# Příklady z Matematiky 1

## 1. Operace s maticemi - určete matici X

a) $X = AB - 2C$

b) $X = 3A - CB$

c) $X = B^2 - A$,

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

**Řešení:**

$$\textbf{a)}\ X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textbf{b)}\ X = \begin{pmatrix} -6 & 18 & 8 \\ 3 & -13 & -1 \\ -6 & 15 & 2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \textbf{c)}\ \text{X neexistuje}$$

## 2. Určete determinant matice X

$$a)\ X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b)\ X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c)\ X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$d)\ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e)\ X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

**Řešení: a)** 30, **b)** -4, **c)** 12, **d)** 10, **e)** -5.

## 3. Určete inverzní matici $X^{-1}$ k $X$

$$a)\ X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b)\ X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad c)\ X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$d)\ X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e)\ X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Řešení:**

$$\textbf{a)}\ X^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \textbf{b)}\ X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad \textbf{c)}\ X^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -7 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{d)}\ X^{-1}\ \text{neexistuje}, \quad \textbf{e)}\ X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

**4. Vyřešte soustavu lineárních rovnic**

$$a)\ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned} \quad b)\ \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}, \quad c)\ \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \end{aligned}$$

$$d)\ \begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned} \quad e)\ \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 &= -1 \\ x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 &= 4 \end{aligned}$$

**Řešení: a)** $\mathbf{x} = (1, 2, -1, 0)$, **b)** $\mathbf{x} = (1, -1, 2, 1)$, **c)** soustava nemá řešení, **d)** soustava má nekonečně mnoho řešení, **e)** $\mathbf{x} = (1, 0, 0, -1, 1)$.

**5. Analytická geometrie**

a) Určete odchylku rovin $\rho$ a $\sigma$, kde

$$\rho: \begin{aligned} x &= 1 + s - t \\ y &= 2s + t \\ z &= 2 + t \end{aligned}, \qquad \sigma: \begin{aligned} x &= 1 - 2s + t \\ y &= 2 + s \\ z &= s - 2t \end{aligned}$$

b) Určete vzdálenost bodu $P = [-1, 2, -1]$ od roviny

$$\rho: \begin{aligned} x &= 1 + s + t \\ y &= -s + t \\ z &= 2 - 2s - t \end{aligned}$$

c) Určete úhel, který svírají přímka $p$ a rovina $\rho$. Přímka $p$ je dána body $P[1, 0, 1]$, $Q[0, 1, 3]$ a rovina $\rho$ je dána body $A[2, 1, 0]$, $B[3, 0, 2]$, $C[3, 1, 1]$.

d) Určete vzdálenost bodu $M = [1, 0, 1]$ od přímky $p$, která je určena body $A[1, 1, 3]$, $B[0, 2, 4]$.

**Řešení: a)** $106,6°$, **b)** $\sqrt{14}$, **c)** $70,5°$, **d)** $\sqrt{2}$.

**6. Rozložte polynom $P_n(x)$ na součin kořenových činitelů, jestliže znáte kořeny $x_i$**

a) $P_4(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = -2$

b) $P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 4x$, kořeny $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

c) $P_4(x) = 2x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 6x$, kořeny $x_1 = -3$

**Řešení: a)** $P_4(x) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-3)$, **b)** $P_5(x) = x(x+1)(x+1)(x-2)(x+2)$, **c)** $P_4(x) = 2x(x+3)(x-1)(x+1)$

**7. Určete definiční obor funkce $f(x)$**

a) $f(x) = \ln(3x - 1) + \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{3+x}}$

c) $f(x) = \arcsin(4 - 3x)$

**Řešení: a)** $(\frac{1}{3}, +\infty) - \{1\}$, **b)** $(-3, 2 >$, **a)** $< 1, \frac{5}{3} >$

**8. Načrtněte graf funkce $f(x)$**

a) $f(x) = -x^2 + x + 2$

b) $f(x) = 2^{x-1} + 1$

c) $f(x) = \log_2 |x + 2|$

d) $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) - 1$

**9. Určete derivaci funkce $f(x)$**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 3\arcsin x + 2$

b) $f(x) = (x^3 - 2x + 1)\cos x$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln x}$

d) $f(x) = 3^x \sin\sqrt{x}$

e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \operatorname{arctg} x$

**Řešení: a)** $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$, **b)** $f'(x) = (3x^2-2)\cos x - (x^3-2x+1)\sin x$, **c)** $f'(x) = \frac{2x\ln x - x + \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$
**d)** $f'(x) = 3^x \ln 3 \sin\sqrt{x} + 3^x \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}$, **e)** $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \operatorname{arctg} x + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2+1}$

