SA2/TA2 2020 – Informace k první zápočtové písemce

Nutná podmínka k udělení zápočtu:

získání alespoň poloviny bodů, pokud se to nepodaří na řádném termínu, bude opravná písemka dle domluvy (patrně na začátku zkouškového období).

Okruhy otázek:

1. metrické prostory,
2. definiční obor funkce, graf funkce (metoda řezů);
3. limita a spojitost funkce, parciální derivace, gradient, derivace ve směru;
4. derivace vyšších řádů, totální diferenciál a totální diferenciál vyššího řádu, Taylorův polynom, tečná rovina;
5. lokální extrémy.

Šestá otázka bude ryze teoretická – je potřeba znát:

- definice metriky a metrického prostoru, definice konvergentní a cauchyovské posloupnosti v metrickém prostoru, definice úplného a kompaktního metrického prostoru;
- definice izomterického, spojitého a lipschitzovského zobrazení, Banachova věta o pevném bodu;
- definice limity v $\mathbb{R}^n$;
- definice parciálních derivací a směrové derivace;
- definice diferencovatelnosti a diferenciálu funkce více proměnných, Taylorova věta;
- definice lokálních extrémů, věta o nutné podmínce pro existenci lokálního extrému, věta o postačující podmínce pro existenci lokálního extrému.

Ukázkové zadaní

1. Uvažujte diskrétní metrický prostor (P,ρ) (P je libovolná neprázdná množina). Napište množiny $B_r(x)$ a $B_r[x]$ (tj. otevřenou a uzavřenou kouli v prostoru) pro $r = 1/2$ a $r = 3/2$. Dále určete $d(B_{1/2}[x])$ (tj. průměr uzavřené koule o poloměru 1/2).

---

2. Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \ln(\sqrt{y+1} - x) + \sqrt{x+2}$.

---

3. Ukažte, že neexistuje limita

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3xy}{x^3 + 2xy}.$$

---

4. Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = \sin(3x+y)$ v bodě $[0, \frac{\pi}{4}]$. Pomocí výsledku určete přibližně hodnotu $\sin(3 \cdot 0.2 + \frac{\pi}{4} - 0.01)$ a odhad chyby, které se náhradou dopustíte.

---

5. a) Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.
b) Jedno z následujících tvrzení není pravdivé. Rozhodněte které a uveďte protipříklad.

(i) Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má ve vnitřním bodě $[x_0, y_0] \in D(f)$ parciální derivace a nabývá zde lokálního extrému. Potom $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(ii) Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňuje ve vnitřním bodě $[x_0, y_0] \in D(f)$ rovnost $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0)$. Potom má v tomto bodě lokální extrém.

---

6. Výše zmíněná teoretická otázka.