$cov = (30,18 \cdot 50,26 + \dots + 30,33 \cdot 50,42)/10 - 30,248 \cdot 50,296 = 0,002292 \text{ Kč}^2,$$

$$r = 0,002292/(0,0457821 \cdot 0,0606960) = 0,82481996263 \approx 0,8248.$$

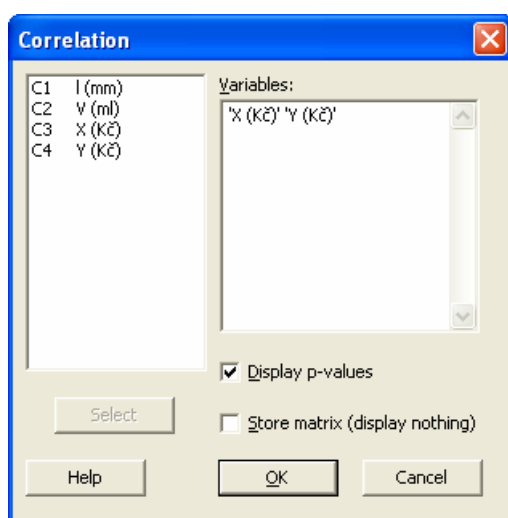
Vzhledem k velikosti koeficientu korelace r lze předpokládat, že mezi oběma znaky X a Y (náklady a cenou) je závislost víceméně blízká lineární. Jeho kladná hodnota odpovídá tomu, že s rostoucími náklady roste cena výrobku. Rozptylový graf daného statistického souboru je na obr. 1.8.



Obr. 1.8

Postup v Minitabu:

Stat > Basic Statistics > Correlation



Výstup:

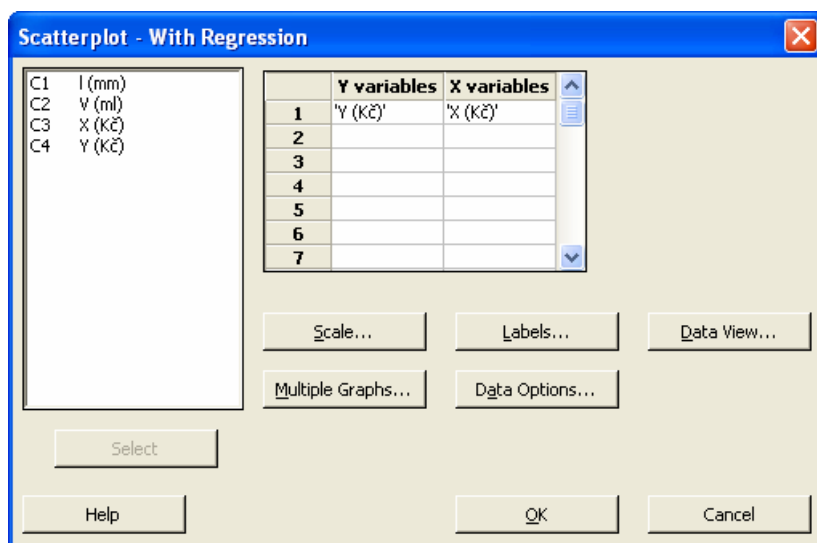
Correlations: X (Kč); Y (Kč)

Pearson correlation of X (Kč) and Y (Kč) = 0,825
P-Value = 0,003

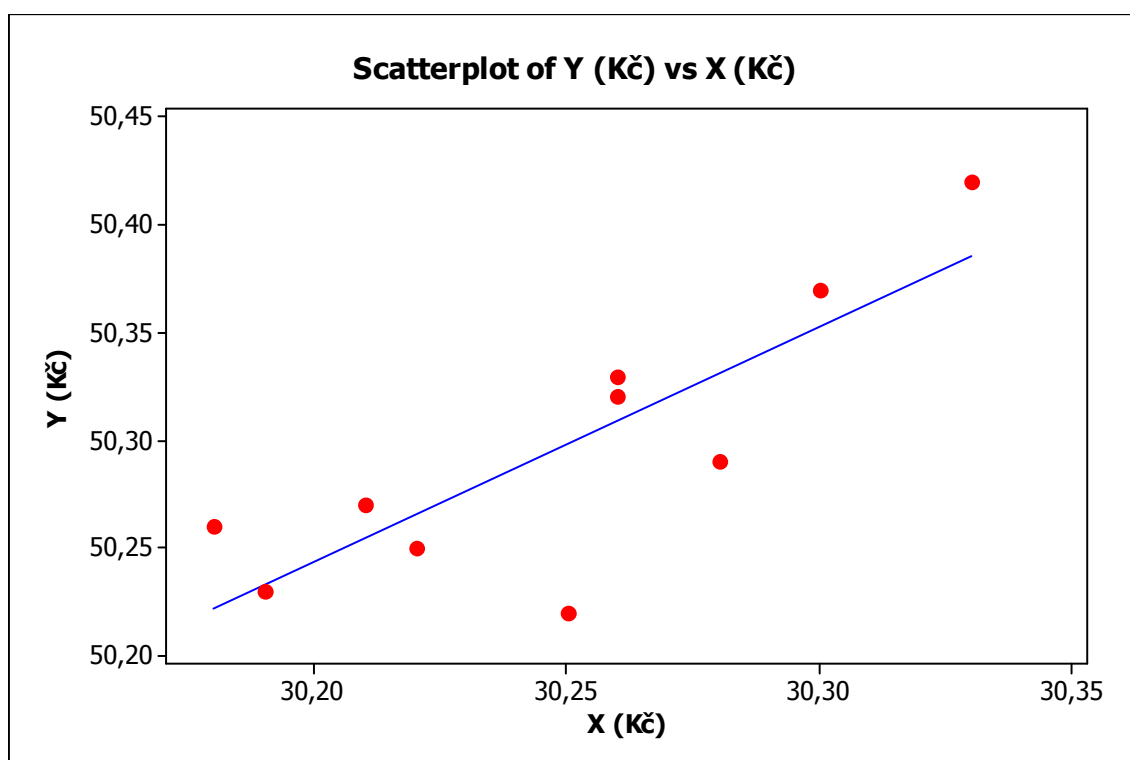
Kromě koeficientu korelace Minitab vypočítá i p-hodnotu k testu nezávislosti, jehož význam je popsán v třetí kapitole ($P\text{-Value} = 0,003 < 0,05 \Rightarrow$ Hypotézu, že veličiny X a Y jsou nezávislé zamítám na hladině významnosti 0,05.)

Grafické znázornění v Minitabu:

Graph > Scatterplot > > choose Simple or With Regression



Výstup:



1.4 Statistické soubory s kvalitativními znaky

Jednorozměrný statistický soubor s kvalitativním znakem (x_1, \dots, x_n) s rozsahem n

vyjadřujeme pomocí **četnostní tabulky**, kde x_j^* jsou možné slovní hodnoty znaku X a f_j jsou četnosti těchto hodnot v původním souboru, $j = 1, \dots, m$. Číselné charakteristiky se až na výjimky (variabilitu) nepoužívají - viz např. [40]. Ke grafickému vyjádření souboru slouží **sloupcový graf**, **koláčový graf** apod. **Dvourozměrný statistický soubor s kvalitativními znaky** $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ s rozsahem n vyjadřujeme pomocí **četnostní tabulky** podobně jako pro kvantitativní znaky, kde (x_j^*, y_k^*) jsou dvojice možných slovních hodnot dvourozměrného kvalitativního znaku (X, Y) a f_{jk} jsou četnosti těchto hodnot v původním souboru pro $j = 1, \dots, m_1$ a $k = 1, \dots, m_2$. Z číselných charakteristik se užívají především různé míry závislosti znaků X a Y - viz např. [2], [3], [8], [15], [17], [30]. Ke grafickému vyjádření souboru slouží třírozměrný **sloupcový graf** podobný třírozměrnému sloupcovému grafu pro dvourozměrný diskretní kvantitativní znak.

2 Odhady parametrů

2.1 Bodové a intervalové odhady

Předpokládejme, že pozorovaná náhodná veličina X (případně náhodný vektor) má distribuční funkci $F(x, \vartheta)$, kde ϑ je **parametr** (reálné číslo nebo reálný vektor) rozdělení pravděpodobnosti, nám známého tvaru. Skutečnou hodnotu parametru ϑ obvykle neznáme a odhadujeme ji pomocí získaného statistického souboru (x_1, \dots, x_n) . Jestliže místo náhodné veličiny X pozorujeme náhodný vektor (X, Y) se simultánní distribuční funkcí $F(x, y, \vartheta)$, pak postupujeme analogicky a odhad parametru ϑ provádíme pomocí získaného statistického souboru $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$. Parametrem ϑ může také být číselná charakteristika náhodné veličiny (náhodného vektoru), např. střední hodnota $E(X)$, rozptyl $D(X)$, koeficient korelace $\rho(X, Y)$ apod., případně tzv. **parametrická funkce**, tj. funkce parametrů rozdělení. Množina všech uvažovaných hodnot parametru ϑ se nazývá **parametrický prostor**. Podle způsobu provedení rozdělujeme odhady na **odhady bodové a intervalové**.

Odhadem T parametru ϑ je statistika $T(X_1, \dots, X_n)$, která na celém parametrickém prostoru nabývá hodnot blízkých parametru ϑ . Používáme zejména tyto odhady:

1. Odhad T parametru ϑ je **nestranný (nevychýlený)**, jestliže jeho střední hodnota $E(T) = \vartheta$. Pokud je $E(T) \neq \vartheta$, jde o **stranný (vychýlený)** odhad.
2. Je-li rozptyl nestranného odhadu T nejmenší z rozptylů všech nestranných odhadů téhož parametru ϑ , je T **nejlepší nestranný odhad**.
3. Odhad T je **konzistentní**, jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T - \vartheta| < \varepsilon) = 1$ pro libovolné reálné číslo $\varepsilon > 0$.

Platí:

- a) \bar{X} je nestranný konzistentní odhad střední hodnoty $E(X)$,
- b) $\frac{n}{n-1} S^2$ je nestranný konzistentní odhad rozptylu $D(X)$,
- c) odhady a) a b) jsou pro normální rozdělení X také nejlepší.

Další typy odhadů (např. **maximálně věrohodné odhady**) jsou popsány v [2], [3], [8], [15], [17], [30].

Bodový odhad parametru ϑ je pozorovaná hodnota $t = T(x_1, \dots, x_n)$ odhadu T na statistickém souboru (x_1, \dots, x_n) . Bodové odhady základních číselných charakteristik jsou

$$E(X) = \bar{x}, D(X) = \frac{n}{n-1} s^2, \sigma(X) = \sqrt{\frac{n}{n-1}} s, \rho(X, Y) = r,$$

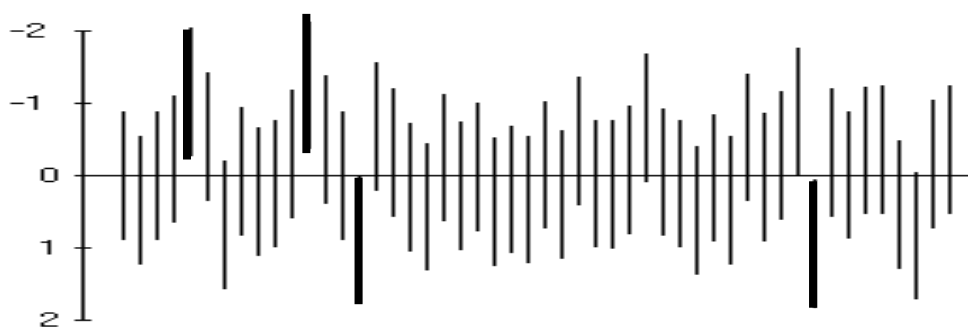
kde \bar{x}, s^2, s, r jsou empirické charakteristiky získané ze statistického souboru (x_1, \dots, x_n) .

Interval spolehlivosti (konfidenční interval) pro parametr ϑ se spolehlivostí $1 - \alpha$, kde $\alpha \in \langle 0; 1 \rangle$, je dvojice takových statistik $(T_1; T_2)$, že

$$P(T_1 \leq \vartheta \leq T_2) = 1 - \alpha$$

pro libovolnou hodnotu parametru ϑ . **Intervalový odhad** parametru ϑ se spolehlivostí $1 - \alpha$ je interval $\langle t_1; t_2 \rangle$ a píšeme $\vartheta \in \langle t_1; t_2 \rangle$, kde t_1, t_2 jsou hodnoty statistik T_1, T_2 na daném statistickém souboru (x_1, \dots, x_n) .

Spolehlivost $1 - \alpha$ volíme blízkou jedné, podle konvence obvykle 0,95 nebo 0,99, a uvádíme ji také v %. Spolehlivost $1 - \alpha$ znamená, že při mnoha opakovaných výběrech s konstantním rozsahem n z daného základního souboru zhruba $(1 - \alpha)100$ % všech intervalových odhadů obsahuje skutečnou hodnotu parametru ϑ a naopak $\alpha 100$ % jich tuto hodnotu neobsahuje. Situaci ilustruje počítačově simulovaný příklad na obr.7.1, kde $\vartheta = 0$ a tučně jsou vyznačeny případy odpovídající riziku chybného odhadu α , tj. intervalové odhady, které nezachytily hodnotu parametru ϑ .



4 intervalové odhady z 50 provedených intervalových odhadů se spolehlivostí 0,95 neobsahují odhadovanou hodnotu 0

Obr. 2.1

Snížení rizika α , tedy zvýšení spolehlivosti $1 - \alpha$, vede při zachování rozsahu výběru n ke zvětšení velikosti intervalového odhadu. Pro $\alpha = 0$, tedy pro 100 % spolehlivost, je intervalovým odhadem celý parametrický prostor a to nemá v aplikacích rozumný význam. Zmenšit velikost intervalového odhadu je možno:

- a) snížením spolehlivosti, což nebývá vhodné, protože se tím vlastně nepřesnost odhadu zvětší,
- b) zvýšením rozsahu výběru n , ovšem s ohledem na "kletbu statistiky", neboť velikost intervalového odhadu se zmenší víceméně úměrně $n^{1/2}$,
- c) volbou jiného a současně "užšího" intervalu spolehlivosti pro daný parametr, pokud je znám.

Na druhé straně je zřejmé, že bodový odhad má spolehlivost nulovou anebo zcela zanedbatelnou (pro diskrétní rozdělení pravděpodobnosti pozorované náhodné veličiny X). Intervalové odhady proto poskytují významně dokonalejší pohled na vlastnosti pozorované náhodné veličiny než odhady bodové.

Intervalové odhady dělíme na *dvoustranné* (*oboustranné*) a *jednostranné* podle toho, zda je ohraničujeme oboustranně anebo jednostranně. Často volíme statistiky T_1, T_2 ve tvaru $T_1 = T - \delta_1$ a $T_2 = T + \delta_2$, kde $\delta_1 \geq 0$ a $\delta_2 \geq 0$ jsou vhodná reálná čísla (závisající na spolehlivosti $1 - \alpha$ a rozsahu náhodného výběru n) a T je nějaký odhad parametru ϑ - viz řešený příklad 7.1. Poznamenejme, že z předem dané délky Δ dvoustranného odhadu intervalového odhadu a spolehlivosti $1 - \alpha$ je možno určit potřebný rozsah výběru.

Řešený příklad 2.1 (teoretický; nebude u zkoušky)

Předpokládáme, že pozorovaná náhodná veličina X má normální rozdělení pravděpodobnosti $N(\mu, \sigma^2)$, jehož rozptyl σ^2 známe (což je v praxi zcela výjimečné). Pro intervalový odhad střední hodnoty μ získáme ze statistického souboru (x_1, \dots, x_n) její bodový odhad \bar{x} , který je pozorovanou hodnotou výběrového průměru $T = \bar{X}$. Náhodná veličina \bar{X} má (kapitola 6) normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2/n)$. Položíme-li $T_1 = \bar{X} - \delta_1$ a $T_2 = \bar{X} + \delta_2$, dostaneme

$$P(\bar{X} - \delta_1 \leq \mu \leq \bar{X} + \delta_2) = 1 - \alpha,$$

takže po úpravě je

$$P(\mu - \delta_2 \leq \bar{X} \leq \mu + \delta_1) = 1 - \alpha.$$

Z vlastností normálního rozdělení (kapitola 5) obdržíme

$$P(\mu - \delta_2 \leq \bar{X} \leq \mu + \delta_1) = \Phi\left(\frac{\delta_1}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta_2}{\sigma}\sqrt{n}\right),$$

kde $\Phi(u)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $N(0; 1)$. Dále nechť $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, kde $\alpha_1 \geq 0$ a $\alpha_2 \geq 0$. Položíme-li

$$\Phi\left(\frac{\delta_1}{\sigma}\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha_1, \quad \Phi\left(-\frac{\delta_2}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \alpha_2,$$

dostaneme

$$\delta_1 = u_{1-\alpha_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \delta_2 = -u_{\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

takže

$$T_1 = \bar{X} - u_{1-\alpha_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad T_2 = \bar{X} - u_{\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

a interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ při známém rozptylu σ^2 je dvojice statistik

$$\left(\bar{X} - u_{1-\alpha_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} - u_{\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

Pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ je $u_{1-\alpha_1} = u_{1-\alpha/2}$ a $-u_{\alpha_2} = -u_{\alpha/2} = u_{1-\alpha/2}$, takže dvoustranný intervalový

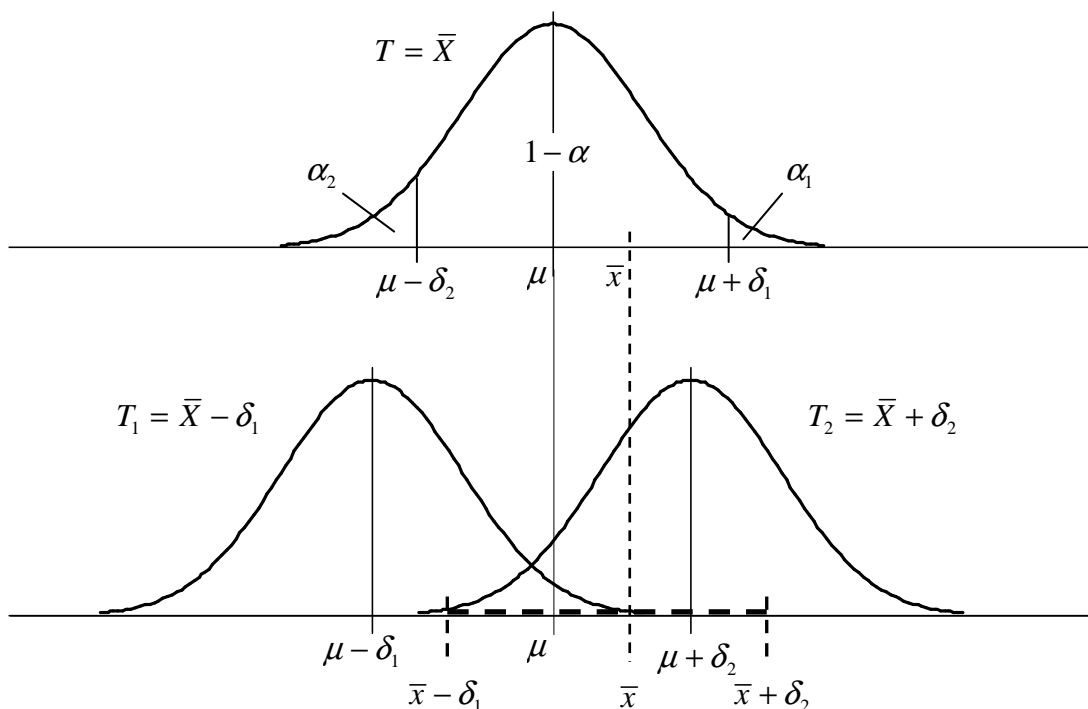
odhad střední hodnoty μ při známém rozptylu σ^2 je

$$\left\langle \bar{x} - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle.$$

Konstrukci uvedeného dvoustranného intervalového odhadu ilustruje obr. 7.2. Odtud je vidět, že pro jinou realizaci náhodného výběru dostaneme náhodně jinou hodnotu \bar{x} , takže intervalový odhad se náhodně posune a nemusí tak zachytit skutečnou hodnotu odhadované střední hodnoty μ . V našem případě se však délka intervalu nezmění, neboť předpokládáme znalost rozptylu σ^2 a tento rozptyl je konstantní (viz také obr. 2.1). Tato délka ale závisí na zvolené spolehlivosti $1 - \alpha$ a rozsahu n získaného statistického souboru.

Číslo $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ je tzv. *standardní chyba odhadu*. Pro $\alpha_1 = 0$ a $\alpha_2 = \alpha$, resp. $\alpha_1 = \alpha$ a $\alpha_2 = 0$, je $u_{1-\alpha_1} = u_1 = \infty$ a $-u_{\alpha_2} = -u_\alpha = -u_{1-\alpha}$, resp. $u_{1-\alpha_1} = u_{1-\alpha}$ a $-u_{\alpha_2} = -u_0 = \infty$, takže jednostranné odhady střední hodnoty μ při známém rozptylu σ^2 jsou

$$\left(-\infty; \bar{x} + u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \text{ resp. } \left(\bar{x} - u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; +\infty\right).$$



Obr. 7.2

Z předem dané maximální délky Δ dvoustranného odhadu střední hodnoty μ při známém rozptylu σ^2 a spolehlivosti $1 - \alpha$ lze stanovit potřebný rozsah výběru n . Pak je $\Delta \geq \delta_1 + \delta_2 =$

$= 2u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, takže potřebný rozsah je

$$n \geq \left(\frac{2u_{1-\alpha/2}\sigma}{\Delta} \right)^2.$$

Pro spolehlivost 0,95 je z tabulky **T1** $u_{0,975} = 1,960$, takže např. pro $\sigma = 2$ a $\Delta = 1$ je $n \geq 62$.

V dalších odstavcích se zaměříme pouze na dvoustranné intervalové odhady. Jednostranné odhady a také intervalové odhady pro jiná než uvažovaná rozdělení pravděpodobnosti základního souboru jsou uvedeny např. v [2], [3], [8], [15], [17], [30].

2.2 Odhady parametrů normálního rozdělení

Předpokládáme, že pozorovaná náhodná veličina X , resp. náhodný vektor (X, Y) , má normální rozdělení pravděpodobnosti s parametry μ , σ^2 , resp. ρ .

Bodové odhady jsou

$$\mu = \bar{x}, \quad \sigma^2 = \frac{n}{n-1} s^2, \quad \sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}} s, \quad \rho = r.$$

Intervalový odhad střední hodnoty μ při neznámém rozptylu σ^2 je

$$\left\langle \bar{x} - t_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n-1}}; \bar{x} + t_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n-1}} \right\rangle,$$

kde $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil Studentova rozdělení $S(k)$ s $k = n - 1$ stupni volnosti.

Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T2**.

Intervalový odhad rozptylu σ^2 je

$$\left\langle \frac{ns^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}; \frac{ns^2}{\chi_{\alpha/2}^2} \right\rangle,$$

kde χ_P^2 je P -kvantil Pearsonova rozdělení $\chi^2(k)$ s $k = n - 1$ stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T3**. Z uvedeného intervalového odhadu získáme po odmocnění jeho mezí **intervalový odhad směrodatné odchylky** σ .

Řešený příklad 2.2

Měřením délky 10 válečků byl získán statistický soubor s empirickými charakteristikami $\bar{x} = 5,37$ mm, $s^2 = 0,0019$ mm² a $s = 0,044$ mm (viz řešený příklad 1.1). Určete bodové odhady střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky. Za předpokladu, že naměřená délka X má normální rozdělení pravděpodobnosti, určete intervalové odhady těchto číselných charakteristik se spolehlivostí 0,95.

Ř e š e n í:

Bodové odhady jsou:

střední délka válečku $\mu = 5,37$ mm,

rozptyl délky válečku $\sigma^2 = \frac{10}{9} 0,0019 = 0,00211$ mm²,

směrodatná odchylka délky válečku $\sigma = \sqrt{0,00211} \approx 0,046$ mm.

