Základy obecné algebry

Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, 2013

Obsah

Kapitola 1

Algebraické struktury

1.1 Operace a zákony

Definice 1.1. Buď A množina, $n \in \mathbb{N}_0$. Potom zobrazení $\omega : A^n \to A$ se nazývá *n-ární operace* na A . Tedy pro $n \in \mathbb{N}$:

$$\omega : \begin{cases} A^n \to A \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \omega x_1 \ldots x_n, \end{cases}$$

pro $n = 0$:

$$\omega : \begin{cases} A^0 = \{\emptyset\} \to A \\ \emptyset \mapsto \omega\emptyset =: \omega. \end{cases}$$

Nejdůležitější případ: $n = 2$. 2-ární neboli binární operace je zobrazení

$$\omega : \begin{cases} A^2 \to A \\ (x, y) \mapsto \omega xy =: x\omega y. \end{cases}$$

Většinou označujeme binární operace nějakým grafickým symbolem, např. $\circ$, namísto symbolu ω, tedy

$$\circ : \begin{cases} A^2 \to A \\ (x, y) \mapsto x \circ y. \end{cases}$$

Užijeme-li k označení binární operace symbolu $\cdot$, mluvíme o multiplikativním značení (a píšeme xy místo $x \cdot y$). Užijeme-li symbolu $+$, mluvíme o aditivním značení.

Příklad(y) 1.2. 1) Jak je zvykem, symboly $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{C}$ budou po řadě označovat množiny všech kladných celých (tj. přirozený), nezáporných celých, celých, racionálních, kladných racionálních, reálných, kladných reálných a komplexních čísel. Obvyklé sčítání $+$ a obvyklé násobení $\cdot$ jsou binární operace na $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{C}$, obvyklé odčítání $-$ je binární operace na $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, obvyklé dělení $\div$ je binární operace na $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2) Operace $+$ a $\cdot$ (v běžném smyslu) jsou binární operace na množině $M_n(\mathbb{C})$ všech čtvercových matic řádu n nad $\mathbb{C}$ (podobně pro $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ místo $\mathbb{C}$).

3) Nechť M, N jsou množiny. Pak symbolem N^M označujeme množinu $N^M := \{f \mid f : M \to N\}$. Pro $M = N$ je binární operace $\circ$ na M^M definována takto: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ pro všechna $x \in M$ (jde o známou operaci skládání zobrazení). Obdržíme tedy:

$$\circ : \begin{cases} (M^M)^2 \to M^M \\ (f, g) \mapsto f \circ g. \end{cases}$$

4) Buď M množina. Pak symbolem $\mathcal{P}(M)$ označujeme množinu všech podmnožin množiny M, tj. $\mathcal{P}(M) := \{T \mid T \subseteq M\}$. Operace $\cap, \cup$ jsou binární operace na $\mathcal{P}(M)$.

Další důležitý příklad: $n = 1$. 1-ární neboli unární operace na množině A je zobrazení

$$\omega : \begin{cases} A \to A \\ x \mapsto \omega x. \end{cases}$$

Příklad(y) 1.3. 1) $- : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto -x \end{cases}$ je unární operace na $\mathbb{C}$.

2) $-$ je unární operace na $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $M_n(\mathbb{C})$.

3) $x \mapsto 1/x$ je unární operace na $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4) $T \mapsto M \setminus T =: T'$ je unární operace na množině všech podmnožin $\mathcal{P}(M)$ množiny M.

Definice 1.4. Buď A množina, $n \in \mathbb{N}_0$, $D \subseteq A^n$. Potom zobrazení $\omega : D \to A$ se nazývá *n-ární parciální operace* na A.

Příklad(y) 1.5. 1) $-$ je binární parciální operace na $\mathbb{N}$, kde $D = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 | \ m > n\}$.

2) $x \mapsto 1/x$ je unární parciální operace na $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, kde $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \ldots$.

Buď $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ konečná množina a $\circ$ binární operace na A. Pak $\circ$ lze zadat pomocí tzv. *Cayleyovy tabulky* . Tabulka má v průsečíku i-tého řádku s j-tým sloupcem prvek $a_i \circ a_j$.

