AUTOR TEXTU: JIŘÍ KLAŠKA
VUT BRNO

POKRAČOVÁNÍ PÁTÉ 30.3 – 3.4. 2020

VÍCEROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

K praktickému počítání příkladů budeme potřebovat tyto základní vědomosti:

1) Fubiniho větu (str. 24)
2) Dirichletovu větu, která je speciálním případem Fubiniho věty
3) Větu o transformaci (str. 26)
4) Speciální transformace (posunutí, změna měřítka na osách, otočení, polární souřadnice, válcové souřadnice, sférické souřadnice)

Strany se týkají mého učebního textu (teorie). Naleznete na mojí osobní stránce. Ve cvičebním textu je tomuto tématu věnováno 50 řešených úloh. Mnoho dalších naleznete ve sbírce Děmidovič, kterou jsem dal rovněž k dispozici. Nezbývá než získat praxi a počítat a počítat....

Nyní si pomalu a metodicky probereme nějaký příklad (str 33, Lekce 9, Př. 4).

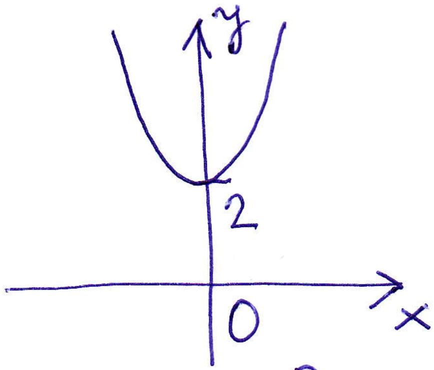
Zadání: Vypočtěte $\iint\limits_M y \, dx\, dy$, kde M je určena vztahy: $x^2 - y + 2 = 0$, $x + y - 4 = 0$.

Řešení: Formálně můžeme řešení rozdělit do pěti základních kroků.

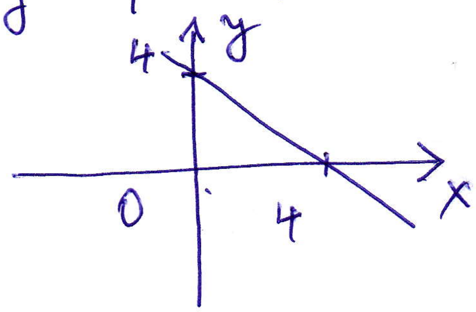
Krok 1: Nakreslíme integrační obor, tj. množinu M. Podle předpokladů teorie je M uzavřená a ohraničená.

a) Podmínka: $x^2 - y + 2 = 0. \iff y = x^2 + 2$

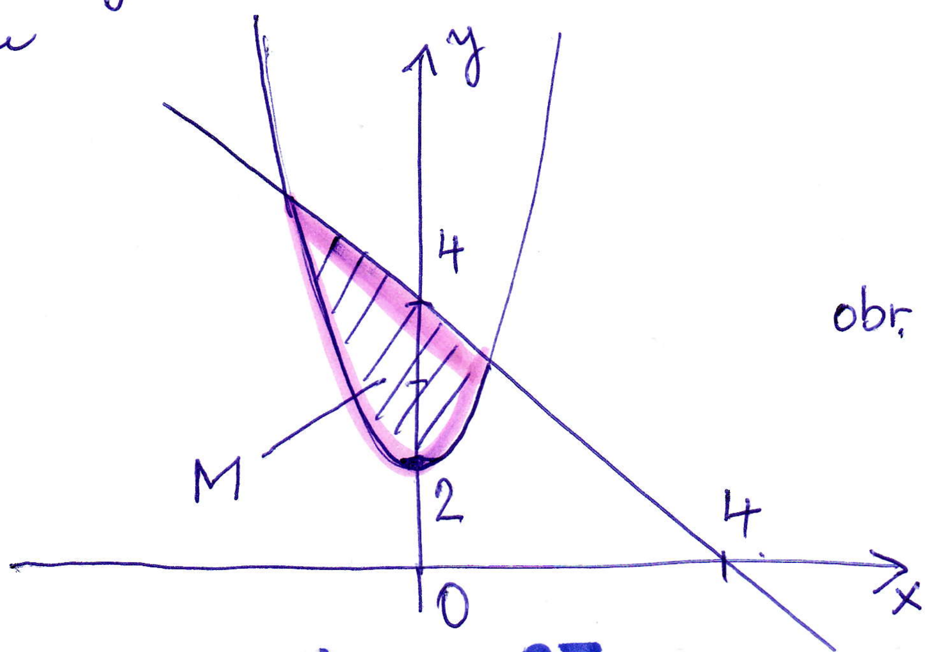
Tato podmínka určuje parabolu



b) Podmínka $x + y - 4 = 0$ určuje přímku



Obě křivky nakreslíme do stejného (jednoho) obrázku



obr. I

Jediná část, která je uzavřená a ohraničená a je určena podmínkami a), b) je vyšrafována a označena barevně.

Krok 2. Množinu M (integrační obor) musíme zapsat jako elementární množinu typu (x, y) nebo typu (y, x).

Typ (x, y) vyžaduje určit 4 parametry: a, b, d(x), h(x), kde $a, b \in \mathbb{R}$ a d(x), h(x) jsou spojité funkce (d jako dolní, h jako horní)

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \ a \leq x \leq b, \ d(x) \leq y \leq h(x)\}$$

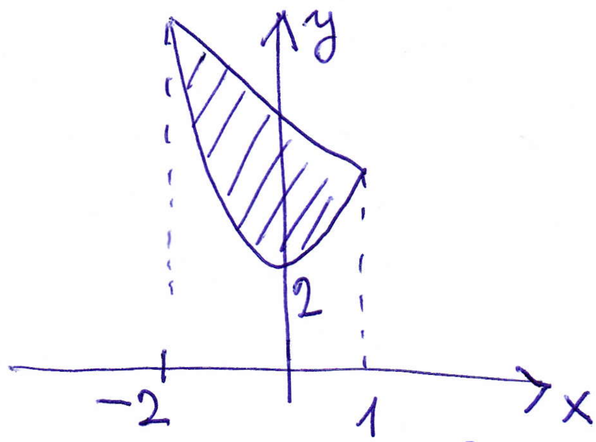
K určení a, b musíme vyřešit rovnici:

a) $y = x^2 + 2$ $\Rightarrow$ $x^2 + 2 = 4 - x$

b) $y = 4 - x$ $\quad x^2 + x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} -\frac{4}{2} = -2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right.$$

Protože a < b dostáváme a = −2, b = 1



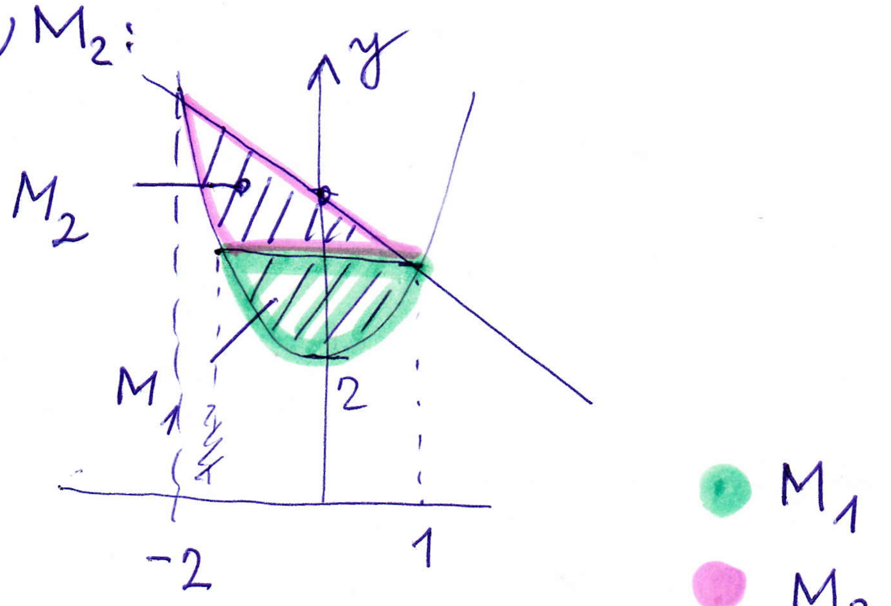
Z obrázku ihned plyne že dolní fce $d(x)$ je parabola a horní $h(x)$ je přímka. Platí tedy

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ -2 \leq x \leq 1,\ x^2+2 \leq y \leq 4-x\}$$

Množinu M můžeme také vyjádřit jako integrační obor typu (y,x). Opět musíme určit 4 parametry $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}(y), \bar{h}(y)$, kde $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}$ a $\bar{d}(y), \bar{h}(y)$ jsou spojité funkce.