Intervalový odhad střední délky válečku μ se spolehlivostí 0,95 je, neboť $t_{0,975} = 2,262$ pro 9 stupňů volnosti z tabulky **T2**,

$$\mu \in <5,37 - 2,262 \frac{\sqrt{0,0019}}{\sqrt{10-1}}; 5,37 + 2,262 \frac{\sqrt{0,0019}}{\sqrt{10-1}}> \approx <5,337; 5,403> \text{ mm.}$$

Intervalový odhad rozptylu délky válečku σ^2 se spolehlivostí 0,95 je, neboť $\chi^2_{0,025} = 2,700$ a $\chi^2_{0,975} = 19,023$ pro 9 stupňů volnosti z tabulky **T3**,

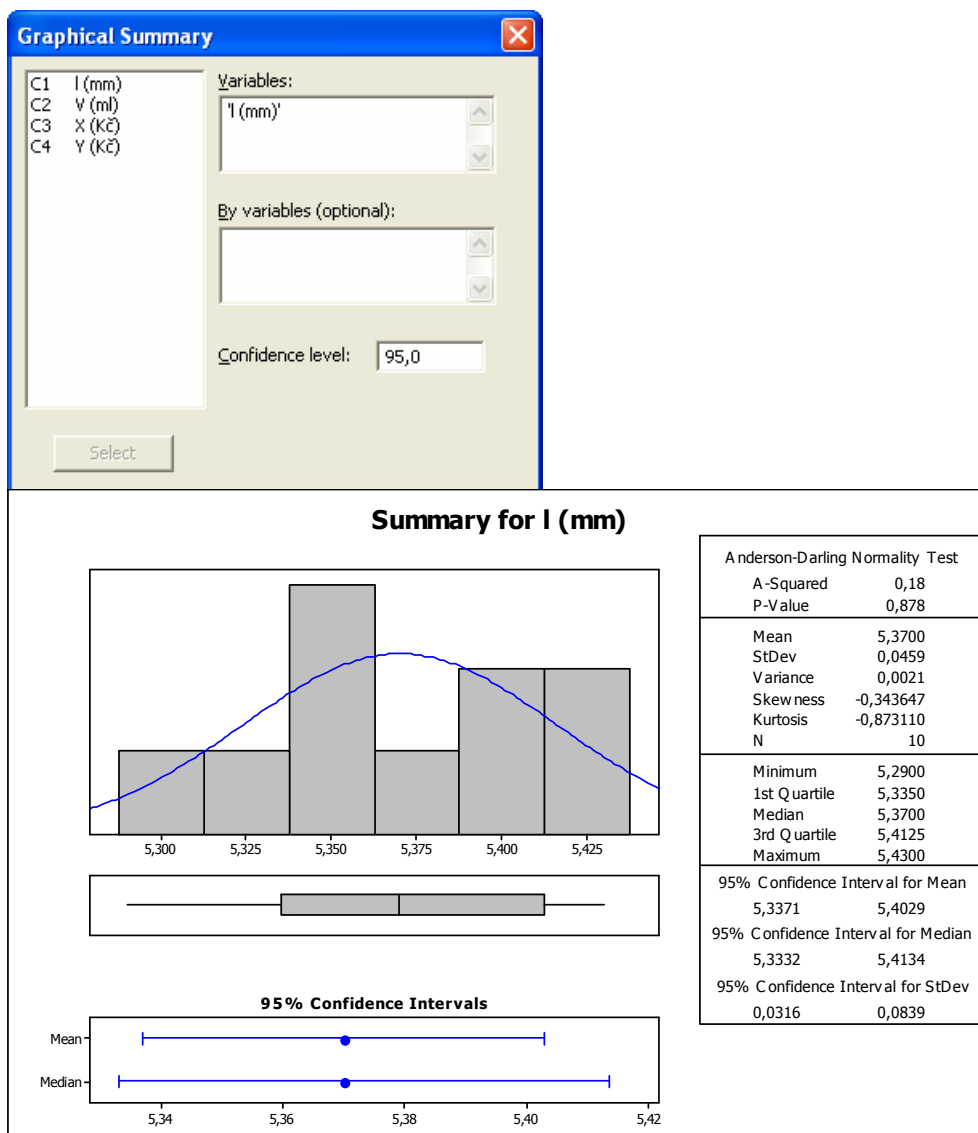
$$\sigma^2 \in <\frac{10 \cdot 0,0019}{19,023}; \frac{10 \cdot 0,0019}{2,700}> \approx <0,00100; 0,00704> \text{ mm}^2,$$

takže intervalový odhad směrodatné odchylky délky válečku σ je

$$\sigma \in <\sqrt{0,00100}; \sqrt{0,00704}> \approx <0,0316; 0,0839> \text{ mm.}$$

Postup v Minitabu:

Stat > Basic Statistics > Graphical Summary



Intervalový odhad koeficientu korelace ρ pro $n \geq 10$ je

$$\langle tgh z_1; tgh z_2 \rangle,$$

kde

$$z_1 = w - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}, \quad z_2 = w + \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}, \quad w = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1+r}{1-r} + \frac{r}{n-1} \right),$$

$$tgh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

a $u_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil normovaného normálního rozdělení $N(0;1)$, jehož hodnoty lze

získat z tabulky **T1** s hodnotami distribuční funkce $\Phi(u)$. Pro $1 - \alpha = 0,95$ je $u_{0,975} = 1,960$ a pro $1 - \alpha = 0,99$ je $u_{0,995} = 2,576$. Uvedený odhad je pouze přibližný, avšak jeho přesnost je v praktických úlohách postačující (přesný odhad není znám a v Minitabu tento odhad není).

Řešený příklad 2.3

Sledováním nákladů a ceny stejného výrobku u 10 výrobců byl získán dvourozměrný statistický soubor s koeficientem korelace $r = 0,82482$ (viz řešený příklad 1.3). Určete bodový odhad a intervalový odhad se spolehlivostí 0,99 koeficientu korelace ρ základního souboru.

Ř e š e n í:

Bodový odhad koeficientu korelace nákladů a ceny je $\rho = 0,82482$.

Po dosazení je

$$w = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1+0,82482}{1-0,82482} + \frac{0,82482}{10-1} \right) \approx 1,21753.$$

Z tabulky **T1** je $u_{0,995} = 2,576$, takže

$$z_1 = 1,21753 - \frac{2,576}{\sqrt{10-3}} \approx 0,24397, \quad z_2 = 1,21753 + \frac{2,576}{\sqrt{10-3}} \approx 2,19110$$

a intervalový odhad koeficientu korelace nákladů a ceny ρ se spolehlivostí 0,99 je

$$\rho \in \langle tgh 0,24397; tgh 2,19110 \rangle \approx \langle 0,239242; 0,975313 \rangle.$$

2.3 Odhady parametru binomického rozdělení

Předpokládáme, že pozorovaná náhodná veličina X má alternativní rozdělení pravděpodobnosti s parametrem p , tedy binomické rozdělení $Bi(1; p)$. Při odhadu

parametru p jde vlastně o odhad velikosti podílu prvků základního souboru majících sledovanou vlastnost. Přitom X_i nabývá hodnotu $x_i = 1$, resp. 0, jestliže i -tý náhodně vybraný prvek má, resp. nemá, sledovanou vlastnost, $i = 1, \dots, n$. Necht' x je počet prvků se sledovanou vlastností

z n náhodně vybraných prvků, tedy $x = \sum_{i=1}^n x_i$.

Bodový odhad je $p = \frac{x}{n}$.

Intervalový odhad p je pro $n > 30$

$$\left\langle \frac{x}{n} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)}{n}}; \frac{x}{n} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)}{n}} \right\rangle,$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil normovaného normálního rozdělení, jehož hodnoty lze získat z tabulky **T1**. Uvedený odhad je pouze přibližný, avšak jeho přesnost je pro velká n v praktických úlohách obvykle postačující.

Řešený příklad 7.4

Při průzkumu zájmu o nový výrobek odpovědělo ze 400 dotázaných zákazníků supermarketu STAMET kladně na otázku, zda si nový výrobek koupí, 80 zákazníků.

Určete bodový a intervalový odhad podílu zákazníků p ze základního souboru všech zákazníků supermarketu STAMET.

Ř e š e n í:

Protože $x = 80$ a $n = 400$, je bodový odhad $p = \frac{80}{400} = 0,2$, tedy 20 % všech zákazníků supermarketu STAMET si chce koupit nový výrobek.

Z tabulky **T1** pro spolehlivost 0,95 je $u_{0,975} = 1,960$, takže intervalový odhad podílu zákazníků p se spolehlivostí 0,95 je

$$p \in \left\langle \frac{80}{400} - 1,96 \sqrt{\frac{\frac{80}{400} \left(1 - \frac{80}{400}\right)}{400}}; \frac{80}{400} + 1,96 \sqrt{\frac{\frac{80}{400} \left(1 - \frac{80}{400}\right)}{400}} \right\rangle = \langle 0,1608; 0,2392 \rangle.$$

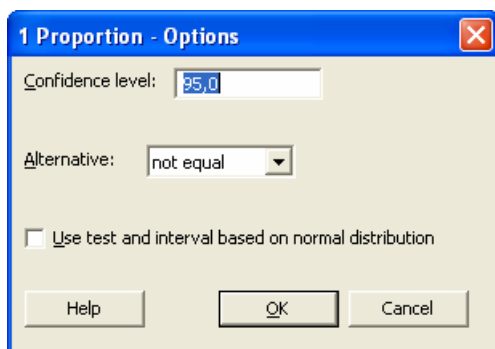
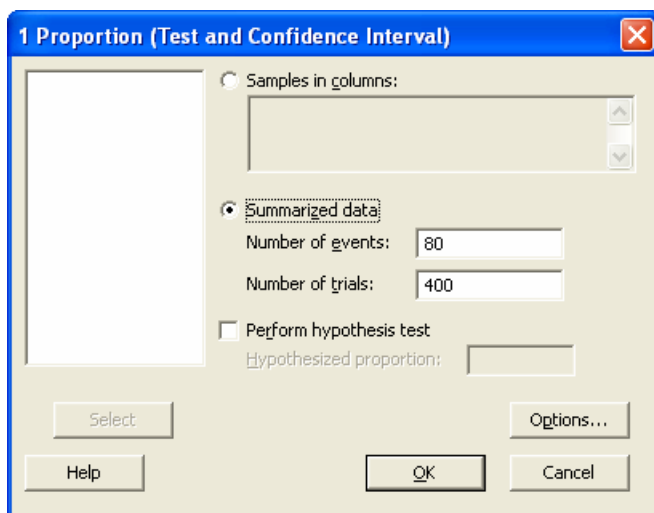
Pro spolehlivost 0,99 obdržíme analogickým způsobem intervalový odhad

$$p \in \langle 0,1485; 0,2515 \rangle.$$

Se spolehlivostí 0,95, resp. 0,99, si nový výrobek koupí přibližně 16 až 24 %, resp. 15 až 25 %, všech zákazníků supermarketu STAMET. Pokud má STAMET celkem 10 000 zákazníků, lze víceméně očekávat, že prodá cca 2 000 nových výrobků. Z intervalového odhadu můžeme pak se spolehlivostí 0,95 usuzovat, že STAMET prodá přibližně $10\,000 \cdot 0,16 = 1\,600$ až $10\,000 \cdot 0,24 = 2\,400$ nových výrobků.

Postup v Minitabu:

Stat > Basic Statistics > 1 Proportion



Pokud chceme dostat stejné výsledky jako při ručním výpočtu zaškrtneme aproximaci normálním rozdělením (Use test and interval based on normal distribution), ta ovšem není tak přesná, jako standardní výpočet přes binomické rozdělení.

Výstup z Minitabu:

Test and CI for One Proportion

Sample	X	N	Sample p	95% CI
1	80	400	0,200000	(0,161895; 0,242610)

Test and CI for One Proportion

Sample	X	N	Sample p	99% CI
1	80	400	0,200000	(0,151087; 0,256239)

3 Testování statistických hypotéz

3.1 Statistická hypotéza a její test

Při sledování náhodných veličin a náhodných vektorů jsme často nuceni ověřit určité předpoklady či domněnky o jejich vlastnostech pomocí jejich pozorovaných hodnot. Jedná se např. o rozhodnutí, zda nová technologie, seřízení stroje, reklama, změna financování, řízení firmy apod. vedly ke změně ve sledovaných parametrech výrobku, obratu, zisku apod., anebo zda jakost dodávky výrobků či surovin má dohodnutou úroveň.

Statistická hypotéza H je tvrzení o vlastnostech rozdělení pravděpodobnosti pozorované náhodné veličiny X s distribuční funkcí $F(x, \vartheta)$ nebo náhodného vektoru (X, Y) se simultánní distribuční funkcí $F(x, y, \vartheta)$ apod. Postup, jímž ověřujeme danou hypotézu, se nazývá **test statistické hypotézy**. Proti testované hypotéze H , nazývané také **nulová hypotéza**, stavíme tzv. **alternativní hypotézu** \bar{H} , kterou volíme dle požadavků úlohy. Jestliže H je hypotéza, že parametr ϑ má hodnotu ϑ_0 , píšeme $H : \vartheta = \vartheta_0$. Příklad $\bar{H} : \vartheta \neq \vartheta_0$ je **dvoustranná** alternativní hypotéza a $\bar{H} : \vartheta > \vartheta_0$, resp. $\bar{H} : \vartheta < \vartheta_0$, je **jednostranná** alternativní hypotéza. Hypotéza může být **jednoduchá**, jestliže uvažujeme jedinou hypotetickou hodnotu $\vartheta = \vartheta_0$ anebo naopak **složená**, např. $\vartheta \neq \vartheta_0$. Dále rozdělujeme hypotézy na **parametrické**, kdy jde tvrzení o parametrech pozorované náhodné veličiny X , a na **neparametrické**, kdy jde o tvrzení o kvalitativních vlastnostech této náhodné veličiny.

Testovaná hypotéza H se někdy v literatuře, resp. aplikacích na PC, označuje symbolem H_0 , resp. $H0$, a alternativní hypotéza \bar{H} symbolem H_1 , H_A , resp. H_A .

Pro testování hypotézy $H : \vartheta = \vartheta_0$ proti nějaké zvolené alternativní hypotéze \bar{H} se konstruuje vhodná statistika $T(X_1, \dots, X_n)$, tzv. **testové kritérium**. Obor hodnot testového kritéria $T(X_1, \dots, X_n)$ se za předpokladu, že platí hypotéza $H : \vartheta = \vartheta_0$, rozdělí na dvě disjunktní podmnožiny: **kritický obor** W_α a jeho doplněk \bar{W}_α (viz obr. 3.2). Kritický obor W_α se vzhledem k alternativní hypotéze \bar{H} stanoví tak, aby pravděpodobnost toho, že testové kritérium $T(X_1, \dots, X_n)$ nabude hodnotu z kritického oboru W_α , byla α (přesněji pro diskrétní náhodnou veličinu T nejvýše α). Číslo $\alpha > 0$ je

hladina významnosti testu a volíme ji blízkou nule, obvykle 0,05 anebo 0,01. Hladina významnosti se někdy uvádí také v % (např. v softwarových aplikacích pro PC), tedy obvykle 5 % anebo 1 %.

Rozhodnutí o hypotéze H pomocí pozorovaných hodnot náhodné veličiny X je pak založeno na následující konvenci. Jestliže tzv. **pozorovaná hodnota testového kritéria** $t = T(x_1, \dots, x_n)$ na získaném statistickém souboru (x_1, \dots, x_n) padne do kritického oboru, tedy $t \in W_\alpha$, **zamítáme** hypotézu H a současně **nezamítáme** hypotézu \bar{H} na hladině významnosti α . Jestliže naopak nepadne t do kritického oboru, tedy $t \in \bar{W}_\alpha$, **nezamítáme** hypotézu H a současně **zamítáme** hypotézu \bar{H} na hladině významnosti α . Nezamítnutí hypotézy H , resp. \bar{H} , neznamená ještě prokázání její platnosti, neboť jsme na základě realizace náhodného výběru získali pouze informace, které nestačí na její zamítnutí. Je-li to možné, je vhodné před **přijetím** dané hypotézy zvětšit rozsah statistického souboru a znovu hypotézu H testovat.

Při testování hypotézy H mohou nastat čtyři možnosti znázorněné na obr. 3.1. Jestliže zamítáme neplatnou hypotézu anebo nezamítáme platnou hypotézu, je vše v pořádku, avšak při rozhodnutí o hypotéze H na základě testu se můžeme dopustit jedné ze dvou chyb:

Chyba prvního druhu nastane, jestliže hypotéza H platí, avšak $t \in W_\alpha$, takže hypotézu H zamítáme. Pravděpodobnost této chyby je hladina významnosti $\alpha = P(T \in W_\alpha / H)$.

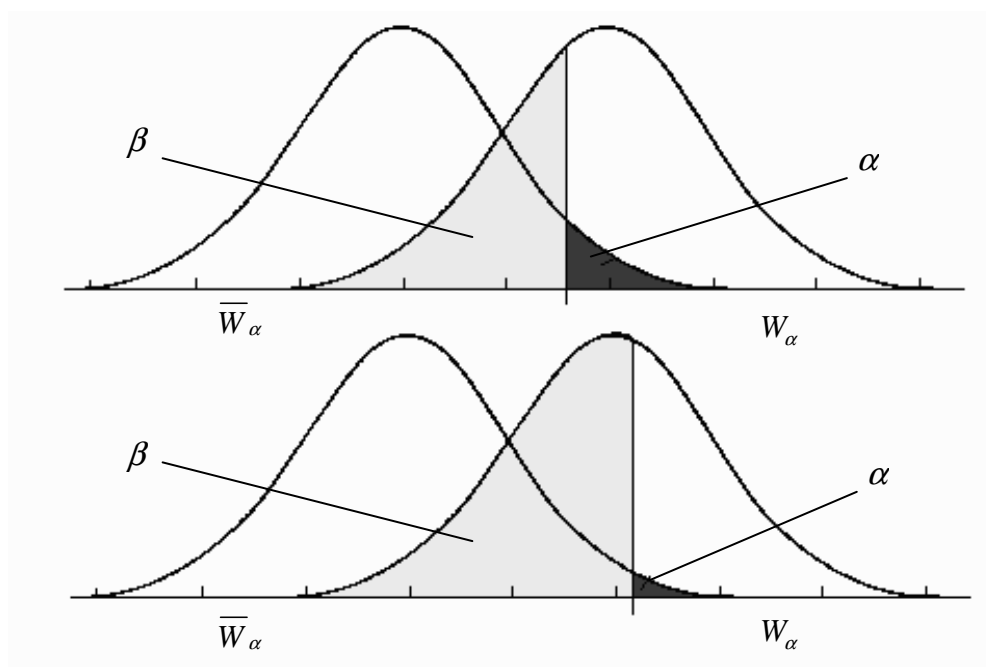
Chyba druhého druhu nastane, jestliže hypotéza H neplatí, avšak $t \notin W_\alpha$ (tj. $t \in \bar{W}_\alpha$), takže hypotézu H nezamítáme. Pravděpodobnost této chyby je $\beta = P(T \notin W_\alpha / \bar{H})$ a pravděpodobnost $1 - \beta = P(T \in W_\alpha / \bar{H})$ je tzv. **síla testu**.

H	PLATÍ	NEPLATÍ
ZAMÍTÁME	CHYBA 1. DRUHU	-----
NEZAMÍTÁME	-----	CHYBA 2. DRUHU

Obr. 3.1

Hladina významnosti, tj. pravděpodobnost chyby prvního druhu α má ten praktický význam, že při mnoha opakovaných realizacích náhodného výběru (např. řádově v tisících) a současné platnosti testované hypotézy H se v přibližně $100\alpha\%$ testech této hypotézy zmýlíme, tedy zamítneme platnou hypotézu. Podobně když hypotéza H

neplatí, tak se v přibližně $100\beta\%$ testech zmýlíme a nezamítneme ji. Avšak snížením hladiny významnosti α se při nezměněném rozsahu statistického souboru n zvýší β a naopak, takže pro zvolenou hladinu významnosti α zajišťujeme snížení β zvýšením rozsahu n . Riziko chyb prvního i druhého druhu nelze v reálných úlohách eliminovat, pouze je můžeme snížit. Vztah mezi α a β je ilustrován na obr. 8.2, kde pro jednoduchost je i alternativní hypotéza \bar{H} jednoduchá. Na tomto obrázku křivky vlevo odpovídají hustotě (pravděpodobnostní funkci) testového kritéria T při platnosti hypotézy H a křivky vpravo odpovídají hustotě (pravděpodobnostní funkci) testového kritéria T při platnosti hypotézy \bar{H} .



Obr. 3.2

Vzhledem k tomu, že testové kritérium T je náhodná veličina, bývá obor \bar{W}_α ve tvaru intervalu, např. $\langle t_1; t_2 \rangle$, kde t_1, t_2 jsou kvantily statistiky T (tzv. **kritické hodnoty**), podobně jako u intervalových odhadů. Poznamenejme, že intervalové odhady lze přímo použít k testování statistických hypotéz. Např. při testu hypotézy $H: \vartheta = \vartheta_0$ proti alternativě $\bar{H}: \vartheta \neq \vartheta_0$ na hladině spolehlivosti α , můžeme místo testového kritéria vzít oboustranný intervalový odhad parametru ϑ se spolehlivostí $1 - \alpha$. Jestliže tento intervalový odhad obsahuje hodnotu ϑ_0 , hypotézu H nezamítáme na hladině

významnosti α a naopak. Více o statistických hypotézách a jejich testech (např. *neparametrické metody*) lze nalézt např. v [2], [3], [8], [15], [17], [30].

Řešený příklad 3.1 (teoretický; nebude u zkoušky)

Předpokládejme, že pozorovaná náhodná veličina X má normální rozdělení, jehož rozptyl σ^2 známe. V případě testu hypotézy, že X má střední hodnotu rovnu číslu μ_0 oproti alternativní hypotéze, že střední hodnotu má jinou, jde o test nulové hypotézy $H : \mu = \mu_0$ s dvoustrannou alternativní hypotézou $\bar{H} : \mu \neq \mu_0$. Výběrový průměr \bar{X} má za předpokladu, že platí hypotéza H , normální rozdělení pravděpodobnosti $N(\mu_0, \sigma^2/n)$ a výběrová charakteristika

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n},$$

kteřou vezmeme za testové kritérium, má dle kapitoly 6 normované normální rozdělení $N(0;1)$. Jestliže vzhledem ke dvoustranné alternativní hypotéze $\bar{H} : \mu \neq \mu_0$ zvolíme pro hladinu významnosti α kritický obor $W_\alpha = (-\infty; t_1) \cup (t_2; +\infty)$ tak, aby platilo

$$P(T < t_1) = P(t_2 < T) = \frac{\alpha}{2},$$

dostaneme pro kritické hodnoty t_1, t_2 rovnice

$$\Phi(t_1) = \frac{\alpha}{2}, \Phi(t_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Odtud je $t_1 = u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$ a $t_2 = u_{1-\alpha/2}$, kde $u_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil normovaného normálního rozdělení $N(0; 1)$. Hodnoty kvantilů lze získat z tabulky T1, odkud pro hladinu významnosti $\alpha = 0,05$ je $u_{0,975} = 1,960$ a pro $\alpha = 0,01$ je $u_{0,995} = 2,576$.

Pozorovaná hodnota testového kritéria T pak je

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}.$$

Jestliže hodnota $t \in \bar{W}_\alpha = \langle -u_{1-\alpha/2}; u_{1-\alpha/2} \rangle$, pak na hladině významnosti α nezamítáme hypotézu $H : \mu = \mu_0$ a zamítáme alternativní hypotézu $\bar{H} : \mu \neq \mu_0$. Naopak jestliže $t \notin W_\alpha$ (tj. $t \in \bar{W}_\alpha$), pak zamítáme na hladině významnosti α hypotézu $H : \mu = \mu_0$ a nezamítáme alternativní hypotézu $\bar{H} : \mu \neq \mu_0$. Podobně lze získat obor nezamítnutí $\bar{W}_\alpha = \langle -\infty; u_{1-\alpha/2} \rangle$ pro alternativní hypotézu $\bar{H} : \mu > \mu_0$ a $\bar{W}_\alpha = \langle -u_{1-\alpha/2}; \infty \rangle$ pro

alternativní hypotézu $\bar{H} : \mu < \mu_0$. Hypotézu H by také bylo možno testovat na hladině významnosti α pomocí dvoustranného intervalového odhadu, resp. jednostranných intervalových odhadů, parametru μ se spolehlivostí $1 - \alpha$ z řešeného příkladu 7.1.