Definice 1.6. Buď $A \neq \emptyset$ množina, I množina (indexů). Pro $i \in I$ buď ω_i n_i-ární operace na A, $n_i \in \mathbb{N}_0$. Potom $\mathcal{A} := (A, (\omega_i)_{i \in I})$ označuje (*univerzální*) *algebru* s *nosnou množinou* A a *souborem operací* $(\omega_i)_{i \in I} =: \Omega$.

Často bývá I konečná, např. $I = \{1, \ldots, n\}$. V takovémto případě píšeme

$$(A, \Omega) = (A, (\omega_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}) =: (A, \omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Soubor $(n_i)_{i \in I}$ se nazývá *typ* algebry (A, Ω).

Příklad(y) 1.7. $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ je algebra typu $(2, 1, 0)$, $(\mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1)$ je algebra typu $(2, 1, 0, 2, 0)$.

Definice 1.8. Buď A množina, $\circ$ binární operace na A. Prvek $e \in A$ se nazývá a) *levý neutrální prvek* vzhledem k $\circ :\Leftrightarrow \forall x \in A : e \circ x = x$, b) *pravý neutrální prvek* vzhledem k $\circ :\Leftrightarrow \forall x \in A : x \circ e = x$, c) *neutrální prvek* vzhledem k $\circ :\Leftrightarrow \forall x \in A : e \circ x = x \circ e = x$.

Poznámka 1.9. Rovnice, které mají tvar $t_1(x, y, z, \ldots) = t_2(x, y, z, \ldots)$ s vhodnými termy t_1, t_2 a musejí být splněny pro všechny prvky nosné množiny uvažované algebry (např. „$\forall x \in A : e \circ x = x$“), se nazývají *zákony* .

Příklad(y) 1.10. 1) $A = \mathbb{C}$, $\circ = +$, 0 je neutrální prvek; $A = \mathbb{C}$, $\circ = \cdot$, 1 je neutrální prvek.

2) $A = M_n(\mathbb{C})$, $\circ = +$, $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ je neutrální prvek; $A = M_n(\mathbb{C})$, $\circ = \cdot$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ je neutrální prvek.

3) $A = M^M$, $\circ$ = skládání zobrazení, id_M (identické zobrazení) je neutrální prvek.

4) $A = \mathcal{P}(M)$, $\circ = \cap$, M je neutrální prvek; $A = \mathcal{P}(M)$, $\circ = \cup$, $\emptyset$ je neutrální prvek.

Věta 1.11. *Buď $\circ$ binární operace na A, e_1 levý neutrální prvek a e_2 pravý neutrální prvek. Potom platí: $e_1 = e_2$ a $e_1 (= e_2)$ je neutrální prvek.*

Důkaz. Platí $e_1 e_2 = e_1$, neboť e_2 je pravý neutrální prvek, a $e_1 e_2 = e_2$, neboť e_1 je levý neutrální prvek. Tedy $e_1 = e_1 e_2 = e_2$. □

Důsledek 1.12. *Existuje nejvýše jeden neutrální prvek.*

Neutrální prvek se v případě multiplikativního značení obvykle nazývá *jednotkovým prvkem* a značí se symbolem 1. V případě aditivního značení se neutrální prvek obvykle nazývá *nulovým prvkem* a značí se symbolem 0.

Definice 1.13. Buď A množina, $\circ$ binární operace, e neutrální prvek, $x \in A$. Potom nazýváme prvek $y \in A$ a) *levým inverzním prvkem* k $x :\Leftrightarrow y \circ x = e$, b) *pravým inverzním prvkem* k $x :\Leftrightarrow x \circ y = e$, c) *inverzním prvkem* k $x :\Leftrightarrow x \circ y = y \circ x = e$.

Příklad(y) 1.14.

Množina	Operace	Prvek	Inverzní prvek
$\mathbb{C}$	$+$	x	$-x$
$\mathbb{C}$	$\cdot$	$x \neq 0$	$1/x$
$M_n(\mathbb{C})$	$+$	(a_{ij})	$(-a_{ij})$
$M_n(\mathbb{C})$	$\cdot$	(a_{ij}) s $\det(a_{ij}) \neq 0$	$(a_{ij})^{-1}$
M^M	$\circ$	bijektivní f	f^{-1}
$\mathcal{P}(M)$	$\cap$	M	M
$\mathcal{P}(M)$	$\cup$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\mathbb{Z}$	$\cdot$	± 1	± 1

Definice 1.15. Prvek x se nazývá *invertibilní* $:\Leftrightarrow$ existuje inverzní prvek k x.

