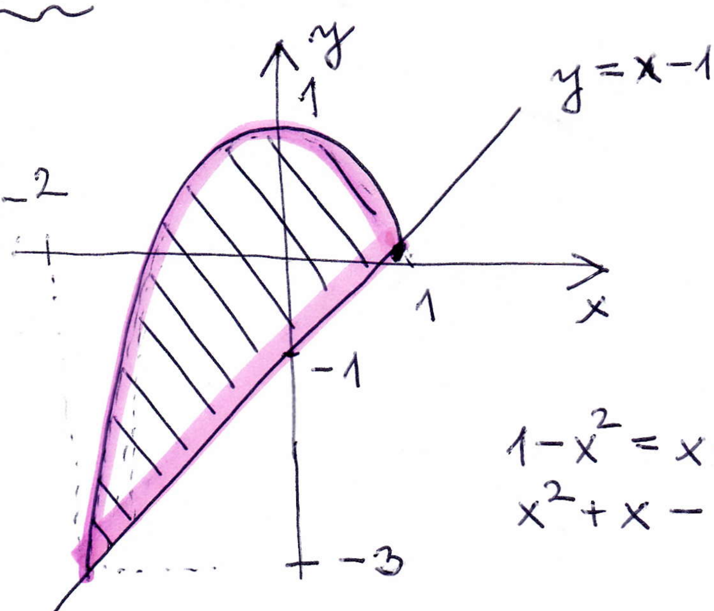
PŘÍKLAD 1.

Vypočtěte $\iint\limits_M x\,dx\,dy$, kde integrační obor M je ohraničen křivkami $x-y=1$, $x^2+y=1$.

Řešení: a) Nakreslíme obrázek M.



spočítáme průsečíky přímky a paraboly. Musíme vyřešit kvadratickou rovnici.

$$1-x^2 = x-1 \iff$$
$$x^2+x-2=0 \iff x=-2 \vee x=1$$

b) Popíšeme M jako integrační obor typu (x,y):

$$M = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ -2\le x\le 1,\ x-1\le y\le 1-x^2\}$$

c) Dosadíme do Fubiniho vzorce a dopočítáme:

$$\iint\limits_M x\,dx\,dy = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x-1}^{1-x^2} x\,dy\right)dx \overset{d)}{=} \int_{-2}^{1}\left[xy\right]_{x-1}^{1-x^2}dx =$$

$$\int_{-2}^{1} x(1-x^2)-x(x-1)\,dx \overset{e)}{=} \int_{-2}^{1} -x^3-x^2+2x\,dx =$$

$$\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x_2\right]_{-2}^{1} = \left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)-\left(-4+\frac{8}{3}+4\right) =$$

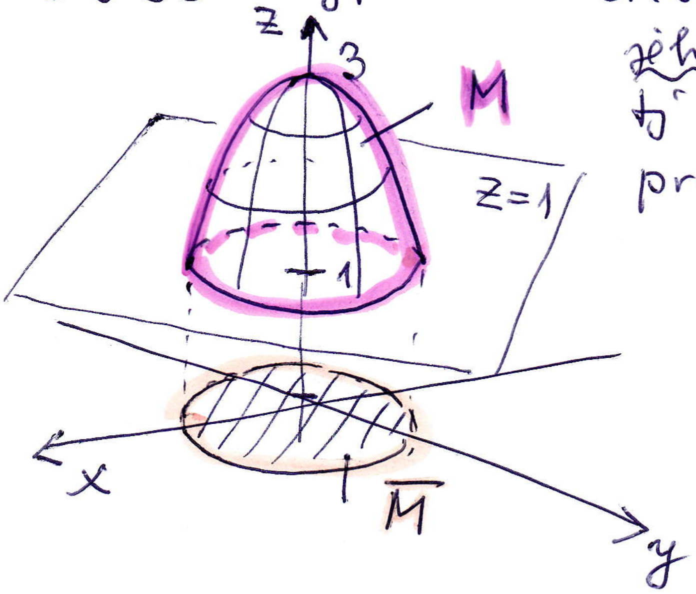
$$-\frac{1}{4}-\frac{9}{3}+1 = -2-\frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$= -\frac{9}{4}$$

PŘÍKLAD 2: Pomocí transformace do válcových souřadnic vypočtěte integrál:

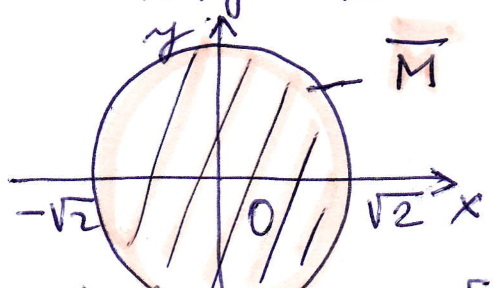
$$\iiint\limits_M dx\,dy\,dz,$$ kde integrační obor M je ohraničen plochami $z = 3 - x^2 - y^2$ a $z = 1$.