Při testování statistických hypotéz na PC pomocí statistického software se místo kritického oboru \bar{W}_α obvykle používá následující tzv. *P-hodnota*. Jestliže např. testujeme hypotézu $H : \mu = \mu_0$ proti dvoustranné alternativní hypotéze $\bar{H} : \mu \neq \mu_0$, pak pro pozorovanou hodnotu t testového kritéria T je *P-hodnotou* je číslo $1 - P(-t \leq T \leq t)$. Výše uvedené konvenci rozhodnutí o daných hypotézách pomocí kritického oboru, resp. oboru nezamítnutí, odpovídá následující adekvátní postup. Jestliže $P < \alpha$, pak *zamítáme* hypotézu H a současně *nezamítáme* hypotézu \bar{H} na hladině významnosti α . Jestliže naopak $P \geq \alpha$, pak *nezamítáme* hypotézu H a současně *zamítáme* hypotézu \bar{H} na hladině významnosti α .

3.2 Testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení

V tomto odstavci předpokládáme, že náhodné veličiny X a Y , resp. náhodný vektor (X, Y) , mají normální rozdělení pravděpodobnosti. Předpoklad o normálním rozdělení pravděpodobnosti lze testovat pomocí testů popsaných v dalším odstavci této kapitoly. Dále uvádíme pouze testová kritéria pro dvoustranné alternativní hypotézy, např. $\bar{H} : \mu \neq \mu_0$ apod. Testy hypotéz H pro jednostranné alternativní hypotézy $\bar{H} : \mu > \mu_0$ a $\bar{H} : \mu < \mu_0$ se provádějí pomocí stejných testových kritérií a odlišují se pouze jednostrannými kritickými obory, resp. obory nezamítnutí, a odpovídajícími kritickými hodnotami - viz např. [2], [3], [8], [15], [17], [30]. Poznamenejme, že testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení se velmi často používají při statistickém zpracování naměřených dat z oblasti materiálových charakteristik, obrobiteľnosti, trvanlivosti apod.

Test hypotézy $H : \mu = \mu_0$ při neznámém rozptylu σ^2 . Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n-1}$$

a $\bar{W}_\alpha = \langle -t_{1-\alpha/2}; t_{1-\alpha/2} \rangle$, kde $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil Studentova rozdělení $S(k)$ s

$k = n - 1$ stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T2**. Jedná se o tzv. *t - test* nebo *Studentův test pro jeden výběr*.

Řešený příklad 3.1

Měřením délky 10 válečků byly získány empirické charakteristiky $\bar{x} = 5,37$ mm a $s^2 = 0,0019$ mm² (viz řešený příklad 1.1). Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu, že střední naměřená délka válečku je 5,40 mm, tedy $H: \mu = 5,40$.

Ř e š e n í:

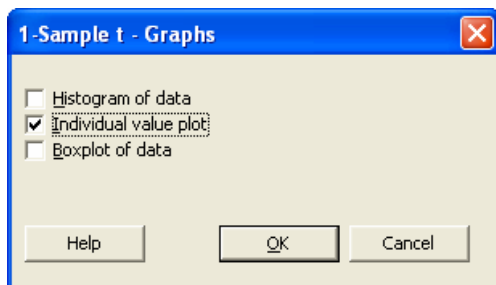
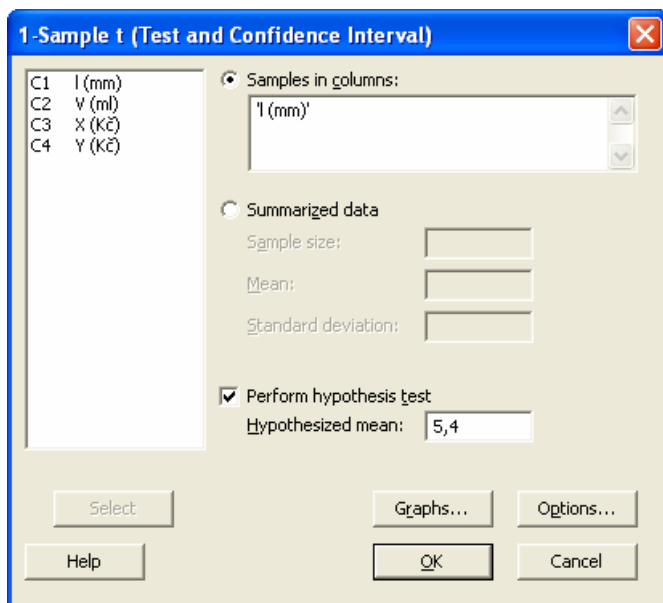
Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{5,37 - 5,40}{\sqrt{0,0019}} \sqrt{10 - 1} = -2,0647.$$

Pro $10 - 1 = 9$ stupňů volnosti je $t_{0,975} = 2,262$ z tabulky **T2**, takže $\bar{W}_{0,05} = <-2,262; 2,262>$. Protože $t \in \bar{W}_{0,05}$, hypotézu nezamítáme. Pro testování této hypotézy bylo možno použít také intervalový odhad se spolehlivostí 0,95 z příkladu 2.2. Protože tento odhad obsahuje hypotetickou hodnotu 5,40, nezamítáme danou hypotézu na hladině významnosti $1 - 0,95 = 0,05$.

Postup v Minitabu:

Stat > Basic Statistics > 1-Sample t



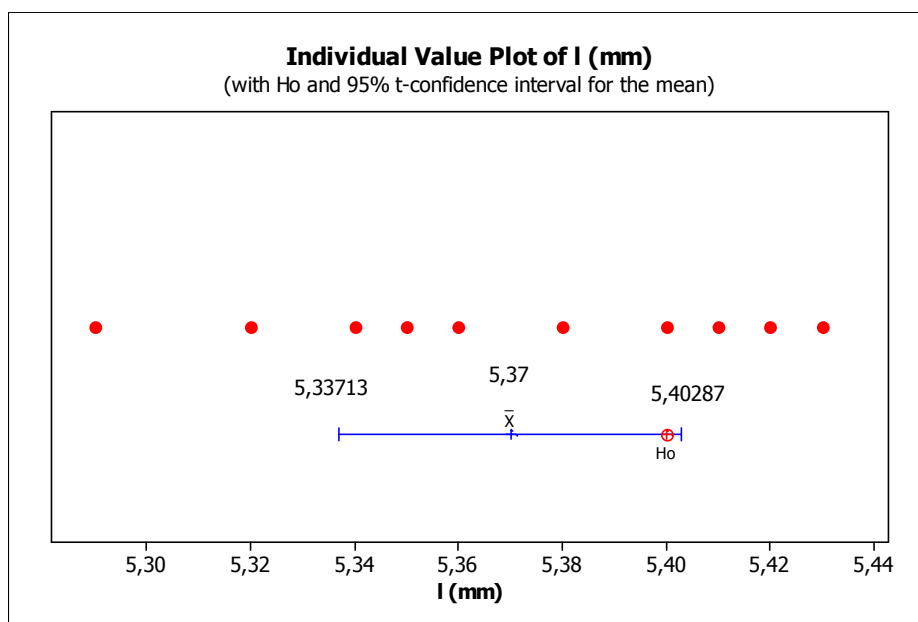
Výstup z Minitabu:

One-Sample T: l (mm)

Test of $\mu = 5,4$ vs not $= 5,4$

Variable	N	Mean	StDev	SE Mean	95% CI	T	P
l (mm)	10	5,3700	0,0459	0,0145	(5,3371; 5,4029)	-2,06	0,069

Protože $p = 0,069 > 0,05$, hypotézu $H : \mu = 5,40$ nezamítáme na hladině významnosti 0,05.



Test hypotézy $H : \sigma^2 = \sigma_0^2$. Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{ns^2}{\sigma_0^2}$$

a $\bar{W}_\alpha = \langle \chi_{\alpha/2}^2; \chi_{1-\alpha/2}^2 \rangle$, kde χ_P^2 je P -kvantil Pearsonova rozdělení $\chi^2(k)$ s $k = n - 1$ stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T3**. Jedná se o tzv. **Pearsonův test**.

Řešený příklad 3.2

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že rozptyl naměřené délky válečku z příkladu 3.1 je $0,0025 \text{ mm}^2$, tedy $H : \sigma^2 = 0,0025$.

Ř e š e n í:

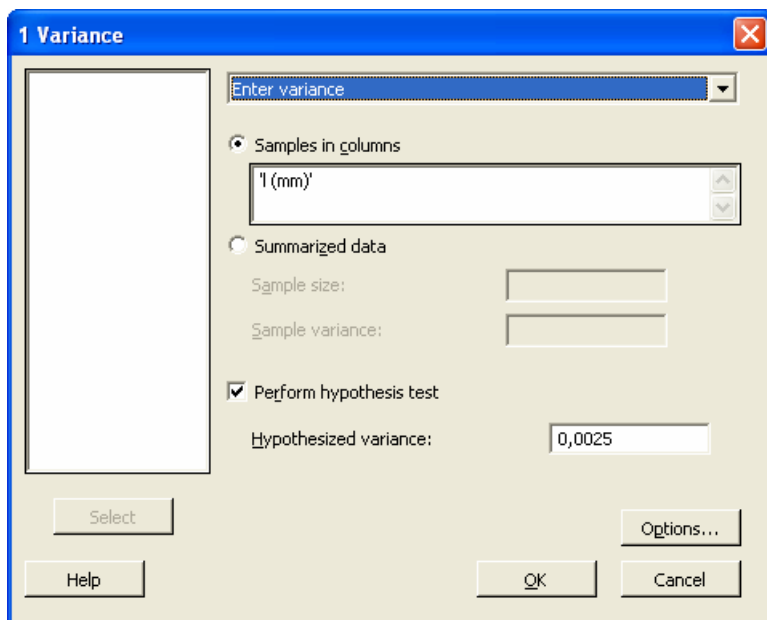
Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{10 \cdot 0,0019}{0,0025} = 7,6.$$

Pro $10 - 1 = 9$ stupňů volnosti je $\chi^2_{0,025} = 2,700$ a $\chi^2_{0,975} = 19,023$ z tabulky **T3**, takže

$\bar{W}_{0,05} = \langle 2,700; 19,023 \rangle$. Protože $t \in \bar{W}_{0,05}$, hypotézu nezamítáme.

Postup v Minitabu:



Test and CI for One Variance: l (mm)

Method

Null hypothesis Sigma-squared = 0,0025
 Alternative hypothesis Sigma-squared not = 0,0025

The standard method is only for the normal distribution.
 The adjusted method is for any continuous distribution.

Statistics

Variable	N	StDev	Variance
l (mm)	10	0,0459	0,00211

95% Confidence Intervals

Variable	Method	CI for StDev	CI for Variance
l (mm)	Standard	(0,0316; 0,0839)	(0,00100; 0,00704)
	Adjusted	(0,0339; 0,0713)	(0,00115; 0,00509)

Tests

Variable	Method	Chi-Square	DF	P-Value
l (mm)	Standard	7,60	9,00	0,850
	Adjusted	12,52	14,82	0,747

Protože $p = 0,850 > 0,05$, hypotézu $H : \sigma^2 = 0,0025$ nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Test hypotézy $H : \rho = \rho_0$. Pozorovaná hodnota testového kritéria pro $n \geq 10$,
 $|r| \neq 1$ a $|\rho_0| \neq 1$ je

$$t = \left(\ln \frac{1+r}{1-r} - \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} - \frac{\rho_0}{n-1} \right) \frac{\sqrt{n-3}}{2}$$

a $\bar{W}_\alpha = \langle -u_{1-\alpha/2}; u_{1-\alpha/2} \rangle$, kde $u_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil normálního rozdělení $N(0; 1)$,

jehož hodnoty lze získat z tabulky **T1**.

Řešený příklad 3.3

Sledováním nákladů X a ceny Y stejného výrobku u deseti výrobců byl získán dvourozměrný statistický soubor s koeficientem korelace $r = 0,82482$ (viz řešení příklad 1.3). Na hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že veličiny X a Y jsou nekorelované (vzhledem k normálnímu rozdělení nezávislé), tedy $H : \rho = 0$.

Ř e š e n í:

Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \left(\ln \frac{1+0,82482}{1-0,82482} - \ln \frac{1+0}{1-0} - \frac{0}{10-1} \right) \frac{\sqrt{10-3}}{2} \approx 3,1001.$$

Pro danou hladinu významnosti je $u_{0,995} = 2,576$ z tabulky **T1**, takže $\bar{W}_{0,01} = \langle -2,576; 2,576 \rangle$. Protože $t \notin \bar{W}_{0,01}$, hypotézu zamítáme a považujeme X, Y za závislé.

Test hypotézy $H : \mu(X) = \mu(Y)$ *pro dvojice*. Označme pro pozorované dvojice (x_i, y_i) , kde $i = 1, \dots, n$, náhodného vektoru (X, Y) jejich rozdíly $d_i = x_i - y_i$ a odpovídající empirické charakteristiky \bar{d} a $s^2(d)$. Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\bar{d}}{s(d)} \sqrt{n-1}$$

a $\bar{W}_\alpha = \langle -t_{1-\alpha/2}; t_{1-\alpha/2} \rangle$, kde $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil Studentova rozdělení $S(k)$

s $k = n - 1$ stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T2**.

Uvedený test se také nazývá ***t - test (Studentův test) pro párové hodnoty***.

Řešený příklad 3.4

Měřením teploty dvěma přístroji byly během osmi dnů získány dvojice $(x_i, y_i) = (51,8; 49,5), (54,9; 53,3), (52,2; 50,6), (53,3; 52,0), (51,6; 46,8), (54,1; 50,5), (54,2; 52,1), (53,3; 53,0)$ ($^{\circ}\text{C}$). Na hladině významnosti 1% testujte hypotézu, že rozdíl středních hodnot je nevýznamný, tedy $H: \mu(X) = \mu(Y)$.

Ř e š e n í:

Pro $d_i = x_i - y_i, i = 1, \dots, 8$, dostaneme $\bar{d} = 2,2^{\circ}\text{C}$ a $s(d) = 1,3172^{\circ}\text{C}$. Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{2,2}{1,3172} \sqrt{8-1} \approx 4,4190.$$

Pro $8 - 1 = 7$ stupňů volnosti je $t_{0,995} = 3,499$ z tabulky **T2**, takže $\bar{W}_{0,01} = <-3,499; 3,499>$. Protože $t \notin \bar{W}_{0,01}$, hypotézu zamítáme na hladině významnosti 1% a považujeme rozdíl naměřených hodnot za statisticky významný.

Postup v Minitabu je zřejmý: Stat > Basic Statistics > Paired t

U dalších testů předpokládáme, že pozorováním dvou nezávislých náhodných veličin X a Y s normálními rozděleními s parametry $\mu(X), \sigma^2(X)$ a $\mu(Y), \sigma^2(Y)$ byly získány realizace nezávislých náhodných výběrů s rozsahy n_1 a n_2 .

Test hypotézy $H: \mu(X) - \mu(Y) = \mu_0$ při neznámých rozptylech $\sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$. Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_0}{\sqrt{n_1 s^2(x) + n_2 s^2(y)}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

a $\bar{W}_\alpha = \langle -t_{1-\alpha/2}; t_{1-\alpha/2} \rangle$, kde $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil Studentova rozdělení $S(k)$ s $k = n_1 + n_2 - 2$ stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T2**. Jedná se o

tzv. **t - test** nebo **Studentův test pro dva výběry při stejných rozptylech**.

Řešený příklad 3.5

Zkouškami pevnosti drátů vyrobených dvěma různými technologiemi byly získány dva statistické soubory s charakteristikami $n_1 = 33$, $\bar{x} = 5,4637$ kN, $s^2(x) = 0,3302$ kN², $n_2 = 28$, $\bar{y} = 6,1179$ kN, $s^2(y) = 0,4522$ kN². Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že rozdílné technologie nemají vliv na střední pevnost drátu (za předpokladu stejných rozptylů

$\sigma^2(X)$ a $\sigma^2(Y)$, tedy $H: \mu(X) - \mu(Y) = 0$.

Ř e š e n í:

Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{5,4637 - 6,1179 - 0}{\sqrt{33 \cdot 0,3302 + 28 \cdot 0,4522}} \sqrt{\frac{33 \cdot 28 (33 + 28 - 2)}{33 + 28}} \approx 4,030.$$

Pro $33 + 28 - 2 = 59$ stupňů volnosti je $t_{0,975} = 2,001$ interpolací z tabulky **T2**, takže $\bar{W}_{0,05} = \langle -2,001; 2,001 \rangle$. Protože $t \notin \bar{W}_{0,05}$, hypotézu zamítáme. Rozdílné technologie mají vliv na střední pevnost drátu.

Postup v Minitabu je zřejmý: Stat > Basic Statistics > 2-Sample t (zaškrtneme Assume equal variance)

Test hypotézy $H: \mu(X) - \mu(Y) = \mu_0$ **při neznámých rozptylech** $\sigma^2(X) \neq \sigma^2(Y)$.

Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2(x)}{n_1 - 1} + \frac{s^2(y)}{n_2 - 1}}}$$

a $\bar{W}_\alpha = \langle -\bar{t}_{1-\alpha/2}; \bar{t}_{1-\alpha/2} \rangle$, kde

$$\bar{t}_{1-\alpha/2} = \frac{\frac{s^2(x)}{n_1 - 1} t(x) + \frac{s^2(y)}{n_2 - 1} t(y)}{\frac{s^2(x)}{n_1 - 1} + \frac{s^2(y)}{n_2 - 1}}$$

a $t(x)$, resp. $t(y)$, je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil Studentova rozdělení $S(k)$ s $k = n_1 - 1$, resp. $n_2 - 1$, stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T2**. Jedná se o

tzv. **t - test** nebo **Studentův test pro dva výběry při různých rozptylech**.

Řešený příklad 3.7

Při vyšetřování životnosti výrobků v různých systémech extrémních provozních podmínek byly získány dva statistické soubory s charakteristikami $n_1 = 21$, $\bar{x} = 3,581$, $s^2(x) = 0,114$, $n_2 = 23$, $\bar{y} = 3,974$, $s^2(y) = 0,041$ (životnost výrobků je v hodinách). Za předpokladu různých rozptylů $\sigma^2(X)$ a $\sigma^2(Y)$ testujte na hladině významnosti 0,05, že první systém extrémních provozních podmínek zvyšuje oproti druhému systému extrémních provozních podmínek střední životnost výrobku o 0,5 hod., tedy hypotézu $H: \mu(X) - \mu(Y) = -0,5$.

Ř e š e n í:

Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{3,581 - 3,974 - (-0,5)}{\sqrt{\frac{0,114}{21-1} + \frac{0,041}{23-1}}} \approx 1,2303.$$

Z tabulky **T2** pro $1 - \alpha/2 = 0,975$ je $t(x) = 2,086$ pro $21 - 1 = 20$ stupňů volnosti a $t(y) = 2,074$ pro $23 - 1 = 22$ stupňů volnosti, takže

$$\bar{t}_{0,975} = \frac{\frac{0,114}{21-1} 2,086 + \frac{0,041}{23-1} 2,074}{\frac{0,114}{21-1} + \frac{0,041}{23-1}} \approx 2,083.$$

a $\bar{W}_{0,05} = \langle -2,083; 2,083 \rangle$. Protože $t \in \bar{W}_{0,05}$, hypotézu o zvýšení střední životnosti o 0,5 hod. nezamítáme.

Postup v Minitabu je zřejmý: Stat > Basic Statistics > 2-Sample t (nezaškrtneme Assume equal variance)

Test hypotézy $H: \sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$. Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\max\left(\frac{n_1 s^2(x)}{n_1 - 1}, \frac{n_2 s^2(y)}{n_2 - 1}\right)}{\min\left(\frac{n_1 s^2(x)}{n_1 - 1}, \frac{n_2 s^2(y)}{n_2 - 1}\right)},$$

kde klademe $\bar{W}_\alpha = \langle 1; F_{1-\alpha/2} \rangle$ a $F_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil Fisherova - Snedecorova

rozdělení $F(k_1, k_2)$ se stupni volnosti $k_1 = n_1 - 1$ a $k_2 = n_2 - 1$ pro $\frac{n_1 s^2(x)}{n_1 - 1} \geq \frac{n_2 s^2(y)}{n_2 - 1}$

anebo $k_1 = n_2 - 1$ a $k_2 = n_1 - 1$ pro $\frac{n_1 s^2(x)}{n_1 - 1} \leq \frac{n_2 s^2(y)}{n_2 - 1}$. Kvantily tohoto rozdělení jsou

uvedeny v tabulce **T4**. Jedná se o tzv. **F - test** nebo **Fisherův test**. Pomocí něho lze testovat předpoklady o rozptylech v obou předcházejících testech.

Řešený příklad 3.8

Na hladině významnosti 0,05 ověřte předpoklad o různých rozptylech v řešeném příkladu 8.7, tedy že $\sigma^2(X) \neq \sigma^2(Y)$, kde $s^2(x) = 0,114$, $n_1 = 21$, $s^2(y) = 0,041$, $n_2 = 23$.

Ř e š e n í:

Testujeme naopak hypotézu $H : \sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$. Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\max\left(\frac{21 \cdot 0,114}{21-1}; \frac{23 \cdot 0,041}{23-1}\right)}{\min\left(\frac{21 \cdot 0,114}{21-1}; \frac{23 \cdot 0,041}{23-1}\right)} \approx \frac{\max(0,11970; 0,04286)}{\min(0,11970; 0,04286)} \approx 2,7928.$$

Z tabulky **T4** je pro $k_1 = 21 - 1 = 20$ a $k_2 = 23 - 1 = 22$ stupňů volnosti $F_{0,975} = 2,389$, takže $\bar{W}_{0,05} = <1; 2,389>$. Protože $t \notin \bar{W}_{0,05}$, hypotézu zamítáme a předpoklad o různých rozptylech v příkladu 8.7 považujeme za správný.

Postup v Minitabu je zřejmý: Stat > Basic Statistics > 2 Variances

3.3 Testy hypotéz o parametru binomického rozdělení

Předpokládáme, že pozorovaná náhodná veličina X má alternativní rozdělení pravděpodobnosti s parametrem p , tedy binomické rozdělení $Bi(1; p)$. Při testování hypotézy $H : p = p_0$ jde vlastně o test hypotézy, že podíl prvků p_0 základního souboru má sledovanou vlastnost na základě zjištění, že x prvků z n náhodně vybraných prvků ze základního souboru má sledovanou vlastnost (viz odhady parametrů v kap. 7). Dále uvádíme pouze testová kritéria pro dvoustranné alternativní hypotézy, neboť testy hypotéz pro jednostranné alternativní hypotézy se odlišují pouze tím, že mají jednostranné kritické obory a odpovídající kritické hodnoty. Testy o parametru binomického rozdělení se používají často v jakosti (test podílu neshodných výrobků nebo zmetků v celkové produkci) a při průzkumu zájmu o výrobek, služby apod.

Test hypotézy $H : p = p_0$. Pozorovaná hodnota testového kritéria pro $n > 30$ je

$$t = \frac{\frac{x}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

a $\bar{W}_\alpha = \langle -u_{1-\alpha/2}; u_{1-\alpha/2} \rangle$, kde $u_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil normálního rozdělení $N(0; 1)$,

jehož hodnoty lze získat z tabulky **T1**. Uvedený test je pouze přibližný, avšak jeho přesnost je pro velká n v praktických úlohách obvykle postačující.

Řešený příklad 3.9

Podle expertního předpokladu bude mít zájem o nový výrobek 20 % zákazníků. Ze 400 dotázaných zákazníků projevilo zájem 62 zákazníků. Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu o reálnosti předpokladu, tedy $H : p = 0,2$.

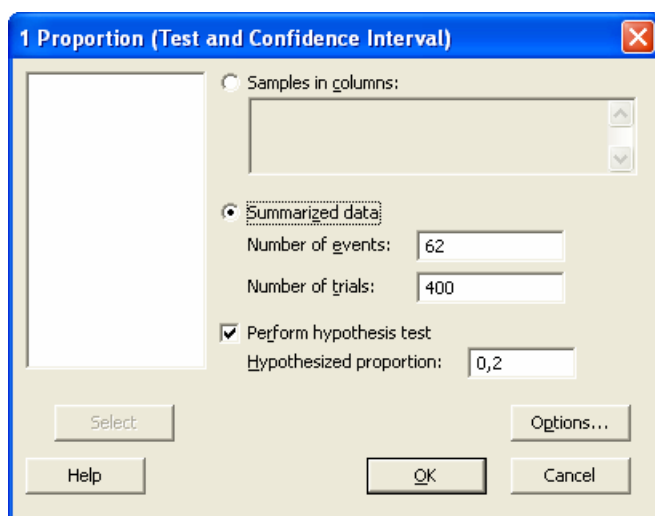
Ř e š e n í:

Rozsah obou výběru je dostatečně velký a pro $x = 62$ a $n = 400$ je pozorovaná hodnota testového kritéria

$$t = \frac{\frac{62}{400} - 0,2}{\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{400}}} = \frac{-0,045}{0,02} = -2,25.$$

Z tabulky **T1** je $u_{0,975} = 1,960$. Protože $t = -2,25 \notin \bar{W}_{0,05} = \langle -1,960; 1,960 \rangle$, hypotézu o předpokladu 20 % zájmu zamítáme na hladině významnosti 0,05. Skutečný zájem bude pravděpodobně menší. Na hladině významnosti 0,01 však hypotézu nezamítáme, neboť $u_{0,995} = 2,576$.