Definice 1.16. Buď A množina, $\circ$ binární operace na A. $\circ$ se nazývá *asociativní* $:\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (*asociativní zákon*).

Příklad(y) 1.17. Operace $+, \cdot$ na $\mathbb{C}$ a $M_n(\mathbb{C})$ jsou asociativní, stejně tak $\circ$ na M^M a $\cap, \cup$ na $\mathcal{P}(M)$. Naproti tomu operace $-, \div$ obecně *nejsou* asociativní!

Věta 1.18. *Buď $\circ$ asociativní binární operace na A, $x \in A$, y_1 levý inverzní prvek k x, y_2 pravý inverzní prvek k x. Potom platí $y_1 = y_2$ a $y_1 (= y_2)$ je inverzní prvek k x.*

Důkaz. $y_2 = e \circ y_2 = (y_1 \circ x) \circ y_2 = y_1 \circ (x \circ y_2) = y_1 \circ e = y_1$. □

Důsledek 1.19. *Je-li binární operace asociativní, existuje ke každému prvku nejvýše jeden inverzní prvek.*

Inverzní prvek k x se při multiplikativním značení značí symbolem x^{-1}, při aditivním značení pak obvykle symbolem $-x$ (při aditivním značení se místo pojmu inverzní prvek většinou užívá pojem *opačný* prvek).

Definice 1.20. Binární operace $\circ$ na množině A se nazývá *operací s dělením* $:\Leftrightarrow \forall (a, b) \in A^2 \; \exists (x, y) \in A^2 : a \circ x = b$ (*levý zákon o dělení*) $\wedge \; y \circ a = b$ (*pravý zákon o dělení*).

Věta 1.21. *Buď $A \neq \emptyset$ a $\circ$ asociativní binární operace na A. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

a) $\circ$ je operace s dělením.

b) Existuje neutrální prvek e (vzhledem k $\circ$) a každý prvek $x \in A$ je invertibilní, tzn. $\exists y \in A : x \circ y = y \circ x = e$.

Důkaz. b) $\Rightarrow$ a): Pro $x \in A$ nechť x^{-1} značí prvek inverzní k prvku x a nechť $a, b \in A$. Potom platí $a \circ (a^{-1} \circ b) = (a \circ a^{-1}) \circ b = e \circ b = b$ a $(b \circ a^{-1}) \circ a = b \circ (a^{-1} \circ a) = b \circ e = b$.

a) $\Rightarrow$ b): Nechť $a \in A$ je libovolné, ale pevné. Potom platí: $\exists e_1, e_2 \in A : e_1 \circ a = a = a \circ e_2$ (položme $b = a, y = e_1, x = e_2$). Pro libovolné $b \in A$ pak platí:

$$\exists x \in A : b = a \circ x \Rightarrow e_1 \circ b = e_1 \circ (a \circ x) = (e_1 \circ a) \circ x = a \circ x = b,$$
$$\exists y \in A : b = y \circ a \Rightarrow b \circ e_2 = (y \circ a) \circ e_2 = y \circ (a \circ e_2) = y \circ a = b.$$

Tedy je e_1 levý neutrální prvek, e_2 pravý neutrální prvek, a proto $e_1 = e_2 =: e$ neutrální prvek.

Nyní ještě musíme ukázat, že ke každému $x \in A$ existuje inverzní prvek y. Jelikož je $\circ$ operace s dělením, platí:

$$\exists y_1, y_2 \in A : x \circ y_1 = e \wedge y_2 \circ x = e.$$

Tedy je y_1 pravý inverzní prvek a y_2 levý inverzní prvek k x, odkud plyne $y_1 = y_2 =: y$. Proto je y inverzní prvek k x. □

Definice 1.22. Binární operace $\circ$ na A se nazývá *operací s krácením* $:\Leftrightarrow \forall a, x_1, x_2, y_1, y_2 \in A : (a \circ x_1 = a \circ x_2 \Rightarrow x_1 = x_2)$ (*levý zákon o krácení*) $\wedge (y_1 \circ a = y_2 \circ a \Rightarrow y_1 = y_2)$ (*pravý zákon o krácení*).