**10. Pomocí L.'Hospitalova pravidla určete limity**

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-2}{\sin 3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\ln(x^2-8)}{x^2-3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$

**Řešení: a)** $\frac{4}{3}$, **b)** 1, **c)** 2, **d)** 0,

**11. Průběh funkce**

a) Rozhodněte na kterém intervalu je funkce $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ rosoucí resp. klesající a určete asymptoty funkce $f(x)$.

b) Rozhodněte na kterém intervalu je funkce $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ konvexní resp. konkávní a nalezněte lokální extrémy funkce $f$, určete zda se jedná o globální extrémy.

c) Vyšetřete průběh funkce $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

**Řešení: a)** rostoucí: $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$, klesající: $(0,1)\cup(1,2)$; as. bez sm. $x = 1$, as. se sm. $y = x+1$
**b)** konvexní: $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$, konkávní: $(-\infty,\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$; lok. minimum v bodě $x_{min} = -1$, $f(-1) = -1$, lok. maximum v bodě $x_{max} = 1$, $f(1) = 1$; lokální extrémy jsou zároveň i globální
**c)** $Df = \mathbb{R} - \{0\}$; rostoucí: $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, klesající: $(0,1)$, lok. min. v bodě $x_{min} = 1$, $f(1) = e$; konvexní: $(0,+\infty)$, konkávní: $(-\infty,0)$; as. bez směrnice $x = 0$ ( $\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$), as. se směrnicí $y = x+1$ (pro $x \to -\infty$); $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ nemá globální extrémy.

**12. Taylorův polynom a diferenciál**

a) Určete diferenciál funkce $f(x) = (x+1)e^x$ v bodě $x_0 = 0$ při přírůstku $h = 0.01$.

b) Pomocí diferenciálu určete přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt[5]{33}$

c) Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = x\cos x$ v bodě $x_0 = 0$

d) Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = x\ln x$ v bodě $x_0 = 1$

e) Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně určete přibližnou hodnotu čísla $e^{0.1}$.

**Řešení: a)** $df(0)(0.01) = 0.02$, **b)** $\sqrt[5]{33} \doteq 2.0125$ **c)** $T_3(x) = x - \frac{x^3}{2}$, **d)** $T_3(x) = x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6}$,
**e)** $\frac{221}{200}$

**13. Vypočtěte neurčité integrály**

a) $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}} - 4^x\right) dx$

b) $\int (x^2 - 3x + 1)\cos x\, dx$ (metoda "per partes")

c) $\int 4x \ln x\, dx$ (metoda "per partes")

d) $\int \frac{2}{1-3x}\, dx$ (substituční metoda)

e) $\int 5\cos^3 x \sin^2 x\, dx$ (substituční metoda)

f) $\int \frac{5}{x^2-x-6}\, dx$ ("parciální zlomky")

g) $\int \frac{1}{x^3+x^2}\,dx$ ("parciální zlomky")

**Řešení: a)** $6\sqrt[3]{x}+\frac{\arcsin x}{3}-\frac{4^x}{\ln 4}+C$, **b)** $(x^2-3x-1)\sin x+2x\cos x-3\cos x+C$, **c)** $2x^2\ln x-x^2+C$, **d)** $-\frac{2}{3}\ln(1-3x)+C$ **e)** $\frac{1}{3}\cos^2 x\sin x+\frac{2}{3}\sin x-\cos^4 x\sin x+C$ **f)** $\ln(x-3)-\ln(x+2)+C$, **g)** $\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}+C$

## 14. Vypočtěte určité integrály

a) $\int\limits_0^1 x3^x\,dx$ (metoda "per partes")

b) $\int\limits_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$ (substituční metoda)

c) $\int\limits_2^3 \frac{x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$ ("parciální zlomky")

**Řešení: a)** $\left[\frac{x3^x}{\ln 3}-\frac{3^x}{(\ln 3)^2}\right]_0^1=\frac{3}{\ln 3}-\frac{2}{(\ln 3)^2}$, **b)** $\left[\frac{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{4}\right]_1^3=3$, **c)** $\left[\ln\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x-1}\right]_2^3=\ln\frac{3}{4}+1$

## 15. Aplikace určitého integrálu

a) Určete plošný obsah množiny $M=\{[x,y]: y\leq\cos x,\ y\geq\frac{1}{2},\ x\geq 0\}$.

b) Určete objem tělesa vzniklého rotací přímky $y=\frac{x}{2}$, $x\in<0,2>$ kolem osy $x$.

c) Určete délku části asteroidy, která má parametrické vyjádření $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ t\in<0,\frac{\pi}{2}>$.

**Řešení: a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$, **b)** $\frac{2\pi}{3}$, **c)** $\frac{3}{8}$