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \bar{a} \leq y \leq \bar{b},\ \bar{d}(y) \leq x \leq \bar{h}(y)\}$$

Chceme-li takové vyjádření nalézt, nezbývá než rozdělit M na 2 části M_1, M_2 tak, že $M = M_1 \cup M_2$:



Pro $x=-2$ dostáváme $y=6$

Pro $x=1$ dostáváme $y=3$

Tedy

$$M_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ 2 \le y \le 3,\ -\sqrt{y-2} \le x \le \sqrt{y-2}\}$$

$$M_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ 3 \le y \le 6,\ -\sqrt{y-2} \le x \le 4-y\}$$

Odtud $\quad \bar{d}(y) = -\sqrt{y-2}$ pro $2 \le y \le 6$,

a

$$\bar{h}(y) = \begin{cases} +\sqrt{y-2} & \text{pro } 2 \le y \le 3 \\ 4-y & \text{pro } 3 \le y \le 6. \end{cases}$$

Krok 3: Aplikujeme Fubiniho větu.

Pro typ (x,y) má tvar:

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Pro typ (y,x) má tvar:

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left(\int_{\bar{d}(y)}^{\bar{h}(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

V našem případě je pro typ (x,y)

$$\iint_M y\,dx\,dy = \int_{-2}^{1} \left(\int_{x^2+2}^{4-x} y\,dy \right) dx$$

a pro typ (y,x):

$$\iint_M y\,dx\,dy = \int_{+2}^{3} \left(\int_{-\sqrt{y-2}}^{\sqrt{y-2}} y\,dx \right) dy + \int_{3}^{6} \left(\int_{-\sqrt{y-2}}^{4-y} y\,dx \right) dy$$

Krok 4: Výpočet parciálního integrálu.

V tomto kroku musíme přesně vědět, jak počítat podle Fubiniho vzorce.

Typ (x, y):
$$\int_a^b \left(\int_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx:$$

Nejprve vypočítáme vnitřní závorku $\int_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$.

To provedeme tak, že vypočteme primitivní funkci
$$\int f(x,y)\,dy.$$

Tento výpočet můžeme pracovně nazvat parciální integrací (ono to totiž nic jiného není)

K „x" se chováme při integraci podle y jako by to byla konstanta. Výsledek integrace je primitivní fce $F(x,y)$. Tedy
$$\int f(x,y)\,dy = F(x,y) + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

Při výpočtu používáme všechny vzorce a postupy, které známe ze zimního semestru. (substituce, per partes, parciální zlomky ...)

Nyní k výpočtu
$$\int_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy = \Big[F(x,y) + C\Big]_{d(x)}^{h(x)} =$$

$$= F(x, h(x)) + c - \left(F(x, d(x)) + c\right) =$$

$$= F(x, h(x)) - F(x, d(x)) =: g(x)$$

Všimněte si, že c se odečetlo. Protože to již víme, tak při konkrétních výpočtech ho neuvádíme, resp. položíme ho rovno 0.

Výpočet jsme provedli pomocí Newton-Leibnizovy formule ze zimního semestru. (Dosadíme horní mez a odečteme „dosazení dolní meze")

Tedy $\displaystyle\int_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy = g(x)$

Tím je celý výpočet převeden na výpočet „obyčejného Riemannova integrálu"

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Podobně se postupuje při výpočtu, je-li M typu (y,x).

Krok 5: Výpočet Riemannova integrálu $\int_a^b g(x)dx$.

Tento krok je stará látka, která nepotřebuje nyní podrobný komentář.

Proveďme nyní uvedené kroky v našem příkladě:

$$\iint_M y \, dx\, dy = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2+2}^{4-x} y \, dy\right) dx =$$

$$\int_{-2}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2+2}^{4-x} dx = \int_{-2}^{1} \frac{(4-x)^2}{2} - \frac{(x^2+2)^2}{2} dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{1} 16 - 8x + x^2 - x^4 - 4x^2 - 4 \, dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{1} 12 - 8x - 3x^2 - x^4 \, dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[12x - 8\frac{x^2}{2} - 3\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{2}\left[12x - 4x^2 - x^3 - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[12 - 4 - 1 - \frac{1}{5} - \left(-24 - 16 + 8 + \frac{32}{5}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[7 - \frac{1}{5} - \left(-32 + \frac{32}{5}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(39\cancel{4} - \frac{33}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{39\cdot 5 - 33}{5}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{195-33}{5} = \frac{1}{2}\,\frac{162}{5} = \underline{\underline{\frac{81}{5}}}$$

Druhá možnost

$$\iint_M y \, dx\, dy = \underbrace{\int_{2}^{3}\left(\int_{-\sqrt{y-2}}^{\sqrt{y-2}} y \, dx\right) dy}_{A} + \underbrace{\int_{3}^{6}\left(\int_{-\sqrt{y-2}}^{4-y} y \, dx\right) dy}_{B}$$

Integrály A, B spočteme samostatně;

$$A = \int_2^3 \left[xy\right]_{-\sqrt{y-2}}^{\sqrt{y-2}} dy = \int_2^3 y\sqrt{y-2} - (-y\sqrt{y-2})\, dy$$

$$= \int_2^3 2y\sqrt{y-2}\, dy = \left| \begin{array}{ll} \text{zavedeme substituci} & \\ t = y-2 & 2 \to 0 \\ dt = dy & 3 \to 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 2(t+2)\sqrt{t}\, dt = 2\left[\int_0^1 t\sqrt{t}\,dt + \int_0^1 2\sqrt{t}\,dt\right]$$

$$= 2\left[\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\,dt\right] + 4\left[\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt\right] = 2\cdot\left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 + 4\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= 2\cdot\left[\frac{2}{5}\sqrt{t^5}\right]_0^1 + 4\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_0^1 = 2\cdot\frac{2}{5} + 4\cdot\frac{2}{3} =$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{8}{3} = \frac{12+40}{15} = \underline{\underline{\frac{52}{15}}}$$

$$B = \int_3^6 \left[xy\right]_{-\sqrt{y-2}}^{4-y} dy = \int_3^6 y(4-y) + y\sqrt{y-2}\, dy =$$

$$\int_3^6 4y - y^2\, dy + \int_3^6 y\sqrt{y-2}\, dy = \left[4\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_3^6 +$$

zavedeme substituci $t = y-2$, $3 \to 1$, $6 \to 4$

$$+ \int_1^4 (t+2)\sqrt{t}\, dt = \left(2\cdot 36 - \frac{6^3}{3}\right) - \left(2\cdot 9 - \frac{27}{3}\right) +$$

$$\left[\frac{2}{5}\sqrt{t^5} + 2\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_1^4 = \underbrace{(72-72)}_{0} - \underbrace{(18-9)}_{9} +$$

$$\frac{2}{5}\sqrt{4^5} + \frac{4}{3}\sqrt{4^3} - \frac{2}{5} - \frac{4}{3} =$$

$$= -9 + \frac{2}{5}\cdot 32 + \frac{4}{3}\cdot 8 - \frac{2}{5} - \frac{4}{3} =$$

$$= -9 + \frac{64}{5} + \frac{32}{3} - \frac{2}{5} - \frac{4}{3} = -9 + \frac{62}{5} + \frac{28}{3} =$$

$$= \frac{-9\cdot 15 + 3\cdot 62 + 5\cdot 28}{15} = \frac{-\overset{135}{\cancel{144}} + 186 + 140}{15} = \frac{191}{15}$$

Celkem $I = A + B = \frac{52}{15} + \frac{191}{15} = \frac{243}{15} = \frac{81}{5}$

Bylo to dost zdlouhavé počítání, že?
Z příkladu plyne důležitý závěr.
Pro výpočet lze použít jak typ (x,y) tak (y,x). Oba postupy však mohou být různě dlouhé i obtížné.

!!! Podobný příklad dám na druhou písemku. Množina M bude ohraničena kuželosečkou a přímkou. Složitější integrační obor tam nebude.