Postup v Minitabu: Stat > Basic Statistics > 1 Proportion



Výstup z Minitabu:

Test and CI for One Proportion

Test of $p = 0,2$ vs $p \text{ not} = 0,2$

Sample	X	N	Sample p	99% CI	Exact P-Value
1	62	400	0,155000	(0,111501; 0,206951)	0,021

Protože $p = 0,021 < 0,05$, hypotézu o předpokladu 20 % zájmu zamítáme na hladině významnosti 0,05.

U dalšího testu předpokládáme, že pozorováním dvou nezávislých náhodných veličin X , Y s alternativními rozděleními s parametry p_1 , p_2 byly získány realizace vzájemně nezávislých náhodných výběrů s rozsahy n_1 , n_2 a počty x , y prvků se sledovanou vlastností (viz odhady parametrů v kap.7).

Test hypotézy $H : p_1 = p_2$. Pozorovaná hodnota testového kritéria za předpokladu $n_1 > 50$ a $n_2 > 50$ je

$$t = \frac{\frac{x}{n_1} - \frac{y}{n_2}}{\sqrt{\bar{f}(1-\bar{f})}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

pro $\bar{f} = \frac{x+y}{n_1+n_2}$ a $\bar{W}_\alpha = \langle -u_{1-\alpha/2}; u_{1-\alpha/2} \rangle$, kde $u_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil normálního

rozdělení $N(0; 1)$, jehož hodnoty lze získat z tabulky **T1**. Uvedený test je pouze přibližný, avšak jeho přesnost je pro velké rozsahy n_1 a n_2 v praktických úlohách obvykle postačující.

Řešený příklad 3.10

Obchodní inspekce provedla 250 kontrolních nákupů potravinářského zboží a 200 kontrolních nákupů průmyslového zboží. Zjistila přitom nedostatky u 108 nákupů potravinářského zboží a u 73 nákupů průmyslového zboží. Na hladině významnosti 0,05 testujme, zda kvalita nákupů je stejná u obou druhů zboží, tedy hypotézu $H : p_1 = p_2$, kde p_1 , p_2 jsou teoretické podíly (pravděpodobnosti) nákupů s nedostatky u daných druhů zboží.

Ř e š e n í :

Rozsahy obou výběrů jsou dostatečně velké a pro $x = 108$, $n_1 = 250$, $y = 73$, $n_2 = 200$ je

$$\bar{f} = \frac{108 + 73}{250 + 200} = 0,40222,$$

takže pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\frac{108}{250} - \frac{73}{200}}{\sqrt{0,40222(1 - 0,40222)}} \sqrt{\frac{250 \cdot 200}{250 + 200}} \approx \frac{0,067 \cdot 10,5409}{0,49035} \approx 1,4403.$$

Z tabulky **T1** je $u_{0,975} = 1,960$. Protože $t = 1,4403 \in \bar{W}_{0,05} = \langle -1,960; 1,960 \rangle$, hypotézu o rovnosti podílů nákupů s nedostatky nezamítáme na hladině významnosti 0,05 a považujeme prodej obou druhů zboží za stejně nekvalitní.

Postup v Minitabu je zřejmý: Stat > Basic Statistics > 2 Proportions

3.4 Testy hypotéz o rozdělení

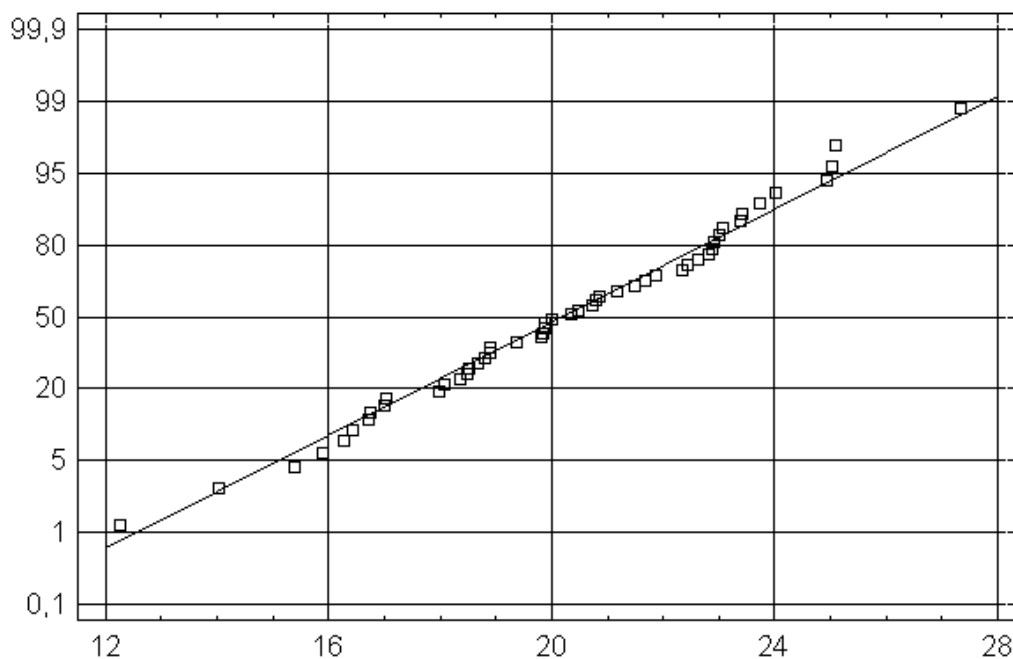
Vzhledem k tomu, že testy o parametrech rozdělení závisí na tvaru pozorovaných rozdělení, je zapotřebí testovat, zda pozorovaná náhodná veličina (náhodný vektor) má předpokládané rozdělení. Nejčastěji se užívají následující *testy hypotéz o rozdělení*.

Testy hypotéz o rozdělení se také nazývají *testy dobré shody*.

3.3a Grafická metoda

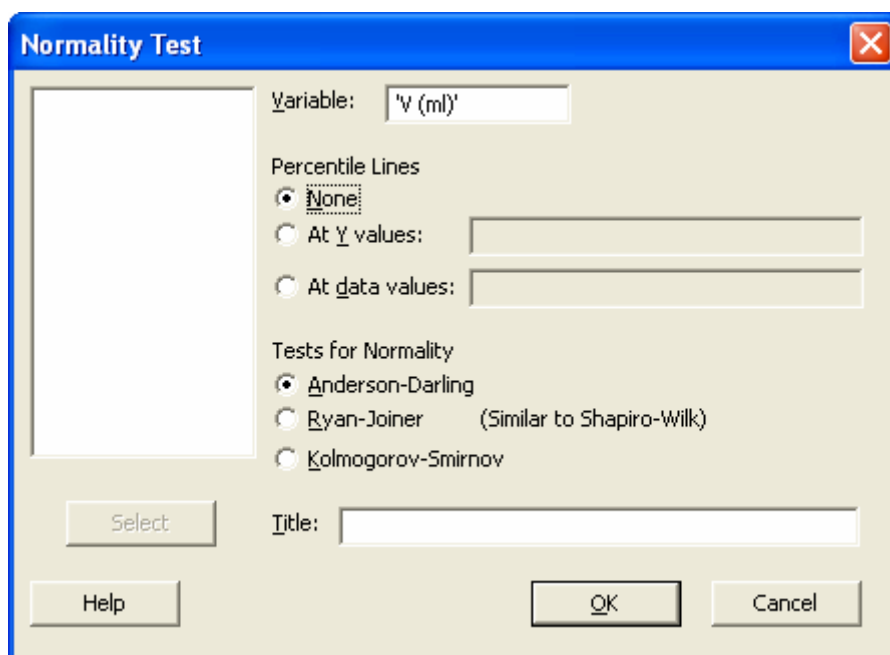
Jedná se o orientační grafický test pomocí tzv. *pravděpodobnostního papíru*, který obsahuje síť dvou navzájem kolmých soustav rovnoběžných přímk. Měřítka ve svislém směru (souřadná osa y) je zvoleno vzhledem k měřítku ve vodorovném směru (souřadná osa x) tak, aby grafem uvažované distribuční funkce $F(x, \vartheta)$ byla pro libovolné (v našem případě obvykle neznámé) hodnoty ϑ přímka. Na osu y se vynášejí hodnoty distribuční funkce, někdy i v % a někdy jsou na této ose vyznačeny také hodnoty odpovídající střední hodnotě a celočíselným násobkům směrodatné odchylky základního souboru. Na pravděpodobnostním papíru znázorňujeme graf tzv. *empirické distribuční funkce* statistického souboru (x_1, \dots, x_n) následujícím způsobem. Uspořádáme původní statistický soubor podle velikosti, takže získáme uspořádaný soubor $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$, kde $x_{(i)} \leq x_{(i+1)}$ pro $i = 1, \dots, n$. Do souřadného systému pak vyneseme body $[x_{(i)}; (i - 0,5)/n]$, resp. $[x_{(i)}; i/(n + 1)]$, pro $i = 1, \dots, n$. Ve značně zjednodušené verzi této metody se pro rozříděný statistický soubor vynášejí v tomto souřadném systému pouze body $[x_j^*; F_j/n]$, kde x_j^* jsou středy tříd a F_j jsou kumulativní četnosti, $j = 1, \dots, m$. Je-li statistický soubor realizací náhodného výběru ze základního souboru s rozdělením pravděpodobnosti pro daný pravděpodobnostní papír, leží výše uvedené body přibližně na přímce a naopak. V současné době se při uvedeném

metodě obvykle nepoužívá pravděpodobnostní papír, ale realizuje se graficky na PC. Na obr. 3.3 je ukázka grafického výstupu z PC pro normální rozdělení pravděpodobnosti.

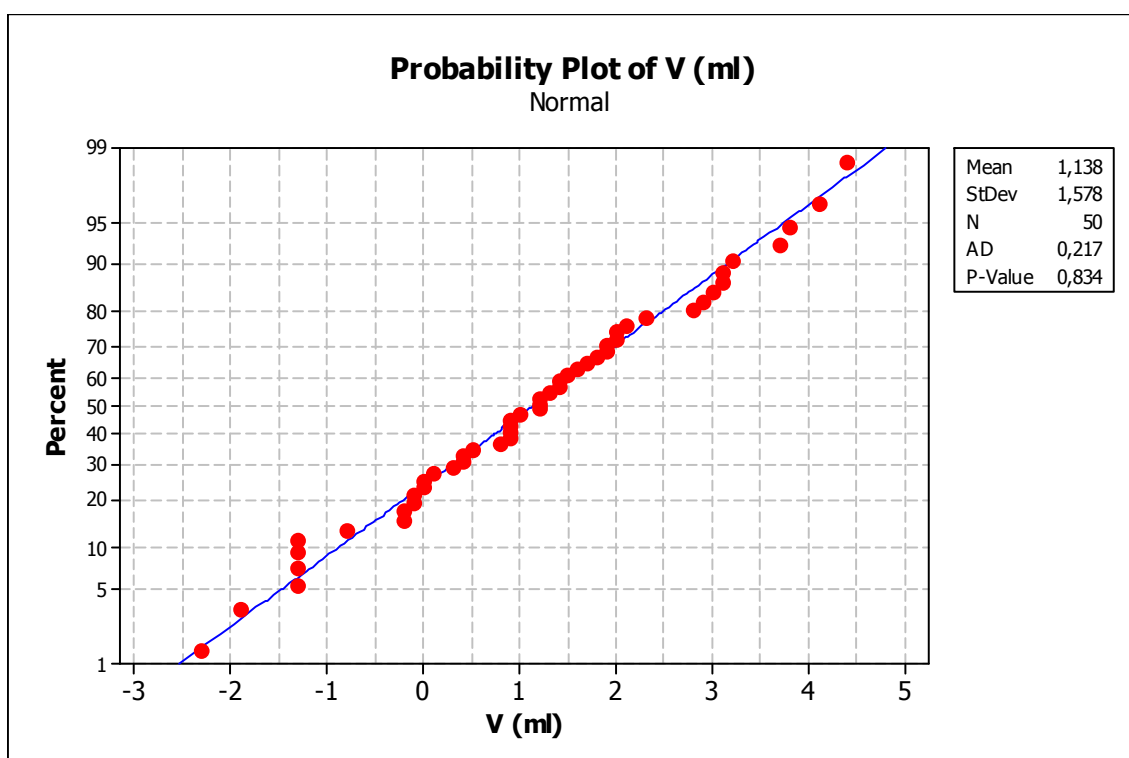


Obr. 3.3

Postup v Minitabu (Test normality):



Výstup:



Protože $p = 0,834 > 0,05$, hypotézu o výběru z normálního rozdělení nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

3.3b Test chí-kvadrát (Pearsonův test)

Testujeme hypotézu H , že pozorovaná náhodná veličina X má distribuční funkci $F(x)$, proti alternativní hypotéze \bar{H} , že X nemá distribuční funkci $F(x)$. Roztřídíme získaný statistický soubor (x_1, \dots, x_n) do m tříd s četnostmi f_j a vypočteme teoretické absolutní četnosti $\tilde{f}_j = n(F(x_j^+) - F(x_{j-1}^+))$ pro $j = 1, \dots, m$, kde x_j^+ značí pravý koncový bod j -té třídy, přičemž klademe $x_0^+ = -\infty$ a $x_m^+ = +\infty$. Statistický soubor roztřídíme tak, aby ve všech třídách byly dostatečně velké teoretické absolutní četnosti - obvykle požadujeme, aby $\tilde{f}_j > 5$. Toho lze při dostatečně velkém rozsahu n dosáhnout vhodnou volbou tříd nebo sloučením již získaných sousedních tříd. Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \sum_{j=1}^m \frac{(f_j - \tilde{f}_j)^2}{\tilde{f}_j} = \left(\sum_{j=1}^m \frac{f_j^2}{\tilde{f}_j} \right) - n$$

a $\bar{W}_\alpha = \langle 0; \chi^2_{1-\alpha} \rangle$, kde $\chi^2_{1-\alpha}$ je $(1 - \alpha)$ -kvantil Pearsonova rozdělení $\chi^2(k)$ s $k = m - q - 1$ stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T3**. Číslo q je

počet parametrů hypotetického rozdělení náhodné veličiny X , které jsme nuceni odhadnout z rozříděného statistického souboru pro určení hodnot distribuční funkce $F(x)$. Uvedený test je zjednodušenou, ale obvykle používanou variantou přesného testu chí-kvadrát - viz např. [2], [3], [8], [15], [17], [30].

Řešený příklad 3.11

Měřením rozměru X u 200 součástek vyrobených na automatické lince byl získán rozříděný

statistický soubor:

x_j^*	-17,5	-12,5	-7,5	-2,5	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
f_j	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3

Testujeme na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ hypotézu, že měřený rozměr X má normální rozdělení.

Ř e š e n í:

Z dané variační řady vypočteme aritmetický průměr $\bar{x} = 4,3$ a směrodatnou odchylku $s = 9,676$, takže bodový odhad střední hodnoty je $\mu = 4,3$ a směrodatné odchylky je $\sigma \approx 9,7$. Testujeme hypotézu H , že náhodná veličina X (tj. měřený rozměr součásti) má normální rozdělení pravděpodobnosti $N(4,3; 9,7^2)$. Sloučíme poslední dvě třídy v jednu třídu, neboť lze očekávat u původní poslední třídy nízkou teoretickou četnost. Pro

předpokládanou distribuční funkci platí $F(x) = \Phi\left(\frac{x-4,3}{9,7}\right)$ - viz kapitolu 5, kde $\Phi(u)$

je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $N(0; 1)$, jejíž hodnoty jsou v tabulce **T1**. Teoretické třídň četnosti pak určíme ze vztahu $\tilde{f}_j = 200(\Phi(u_j^+) - \Phi(u_{j-1}^+))$,

kde $u_0^+ = -\infty$, $u_j^+ = \frac{x_j^+ - 4,3}{9,7}$ pro $j = 1, \dots, 7$ a $u_8^+ = +\infty$. Např. pro $j = 1$ je

$u_1^+ = \frac{-15 - 4,3}{9,7} \approx -1,99$, takže teoretická absolutní četnost (s použitím tabulky **T1**) pak

je $\tilde{f}_1 \approx 200(\Phi(-1,99) - \Phi(-\infty)) = 200(1 - \Phi(1,99) - 0) = 200(1 - 0,97670) = 4,66$.

Potřebné výpočty a mezivýsledky jsou zachyceny v následující tabulce:

j	j -tá třída		f_j	\tilde{f}_j	$(f_j - \tilde{f}_j)^2$	$\frac{(f_j - \tilde{f}_j)^2}{\tilde{f}_j}$
	x_{j-1}^+	x_j^+				
1	$-\infty$	-15	7	4,66	5,4756	1,17502
2	-15	-10	11	9,50	2,2500	0,23684
3	-10	-5	15	19,54	20,6116	1,05484
4	-5	0	24	32,30	68,9800	2,13560
5	0	5	49	39,58	88,7364	2,24195
6	5	10	41	38,90	4,4100	0,11337
7	10	15	26	28,38	5,6644	0,19959
8	15	20	17	16,62	0,1444	0,00869
9	20	$+\infty$	10	10,52	0,2704	0,02570
Σ	–		200	200,00	–	7,19161

Pozorovaná hodnota testového kritéria je $t = 7,19161 \approx 7,192$ a počet odhadovaných parametrů je $q = 2$. Z tabulky **T3** pro počet stupňů volnosti $k = 9 - 2 - 1 = 6$ je $\chi^2_{0,95} = 12,592$. Protože $t = 7,19 \in \bar{W}_\alpha = < 0 ; 12,592 >$, nezamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že měřený rozměr X má normální rozdělení s odhadnutými parametry. Nedostatečně velká teoretická četnost v první třídě $\tilde{f}_1 = 4,66$ neovlivňuje zásadně výsledek testu. Navíc nezamítáme danou hypotézu pro výše uvedené odhadnuté parametry, takže při přesném testu chí-kvadrát bychom získali takové odhady těchto parametrů, které by nevedly k větší hodnotě testového kritéria.

Poznámka: Test chí-kvadrát (Pearsonův test) v Minitabu není.

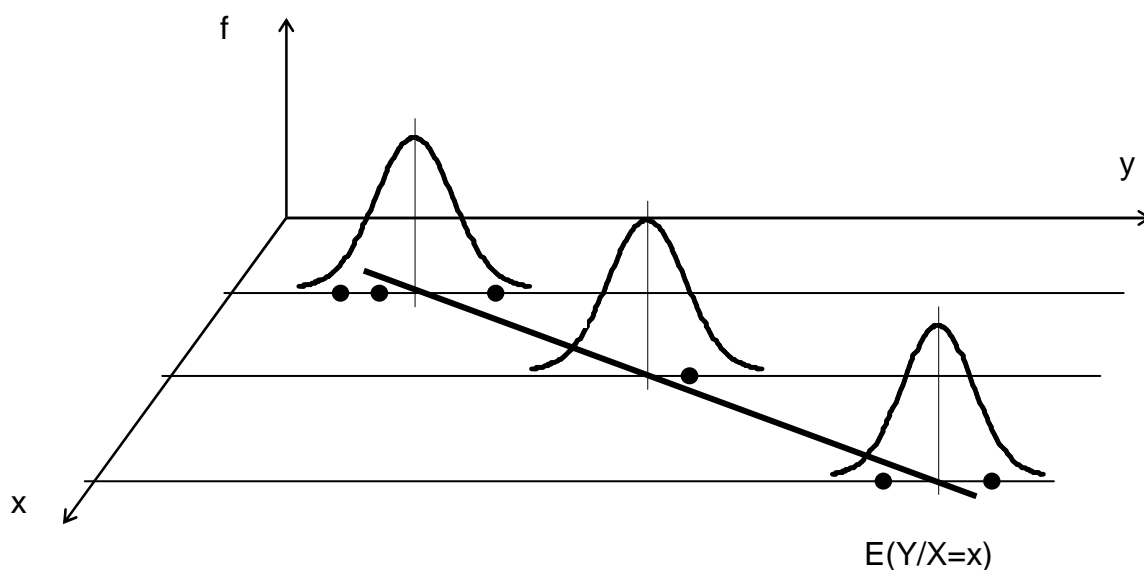
4 Regresní analýza

4.1 Regresní funkce

Důležitou statistickou úlohou je hledání a zkoumání závislostí proměnných, jejichž hodnoty získáme při realizaci experimentů. Vzhledem k jejich náhodnému charakteru reprezentuje nezávisle proměnné náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ a závisle proměnnou náhodná veličina Y . K popisu a vyšetřování závislosti Y na \mathbf{X} užíváme **regresní analýzu**, přičemž tuto závislost vyjadřuje **regresní funkce**

$$y = \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = E(Y | \mathbf{X} = \mathbf{x}),$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ je vektor nezávisle proměnných (hodnota náhodného vektoru \mathbf{X}), y je závisle proměnná (hodnota náhodné veličiny Y) a $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ je vektor parametrů, tzv. **regresních koeficientů** β_j , $j = 1, \dots, m$. O podmíněné střední hodnotě $E(Y | \mathbf{X} = \mathbf{x})$ je pro $k = 1$ poznámka v kapitole 4. Vektor \mathbf{X} může být i nenáhodný, jak bývá v aplikacích časté, anebo jsou rozptyly všech složek X_1, \dots, X_k zanedbatelné vůči



rozptylu náhodné veličiny Y .

Obr. 4.1

Při vyšetřování závislosti Y na \mathbf{X} získáme realizací n experimentů $(k+1)$ -rozměrný statistický soubor $((\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_n, y_n))$ s rozsahem n , kde y_i je pozorovaná hodnota náhodné veličiny Y_i a \mathbf{x}_i je pozorovaná hodnota vektoru nezávisle proměnných \mathbf{X} , $i = 1, \dots, n$. Na obr. 4.1 je znázorněn případ pro $k = 1$, tedy pro $\mathbf{x} = x_1 =$

x , a s opakovanými pozorováními. Opakování pozorování pro danou hodnotu nezávisle proměnné \mathbf{x} však v regresní analýze není

nezbytné. Pro určení odhadů neznámých regresních koeficientů β_j minimalizujeme tzv. **reziduální součet čtverců**

$$S^* = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})]^2$$

a hovoříme o tzv. **metodě nejmenších čtverců**. Poznamenejme, že před výpočtem regresních koeficientů volíme obvykle takový tvar regresní funkce, který co nejvíce odpovídá vyšetřované nebo uvažované závislosti. Bývá zvykem volit regresní funkci s co nejmenším počtem regresních koeficientů, avšak dostatečně flexibilní a s požadovanými vlastnostmi: monotonie, předepsané hodnoty, asymptoty aj. Vychází se přitom povětšinou ze zkušenosti, avšak v současné době se při realizaci regresní analýzy na PC dají často úspěšně použít vhodné databáze regresních funkcí.

4.2 Lineární regresní funkce

Lineární regresní funkce (lineární vzhledem k regresním koeficientům) má tvar

$$y = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j(\mathbf{x}),$$

kde $f_j(\mathbf{x})$ jsou známé funkce neobsahující regresní koeficienty β_1, \dots, β_m .

Uvažujeme tzv. **lineární regresní model** založený na předpokladech:

1. Vektor \mathbf{x} je nenáhodný, takže funkce $f_j(\mathbf{x})$ nabývají nenáhodných hodnot

$$f_{ji} = f_j(\mathbf{x}_i) \text{ pro } j = 1, \dots, m \text{ a } i = 1, \dots, n.$$

2. Matice $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}$ typu (m, n) s prvky f_{ji} má hodnotu $m < n$.

3. Náhodná veličina Y_i má střední hodnotu $E(Y_i) = \sum_{j=1}^m \beta_j f_{ji}$ a konstantní rozptyl

$$D(Y_i) = \sigma^2 > 0 \text{ pro } i = 1, \dots, n.$$

4. Náhodné veličiny Y_i jsou nekorelované a mají normální rozdělení pravděpodobnosti pro $i = 1, \dots, n$.

V části literatury se místo popsaného lineárního regresního modelu také uvádí ekvivalentní model ve tvaru

$$Y_i = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j(\mathbf{x}_i) + E_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde E_i jsou nekorelované náhodné veličiny (vyjadřující např. náhodné chyby měření) s normálním rozdělením pravděpodobnosti $N(0, \sigma^2)$.