Poznámka 1.23. a) Je-li $\circ$ asociativní binární operace s dělením na neprázdné množině, pak podle předchozí věty mají rovnice $a \circ x = b$ a $y \circ a = b$ právě jedno řešení x, y. Ze vztahu $a \circ x_1 = b = a \circ x_2$ totiž plyne $a^{-1} \circ (a \circ x_1) = a^{-1} \circ (a \circ x_2)$ a odtud pomocí asociativního zákona $x_1 = x_2$ (analogicky pro druhou rovnici). Je zřejmé, že binární operace na konečné množině A je operací s dělením, právě když každý řádek i sloupec její Cayleyovy tabulky obsahuje každý prvek množiny A nejméně jednou, a tedy právě jednou, tj. právě když je tato tabulka tzv. Latinským čtvercem.

b) Rovnice $a \circ x = b$ a $y \circ a = b$ mají při operaci $\circ$ s krácením nejvýše jedno řešení, neboť ze vztahu $a \circ x_1 = b = a \circ x_2$ ihned plyne $x_1 = x_2$ (analogicky pro druhou rovnici). Je zřejmé, že binární operace na konečné množině je operací s krácením, právě když každý řádek i sloupec její Cayleyovy tabulky obsahuje každý prvek množiny A nejvýše jednou, a tedy právě jednou, tj. právě když je tato tabulka Latinským čtvercem.

c) Z předchozích úvah vyplývá, že každá asociativní operace s dělením je operací s krácením. Na libovolné konečné množině jsou pojmy operace s krácením a operace s dělením ekvivalentní.

Příklad(y) 1.24. Operace $+, \cdot$ na $\mathbb{N}$ jsou s krácením, ale *nikoliv* s dělením.

Definice 1.25. Binární operace $\circ$ na A se nazývá *komutativní* $:\Leftrightarrow \forall x, y \in A : x \circ y = y \circ x$ (*komutativní zákon*).

Příklad(y) 1.26. Následující operace *nejsou* komutativní: $-$ na $\mathbb{C}$, $\div$ na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\cdot$ na $M_n(\mathbb{C})$ pro $n \geq 2$, $\circ$ na M^M pro $|M| \geq 2$.

Definice 1.27. Pokud jsou $+, \cdot$ binární operace na A, potom se $\cdot$ nazývá *distributivní nad* $+ :\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A : x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (*levý distributivní zákon*) $\wedge$ $(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ (*pravý distributivní zákon*).

Poznámka 1.28. Kvůli úspoře závorek se řídíme konvencí, při které se operace $\cdot$ provede před operací $+$.

Příklad(y) 1.29. Operace $\cdot$ je distributivní nad $+$ v $\mathbb{C}$ i v $M_n(\mathbb{C})$. V $\mathcal{P}(M)$ je $\cup$ distributivní nad $\cap$ a $\cap$ je distributivní nad $\cup$.

1.2 Některé důležité typy algeber

Definice 1.30. a) Je-li A množina a $\cdot$ binární operace na A, pak se dvojice $(A, \cdot)$ nazývá *grupoid*.

b) Algebra $(A, \cdot)$ typu (2) se nazývá *grupoid*.

Definice 1.31. Grupoid $(H, \cdot)$ se nazývá *pologrupa* $:\Leftrightarrow \cdot$ je asociativní.

Příklad(y) 1.32. $(M^M, \circ)$ je pologrupa, tzv. *symetrická* pologrupa nad M.

Definice 1.33. a) Pologrupa $(H, \cdot)$ se nazývá *monoid* $:\Leftrightarrow$ existuje neutrální prvek e (vzhledem k $\cdot$).

b) Algebra $(H, \cdot, e)$ typu $(2, 0)$ se nazývá *monoid* $:\Leftrightarrow \forall\ x, y, z \in H$ platí:

1) $x(yz) = (xy)z$,

2) $ex = x$, $xe = x$.

Definice 1.34. a) Monoid $(G, \cdot)$ s neutrálním prvkem e se nazývá *grupa* $:\Leftrightarrow$ každý prvek $x \in G$ je invertibilní, tj., $\forall x \in G\ \exists x^{-1} \in G : xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

b) Algebra $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ typu $(2, 0, 1)$ se nazývá *grupa* $:\Leftrightarrow \forall\ x, y, z \in G$ platí:

1) $x(yz) = (xy)z$,

2) $ex = x$, $xe = x$,

3) $xx^{-1} = e$, $x^{-1}x = e$.

c) Grupa $(G, \cdot)$, resp. $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ se nazývá *komutativní* nebo *abelovská* $:\Leftrightarrow \forall x, y \in G : xy = yx$.