Nyní si ukážeme, jak úlohu vyřešit v Maple. Nejprve je třeba zavolat knihovnu with(student).
Pak využijeme příkazů Doubleint a value.
Pro trojrozměrný integrál pak Tripleint.

```
> restart;with(student);f:=y;
> H:=Doubleint(f,y=x^2+2..4-x,x=-2..1);value(H);
```

[D, *Diff*, *Doubleint*, *Int*, *Limit*, *Lineint*, *Product*, *Sum*, *Tripleint*, *changevar*, *completesquare*, *distance*, *equate*, *integrand*, *intercept*, *intparts*, *leftbox*, *leftsum*, *makeproc*, *middlebox*, *middlesum*, *midpoint*, *powsubs*, *rightbox*, *rightsum*, *showtangent*, *simpson*, *slope*, *summand*, *trapezoid*]

$$f := y$$

$$H := \int_{-2}^{1}\int_{x^2+2}^{4-x} y \, dy \, dx$$

$$\frac{81}{5}$$

```
> A:=Doubleint(f,x=-sqrt(y-2)..sqrt(y-2),y=2..3);value(A);
```

$$A := \int_{2}^{3}\int_{-\sqrt{y-2}}^{\sqrt{y-2}} y \, dx \, dy$$

$$\frac{52}{15}$$

```
> B:=Doubleint(f,x=-sqrt(y-2)..4-y,y=3..6);value(B);
```

$$B := \int_{3}^{6}\int_{-\sqrt{y-2}}^{4-y} y \, dx \, dy$$

$$\frac{191}{15}$$

```
> value(A)+value(B);
```

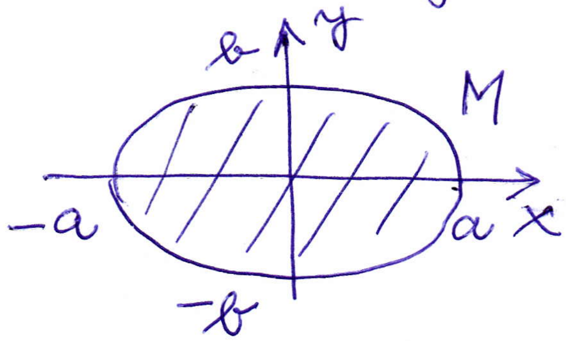
$$\frac{81}{5}$$

```
>
```

Nyní si detailně promyslíme základní transformac
(polární souřadnice, změna měřítka na osách, posunutí a otočení)

Zadání: $\iint\limits_M dx\,dy$, $M: \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Nejprve nakreslíme integrační obor M.



Z analytické geometrie víme, že jde o vnitřek elipsy. Hranice integračního oboru M je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, která má hlavní poloosu a a vedlejší poloosu b. Můžeme tedy popsat M jako integrační obor typu (x, y):

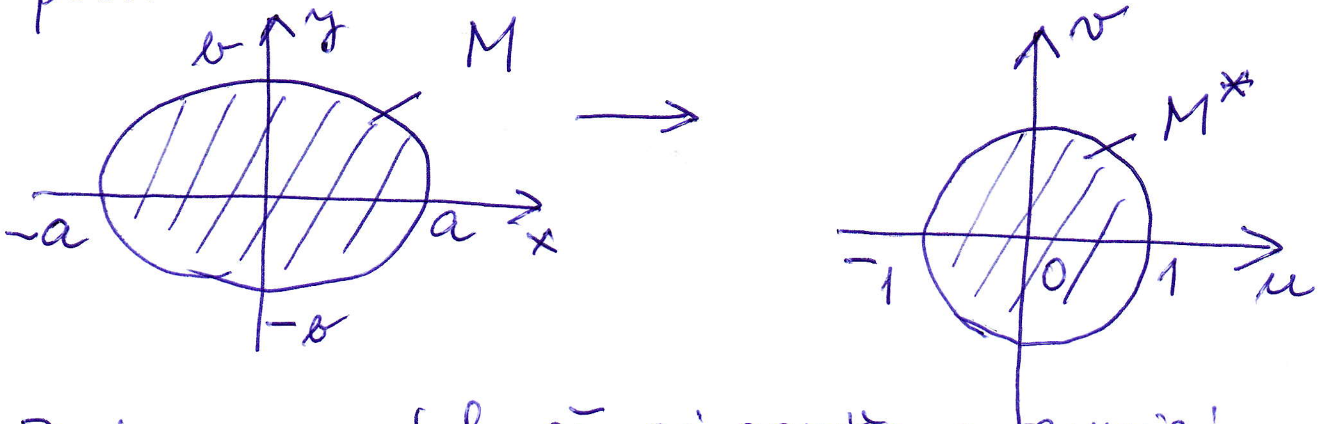
$$M = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2;\ -a \leq x \leq a,\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \right\}$$

a následně počítat podle Fubiniho vzorce:

$$\iint\limits_M dx\,dy = \int_{-a}^{a} \left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \right) dx.$$

Tento postup je ale zdlouhavý a obtížný.

Můžete zkusit dopočítat za cvičení. My nyní popustíme uzdu fantazii. Zkusme vymyslet transformaci, která elipsu změní v kruh o poloměru 1.



Postupujeme tak, že si napíšeme rovnici hranice M a hranice M*:

a) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \longrightarrow$ b) $u^2 + v^2 = 1$

Jde tedy o to co zvolit, aby rovnice a) přešla v rovnici b): To je ale snadné.

Volím $\frac{x}{a} = u$ a $\frac{y}{b} = v$ odtud

$$\| \; x = au \quad \text{a} \quad y = bv \; \|$$

Vypočteme Jakobián této transformace:

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

(Museli jsme vypočítat 4 parciální derivace)

Protože $a, b \in (0, \infty)$ je $|J| = J$.

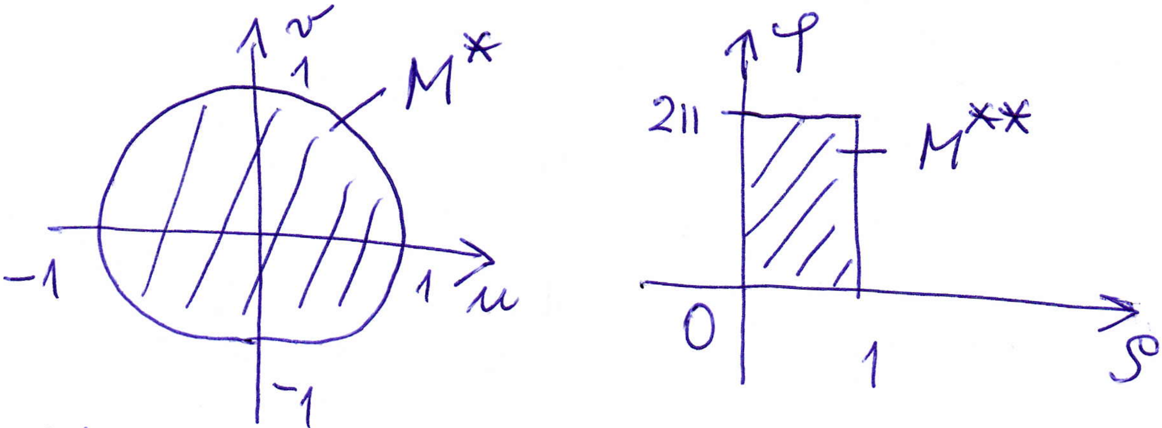
Nyní použijeme větu o transformaci:

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{M^*} f(x(u,v),y(u,v))\cdot|J|\,du\,dv$$

V našem případě je

$$\iint_M dx\,dy = \iint_{M^*} ab\,du\,dv = ab\iint_{M^*} du\,dv,$$

kde $M^*: u^2+v^2 \le 1$. Platí následující pravidlo (které ve většině případů vede ke snadnějšímu výpočtu): Kde je integrační ~~obor~~ kruh nebo jeho část, provedeme transformaci do polárních souřadnic. (Ty už známe z teorie limit). Transformace do polárních souřadnic změní kruh v obdélník:



Spočteme Jakobián transformace do polárních souřadnic:

$$u = \varrho\cos\varphi$$
$$v = \varrho\sin\varphi$$

$$J = \begin{vmatrix} u'_\varrho & u'_\varphi \\ v'_\varrho & v'_\varphi \end{vmatrix} =$$

$u'_\varrho = \cos\varphi$
$u'_\varphi = -\varrho\sin\varphi$
$v'_\varrho = \sin\varphi$
$v'_\varphi = \varrho\cos\varphi$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho\cos^2\varphi + \varrho\sin^2\varphi = \underline{\underline{\varrho}}$$

Použijeme opět transformační větu:

$$ab \iint_{M^*} du\,dv = ab \iint_{M^{**}} \varrho\, d\varrho\, d\varphi \text{ , kde}$$

$$M^{**} = \langle 0,1\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Nyní můžeme použít Dirichletovu větu:

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy \text{ , je-li}$$

1) $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$

2) $M = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle.$

Odtud

$$ab \iint_{M^{**}} \varrho\, d\varrho\, d\varphi = ab \int_0^1 \varrho\, d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$ab \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = ab\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi ab}}$$

Navíc máme jako bonus krásný výsledek.