Odhady regresních koeficientů, rozptylu a funkčních hodnot, a také testy statistických hypotéz o regresních koeficientech provádíme pomocí následujících vztahů. Označíme-li matice

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_{1i}f_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^n f_{1i}f_{mi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n f_{mi}f_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^n f_{mi}f_{mi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{F}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_{1i}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n f_{mi}y_i \end{pmatrix},$$

kde horní index T označuje transpozici matice, pak platí:

1. **Bodový odhad regresního koeficientu** β_j je b_j , $j = 1, \dots, m$, kde matice \mathbf{b} je řešení soustavy lineárních algebraických rovnic (tzv. *soustavy normálních rovnic*)

$$\mathbf{H}\mathbf{b} = \mathbf{g}.$$

2. **Bodový odhad lineární regresní funkce** je

$$y = \sum_{j=1}^m b_j f_j(\mathbf{x}).$$

3. **Bodový odhad rozptylu** σ^2 je

$$s^2 = \frac{S_{\min}^*}{n - m},$$

$$\text{kde } S_{\min}^* = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^m b_j f_{ji} \right)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{j=1}^m b_j g_j \quad \text{a } g_j \text{ je prvek matice } \mathbf{g}.$$

4. **Intervalový odhad regresního koeficientu** β_j se spolehlivostí $1 - \alpha$, $j = 1, \dots, m$, je

$$\left\langle b_j - t_{1-\alpha/2} s \sqrt{h^{jj}}; b_j + t_{1-\alpha/2} s \sqrt{h^{jj}} \right\rangle,$$

kde h^{jj} je j -tý diagonální prvek matice \mathbf{H}^{-1} a $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil Studentova rozdělení s $n - m$ stupni volnosti - viz tabulku **T2**.

5. **Intervalový odhad střední funkční hodnoty** y se spolehlivostí $1 - \alpha$ je

$$\left\langle \sum_{j=1}^m b_j f_j(\mathbf{x}) - t_{1-\alpha/2} s \sqrt{h^*}; \sum_{j=1}^m b_j f_j(\mathbf{x}) + t_{1-\alpha/2} s \sqrt{h^*} \right\rangle,$$

kde $h^* = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, přičemž $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$, a $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil

Studentova rozdělení s $n - m$ stupni volnosti - viz tabulku **T2**. **Intervalový odhad individuální funkční hodnoty** y se spolehlivostí $1 - \alpha$ obdržíme analogicky, avšak místo h^* vezmeme $1 + h^*$.

6. **Test hypotézy** $H: \beta_j = \beta_{j0}$ proti alternativní hypotéze $\bar{H}: \beta_j \neq \beta_{j0}$ na hladině významnosti α , kde j je jeden pevně zvolený index, $j = 1, \dots, m$, provádíme pomocí pozorované hodnoty testového kritéria

$$t = \frac{b_j - \beta_{j0}}{s \sqrt{h^{jj}}},$$

$\bar{W}_\alpha = \langle -t_{1-\alpha/2}; t_{1-\alpha/2} \rangle$ a $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -kvantil Studentova rozdělení s $n - m$

stupni volnosti - viz tabulku **T2**. Tento test je možno také provést pomocí výše uvedeného intervalového odhadu koeficientu β_j se spolehlivostí $1 - \alpha$.

Z intervalových odhadů střední funkční hodnoty, resp. individuální funkční hodnoty, se konstruuje **pás spolehlivosti pro střední hodnotu** (viz užší pás kolem regresní přímky na obr. 9.2), resp. **pás spolehlivosti pro individuální hodnotu** (viz širší pás kolem regresní přímky na obr. 9.2). Poznamenejme ještě, že test hypotézy $H: \beta_j = \beta_{j0}$ se týká jen jednoho (i když libovolného) regresního koeficientu. Současný test více regresních koeficientů je nutno provést pomocí tzv. **sdružené hypotézy** - viz např. [2], [3], [17], [19], [21], [29].

Orientační mírou vhodnosti vypočtené regresní funkce pro získaná data je **koeficient vícenásobné korelace**

$$r = \sqrt{1 - \frac{S_{\min}^*}{\sum y_i^2 - n(\bar{y})^2}},$$

resp. **index (koeficient) determinace** r^2 , které nabývají hodnot z intervalu $<0; 1>$. Číslo $r^2 100\%$ vyjadřuje procentuální podíl z rozptylu hodnot y_i "vysvětlený" vypočtenou regresní funkcí. Hodnoty r (a tím také r^2) blízké 1 naznačují vhodnost zvoleného tvaru regresní funkce. Pro bližší posouzení vhodnosti vypočtené regresní funkce se provádí její grafický rozbor vzhledem k pozorovaným bodům $[\mathbf{x}_1, y_1], \dots, [\mathbf{x}_n, y_n]$. Pro rigorózní závěr je však nutné provést tzv. **regresní diagnostiku** a testovat další statistické hypotézy - viz např. [2], [3], [17], [19], [21], [29].

Regresní funkce rozdělujeme na **lineární** a **nelineární** (vzhledem k regresním koeficientům). Některé nelineární regresní funkce můžeme vhodnou linearizací převést na lineární (např. mocninnou nebo exponenciální funkci logaritmujeme). Jde sice o běžně používaný postup, kdy však řešíme jiný regresní model nežli původně uvažovaný. Blíže o linearizaci nelineární regresní funkce je pojednáno např. v [2], [3], [17], [19], [21], [29].

Nejvíce užívanou lineární regresní funkcí pro pozorovaný dvourozměrný statistický soubor $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ je funkce

$$y = \beta_1 + \beta_2 x,$$

jejímž grafem je tzv. **regresní přímka**. Pro tuto funkci je $k = 1$, $\mathbf{x} = x_1 = x$ (píšeme x místo x_1), $m = 2$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, takže

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Při ručním výpočtu lze pro regresní funkci $y = \beta_1 + \beta_2 x$ použít následující **explicitní vztahy**,

kde pro jednoduchost \sum značí $\sum_{i=1}^n$:

$$\text{a) } \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}, \quad \sum 1 = n,$$

$$\text{b) } \det \mathbf{H} = n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2, \quad b_2 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\det \mathbf{H}}, \quad b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x},$$

$$c) S_{\min}^* = \sum (y_i - b_1 - b_2 x_i)^2 = \sum y_i^2 - b_1 \sum y_i - b_2 \sum x_i y_i, s^2 = \frac{S_{\min}^*}{n-2},$$

$$d) h^{11} = \frac{\sum x_i^2}{\det \mathbf{H}}, h^{22} = \frac{n}{\det \mathbf{H}},$$

$$e) h^* = \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2} = \frac{1}{n} + \frac{n(x - \bar{x})^2}{\det \mathbf{H}},$$

$$f) r = |r(x, y)|, \text{ kde } r(x, y) \text{ je koeficient korelace z kapitoly 1.}$$

Řešený příklad 4.1

U osmi náhodně vybraných firem poskytujících konzultace v oblasti jakosti výroby byly v roce 1993 zjištěny počty zaměstnanců x a roční obraty y (mil. Kč):

x_i	3	5	5	8	9	11	12	15
y_i	0,8	1,2	1,5	1,9	1,8	2,4	2,5	3,1

Vyjádřete závislost ročního obratu firmy na počtu zaměstnanců ve tvaru $y = \beta_1 + \beta_2 x$, vypočtete intervalový odhad β_2 se spolehlivostí 0,95, testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu $H : \beta_1 = 0,2$, určete bodový a intervalový odhad $y(10)$ se spolehlivostí 0,95. Pomocí grafu a koeficientu korelace r posuďte vhodnost regresní funkce. Předpokládejte, že roční obrat má podmíněné normální rozdělení s konstantním rozptylem vzhledem k počtu zaměstnanců.

Ř e š e n í:

V následující tabulce jsou pomocné výpočty:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	3	0,8	9	2,4	0,64
2	5	1,2	25	6,0	1,44
3	5	1,5	25	7,5	2,25
4	8	1,9	64	15,2	3,61
5	9	1,8	81	16,2	3,24
6	11	2,4	121	26,4	5,76
7	12	2,5	144	30,0	6,25
8	15	3,1	225	46,5	9,61
Σ	68	15,2	694	150,2	32,80

Vlastní výpočty provedeme v následujících krocích.

1) Jde o regresní přímku, takže s využitím výše uvedených vzorců obdržíme pro $n = 8$

z tabulky matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8 & 68 \\ 68 & 694 \end{pmatrix}$, jejíž determinant je $\det \mathbf{H} = 8 \cdot 694 - 68^2 = 928$, takže

bodový odhad β_2 je

$$b_2 = \frac{8 \cdot 150,2 - 68 \cdot 15,2}{928} = 0,1810344 \approx 0,181.$$

Dále je $\bar{x} = 68/8 = 8,5$, $\bar{y} = 15,2/8 = 1,9$, takže bodový odhad β_1 je

$$b_1 = 1,9 - 0,1810344 \cdot 8,5 = 0,3612068 \approx 0,361.$$

Potom bodový odhad regresní funkce je $y = 0,361 + 0,181x$.

2) Minimální hodnota reziduálního součtu čtverců je

$$S_{\min}^* = 32,80 - 0,3612068 \cdot 15,2 - 0,1810344 \cdot 150,2 \approx 0,1182758$$

a bodový odhad rozptylu σ^2 , resp. směrodatné odchylky σ , je

$$s^2 = 0,1182758 / (8 - 2) = 0,0197126, \text{ resp. } s = \sqrt{0,0197126} \approx 0,1404017.$$

3) Diagonální prvky matice \mathbf{H}^{-1} jsou

$$h^{11} = 694/928 \approx 0,7478448, \quad h^{22} = 8/928 \approx 0,00862069.$$

Z tabulky **T2** je pro $8 - 2 = 6$ stupňů volnosti $t_{0,975} = 2,447$. Intervalový odhad

regresního koeficientu β_2 je

$$\beta_2 \in < 0,1810344 - 2,447 \cdot 0,1404017 \sqrt{0,00862069};$$

$$0,1810344 + 2,447 \cdot 0,1404017 \sqrt{0,00862069} > = < 0,1491353; 0,2129334 > \approx \approx < 0,149; 0,213 >.$$

Bodový odhad přírůstku ročního obrátu odpovídajícího zvýšení počtu zaměstnanců firmy o jednoho je tedy 181 000 Kč a intervalový odhad tohoto přírůstku se spolehlivostí 0,95 je 149 000 Kč až 213 000 Kč.

4) Pozorovaná hodnota testového kritéria pro $H: \beta_1 = 0,2$ je

$$t = \frac{0,3612068 - 0,2}{0,1404017 \sqrt{0,7478448}} \approx 1,3277.$$

Pro alternativní hypotézu $\bar{H}: \beta_1 \neq 0,2$ je $\bar{W}_{0,05} = < -2,447; 2,447 >$. Vzhledem k tomu,

že $t \in \bar{W}_{0,05}$, hypotézu $\beta_1 = 0,2$ na hladině významnosti 0,05 nezamítáme. Na dané

hladině významnosti vlastně nezamítáme hypotézu, že firma bez zaměstnanců (pracují jen majitelé), neboť $y(0) = \beta_1$, bude mít roční obrát okolo 200 000 Kč.

5) Bodový odhad střední i individuální hodnoty ročního obrátu firmy pro 10 zaměstnanců je

$$y(10) = 0,3612068 + 0,1810344 \cdot 10 = 2,1715508 \approx 2,172.$$

U dané firmy lze tedy očekávat roční obrát okolo 2 172 000 Kč. Protože

$$h^* = \frac{1}{8} + \frac{8(10-8,5)^2}{928} = 0,1443965,$$

je intervalový odhad se spolehlivostí 0,95 střední hodnoty ročního obrátu firmy s 10 zaměstnanci

$$y(10) \in < 2,1715508 - 2,447 \cdot 0,1404017 \sqrt{0,1443965} ;$$

$$2,1715508 + 2,447 \cdot 0,1404017 \sqrt{0,1443965} > = < 2,0409985; 2,3021031 > \approx$$

$$\approx < 2,040; 2,302 >.$$

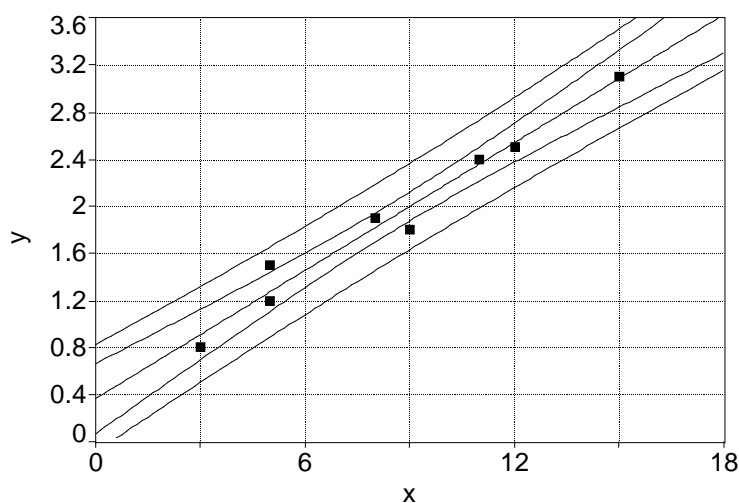
Se spolehlivostí 0,95 lze očekávat, že střední hodnota ročního obrátu takové firmy bude od 2 040 000 Kč do 2 302 000 Kč. Jestliže použijeme ve výpočtu $1 + h^*$ místo h^* , dostaneme intervalový odhad se spolehlivostí 0,95 individuální hodnoty ročního obrátu firmy s 10 zaměstnanci

$$y(10) \in < 2,1715508 - 2,447 \cdot 0,1404017 \sqrt{1,1443965} ;$$

$$2,1715508 + 2,447 \cdot 0,1404017 \sqrt{1,1443965} > = < 1,804; 2,539 >.$$

Se spolehlivostí 0,95 lze očekávat, že roční obrát (individuální hodnota ročního obrátu) takové firmy bude od 1 804 000 Kč do 2 539 000 Kč.

Závislost obrátu na počtu zaměstnanců

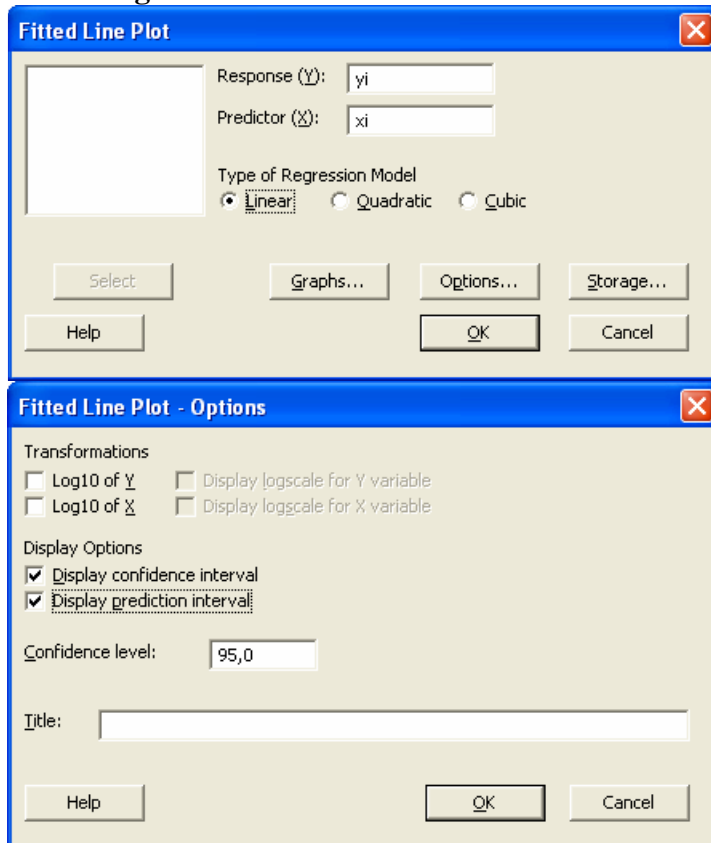


Obr. 4.2

6) Koeficient korelace (výpočet pomocí vzorce z kap. 1) je $r = 0,984798$, takže index determinace je $r^2 \approx 0,969827$. Z grafu na obr. 4.2 a velikosti koeficientu korelace vidíme, že zvolený tvar regresní funkce vcelku dobře vystihuje danou závislost. Podle často používané konvence lze říci, získaná regresní funkce vyjadřuje celkem $r^2 100 \% \approx 96,98 \%$ změn (variability) pozorovaného obratu firmy.

Postup v Minitabu:

Stat > Regression > Fitted Line Plot



Výstup:

Regression Analysis: yi versus xi

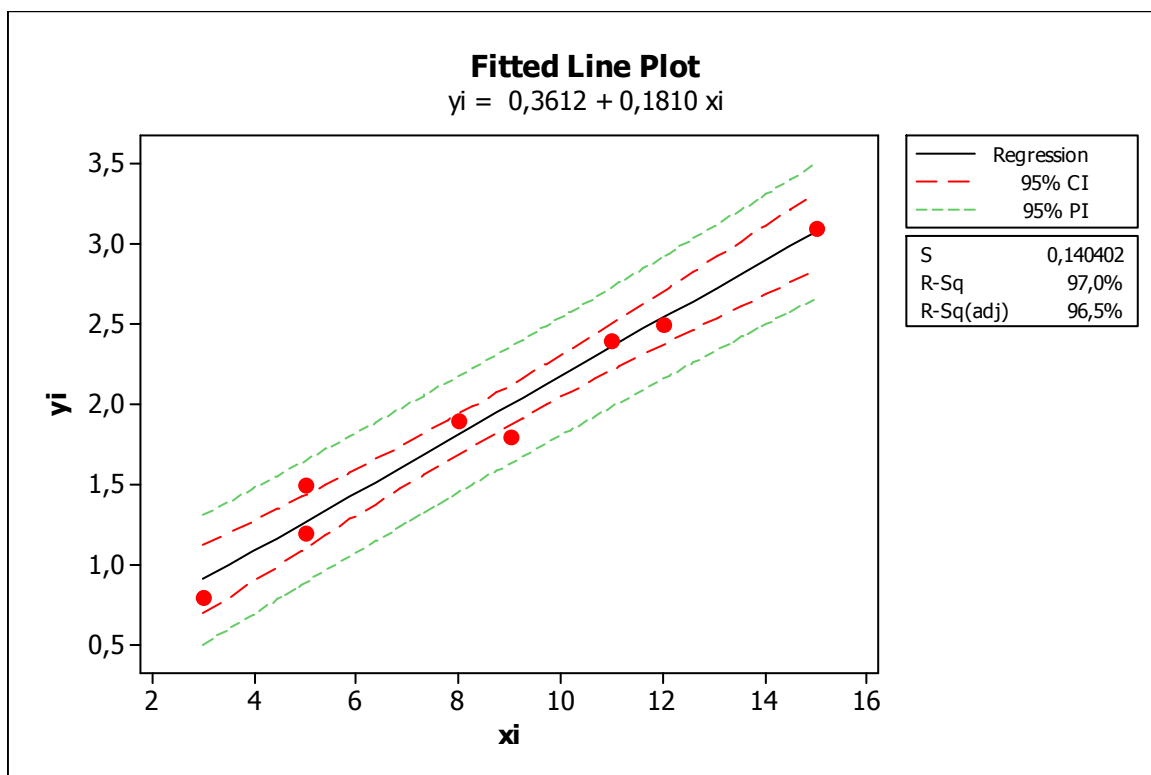
The regression equation is
 $y_i = 0,3612 + 0,1810 x_i$

S = 0,140402 R-Sq = 97,0% R-Sq(adj) = 96,5%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	1	3,80172	3,80172	192,86	0,000
Error	6	0,11828	0,01971		
Total	7	3,92000			

Protože $p = 0,000 < 0,05$, hypotézu, že model jako celek je nevýznamný zamítáme na hladině významnosti 0,05.



5 MSA-Analýza systému měření

5.1 Úvod do MSA

V technické praxi často narážíme na otázku zda lze naměřeným hodnotám věřit, zda nám popisují skutečný proces nebo zda dochází k významnému zkreslení hodnot systémem měření. Matematicky zapsáno, celková variabilita zaznamenaných dat je součtem variability procesu a variability systému měření

$$\sigma_T^2 = \sigma_p^2 + \sigma_m^2.$$

Při zkoumání systému měření narážíme na dva problémy:

a) Variabilita systému měření - R&R studie

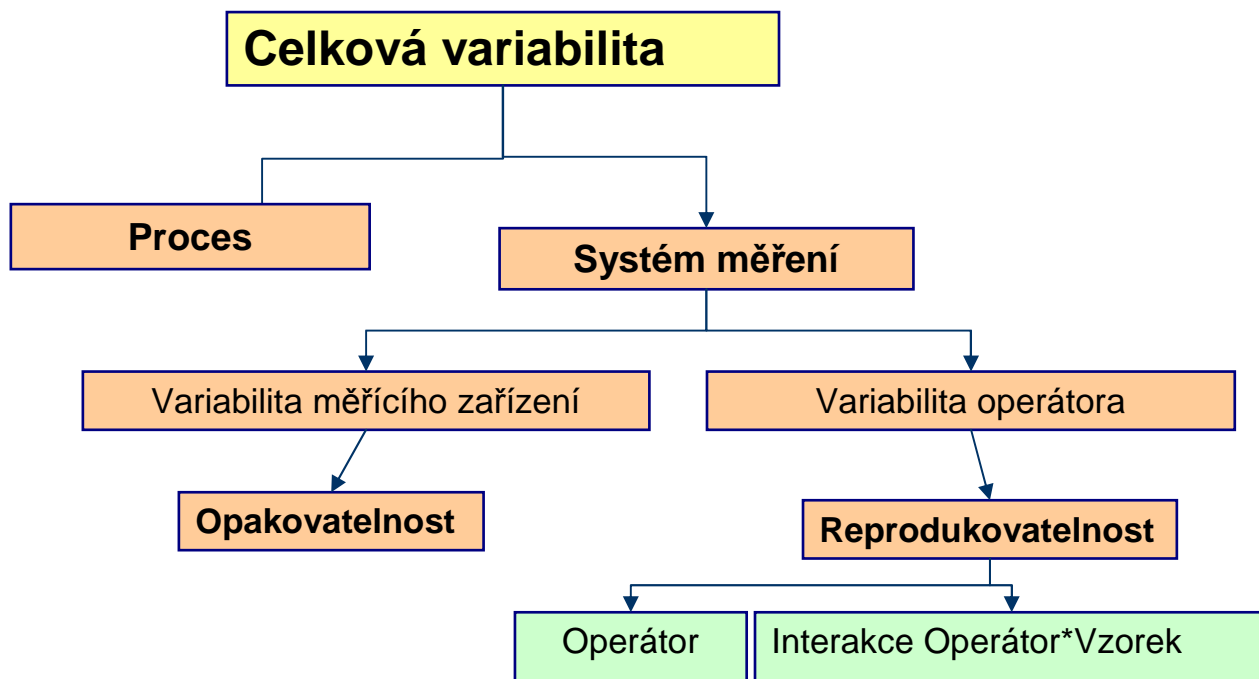
- Opakovatelnost - variabilita výsledků měření vyprodukovaná jedním měřícím přístrojem, použitým opakovaně jedním hodnotitelem měřícím jednu identickou charakteristiku na stejném výrobku
- Reprodukovatelnost - variabilita v průměrech měření provedených různými hodnotiteli za pomoci stejného měřícího přístroje pro měření stejné charakteristiky na stejném výrobku (pokud máme více měřidel, můžeme hovořit o reprodukovatelnosti měřidel – místo operátora měníme měřidla.

b) Poloha výsledků – studie linearity a strannosti (srovnání s etalony nebo o řád přesnějšími měřidly)

- Přesnost – strannost (vychýlení) - rozdíl mezi napozorovaným průměrem a referenční hodnotou
- Stabilita - celková variabilita v měřeních získaná měřícím systémem na stejném normálu nebo při měření jediné charakteristiky v delším časovém úseku.
- Linearita - rozdíl mezi hodnotami strannosti v předpokládaném pracovním rozsahu měřidla.

5.2 R&R studie

Studie reprodukovatelnosti a opakovatelnosti měřidla umožňuje stanovit, kolik pozorované variability procesu vzniká v důsledku variability systému měření tuto variabilitu dále klasifikuje (obr.1.).