Poznámka 1.35. Podle Věty 1.21 je $(G, \cdot)$ grupa $\Leftrightarrow G \neq \emptyset$ a $\cdot$ je asociativní operace s dělením.

Definice 1.36. a) Algebra $(R, +, \cdot)$ typu $(2, 2)$ se nazývá *okruh* $:\Leftrightarrow$

1) $(R, +)$ je abelovská grupa,

2) $(R, \cdot)$ je pologrupa,

3) $\cdot$ je distributivní nad $+$.

b) Algebra $(R, +, 0, -, \cdot)$ typu $(2, 0, 1, 2)$ se nazývá *okruh* $:\Leftrightarrow$

1) $(R, +, 0, -)$ je abelovská grupa,

2) $(R, \cdot)$ je pologrupa,

3) $\cdot$ je distributivní nad $+$.

Prvek 0 se nazývá „nulový prvek“ okruhu. Budeme psát $x - y := x + (-y)$.

Lemma 1.37. *Buď $(R, +, 0, -, \cdot)$ okruh. Potom platí pro všechna $x, y, z \in R$:*

a) $x0 = 0 = 0x$,

b) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$,

c) $(-x)(-y) = xy$,

d) $x(y - z) = xy - xz$, $(x - y)z = xz - yz$.

Důkaz. a) $0 = 0 + 0 \Rightarrow x0 = x(0 + 0) = x0 + x0 \Rightarrow x0 - x0 = x0 + x0 - x0 \Rightarrow 0 = x0$. Analogicky pro $0 = 0x$.
b) $y+(-y) = 0 \Rightarrow xy+x(-y) = x(y+(-y)) = x0 = 0 \Rightarrow xy+(-(xy))+x(-y) = 0+(-(xy))$ $\Rightarrow x(-y) = -(xy)$. Analogicky pro $(-x)y = -(xy)$.
c) Plyne z b) a ze vztahu $-(-x) = x$.
d) $x(y - z) = x(y + (-z)) = xy + x(-z) = xy + (-(xz)) = xy - xz$ podle b). Analogicky pro $(x - y)z = xz - yz$. □

Příklad(y) 1.38. $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot)$ a $(M_n(\mathbb{C}), +, 0, -, \cdot)$ jsou okruhy.

Definice 1.39. a) Okruh $(R, +, 0, -, \cdot)$ se nazývá *okruh s jednotkovým prvkem*, jestliže existuje neutrální prvek vzhledem k operaci $\cdot$, tj. prvek 1 s vlastností $\forall x \in R : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (1 se nazývá *jednotkový prvek* okruhu).

Tedy okruh s jednotkovým prvkem je algebra $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ typu $(2, 0, 1, 2, 0)$.

b) Okruh $(R, +, 0, -, \cdot)$ (resp. $(R, +, \cdot)$) se nazývá *komutativní*, jestliže operace $\cdot$ ke komutativní, tj. $\forall x, y \in R : xy = yx$.

c) Algebra $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ se nazývá *komutativní okruh s jednotkovým prvkem* $:\Leftrightarrow$

1) $(R, +, 0, -, \cdot)$ je komutativní okruh,

2) 1 je neutrální prvek vzhledem k $\cdot$.

Příklad(y) 1.40. $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot, 1)$ je komutativní okruh s jednotkovým prvkem; stejně tak každé pole (viz níže).

Definice 1.41. Komutativní okruh s jednotkovým prvkem $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ se nazývá *obor integrity* $:\Leftrightarrow$

1) $R \setminus \{0\} \neq \emptyset$ (tj. $0 \neq 1$),

2) $\forall x, y \in R : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$ (tj. neexistují nenuloví dělitelé nuly).

Lemma 1.42. *Je-li* $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ *obor integrity, potom je* $\cdot$ *operace s krácením na* $R \setminus \{0\}$.