Řešení: a) Nejprve si nakreslíme integrační obor M a jeho průmět $\overline{M}$ do roviny xy, tj. $z = 0$. Hraniční křivka průmětu je kružnice:



$$3 - x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 2$$



b) Popíšeme M jako integrační obor M^* typu $[\rho, \varphi, z]$ ve válcových souřadnicích:

$$M^* = \left\{[\rho, \varphi, z] \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le \rho \le \sqrt{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 1 \le z \le 3 - \rho^2\right\}$$

c) $$\iiint\limits_M dx\,dy\,dz \overset{*}{=} \iiint\limits_{M^*} \overset{|J|}{\rho}\, d\rho\, d\varphi\, dz \overset{**}{=} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^{3-\rho^2} \rho\, dz \right) d\varphi \right) d\rho$$

$*$ … použití věty o transformaci, $**$ … Fubiniho vzorec

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left[\rho z\right]_1^{3-\rho^2} d\varphi \right) d\rho = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \rho(3-\rho^2) - \rho\, d\varphi \right) d\rho =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left[(2\rho - \rho^3)\varphi\right]_0^{2\pi} d\rho = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} 2\rho - \rho^3\, d\rho = 2\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\pi\left(2 - \frac{4}{4}\right) = \underline{\underline{2\pi}}.$$

PŘÍKLAD 3:

Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu $\int_C x^2 - y^2 \, ds$, kde křivka C je úsečka určená body $A = [1,2]$, $B = [4,-1]$.

Řešení: a) Napíšeme parametrizaci křivky C:

$$C: [x,y] = \underbrace{[1,2]}_{A} + t\underbrace{(3,-3)}_{B-A}, \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

$$(*) \quad \begin{aligned} x &= 1 + 3t \\ y &= 2 - 3t, \quad t \in \langle 0,1 \rangle. \end{aligned} \quad \text{Odtud} \quad \begin{aligned} x' &= 3 \\ y' &= -3 \end{aligned}$$

b) Použijeme výpočetní vzorec

$$\int_C x^2 - y^2 \, ds = \int_0^1 [(1+3t)^2 - (2-3t)^2] \sqrt{3^2 + (-3)^2} \, dt$$

c) Vypočítáme určitý integrál:

$$\int_0^1 [1 + 6t + \cancel{9t^2} - (4 - 12t + \cancel{9t^2})] \sqrt{18} \, dt =$$

$$= \sqrt{18} \int_0^1 18t - 3 \, dt = 3\sqrt{2} \left[18 \frac{t^2}{2} - 3t\right]_0^1 = 3\sqrt{2} \left[9t^2 - 3t\right]_0^1$$

$$= 3\sqrt{2} \, (\underbrace{9-3}_{6}) = \underline{\underline{18\sqrt{2}}}$$

Jiná možnost řešení: Rovnice (*) sečteme: $x + y = 3$

Odtud $x = t$, $y = 3 - t$, $t \in \langle 1, 4 \rangle$. Tedy $x' = 1$, $y' = -1$.

Použijeme výpočetní vzorec:

$$\int_C x^2 - y^2 \, ds = \int_1^4 [t^2 - (3-t)^2] \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} \, dt =$$

$$\sqrt{2} \int_1^4 \cancel{t^2} - 9 + 6t - \cancel{t^2} \, dt = \sqrt{2} \int_1^4 6t - 9 \, dt =$$