Obr. 5.1: Rozdělení celkové variability zaznamenaných dat

Nejčastěji se používají následující dvě charakteristiky:

$\% R \& R = \frac{S_{\text{measurement system}}}{S_{\text{total}}}$ - srovnání variability systému měření s celkovou variabilitou,

$P/T = \frac{6 \cdot S_{\text{measurement system}}}{USL - LSL}$ - srovnání variability systému měření s tolerančním rozpětím.

Obecné směrnice pro výše uvedené charakteristiky:

R&R% resp. P/T < 10% - systém měření je přípustný vzhledem k procesu resp. tolerančnímu rozpětí

10% < R&R% resp. P/T < 30% - systém měření je podmíněně přípustný vzhledem k procesu resp. tolerančnímu rozpětí, závisí na poměru ceny nápravy a významnosti sledované veličiny.

R&R% resp. P/T > 30% - systém měření není přípustný vzhledem k procesu resp. tolerančnímu rozpětí.

Provedení R&R studie v Minitabu 15 ilustruje následující příklad.

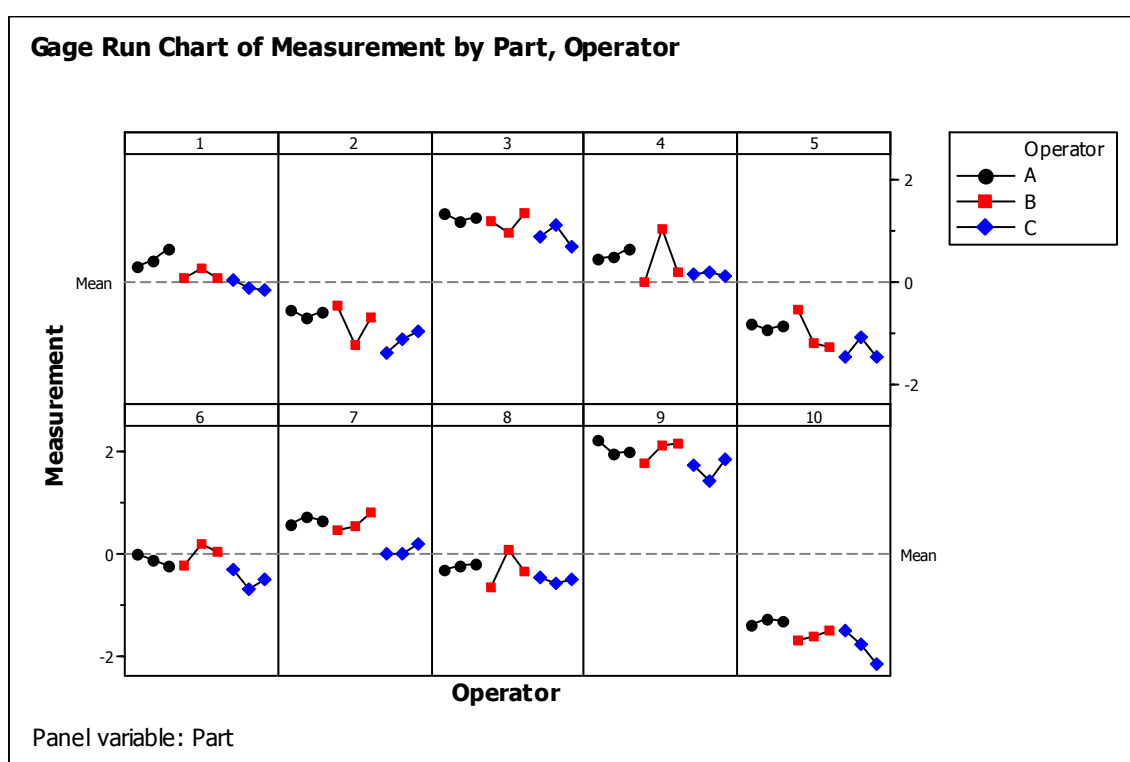
5.3 Příklad R&R studie

Provedeme R&R studii pro 10 výrobků, 3 operátory a 3 pokusy (tři různí operátoři měří 10 stejných výrobků, které reprezentují proces celý pokus opakujeme 3-krát (obr. 2).

Doporučuje se, aby pokus proběhl v provozních podmínkách a operátoři nevěděli, že probíhá nějaký pokus.

Postup Minitab : Stat > Quality Tools > Gage Study > Gage Run Chart

Použita data se vzorového příkladu Minitabu GAGEAIAG.MTW.



Obr. 5.2: Průběhový diagram

Průběhový diagram napoví, ale analýza odpoví.

Postup Minitab: Stat > Quality Tools > Gage Study > Gage R&R Study (Crossed)

Gage R&R Study - ANOVA Method

Two-Way ANOVA Table With Interaction

Source	DF	SS	MS	F	P
Part	9	88,3619	9,81799	492,291	0,000
Operator	2	3,1673	1,58363	79,406	0,000
Part * Operator	18	0,3590	0,01994	0,434	0,974
Repeatability	60	2,7589	0,04598		
Total	89	94,6471			

Alpha to remove interaction term = 0,25

Two-Way ANOVA Table Without Interaction

Source	DF	SS	MS	F	P
Part	9	88,3619	9,81799	245,614	0,000
Operator	2	3,1673	1,58363	39,617	0,000
Repeatability	78	3,1179	0,03997		
Total	89	94,6471			

Pozitivní je, že je významný faktor vzorek, ale špatné je že je významná opakovatelnost i reprodukovatelnost (faktor operátor). Interakci Part * Operator systém odstranil protože je nevýznamná.

Nyní vypočítáme charakteristiky variability Gage R&R

Source	VarComp	%Contribution (of VarComp)
Total Gage R&R	0,09143	7,76
Repeatability	0,03997	3,39
Reproducibility	0,05146	4,37
Operator	0,05146	4,37
Part-To-Part	1,08645	92,24
Total Variation	1,17788	100,00

%R&R od 10% do 30% systém měření může být přípustný ke sledování procesu, závisí to na aplikaci, ceně měřidla, nákladech na nápravu atd.

Process tolerance = 4

Source	StdDev (SD)	Study Var (6 * SD)	%Study Var (%SV)	%Tolerance (SV/Toler)
Total Gage R&R	0,30237	1,81423	27,86	45,36
Repeatability	0,19993	1,19960	18,42	29,99
Reproducibility	0,22684	1,36103	20,90	34,03
Operator	0,22684	1,36103	20,90	34,03
Part-To-Part	1,04233	6,25396	96,04	156,35
Total Variation	1,08530	6,51180	100,00	162,79

P/T nad 30% nemá být použito ke sledování požadavku zákazníka

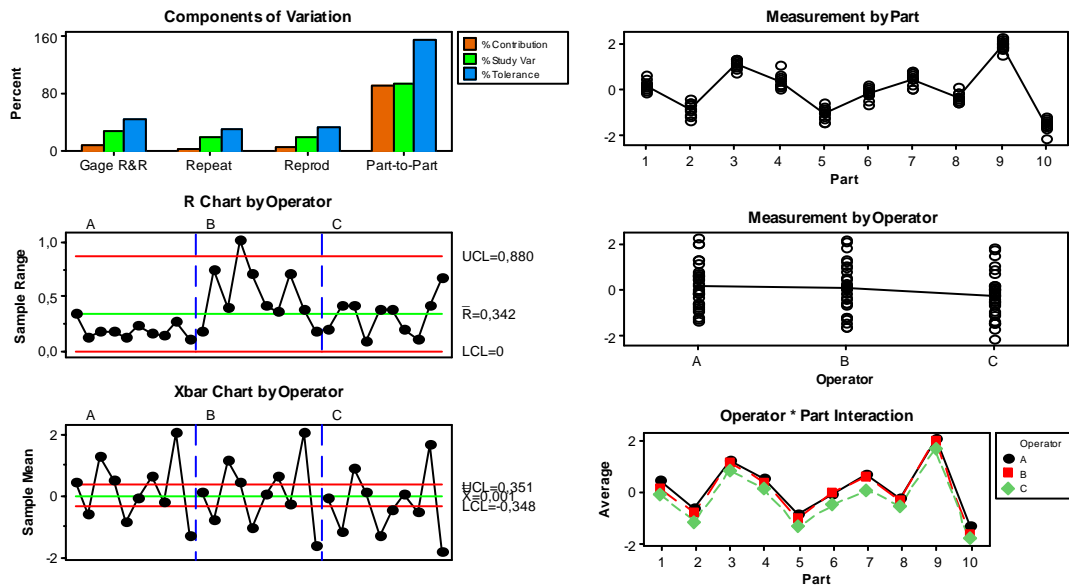
Number of Distinct Categories = 4

Počet rozdílných kategorií výrobků, které systém měření rozezná v procesu

Gage R&R (ANOVA) for Measurement

Gage name:
Date of study:

Reported by:
Tolerance:
Misc:



Obr. 5.3: Dodatečný grafický výstup k R&R studii

Variabilita systému měření je vzhledem k procesu podmíněně způsobila, ale vzhledem k požadavkům zákazníka je nezpůsobilá. Opakovatelnost a reprodukovatelnost je zhruba stejná.

6 Sledování stability procesu

6.1 Úvod do regulačních diagramů

Regulační diagram má obecně sloužit jako diagnostický nástroj k posouzení, zda se sledovaný proces (představovaný nějakou měřenou veličinou nebo veličinami, které jej charakterizují) chová tak, jak očekáváme, zvláště pak, nedošlo-li k nečekané změně procesu. Došlo-li k takové změně, je třeba ji interpretovat – vysvětlit a případně přistoupit k nějakému zásahu.

Proces, ve kterém není třeba přistupovat k zásahům, nazýváme stabilní a poznáme ho tak, že se v něm vyskytují pouze (přirozené) náhodné příčiny kolísání. Těchto příčin je široká škála a každá přispívá ke změně procesu jen nepatrně. Stabilní proces se chová v každém okamžiku sejně, tudíž je predikovatelný. Predikovatelné procesy jsou z hlediska nákladu na jakost levnější než procesy, které se chovají chaoticky. Kromě náhodných příčin kolísání proces ovlivňují i vymezitelné příčiny kolísání, působením těchto příčin již dochází k zásadním změnám procesu (odlehle hodnoty, posunutí procesu, unášení procesu).

6.2 Typy regulačních diagramů

Pro spojitá data většinou používáme jeden ze tří základních diagramů:

- ***I-MR diagram*** individuální hodnoty a klouzavá rozpětí
(Stat > Control Charts > Variables Charts for Individuals > I-MR),
- ***x-bar – R diagram*** aritmetický průměr a rozpětí
(Stat > Control Charts > Variables Charts for Subgroups > Xbar-R),
- ***x-bar – s diagram*** aritmetický průměr a směrodatná odchylka
(Stat > Control Charts > Variables Charts for Subgroups > Xbar-s),.

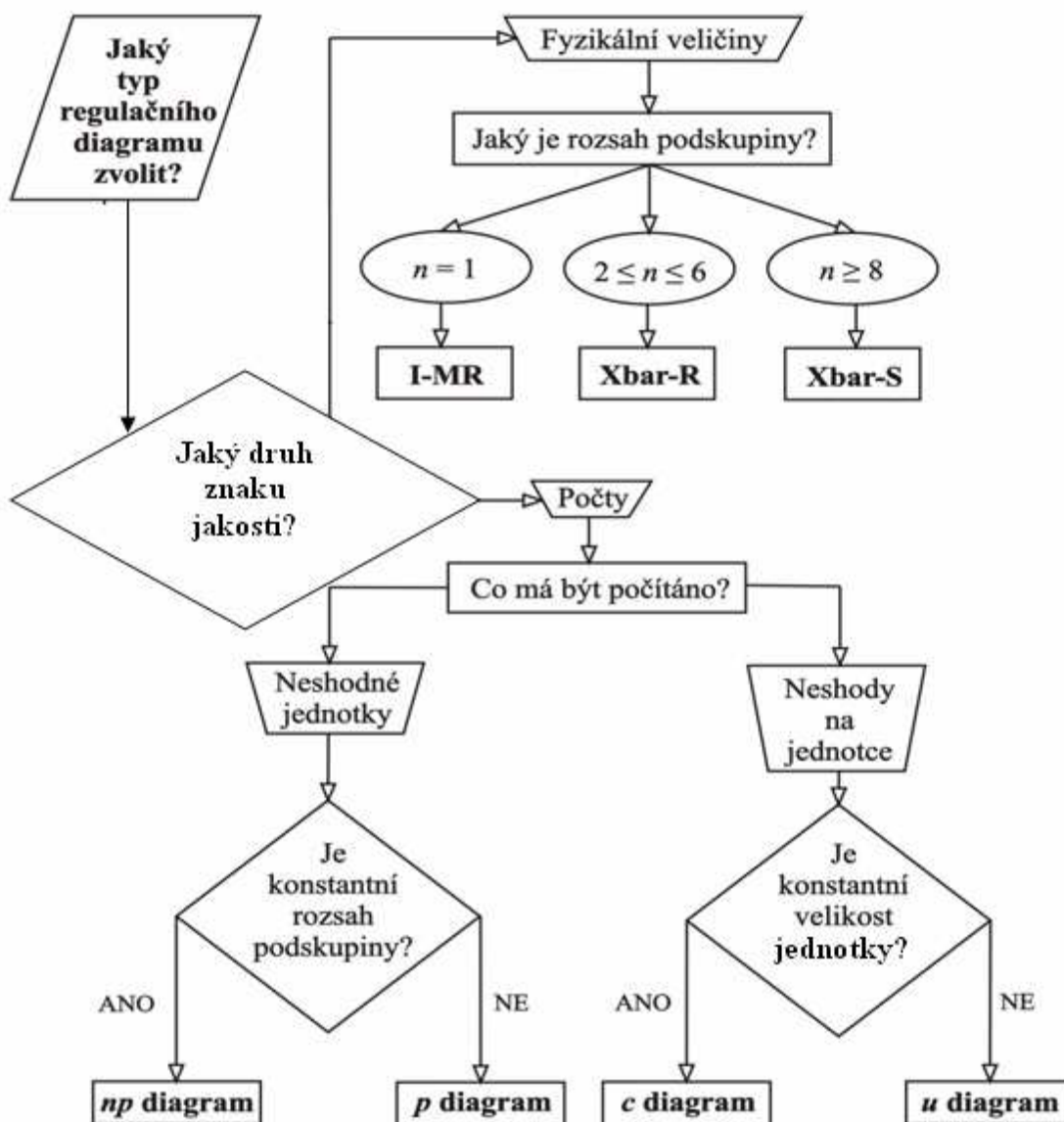
Pro atributivní data používáme dle typu dat diagramy:

(Stat > Control Charts > Attributes Charts)

- ***np diagram*** počet nestandardních výrobků v sériích stejného rozsahu,
- ***p diagram*** podíl nestandardních výrobků v sériích různého rozsahu,
- ***c diagram*** počet neshod na stejně velkých jednotkách,
- ***u diagram*** počet neshod na různě velkých jednotkách.

Diagramy *I-MR*, *x-bar – R*, *x-bar – s* vycházejí z normálního rozdělení, diagramy *p* a *np* vycházejí z binomického rozdělení, diagramy *c* a *u* z Poissonova rozdělení.

Speciální typy regulačních diagramů jako jsou *kumulativní součty* CUSUM, *klouzavé průměry* MA atd. vycházejí z *metod analýzy časových řad* a konstrukčně se poněkud liší od regulačních diagramů Shewhartova typu.



Obr.6.1: Schéma výběru regulačního diagramu

6.3 Testy vymežitelných příčin

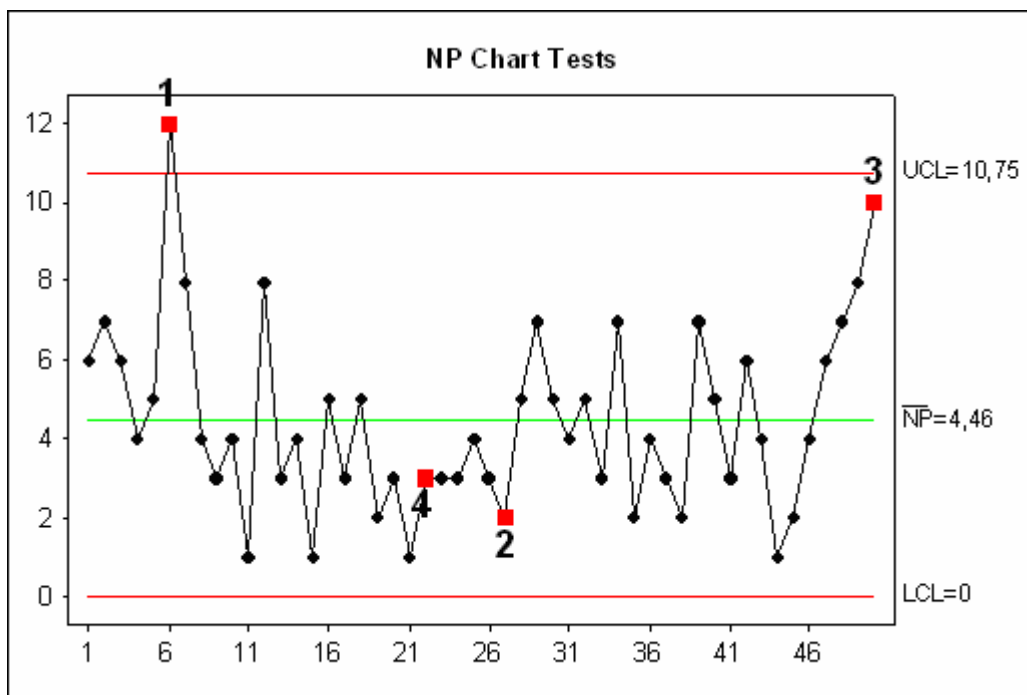
Abychom určili, zda je proces statisticky stabilní a nemá cenu do něho zasahovat, slouží testy vymežitelných příčin. Tyto testy hledají seskupení bodů v regulačním digramu, která jsou málo pravděpodobné. Regulujeme-li atributivní veličinu (diagramy *p*, *np*, *c* a *u*) používáme většinou následující čtyři testy (obr. 6.2).

Test 1 1 bod dále než 3σ od střední hodnoty,

Test 2 9 bodů v řadě na stejné straně od střední hodnoty,

Test 3 6 bodů v řadě rostoucích resp. klesajících,

Test 4 14 bodů v řadě pravidelně kolísá nahoru dolů.



Obr. 6.2: Testy v regulačním diagramu pro atributivní data

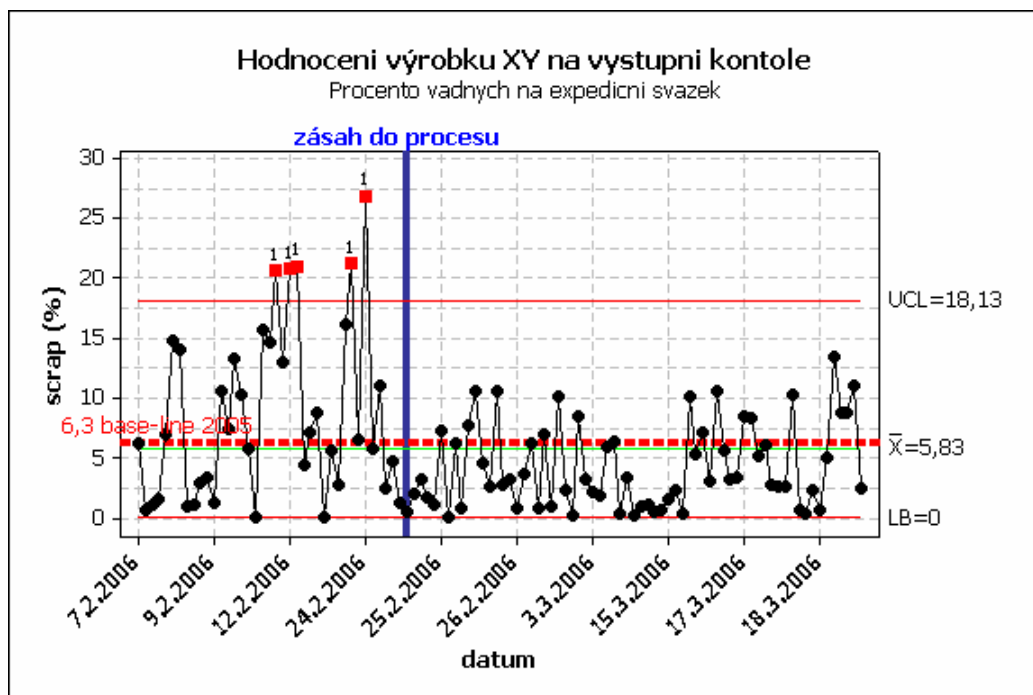
6.4 Příklad

Jak závažných chyb se můžeme dopustit ilustruje následující příklad z konkrétní firmy, kde atributivní data (procenta zmetků) vyhodnocovali stejně jak spojitá (napočítaly procenta zmetků) a nepřepočítávali regulační meze ani po závažném zásahu do procesu.

6.4.1 Špatně vyhodnocená data o zmetkovitosti

Při regulaci tohoto procesu (obr. 6.3) jsme se dopustili dvou hrubých chyb:

- 1) Špatně použitý regulační diagram I-MR místo p diagramu.
- 2) Nepřepočítání regulačních mezí po zásahu.

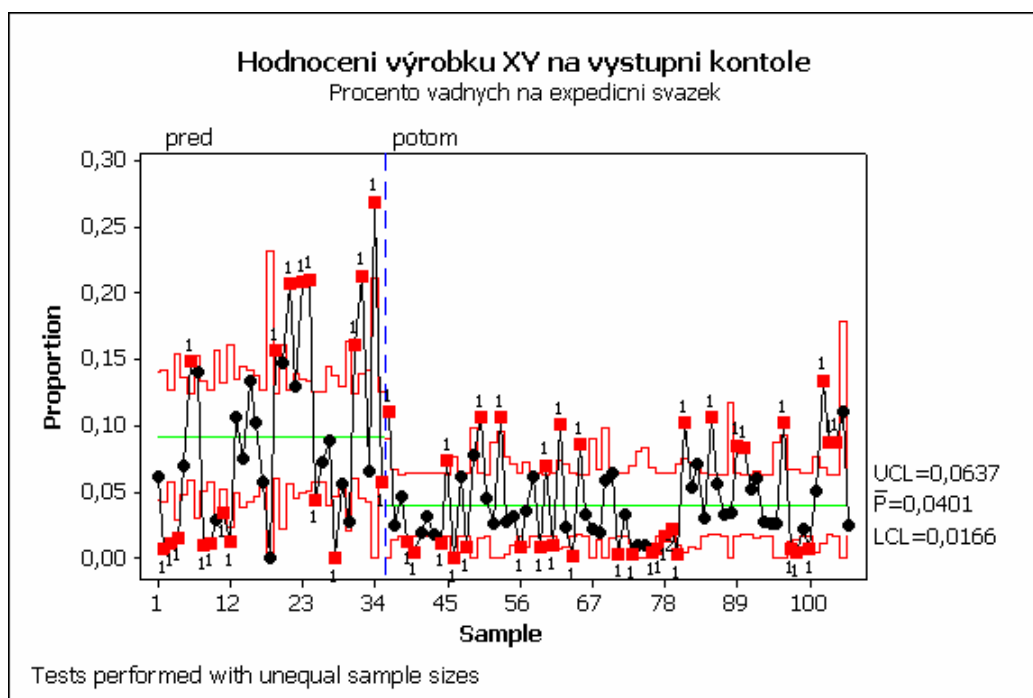


Obr. 6.3: Špatně použitý regulační diagram I-MR

Chybná interpretace: Před zásahem byl proces nestabilní, ale po zásahu se zmenšila variabilita a proces je statisticky stabilní.

6.4.2 Správně vyhodnocená data o zmetkovitosti

Díky správně zvolenému regulačnímu diagramu (obr. 6.4) je nyní vidět, že průměrná zmetkovitost a její variabilita se snížila, ale proces zůstává i po zásahu nestabilní a je stále potřeba hledat příčiny této nestability.



Obr. 4: Správně použitý p-diagram

7 Určování způsobilosti procesu

7.1 Úvod do způsobilosti procesů

V technické praxi často narážíme na požadavek srovnat požadavky zákazníka, většinou dány tolerancemi, se šířkou procesu, proto byly definovány indexy způsobilosti c_p , c_{pk} a indexy výkonnosti p_p , p_{pk} . Obě skupiny indexů se počítají obdobně, liší se pouze tím zda je do vzorce dosazena průměrná krátkodobá směrodatná odchylka procesu σ_{within} nebo dlouhodobá směrodatná odchylka $\sigma_{overall}$. Pro výpočet směrodatných odchylek se z procesu odebírá většinou dvacetkrát pět po sobě následujících hodnot v intervalech stejné časové délky tak, aby celý časový usek pokryl i dlouhodobé kolísání procesu. Nyní se požaduje proces za způsobilý pokud $c_p, c_{pk} \geq 1,67$ a $p_p, p_{pk} \geq 1,33$.