Z teorie plyne, že $\iint_M dx\,dy$ je rovno obsahu oboru M. Tedy obsah elipsy je $S = \pi ab$.

Speciálně, je-li $a = b$ pak $S = \pi a^2$, což je obsah kruhu o poloměru $r = a$.

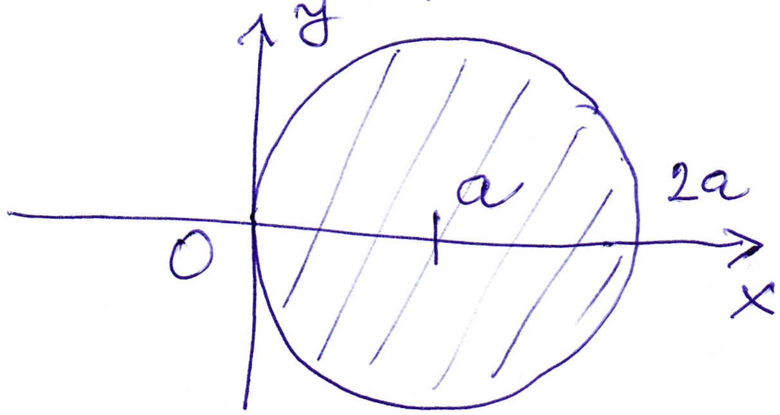
Další příklad: Vypočtěte

$$\iint_M dx\,dy, \quad M: x^2 + y^2 \leq 2ax, \quad a > 0.$$

Řešení: Nejprve opět nakreslíme obor M. K tomu je ale zapotřebí provést algebraickou úpravu:

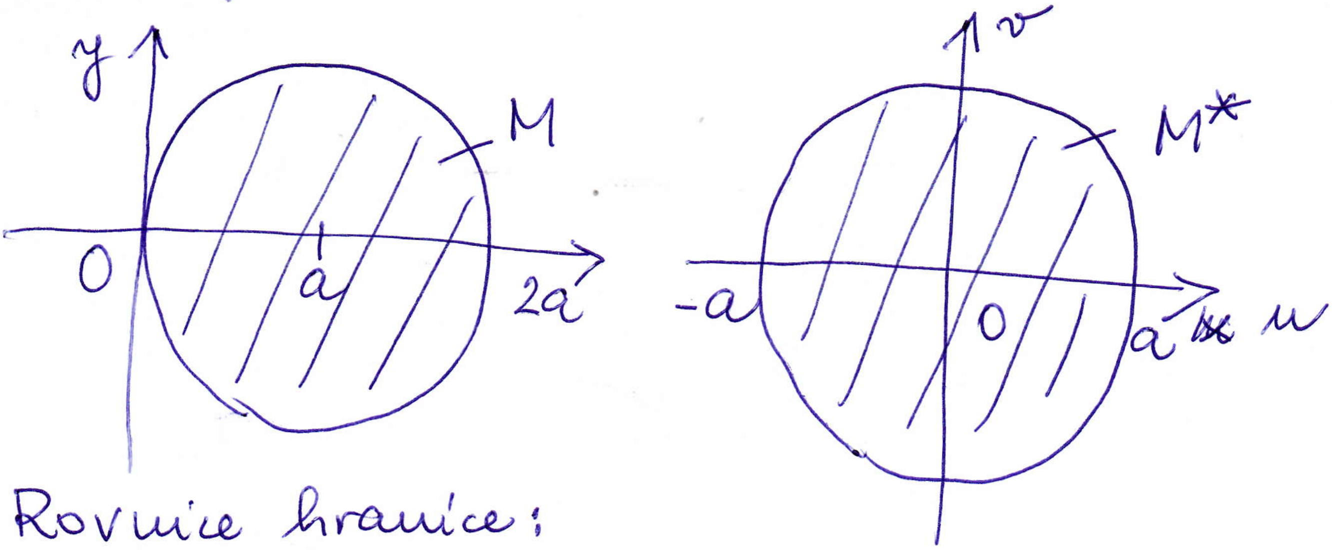
$$x^2 + y^2 \leq 2ax \Leftrightarrow x^2 - 2ax + y^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$$

Odtud plyne, že M je kruh se středem v bodě $S = [a, 0]$ a poloměru $r = a$.



Pokud bychom podle předchozího návodu použili ihned transformaci do polárních souřadnic, byl by výpočet zbytečně složitý (ale ne tak, aby se to nedalo vypočítat). Vyzkoušejte za domácí cvičení. My budeme postupovat tak, že kruh posuneme do středu souřadnicové soustavy.

K tomu je třeba vymyslet (opět) transformační rovnice.



Rovnice hranice:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \longrightarrow u^2+v^2=a^2$$

Volíme: $u = x-a$ Odtud: $x = u+a$

$v = y$ $y = v$

Spočítáme Jakobián této transformace

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Aplikujeme větu o transformaci

$$\iint_M dx\,dy = \iint_{M^*} 1 \cdot du\,dv \quad , \text{kde } M^*: u^2+v^2 \leq a^2$$

Teprve nyní provedeme transformaci do polárních souřadnic:

$$\iint_{M^*} du\,dv = \iint_{M^{**}} \varrho\, d\varrho\, d\varphi \, , \text{ kde } M^{**} = \langle 0,a\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle$$

Použijeme Dirichletovu větu:

$$\iint_{M^{**}} \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \int_0^a \varrho \, d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^a \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi a^2}}.$$

Došli jsme k výsledku, který jsme ale očekávali (a znali předem). Proč?? Přece

$\iint_M dx\,dy$ je obsah M. M je kruh o poloměru $r = a$ tedy má obsah $S = \pi a^2$.

Nešlo nám ale o to vypočítat obsah M, ale ukázat, jak fungují transformace.

Transformace (jakožto zobrazení) se dají skládat. Jakobián složené transformace je pak součinem Jakobiánů jednotlivých transformací: V našem příkladu je: (v příkladu s elipsou)

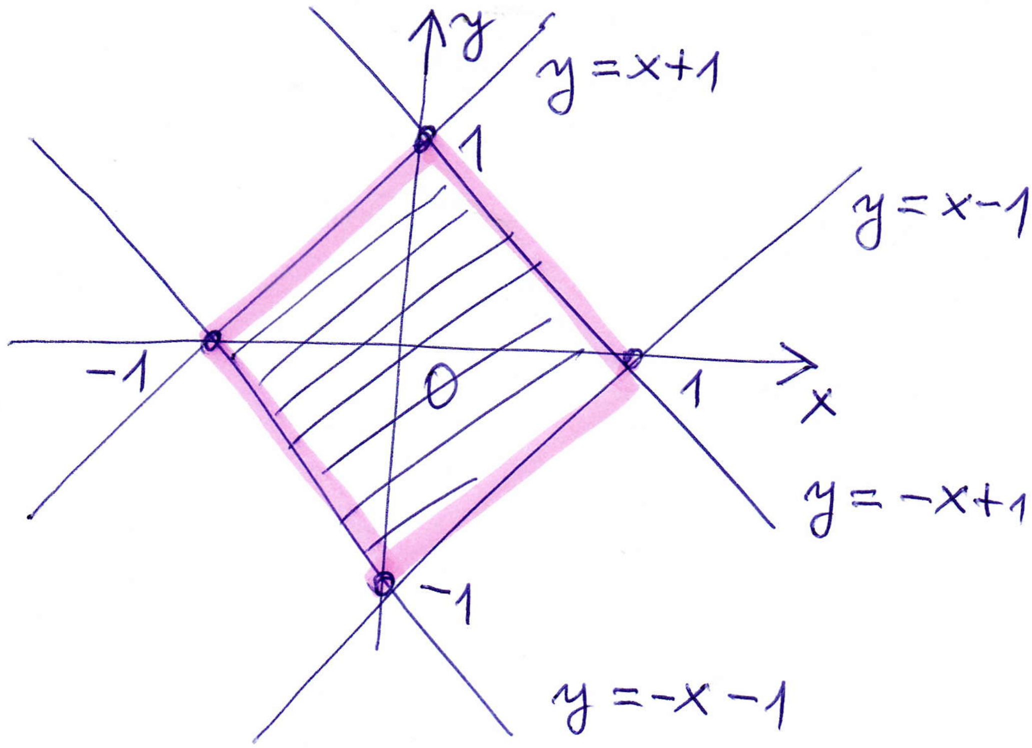
$$J_1 = ab \quad J_2 = \varrho \quad |J| = |J_1| \cdot |J_2| = ab\varrho$$

$$\begin{aligned} x &= au = a\varrho\cos\varphi \\ y &= bv = b\varrho\sin\varphi \end{aligned} \qquad J = ab\varrho.$$

Vypočtěte $\iint_M dx\,dy$, kde $M: |x|+|y| \leq 1$.