Důkaz. Buďte $x, y, z \neq 0$. Potom platí: $xy = xz \Rightarrow xy - xz = 0 \Rightarrow x(y - z) = 0 \Rightarrow y - z = 0 \Rightarrow y = z$. □

Důsledek 1.43. *V oboru integrity je* $(R \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ *komutativní monoid.*

Příklad(y) 1.44. $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot, 1)$ je obor integrity.

Definice 1.45. a) Okruh s jednotkovým prvkem $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ se nazývá *těleso* :⇔

1) $0 \neq 1$,
2) $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa.

b) Komutativní těleso se nazývá *pole* .

Tedy komutativní okruh s jednotkovým prvkem $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ je pole ⇔

1) $0 \neq 1$,
2) $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ je abelovská grupa.

Příklad(y) 1.46. 1) $(\mathbb{Q}, +, 0, -, \cdot, 1)$, $(\mathbb{R}, +, 0, -, \cdot, 1)$, $(\mathbb{C}, +, 0, -, \cdot, 1)$ jsou pole.

2) Je známo, že každé konečné těleso je pole (věta Wedderburnova).

Poznámka 1.47. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí: Okruhu zbytkových tříd $(\mathbb{Z}_n, +, 0, -, \cdot, 1)$ modulo n je pole ⇔ n je prvočíslo ⇔ $(\mathbb{Z}_n, +, 0, -, \cdot, 1)$ je obor integrity (definice okruhu zbytkových tříd $(\mathbb{Z}_n, +, 0, -, \cdot, 1)$ modulo n je uvedena v odstavci 2.4.).

Věta 1.48. *Každé pole je obor integrity. Každý konečný obor integrity je pole.*

Důkaz. Nechť $x \neq 0$, $y \neq 0$ a $xy = 0$. Pak $x^{-1}(xy)y^{-1} = 1 = 0$, což je spor.

Buď nyní $R = \{a_1, \ldots, a_n\}$ konečný obor integrity. Pak $\cdot$ je asociativní operace s krácením na konečné množině $R \setminus \{0\}$. Proto je $\cdot$ operace s dělením, tedy $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ je abelovská grupa. □

Definice 1.49. Buď $(K, +, 0, -, \cdot, 1)$ pole, $I = \{a, b, c\} \cup K$, kde $a, b, c \notin K$, a, b, c po dvou různé. Algebra $(V, (\omega_i)_{i \in I})$ typu $(2, 0, 1, (1)_{\lambda \in K})$ se nazývá *vektorový prostor nad* K :⇔

1) $(V, \omega_a, \omega_b, \omega_c) =: (V, +, 0, -)$ je abelovská grupa,

2) $\forall x, y \in V, \lambda, \mu \in K$:
$\omega_\lambda(x + y) = \omega_\lambda(x) + \omega_\lambda(y)$,
$\omega_{\lambda+\mu}(x) = \omega_\lambda(x) + \omega_\mu(x)$,
$\omega_{\lambda\mu}(x) = \omega_\lambda(\omega_\mu(x))$,
$\omega_1(x) = x$.

V dalším textu polžíme $\omega_\lambda =: \lambda$ a budeme zapisovat vektorový prostor jako $(V, +, 0, -, K)$. Zákony uvedené v bodě 2) pak mají tvar: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$, $1x = x$.

Definice 1.50. Algebra $(V, \sqcap, \sqcup)$ typu $(2,2)$ se nazývá *svaz* $:\Leftrightarrow$ pro všechna $a, b, c \in V$ platí:

1) $a \sqcap b = b \sqcap a$, $a \sqcup b = b \sqcup a$,

2) $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$, $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$,

3) $a \sqcap (a \sqcup b) = a$, $a \sqcup (a \sqcap b) = a$.

Operace $\sqcap$ se nazývá *průsek* a operace $\sqcup$ *spojení*. Podle 1) a 2) jsou obě operace kommutativní a asociativní, tj. $(V, \sqcap)$ a $(V, \sqcup)$ jsou komutativní pologrupy. Zákony uvedené v bodě 3) se nazývají *absorpční zákony*.

Příklad(y) 1.51. $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$ je svaz.