Indexy c_p a p_p srovnávají pouze toleranční rozpětí s šířkou procesu, kdežto indexy c_{pk} a p_{pk} jsou citlivé i na centrování procesu.

V dalším textu budeme označovat USL - horní toleranční mez (Upper Specification Limit), LSL - dolní toleranční mez (Lower Specification Limit).

Indexy způsobilosti procesu

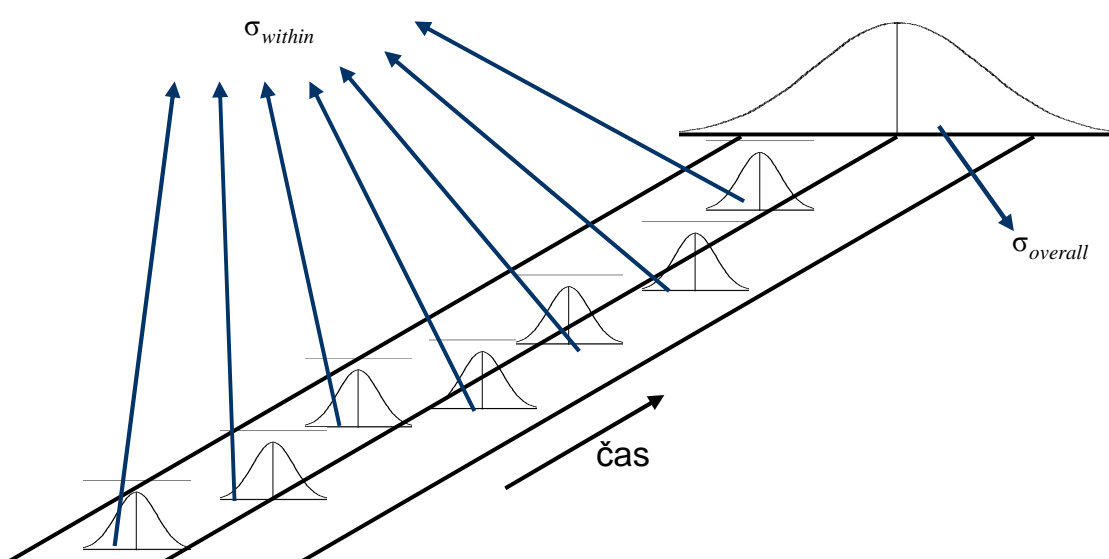
$$c_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma_{within}}$$

$$c_{pk} = \min\left(\frac{USL - \mu}{3\sigma_{within}}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma_{within}}\right)$$

Indexy výkonnosti procesu

$$p_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma_{overall}}$$

$$p_{pk} = \min\left(\frac{USL - \mu}{3\sigma_{overall}}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma_{overall}}\right)$$

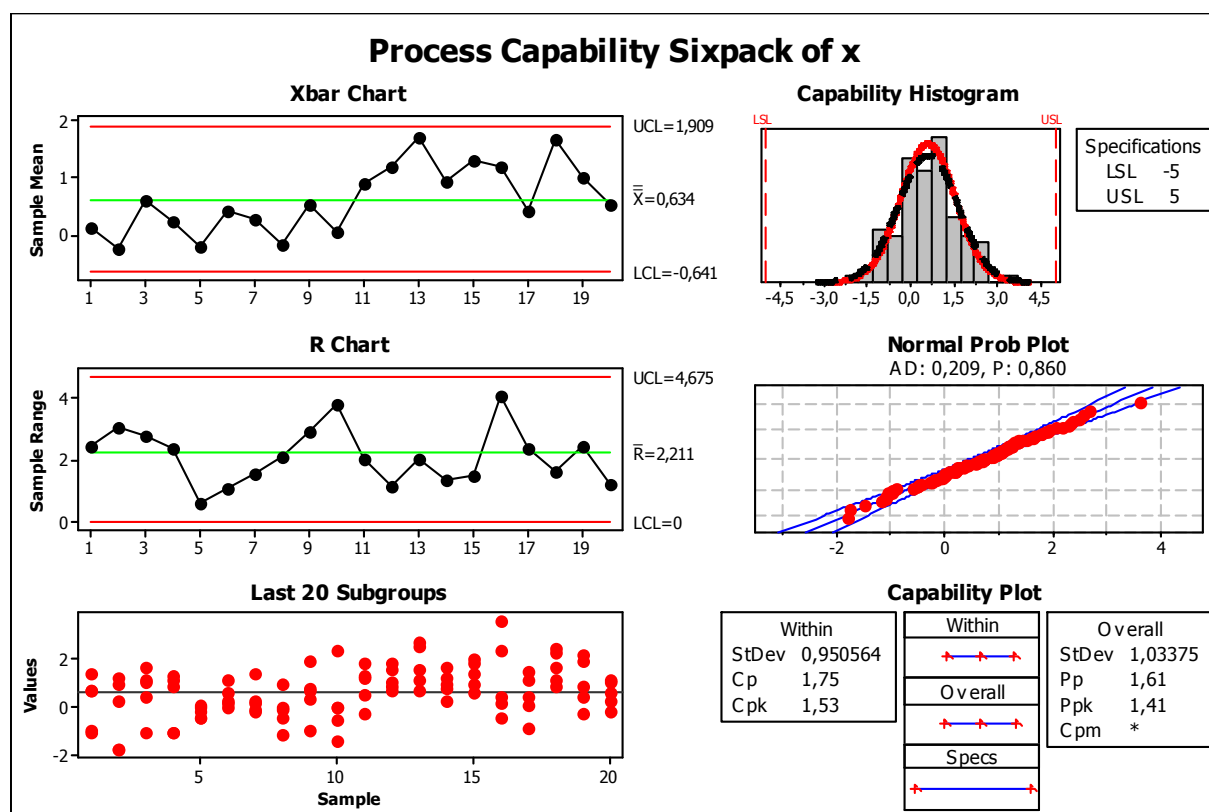


Obr. 7.1 Způsobilost a výkonnost procesu

Předpokladem použití těchto indexů způsobilosti a výkonnosti je stabilní a normálně rozdělený proces.

- Pokud proces není stabilní, je potřeba pomocí regulačních diagramů odstranit příčinu nestability a teprve potom zkoumat způsobilost.
- Pokud proces není normálně rozdělen, je třeba ověřit zda se nejedná o směs normálních rozdělení nebo zda zde nejsou odlehle hodnoty. Pokud nic nezjistíme je potřeba provést transformaci dat na normální nebo využít nástrojů analýzy způsobilosti pro nenormálně rozdělená data.

Minitab: Stat > Quality Tools > Capability Sixpack > Normal



Obr. 7.2 Ověření předpokladů a výpočet indexů způsobilosti

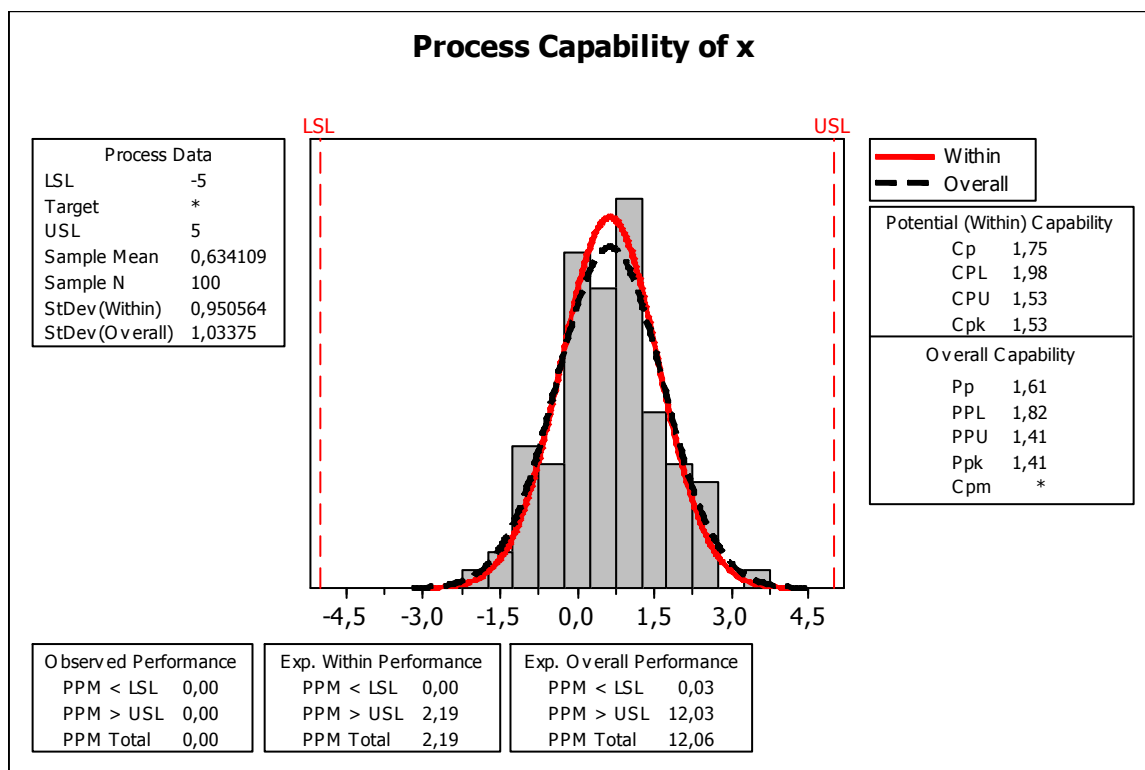
7.2 Vhodné užití indexů způsobilosti

Ověříme zda je proces stabilní a normální a vypočítáme indexy způsobilosti (obr.7.2)

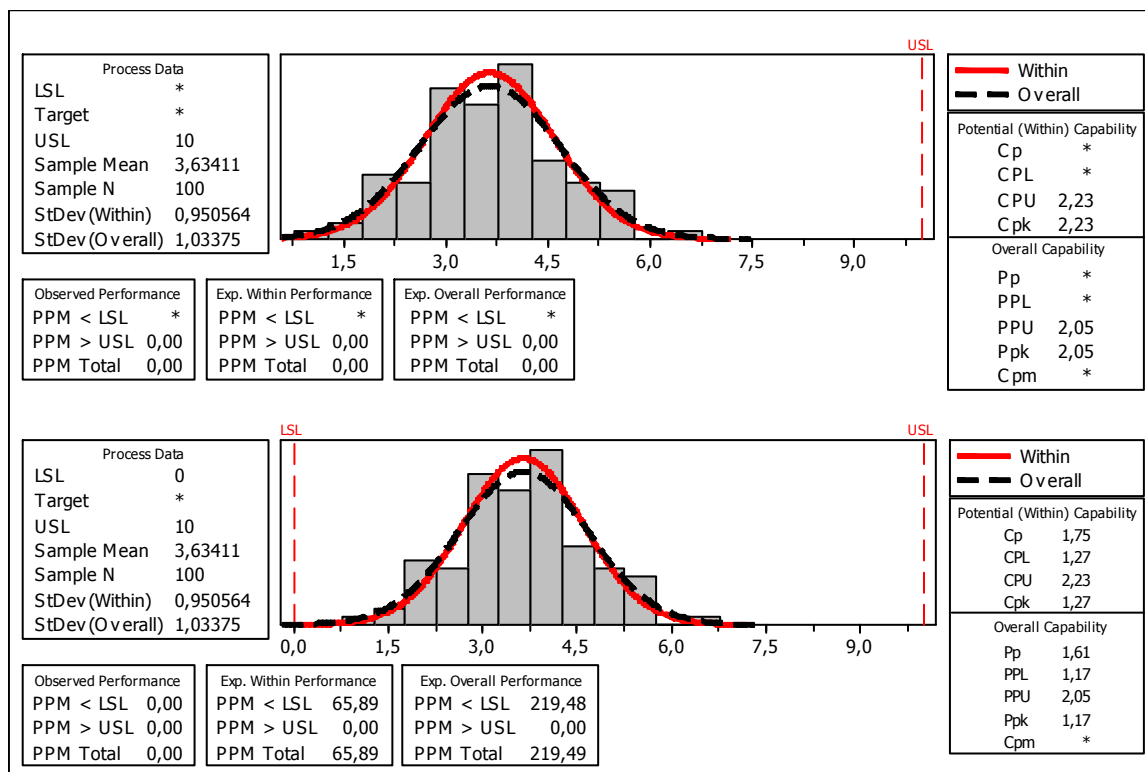
Z regulačních diagramu je vidět, že proces je stabilní a test normality nezamítá hypotézu, že data pochází z normálně rozděleného procesu (p-hodnota > 0,05). Pokud

chceme vědět jaká část procesu bude mimo toleranční meze (resp. podteče, resp. přeteče toleranční meze), použijeme následující graf (obr.7.3).

Minitab: Stat > Quality Tools > Capability Analysis > Normal



Obr.7.3 Analýza způsobilosti pro normálně rozdělená data



Obr.4 Uměle vytvořená toleranční mez

7.3 Uměle vytvořená toleranční mez

V praxi se setkáváme s tím, že si klienti uměle vytváří meze, které jsou neskutečnosti fyzikální mezí procesu. (např. znečištění má $USL = 10$, dolní toleranční mez nemá, ale přirozeně nemůže být menší než 0). Jaké chyby se můžeme dopustit nám ukazuje obr. 4.

Proces je způsobilý (protože máme pouze jednu toleranci, počítáme indexy c_{pk} a p_{pk}). Pokud zadáme fyzickou mez procesu jako toleranční, budeme se (na základě indexu způsobilosti) o procesu milně domnívat že je nezpůsobilý.

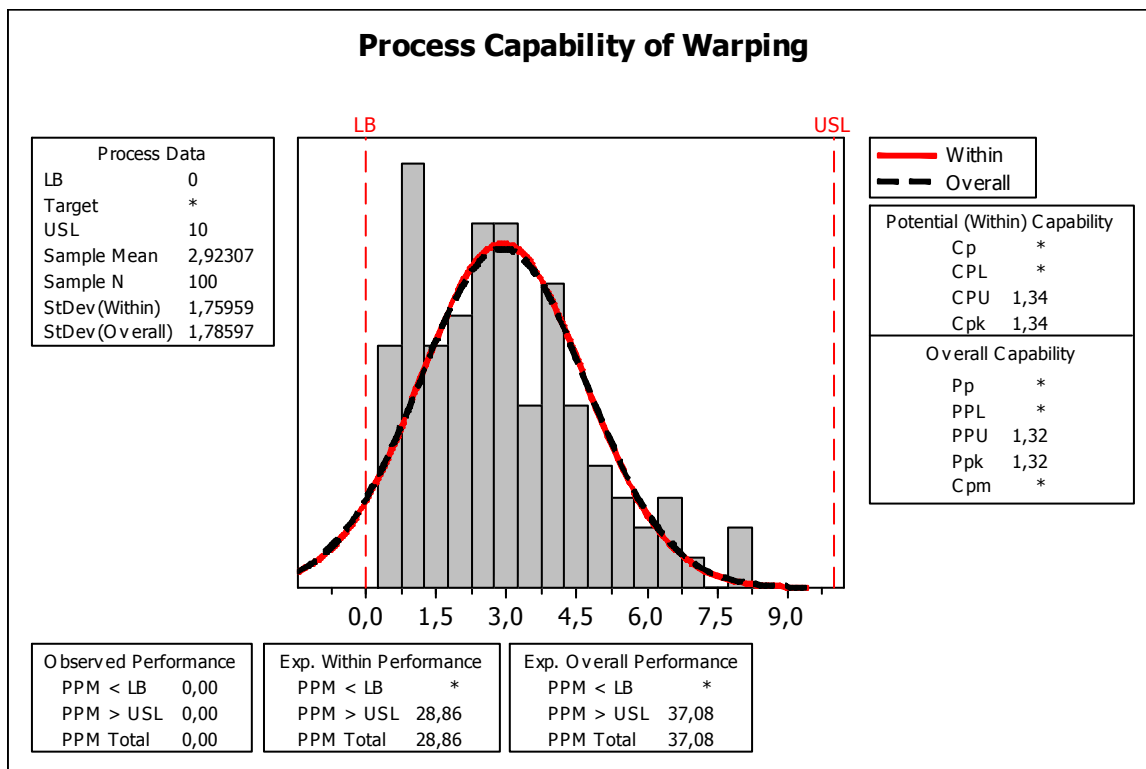
7.4 Nenormálně rozdělená data

V praxi se analýza způsobilosti dělá v softwarech, které nemají zabudovány testy o rozdělení dokonce zde nejsou ani grafické zobrazovací nástroje. Proto se často stává, že nenormálně rozdělená data jsou analyzována jako normální (obr. 7.5).

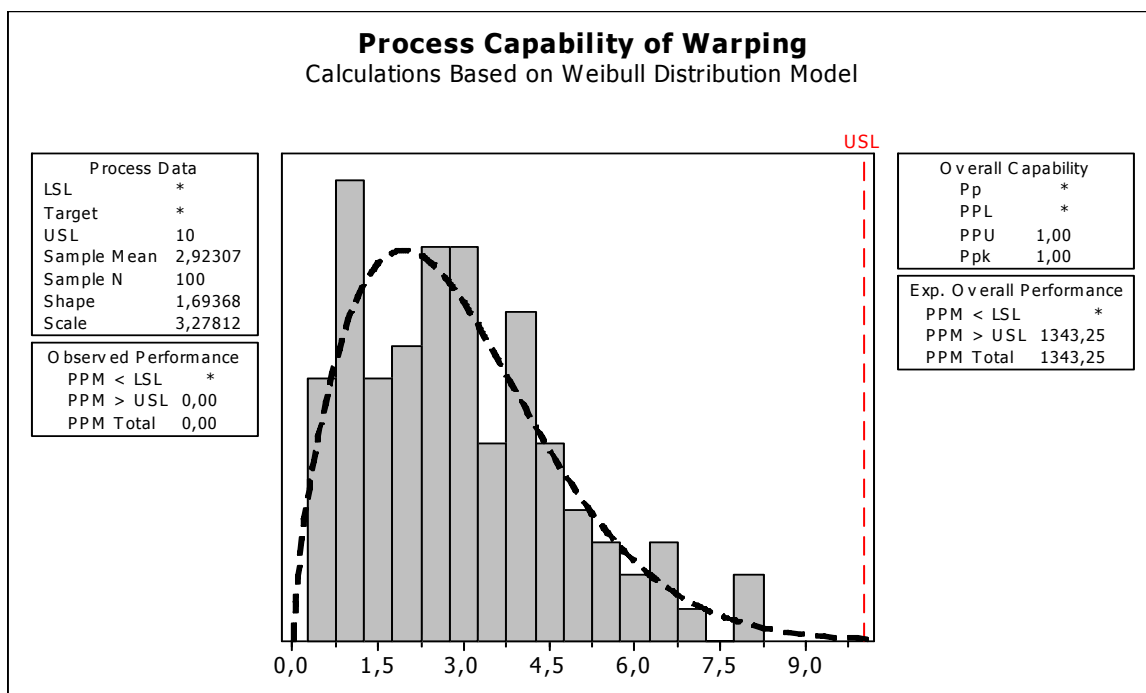
Přitom správný postup je, zjistit pomocí testu, že se nejedná o data normální a pak:

- a) zjistit o jaké jde rozdělení a provést analýzu způsobilosti pro dané rozdělení (obr.7.6)
- b) transformovat data na normální a provést analýzu způsobilosti (obr.7.7).

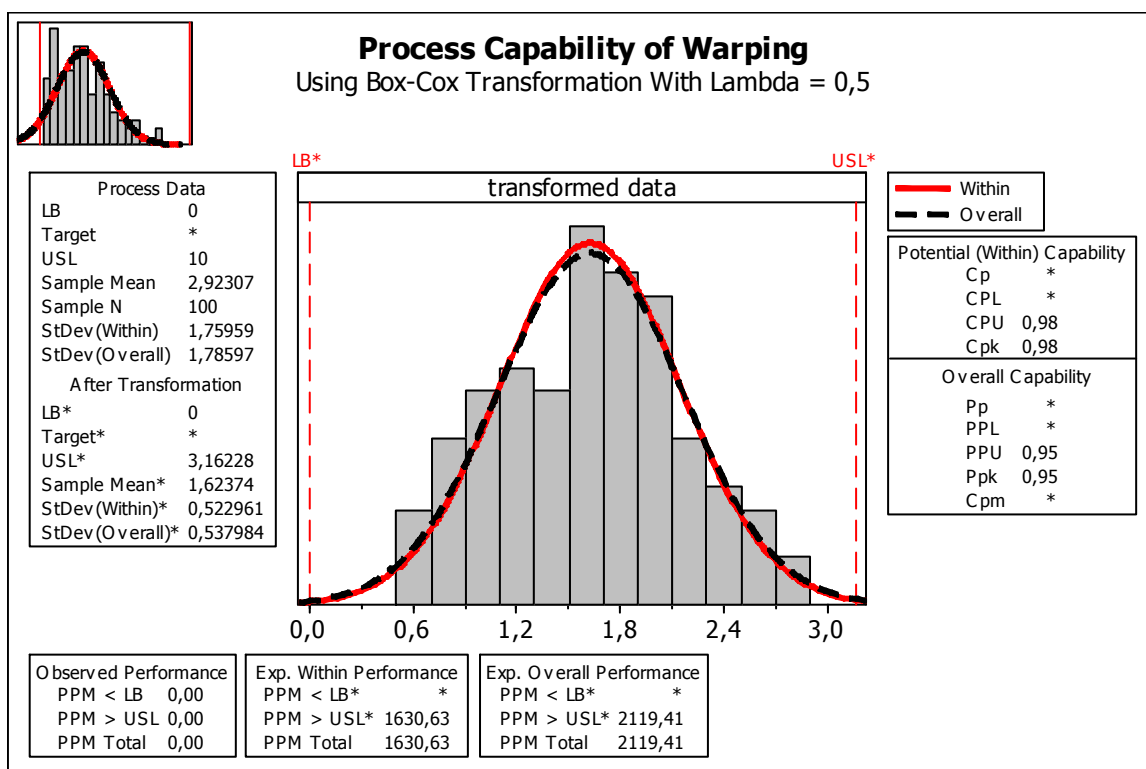
V obou (správných) případech vyšlo p_{pk} okolo 1, což je podstatně méně než z chybného modelu (obr. 7.5).



Obr. 7.5 Nenormálně rozdělená data analyzovaná jako normální



Obr.7.6 Weibullovo rozdělení – vhodný model pro daná data



Obr.7.7 Analýza způsobilosti na transformovaných datech

8 Využití plánovaného experimentu (DoE) (nebude u zkoušky)

8.1 Úvod do DoE

Plánovaný experiment je zkouška nebo posloupnost zkoušek, ve kterých cílevědomě provádíme změnu vstupních faktorů procesu, abychom mohli pozorovat a identifikovat odpovídající změny výstupní proměnné – tzv. odezvy (response).

V našem případě jde o minimalizaci nákladů na výrobu modelů ve slévárně hliníku. V této slévárně se podle výkresu a CNC dat vyrábí na víceosých frézkách modely, které mají prakticky stejný vzhled jako výsledný odlitek. Pomocí speciálních gumových otisků s vysokou rozměrovou pamětí se (po vložení drobných ocelových součástí) vytvoří sádrová forma. Tato forma se stejně jako prvotní model ručně dokončuje, aby se odstranily drobné vady a nepřesnosti povrchu. Proces končí litím do sádrové formy a následným dokončením (soustružení a frézování některých ploch). Protože mi jde o sdělení principu použití plánovaného experimentu a ne o vyzrazení výsledků, budou úrovně jednotlivých faktorů pozměněny a nebude uveden materiál, ze kterého se modely vyrábějí.