Řešení:

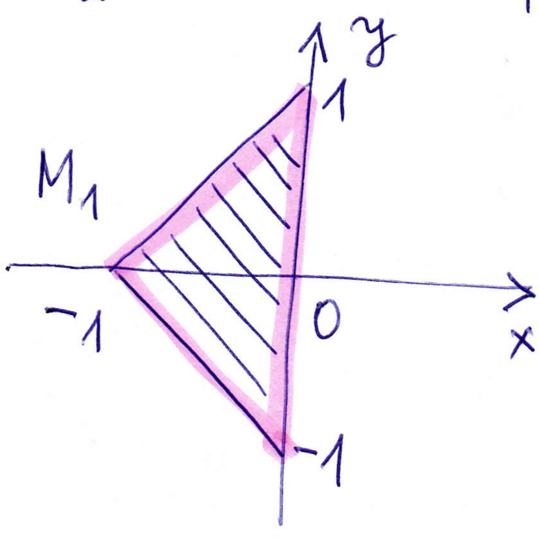
Nejprve si nakresleme množinu M:

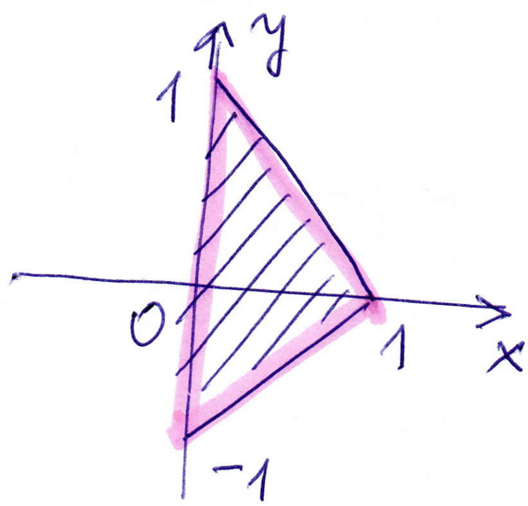


Abychom mohli použít Fubiniho větu je nutné provést rozdělení množiny M na dvě části M_1, M_2:

$$M_1: -1 \leq x \leq 0, \quad -x-1 \leq y \leq x+1$$

$$M_2: 0 \leq x \leq 1, \quad x-1 \leq y \leq -x+1$$





Platí $\iint\limits_M dx\,dy = \iint\limits_{M_1} dx\,dy + \iint\limits_{M_2} dx\,dy$

Na každý ze dvou integrálů aplikujeme Fubiniho větu:

$$A = \iint\limits_{M_1} dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-x-1}^{x+1} dy\right)dx =$$

$$\int_{-1}^{0} \left[y\right]_{-x-1}^{x+1} dx = \int_{-1}^{0} x+1-(-x-1)\,dx =$$

$$\int_{-1}^{0} 2x+2\,dx = 2\int_{-1}^{0} x+1\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0} =$$

$$2\left(0-\left(\frac{(-1)^2}{2}-1\right)\right) = 2\cdot\left(-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$$

Podobně

$$B = \iint\limits_{M_2} dx\,dy = \int_{0}^{1}\left(\int_{x-1}^{-x+1} dy\right)dx = \int_{0}^{1}\left[y\right]_{x-1}^{-x+1} dx$$

$$= \int_{0}^{1} -x+1-(x-1)\,dx = \int_{0}^{1} -2x+2\,dx =$$

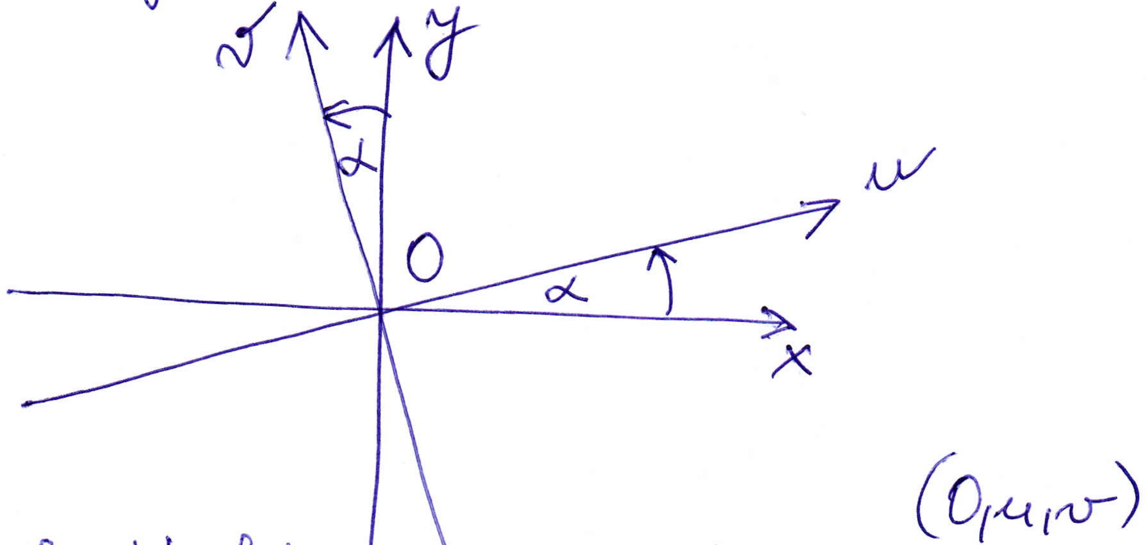
$$(-2)\cdot\int_{0}^{1} x-1\,dx = -2\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{0}^{1} = (-2)\left(\frac{1}{2}-1\right) =$$

$$= (-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{1}}.$$

Odtud $\iint\limits_M dx\,dy = 1+1 = \underline{\underline{2}}$

Nyní zadanou úlohu vyřešíme jiným způsobem: Řešení bude založeno na otočení kartézské souřadnicové soustavy o vhodný úhel α.

Kartézskou souřadnicovou soustavu (O, x, y) otočíme kolem počátku $O = [0, 0]$ o úhel α v kladném smyslu $\equiv$ proti smyslu pohybu hodinových ručiček:



Nová kartézská souřadnicová soustava má stejný střed O, ale osy u, v.

Odvoďme si nyní obecně trasformační rovnice.

Odvození má 3 kroky:

1. krok: Provedeme transformaci (O, x, y) do polární souřadnicové soustavy (O, ρ, φ).