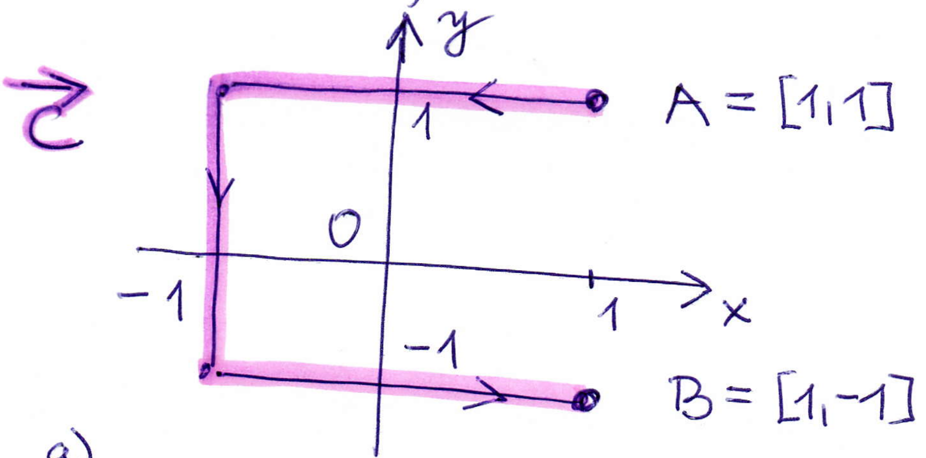
$$\sqrt{2} \left[6 \frac{t^2}{2} - 9t\right]_1^4 = \sqrt{2} \, (3 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 - (3 - 9)) =$$

$$\sqrt{2} \, (48 - 36 + 6) = \underline{\underline{18\sqrt{2}}}$$

PŘÍKLAD 4:

Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$\int_{\vec{C}} y^3\,dx + 3xy^2\,dy$, kde křivka $\vec{C}$ je po částech hladká, definovaná obrázkem:



Řešení: a) Nejprve ověříme, že vektorové pole

$\vec{F}(x,y) = (\underbrace{y^3}_{f}, \underbrace{3xy^2}_{g})$ je potenciálové.

$$\begin{aligned} f'_y &= 3y^2 \\ &\parallel \\ g'_x &= 3y^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \vec{F} \text{ je potenciálové}$$

b) Vypočítáme potenciál $\varphi(x,y)$:

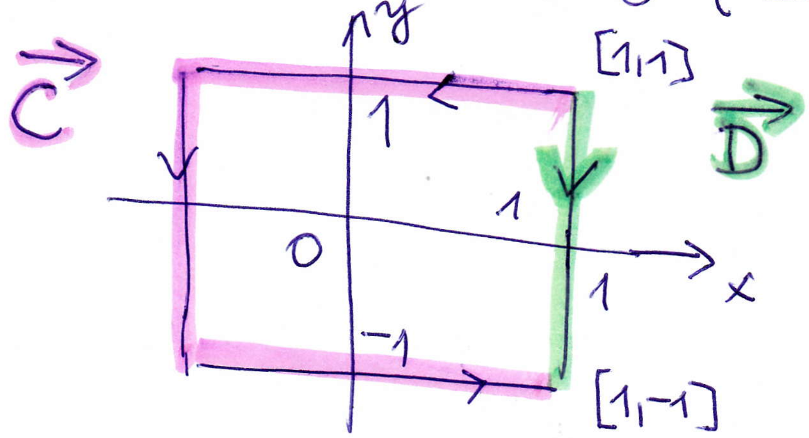
$$\varphi(x,y) = \int_0^x y^3\,dt + \int_0^y 3\cdot 0\cdot t^2\,dt =$$

$$= \left[ty^3\right]_0^x + \left[c\right]_0^y = xy^3 + (c-c) = \underline{xy^3}$$

c) $$I = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(1,-1) - \varphi(1,1) =$$

$$= 1\cdot(-1)^3 - 1\cdot 1^3 = -1-1 = \underline{\underline{-2}}$$

Druhá možnost řešení: Protože je pole $\vec{F}$ potenciálové, nezávisí integrál na křivce, přes kterou integrujeme. Křivku $\vec{C}$ nahradíme křivkou $\vec{D}$ (úsečkou AB orientovanou od A k B (zeleně)).



Napíšeme parametrizaci $\vec{D}$:

$$x = 1 \qquad\qquad x' = 0$$
$$y = t, \quad t \in \langle -1, 1 \rangle, \Rightarrow \quad y' = 1, \quad \varepsilon = -1.$$

Platí

$$\int_{\vec{C}} y^3 dx + 3xy^2 dy = \int_{\vec{D}} y^3 dx + 3xy^2 dy \overset{\varepsilon}{=}$$

$$(-1) \cdot \int_{-1}^{1} (t^3, 3 \cdot 1 \cdot t^2) \circ (0, 1)\, dt =$$

$$(-1) \int_{-1}^{1} 3t^2 dt = (-3) \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{1} = (-3)\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= (-3) \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{-2}}$$