8.2 Plán experimentu

Byly určeny 4 nejvýznamnější faktory (související z kvalitou modelu, potažmo cenu odlitku) a jejich úrovně:

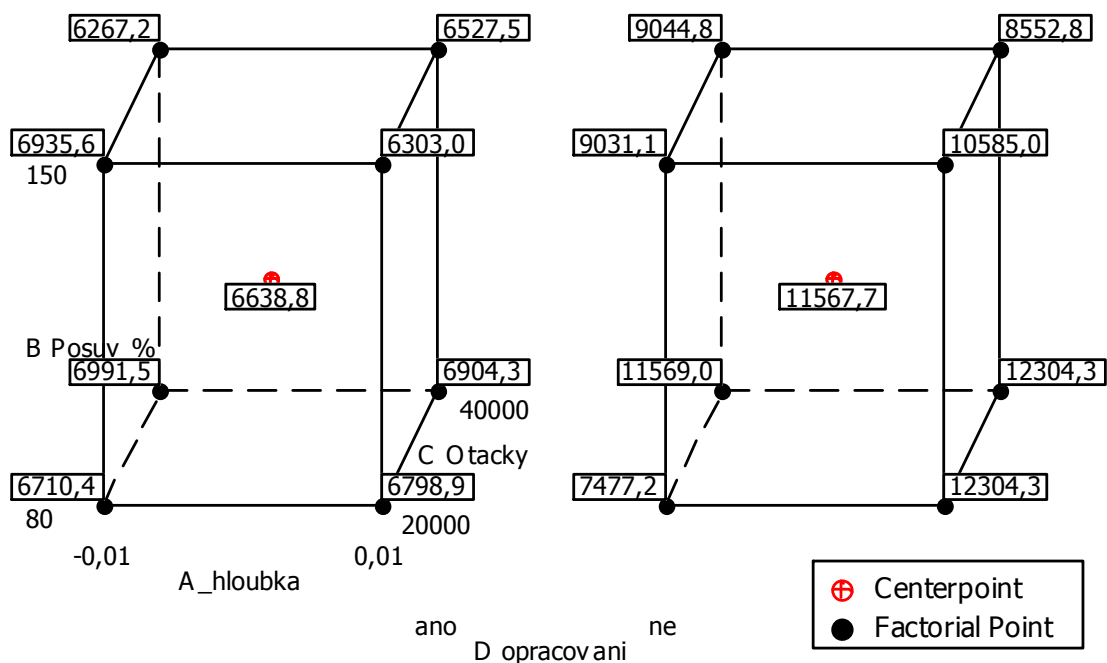
A hloubka úběru (min -0,01 a 0,01mm od standardu pozměněno),

B Posuv %, (80 a 150% standardu pozměněno),

C Otáčky (20 000 a 40 000 ot/min pozměněno),

D ruční dokončení modelu (ano a ne; možná se při otisku modelu do gumy a následně gumy do sádry stopy po nástroji při výrobě modelu pro některé řezné podmínky ztratí).

Odezva, kterou budeme sledovat, je **cena v Kč související s operacemi ovlivňujícími kvalitu povrchu u 3,3 odlitku**. 3,3 je průměrný počet odlitků vyrobený z jednoho modelu. Pokus byl vzhledem k finanční náročnosti realizován na 1/4 modelu, pro každé nastavení vstupních faktorů. Pro ilustraci, slévárna vytvoří za rok cca 9 000 odlitků, tedy zhruba 3000 modelů. Sekundární odezva je doba operace frézování modelu v minutách, která nesmí překročit dobu, za jakou je model vyroben stávající technologií. Model vyrobený stávající technologií označíme etalon.



Obr.8.1: Cube plot

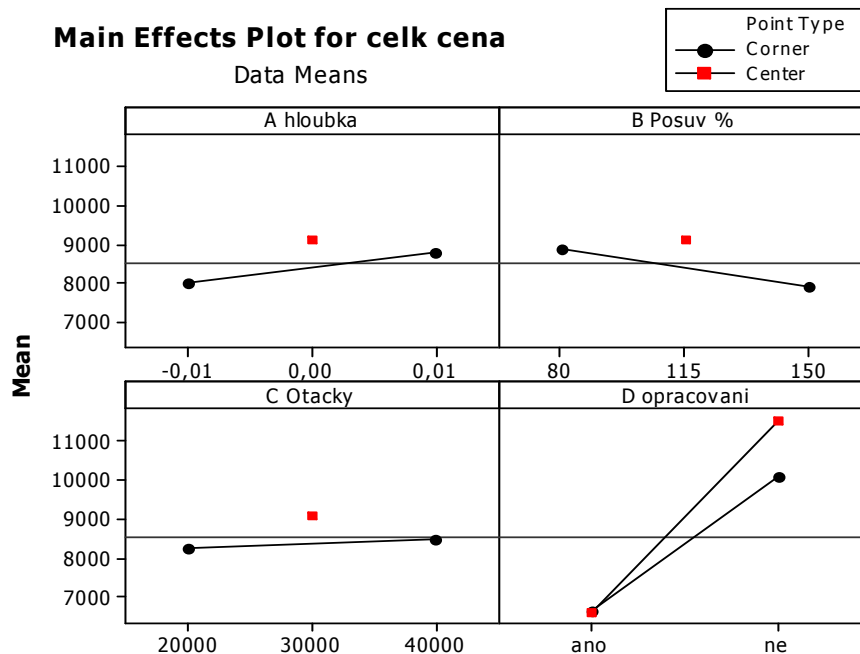
Pro zpracování použijeme plný faktorový experiment s jednou replikací a dvěma centrálními body (obr.8.1). Zjednodušeně řečeno budeme jednou měřit ve všech kombinacích úrovní a v průměru úrovní všech numerických faktorů (A, B, C) dvakrát viz následující tabulka.

A	B	C	D	Čas frézování modelu	Čas dokončení modelu	Čas dokončení odlitku	Celkový čas	Celková cena
-0,01	80	20000	ano	111,0	108	80	483,0	6710,4
-0,01	80	40000	ano	111,0	140	80	515,0	6991,5
-0,01	150	40000	ano	93,5	112	80	469,5	6267,2
0,01	150	40000	ano	75,5	120	100	525,5	6527,5
0,01	150	20000	ano	75,0	96	100	501,0	6303,0
0,01	80	20000	ano	88,0	112	100	530,0	6798,9
0,01	80	40000	ano	88,0	124	100	542,0	6904,3
-0,01	150	20000	ano	93,0	112	100	535,0	6935,6
0,00	115	30000	ano	86,0	100	100	516,0	6638,8
0,00	115	30000	ano	86,0	100	100	516,0	6638,8
-0,01	80	20000	ne	111,0	40	120	547,0	7477,2
-0,01	80	40000	ne	111,0	40	240	943,0	11569,0
-0,01	150	40000	ne	93,5	40	180	727,5	9044,8
0,01	150	40000	ne	75,5	40	180	709,5	8552,8
0,01	150	20000	ne	75,0	40	240	907,0	10585,0
0,01	80	20000	ne	88,0	40	280	1052,0	12304,3
0,01	80	40000	ne	88,0	40	280	1052,0	12304,3
-0,01	150	20000	ne	93,0	40	180	727,0	9031,1
0,00	115	30000	ne	86,0	40	240	918,0	10885,7
0,00	115	30000	ne	86,0	40	280	1050,0	12249,7
Etalon				93	100	88	483,4	6421

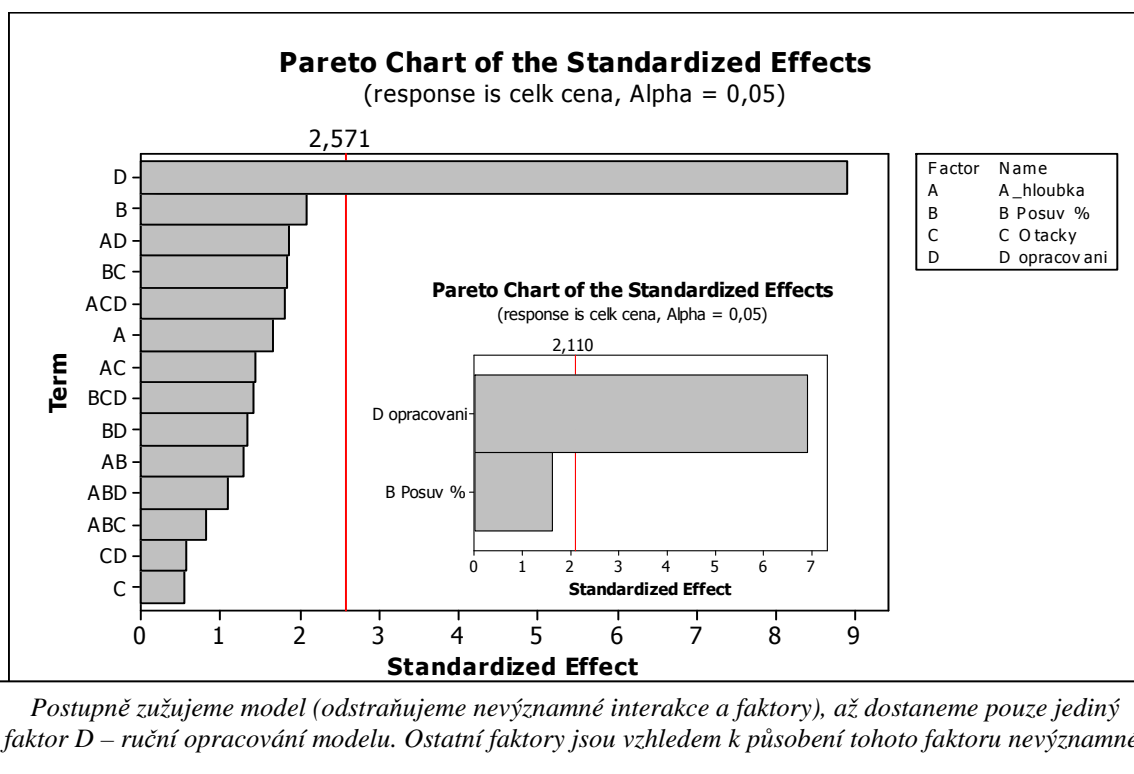
Tab.8.1: Plán sběru dat a výsledky

Z grafu hlavních efektů (obr.8.2) je vidět, že ruční dokončení modelu je nejvýznamnější faktor. Pomocí regresní analýzy, kde postupně odebíráme nejméně významné interakce a faktory, následně zjistíme, že ruční dokončení modelu je jediný statisticky významný faktor a interakce faktorů jsou taktéž statisticky nevýznamné (obr.3). Všechny testy provádíme na hladině významnosti 0,05.

Tedy myšlenka, že ruční dokončování modelů je zbytečné, je chybná a modely je třeba vždy ručně dokončit. Dále již budeme pracovat pouze s měřeními, kde je model ručně dokončován (druhou polovinu plánu sběru dat dále nevyužijeme).



Obr. 8.2: Graf hlavních efektů



Obr. 8.3: Statistické zužování modelu

8.3 Regresní model popisující pouze ručně dokončené modely

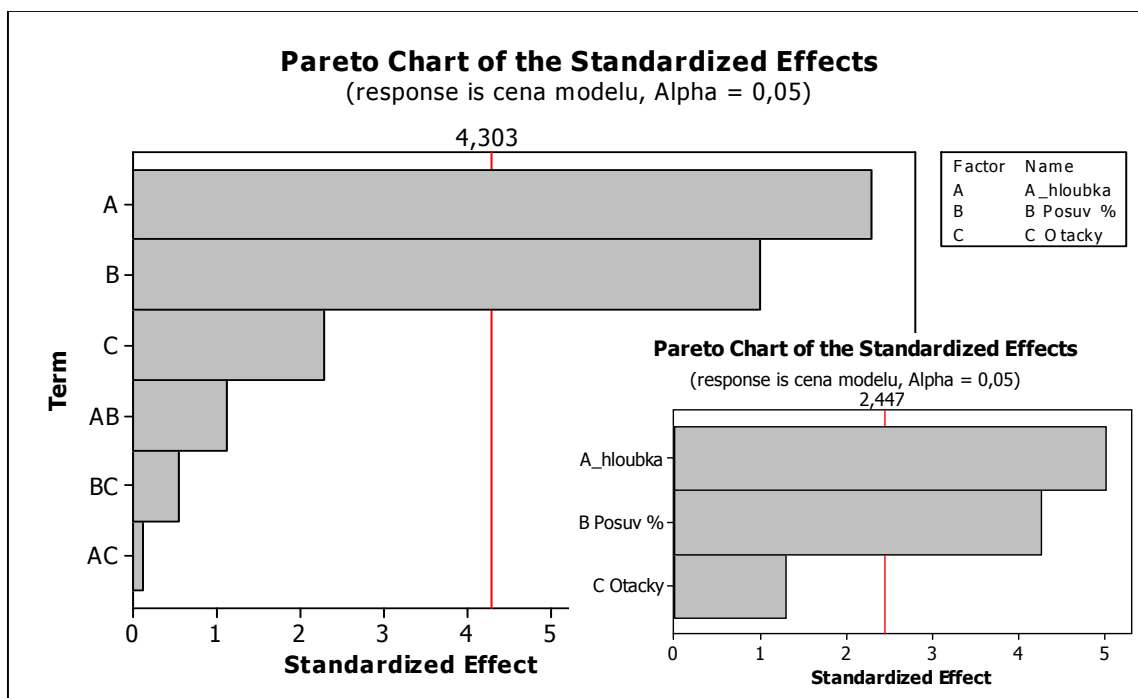
Sestrojil jsem model pouze pro ručně dokončené modely. Není potřeba nic doměřovat, data jsou stejná jako minule (v úvahu je bráno pouze prvních 10 hodnot ; D – ruční opracování modelu = ano).

Odezva je pouze **cena opracování modelu v Kč**, protože ručně opracované modely jsou stejně kvalitní. Což bylo ověřeno optickou kontrolou.

A Hloubka	B Posuv %	C Otáčky	Čas frézování Modelu	Čas dokončení modelu	Cena opracování modelu
-0,01	80	20000	111,0	108	3982,53
-0,01	80	40000	111,0	140	4263,58
-0,01	150	40000	93,5	112	3539,33
0,01	150	40000	75,5	120	3117,60
0,01	150	20000	75,0	96	2893,14
0,01	80	20000	88,0	112	3389,00
0,01	80	40000	88,0	124	3494,40
-0,01	150	20000	93,0	112	3525,67
0,00	115	30000	86,0	100	3228,94
0,00	115	30000	86,0	100	3228,94
Etalon (původní nastavení procesu)			93	100	3420,26

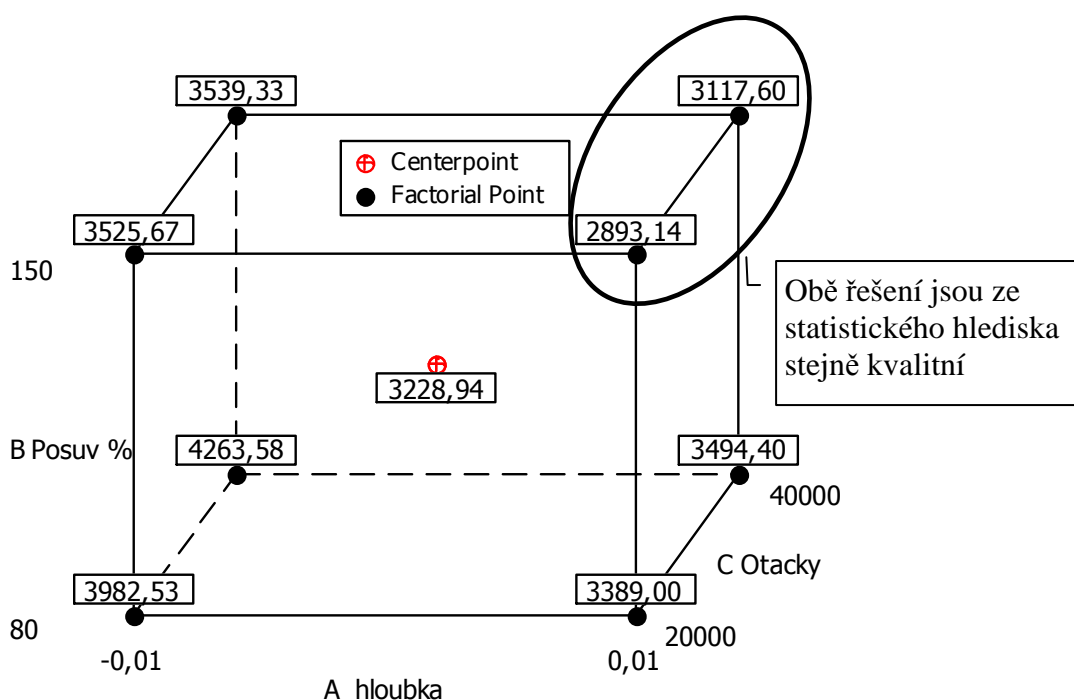
Tab.2: Plán sběru dat a výsledky

Stejně jako při předchozím vyhodnocení odstraňujeme pomocí regresního modelu nevýznamné interakce a faktory (obr. 8.4). Významná vyjde pouze hloubka a posuv, tedy nastavení 4 a 5 (v tabulce tučně) jsou statisticky nevýznamně odlišná (rozdílná hodnota odezvy může být způsobena náhodou).



Obr. 8.4: Statistické zužování nového modelu

Dále v regresním modelu vyšlo významné zakřivení, což značí, že uvnitř krychle (obr. 8.5) dané úrovněmi faktorů může být minimum (ale nemusí). Pokud bychom chtěli model zpřesnit, museli bychom měřit v tzv. axiálních bodech návrhu (např. středy stěn krychle na obr. 8.5) a do modelu zahrnout kvadratické efekty. Tato měření již nebyla vzhledem k nákladnosti experimentu provedena a spokojili jsme se s modelem lineárním.



Obr. 8.5: Cube plot s naznačením optimální ceny výroby modelu

8.4 Závěr

Po tomto experimentu bylo vyrobeno 27 modelů s nastavením: hloubka = standard + 0,01mm, posuv = 150% a otáčky = 20 000/min. Průměrná úspora byla 430 Kč na model, ale v 6 případech došlo k opakovanému lámání nástrojů, které způsobil neznámý faktor. Tento faktor se nepodařilo technologům odhalit, proto snížili posuv na 130%. S tímto nastavením vyrábí modely již dva roky a na otázku, jaké jsou dlouhodobé úspory, mi bylo odpovězeno, že značné.

Tento příspěvek nebyl sepsán za účelem vyzrazení nějakého technologického tajemství, ale aby ukázal, že i s relativně jednoduchými statistickými nástroji a malým počtem měření lze dosáhnout významného zlepšení procesu. Nutnou podmínkou úspěchu je znalost procesu a vytipování klíčových faktorů a jejich úrovní.

9 Literatura

Učebnice a monografie

1. Aczel, A. D. *Complete Business Statistics*. Chicago : IRWIN, 1989.
2. Anděl, J. *Matematická statistika*. 1. vyd. Praha : SNTL/ALFA, 1978.
3. Anděl, J. *Statistické metody*. 1. vyd. Praha : MATFYZPRESS, 1993.
4. Bowerman, B. L. - O'Connell, R. T. *Applied Statistics - Improving Business Processes*. Chicago : IRWIN, 1997.
5. Cyhelský, L. - Kahounová, J. - Hindls, R. *Elementární statistická analýza*. 1. vyd. Praha : Management Press, 1996.
6. Dowdy, S. - Wearden, S. *Statistics for Research*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1983.
7. Hahn, G. J. - Shapiro, S. S. *Statistical Models in Engineering*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1994.
8. Hátle, J. - Likeš, J. *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. 1. vyd. Praha : SNTL/ALFA, 1974.
9. Hebák, P. - Hustopecký, J. *Vícerozměrné statistické metody*. 1. vyd. Praha : SNTL/ALFA, 1987.
10. Hebák, P. - Hustopecký, J. *Průvodce moderními statistickými metodami*. 1. vyd. Praha : SNTL, 1990.
11. Chatterjee, S. - Price, B. *Regression Analysis by Example*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1991.
12. Kupka, K. *Statistické řízení jakosti*. 1. vyd. Pardubice : TriloByte, 1997.
13. Lamoš, F. - Potocký, R. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*. 1. vyd. Bratislava : ALFA, 1989.
14. Likeš, J. - Machek, J. *Počet pravděpodobnosti*. 1. vyd. Praha : SNTL, 1981.
15. Likeš, J. - Machek, J. *Matematická statistika*. 1. vyd. Praha : SNTL, 1983.
16. Meloun, M. - Militký, J. *Statistické zpracování experimentálních dat*. 1. vyd. Praha : PLUS, 1994.
17. Montgomery, D. C. - Renger, G. *Probability and Statistics*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1996.
18. Potocký, R. et. al. *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky*. 1. vyd. Bratislava : ALFA/SNTL, 1986.
19. Rao, C. R. *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace*. Praha : Academia, 1978.
20. Rényi, A. *Teorie pravděpodobnosti*. 1. vyd. Praha : Academia, 1972.
21. Ryan, T. P.: *Modern Regression Methods*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1997.
22. Seger, J. - Hindls, R. *Statistické metody v tržním hospodářství*. 1. vyd. Praha : Victoria Publishing, 1995.

23. Svoboda, H. *Moderní statistika*. 1. vyd. Praha : Svoboda, 1977.
24. Štěpán, J. *Teorie pravděpodobnosti*. 1. vyd. Praha : Academia, 1987.
25. Šťastný, Z. *Matematické a statistické výpočty v Excelu*. 1. vyd. Brno : Computer Press, 1999.
26. Sprinthal, R. C. *Basic Statistical Analysis*. 5th ed. Boston : Allyn and Bacon, 1997.
27. Triola, M. F. *Elementary Statistics*. Redwood City : B/C Publishing Comp., 1989.
28. Wonnacot, T. H. - Wonnacot, R. J. *Statistika pro obchod a hospodářství*. 1. vyd. Praha : Victoria Publishing, 1993.
29. Zvára, K. *Regresní analýza*. 1. vyd. Praha : Academia, 1989.
30. Zvára, K. - Štěpán, J. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. 1. vyd. Praha : MATFYZPRESS, 1997.

Učební texty

31. Budíková, M. - Mikoláš, Š. - Osecký, P. *Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika - Sbírka příkladů*. 1. vyd. Brno : MU, 1996.
32. Budíková, M. - Mikoláš, Š. - Osecký, P. *Popisná statistika*. 1. vyd. Brno : MU, 1996.
33. Jarošová, E. *Statistika B - Řešené příklady*. 1. vyd. Praha : VŠE, 1994.
34. Karpíšek, Z. *Pravděpodobnostní metody*. 6. vyd. Brno : FP VUT u vydavatele Ing. Zdeněk Novotný, CSc., 2003.
35. Karpíšek, Z. - Drdla, M. *Statistické metody*. 7. vyd. Brno : FP VUT u vydavatele Ing. Zdeněk Novotný, CSc., 2003.
36. Karpíšek, Z. - Drdla, M. *Applied Statistics*. 1. vyd. Brno : FP VUT v PC - DIR, 1999.
37. Karpíšek, Z. - Drdla, M. *Aplikovaná statistika*. 2. vyd. Brno : BIBS, 2003.
38. Karpíšek, Z. – Popela, P. – Bednář, J. *Statistika a pravděpodobnost. Učební pomůcka - studijní opora pro kombinované studium*. FSI VUT v CERM Brno, Brno 2002.
39. Koutková, H. - Moll, I. *Úvod do pravděpodobnosti a matematické statistiky*. 1. vyd. Brno : ES VUT, 1990.
40. Kropáč, J. *Úvod do počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. 1. vyd. Brno : VA, 2000.
41. Likeš, J. - Cyhelský, L. - Hindls, R. *Úvod do statistiky a pravděpodobnosti - Statistika A*. 1. vyd. Praha : VŠE, 1995.
42. Meloun, M. - Militký, J. *Statistické zpracování experimentálních dat - Sbírka úloh*. 1. vyd. Pardubice : Univerzita Pardubice, 1994.
43. Michálek, J. *Matematická statistika pro informatiky*. 1. vyd. Praha : SPN, 1987.
44. Reif, J. *Metody matematické statistiky*. 1. vyd. Plzeň : Západočeská univerzita, 2000.
45. Seberová, H. *Statistika I, II*. 1. vyd. Vyškov : VVŠ PV, 1995.
46. Šikulová, M. - Karpíšek, Z. *Matematika IV - Pravděpodobnost a matematická*

statistika. 6. vyd. Brno : ES VUT, 1996.

47. Zapletal, J. *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. 1. vyd. Brno : ES VUT, 1995.

- [1] MELOUN, M., MILITKÝ, J.: *Kompendium statistického zpracování dat*. Academica, Praha, 2002.
- [2] Minitab User's Guide 2: *Data Analysis and Quality tools*. USA, 2000.
- [3] MONTGOMERY, D.,C.: *Design and Analysis of Experiments*. Third Edition, John Wiley & Sons, 1991.