Platí tedy
$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$

2. Krok: Polární souřadnicovou soustavu (O, ρ, φ) ztransformujeme do nové polární soustavy (O, ρ^*, φ^*): $\rho^* = \rho$, $\varphi^* = \varphi - \alpha$

3. Krok: Nové polární souřadnice ztransformujeme opět v kartézské (O, u, v).

V průběhu počítání je třeba využít středoškolský vzoreček: (vlastně dva):

$$(*) \quad \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

$$(**) \quad \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2$$

$$u = \rho^* \cos\varphi^* = \rho\cos(\varphi - \alpha) \overset{(*)}{=} \rho(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) = \underbrace{\rho\cos\varphi}_{x}\cos\alpha + \underbrace{\rho\sin\varphi}_{y}\sin\alpha$$

$$= x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha$$

Podobně

$$v = \rho^* \sin\varphi^* = \rho\sin(\varphi - \alpha) \overset{(**)}{=} \rho(\sin\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha) = \underbrace{\rho\sin\varphi}_{y}\cos\alpha - \underbrace{\rho\cos\varphi}_{x}\sin\alpha$$

$$= y \cdot \cos\alpha - x\sin\alpha$$

Celkem

$$\left\| \begin{aligned} u &= x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha \\ v &= -x\sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{aligned} \right\|$$

Jakobián této transformace je

$$J = \begin{vmatrix} u'_x & v'_x \\ u'_y & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \cos^2\alpha - (\sin\alpha(-\sin\alpha)) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Připomínám z lineární algebry, že $\det A = \det A^T$. Proto je jedno, zda píšeme $\det A$ nebo $\det A^T$.

$$\begin{vmatrix} u'_x & v'_x \\ u'_y & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$$

Platí tedy

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Inverzní transformace je

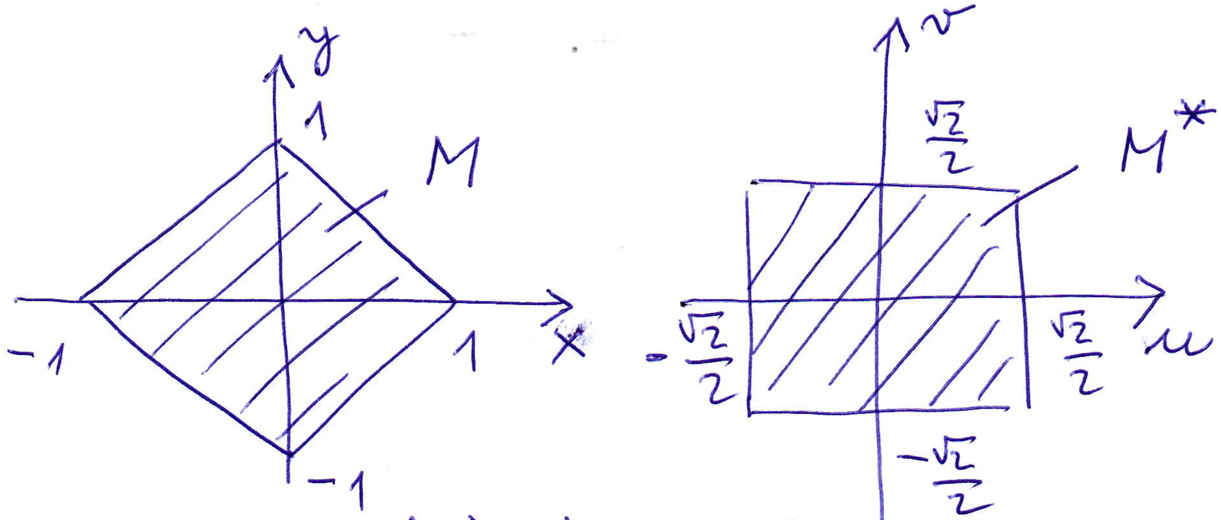
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

tedy

$$\left\| \begin{aligned} x &= u\cos\alpha - v\sin\alpha \\ y &= u\sin\alpha + v\cos\alpha \end{aligned} \right\|.$$

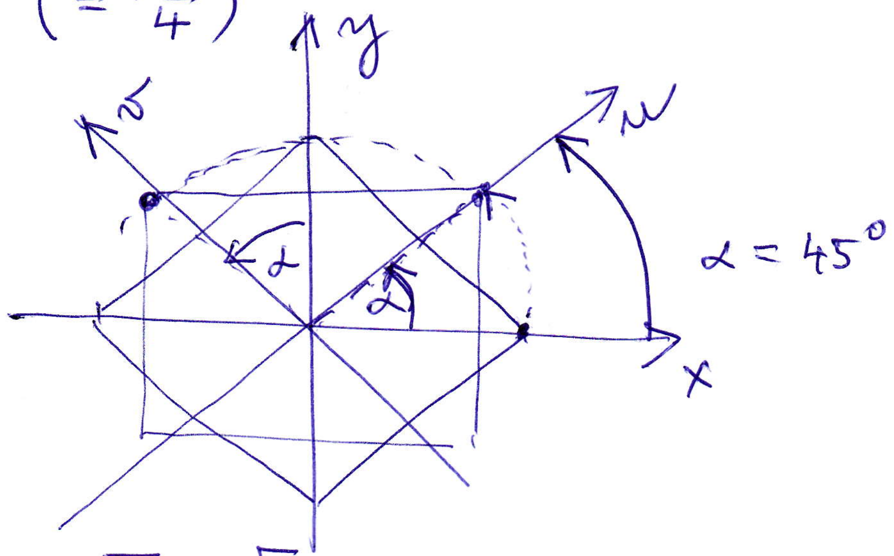
Nyní můžeme pokračovat v našem příkladu.

$$\iint_M dx\,dy = \iint_{M^*} 1\cdot du\,dv \overset{***}{=} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dv\right) du$$



Provedeme otočení o úhel

$\alpha = 45^\circ \; (= \frac{\pi}{4})$



$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

*** Místo integrálu za rovnítkem lze počítat „lépe" podle Dirichletovy věty:

$$= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} du \cdot \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dv = \left[u\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \left[v\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \cancel{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 = \cancel{4}\left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \underline{\underline{2}}$$

Fubiniho věta pro $\mathbb{R}^3$:

$$\iiint_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{d(x)}^{h(x)} \left(\int_{D(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

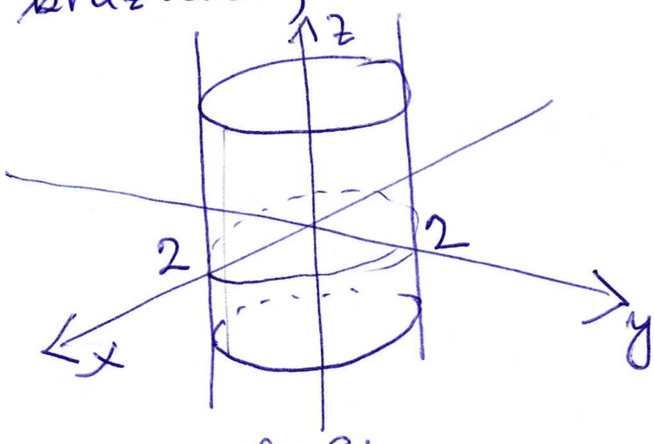
$$M = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3, a\le x\le b,\ d(x)\le y\le h(x),\ D(x,y)\le z\le H(x,y)\}$$

M je elementární oblast typu (x, y, z).

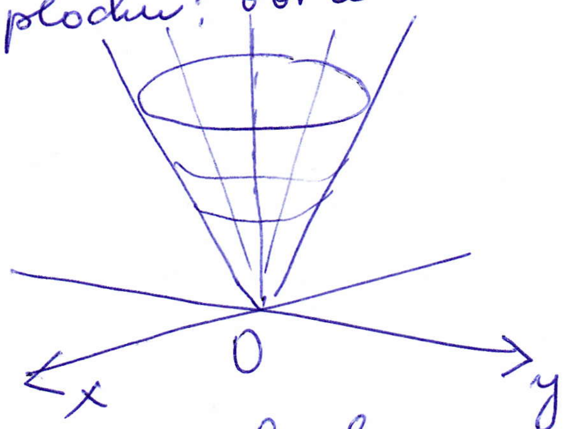
zadání: $\iiint_M xy\,dx\,dy\,dz = ?$,

M: $x^2+y^2=4$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x, y, z \ge 0$.

Protože jsme" v $\mathbb{R}^3$ rovnice $x^2+y^2=4$ neurčuje kružnici", ale válcovou plochu; obr a

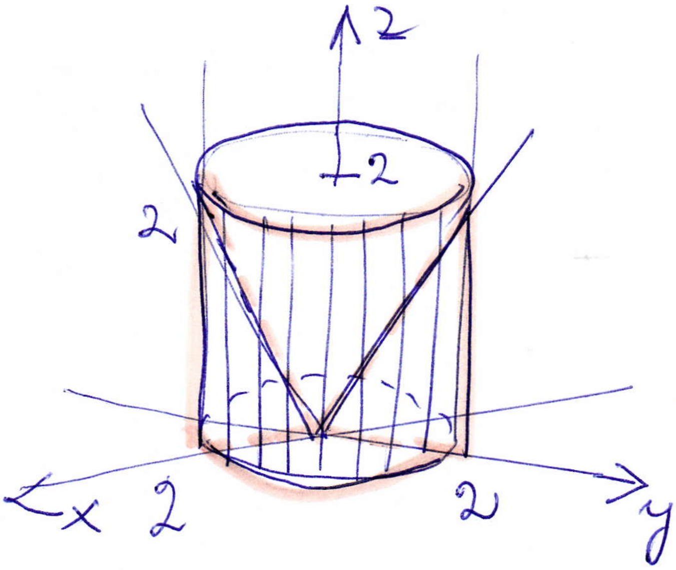


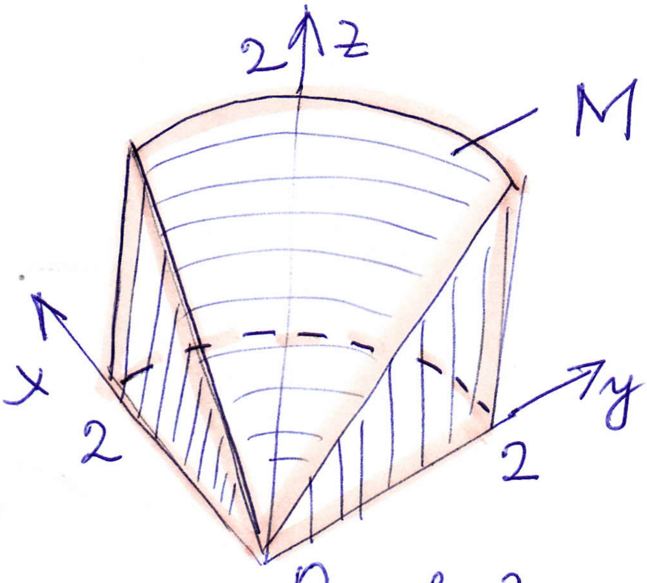
obr a



obr. b

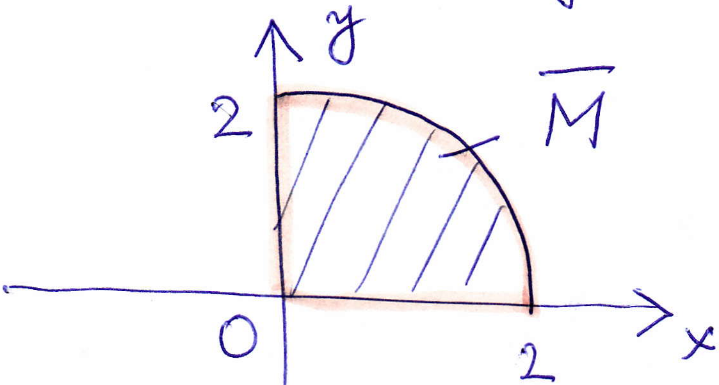
Druhá omezující podmínka určuje kuželovou plochu. Konečně podmínky $x, y, z \ge 0$ je nutno chápat jako $x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0$. Každá z podmínek určuje poloprostor. Jejich současné splnění pak definuje tzv. první oktant souřadnicové soustavy.





obr. 3

Integrační obor M je znázorněn na obr. 3.
Označme průmět tělesa M do roviny xy symbolem $\overline{M}$. Pak $\overline{M}$ je čtvrtkruh:



Nyní popíšeme $\overline{M}$ pomocí nerovností:
Zřejmě $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$.
Protože „zdola" je M ohraničeno rovinou $z=0$ a „zhora" kuželovou plochou $z=\sqrt{x^2+y^2}$ platí $0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Celkem

$$M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

Nyní můžeme aplikovat Fubiniho vzorec.

$$\iiint_M xy \, dx\,dy\,dz = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} xy \, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left[xyz \right]_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\sqrt{x^2+y^2}\, dy \right) dx$$

První integrace byla snadná. Nyní musíme najít následující primitivní funkci:

$$\int xy\sqrt{x^2+y^2}\, dy = x \int y\sqrt{x^2+y^2}\, dy = \left| \begin{array}{l} t = x^2+y^2 \\ dt = 2y\,dy \\ \frac{dt}{2} = y\,dy \end{array} \right|$$

$$= x \int \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{x}{2} \int \sqrt{t}\, dt = \frac{x}{2} \, \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{t^3} = \frac{x}{3} \sqrt{(x^2+y^2)^3}.$$ Odtud

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\sqrt{x^2+y^2}\, dy \right) dx = \int_0^2 \left[\frac{x}{3} \sqrt{(x^2+y^2)^3} \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$\int_0^2 \frac{x}{3} \sqrt{\left(x^2 + \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\right)^3} - \frac{x}{3} \sqrt{(x^2)^3}\, dx =$$

$$\frac{1}{3} \int_0^2 8x - x^4 \, dx = \frac{1}{3} \left[8\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \left(4 \cdot 4 - \frac{32}{5} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{16 \cdot 5 - 32}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{48}{5} = \underline{\underline{\frac{16}{5}}}$$

Nyní si ukážeme, jak úlohu řešit v Maple:

```
> restart;with(student);f:=x*y;
> H:=Tripleint(f,z=0..sqrt(x^2+y^2),y=0..sqrt(4-x^2),x=0..2);value(H);
```

[D, *Diff*, *Doubleint*, *Int*, *Limit*, *Lineint*, *Product*, *Sum*, *Tripleint*, *changevar*, *completesquare*, *distance*, *equate*, *integrand*, *intercept*, *intparts*, *leftbox*, *leftsum*, *makeproc*, *middlebox*, *middlesum*, *midpoint*, *powsubs*, *rightbox*, *rightsum*, *showtangent*, *simpson*, *slope*, *summand*, *trapezoid*]

$$f := x\,y$$

$$H := \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} x\,y\,dz\,dy\,dx$$

$$\frac{16}{5}$$

```
> Int(x*y*sqrt(x^2+y^2),y)=int(x*y*sqrt(x^2+y^2),y);
```

$$\int x\,y\sqrt{x^2+y^2}\,dy = \frac{(x^2+y^2)^{(3/2)}\,x}{3}$$

```
> Int(8*x-x^4,x=0..2)=int(8*x-x^4,x=0..2);
```

$$\int_0^2 8\,x - x^4\,dx = \frac{48}{5}$$

```
>
```

Nyní vyřešíme integrál transformací do válcových souřadnic:

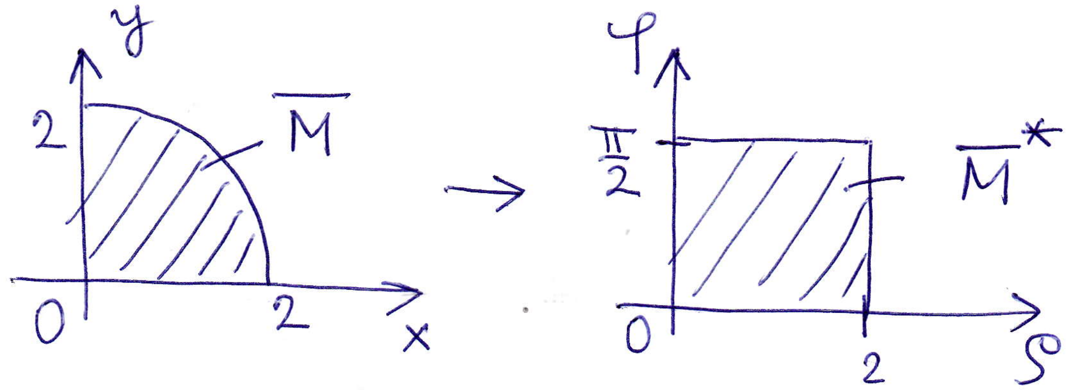
$$x = \varrho\cos\varphi$$
$$y = \varrho\sin\varphi$$
$$z = z$$

Jakobián této transformace je $J = \varrho$.

Ze vztahu $x^2+y^2=4$ plyne: $\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi = 4$

$\varrho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = 4 \iff \varrho^2 = 4 \iff \varrho = 2$,

(protože $\varrho \geq 0$)



Ztransformovaný integrační obor M má tvar

$$M^* = \{[\rho, \varphi, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le 2,\ 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2},\ 0 \le z \le \rho\}$$

Z věty o transformaci plyne:

$$\iiint_M xy \, dx\,dy\,dz = \iiint_{M^*} \rho\cos\varphi \cdot \rho\sin\varphi \cdot \underbrace{\rho}_{|J|} \cdot d\rho\,d\varphi\,dz$$

$$= \iiint_{M^*} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, d\rho\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\rho} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, dz \right) d\varphi \right) d\rho =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, [z]_0^{\rho} \, d\varphi \right) d\rho =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \right) d\rho \overset{\text{DIRICHLET}}{=}$$

$$= \int_0^2 \rho^4 \, d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \left[\frac{\rho^5}{5}\right] \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{32}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{16}{5}}}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \left| \begin{matrix} t = \sin\varphi \\ dt = \cos\varphi \, d\varphi \\ 0 \mapsto 0 \\ \pi/2 \to 1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Dalším typem transformace je transformace do sférických souřadnic:

$$x = \varrho \cos\varphi \sin\theta$$
$$y = \varrho \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = \varrho \cos\theta$$

$\det A = \det A^T$

$$J = \begin{vmatrix} x'_\varrho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\varrho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\varrho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_\varrho & y'_\varrho & z'_\varrho \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{vmatrix} = -\varrho^2 \sin\theta$$

Zadání: Vypočtěte

$$\iiint_M \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz, \text{ kde}$$

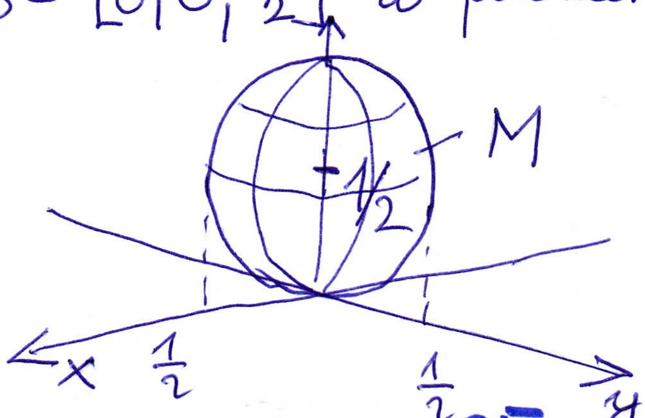
$M:\ x^2+y^2+z^2 \leq z.$

Řešení: Nejprve si musíme uvědomit, jaký obor nerovnost $x^2+y^2+z^2 \leq z$ definuje.

Provedeme algebraickou úpravu:

$$x^2+y^2+z^2-z \leq 0 \iff x^2+y^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4}.$$

Odtud plyne, že M je koule se středem v bodě $S = [0, 0, \tfrac{1}{2}]$ a poloměrem $r = \tfrac{1}{2}$.



Zavést ihned transformaci do sférických souřadnic není to nejlepší co můžeme udělat. Nejprve kouli posuneme do počátku. Postupujeme podobně jako u dvojrozměrného případu posunutí. Napíšeme rovnici hranice M a rovnici hranice M^* – posunuté koule:

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{4}$$

Položíme

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z - \tfrac{1}{2} &= w \end{aligned} \qquad \text{odtud} \qquad \begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= w + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

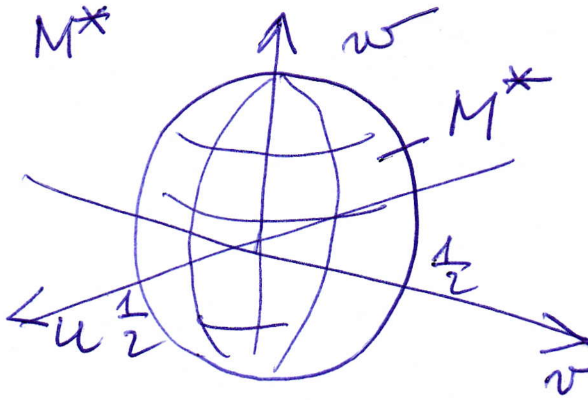
Jakobián této transformace je:

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Použijeme větu o transformaci:

$$\iiint_M \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{M^*} \sqrt{u^2+v^2} \cdot 1\,du\,dv\,dw$$

M^*: $u^2+v^2+w^2 \le \frac{1}{4}$;



Nyní provedeme transformaci M^* do sférických souřadnic:

$u = \rho \cos\varphi \sin\theta$

$v = \rho \sin\varphi \sin\theta$, kde $J = -\rho^2 \cdot \sin\theta$.

$w = \rho \cos\theta$

$$\iiint_{M^*} \sqrt{u^2+v^2}\,du\,dv\,dw =$$

$$\iiint_{M^{**}} \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta} \cdot \rho^2 \sin\theta \,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

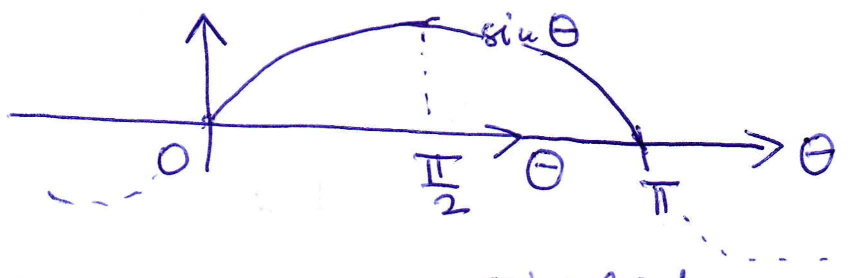
$$\iiint_{M^{**}} \sqrt{\rho^2\sin^2\theta} \cdot \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = *$$

Nyní $\sqrt{\rho^2 \cdot \sin^2\theta} = \sqrt{\rho^2}\cdot\sqrt{\sin^2\theta} = |\rho|\cdot|\sin\theta| =$
$= \rho\sin\theta.$

Poznámka:

Absolutní hodnotu lze odstranit, protože $\rho \geq 0 \Rightarrow |\rho| = \rho$ a $|\sin\theta| = \sin\theta$ pro $\theta \in \langle 0, \pi\rangle$.

Viz. obr.



$$\overset{*}{=} \iiint_{M^{**}} \rho^3 \cdot \sin^2\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \overset{\text{Dirichlet}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \rho^3\,d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\theta\,d\theta$$

$$M^{**} = \langle 0, \tfrac{1}{2}\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \pi\rangle.$$

Každý ze tří integrálů vypočítáme zvlášť.

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}} \varrho^3 \, d\varrho = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} = \frac{\frac{1}{16}}{4} = \frac{1}{64}$$

$$B=\int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Třetí integrál lze řešit převodem na dvojnásobný argument nebo per-partes.

Nejprve si zopakujeme první možnost:

$$+\begin{cases} \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta \quad /\cdot(-1) \end{cases}$$

vynásobíme číslem (-1) a sečteme

$$2\sin^2\theta = 1-\cos 2\theta$$

$$\sin^2\theta = \underline{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

$$C=\int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 1-\cos 2\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} d\theta - \int_0^{\pi} \cos 2\theta \, d\theta\right) = \frac{1}{2}\left(\left[\theta\right]_0^{\pi} - 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\left|\begin{array}{l} t = 2\theta \\ dt = 2d\theta \\ 0 \to 0 \\ \pi \to 2\pi \end{array}\right|$$

Tedy $\int_0^{\pi} \cos 2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos t \, \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin t\right]_0^{2\pi}$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sin 2\pi}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0}\right) = 0$$

Celkem: $A \cdot B \cdot C = \frac{1}{64} \cdot 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{64}}}$

Nyní druhá možnost metodou per-partes:

Vypočítám jen primitivní funkci. Označme

$$I = \int \sin^2\theta \, d\theta = \left| \begin{array}{ll} f = \sin\theta & f' = \cos\theta \\ g' = \sin\theta & g = -\cos\theta \end{array} \right| =$$

$$= -\sin\theta\cos\theta - \int \cos\theta\cdot(-\cos\theta)\,d\theta =$$
$$= -\sin\theta\cos\theta + \int \cos^2\theta\,d\theta =$$
$$= -\sin\theta\cos\theta + \int 1-\sin^2\theta\,d\theta =$$
$$= -\sin\theta\cos\theta + \theta - \int \sin^2\theta\,d\theta \Rightarrow$$
$$I = -\sin\theta\cos\theta + \theta - I$$
$$2I = -\sin\theta\cos\theta + \theta$$
$$I = \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\cdot(2\sin\theta\cos\theta)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + C$$

Odtud

$$C = \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

V této chvíli máme zvládnutou problematiku vícerozměrných integrálů na komentovaných úlohách. Pokusil jsem se o výběr úloh na kterých jsem vyložil všechny důležité postupy a transformace. Další téma bude věnováno technice výpočtu křivkových integrálů. Pokusím se dát na web 8.–9.4 podle toho, jak práce půjde. Do té doby zvládnete látku Vícerozměrné integrály.