Poznámka 1.52. a) $(V, \sqcap, \sqcup)$ je svaz $\Leftrightarrow$ $(V, \sqcup, \sqcap)$ je svaz. Zákony jsou symetrické v $\sqcap$ a $\sqcup$ – tzv. *princip duality* pro svazy .

b) V každém svazu $(V, \sqcap, \sqcup)$ platí také tzv. *idempotentní zákony*, tj. $\forall\, a \in V$:
$a \sqcap a = a$, $a \sqcup a = a$,
které plynou z 3), neboť $a \sqcap a = a \sqcap (a \sqcup (a \sqcap a)) = a$ a druhý zákon platí v důsledku principu duality.

Definice 1.53. Svaz $(V, \sqcap, \sqcup)$ se nazývá *distributivní* $:\Leftrightarrow$ pro všechna $a, b, c \in V$ platí:
$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$, $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$
(tj. $\sqcap$ je distributivní nad $\sqcup$ a $\sqcup$ je distributivní nad $\sqcap$).

Poznámka 1.54. $(V, \sqcap, \sqcup)$ je distributivní svaz $\Leftrightarrow$ $(V, \sqcup, \sqcap)$ je distributivní svaz (princip duality). Dokonce platí, že $\sqcap$ je distributivní nad $\sqcup$, právě když $\sqcup$ je distributivní nad $\sqcap$.

Příklad(y) 1.55. $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$ je distributivní svaz.

Definice 1.56. Buď $(V, \sqcap, \sqcup)$ svaz. Prvek $0 \in V$ se nazývá *nulový prvek* svazu $V :\Leftrightarrow \forall a \in V : a \sqcup 0 = a$ (tj. 0 je neutrální prvek vzhledem k $\sqcup$). Prvek $1 \in V$ se nazývá *jednotkový prvek* svazu $V :\Leftrightarrow \forall a \in V : 1 \sqcap a = a$ (tj. 1 je neutrální prvek vzhledem k $\sqcap$).

Poznámka 1.57. Buďte $b, c \in V$ libovolné prvky. Pak platí $\forall a \in V : a \sqcup b = a \Leftrightarrow \forall a \in V : a \sqcap b = b \Leftrightarrow b = 0$, $\forall a \in V : c \sqcap a = a \Leftrightarrow \forall a \in V : c \sqcup a = c \Leftrightarrow c = 1$.

Definice 1.58. Svaz $(V, \sqcap, \sqcup)$ se nazývá *ohraničený*, jestliže má nulový prvek 0 i jednotkový prvek 1. Tedy ohraničený svaz je algebra $(V, \sqcap, \sqcup, 0, 1)$ typu $(2, 2, 0, 0)$.

Příklad(y) 1.59. $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \emptyset, M)$ je ohraničený svaz.

Definice 1.60. Ohraničený svaz $(V, \sqcap, \sqcup, 0, 1)$ se nazývá *komplementární* $:\Leftrightarrow \forall a \in V\ \exists a' \in V : a \sqcap a' = 0 \wedge a \sqcup a' = 1$. Prvek a' se nazývá *komplement* prvku a.

Příklad(y) 1.61. $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \emptyset, M)$ je komplementární svaz, přičemž pro $A \subseteq M$ je komplement dán vztahem $A' = M \setminus A$.

Definice 1.62. Distributivní a komplementární svaz $(V, \sqcap, \sqcup, 0, 1)$ se nazývá *Booleův svaz* .

Příklad(y) 1.63. $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \emptyset, M)$ je Booleův svaz.

Věta 1.64. *Je-li* $(V, \sqcap, \sqcup, 0, 1)$ *Booleův svaz, pak existuje ke každému* $a \in V$ *přesně jeden komplement* a'.

Důkaz. Buďte a' a a^* komplementy prvku a. Pak platí $a \sqcup a' = 1 = a \sqcup a^*$, $a \sqcap a' = 0 = a \sqcap a^*$, a tudíž $a' = a' \sqcup 0 = a' \sqcup (a \sqcap a^*) = (a' \sqcup a) \sqcap (a' \sqcup a^*) = 1 \sqcap (a' \sqcup a^*) = a' \sqcup a^* = a^* \sqcup a' = \ldots = a^*$. □

Definice 1.65. Algebra $(B, \sqcap, \sqcup, 0, 1, ')$ typu $(2, 2, 0, 0, 1)$ se nazývá *Booleova algebra* $:\Leftrightarrow$

1) $(B, \sqcap, \sqcup, 0, 1)$ je ohraničený distributivní svaz,

2) $\forall a \in B : a \sqcap a' = 0 \wedge a \sqcup a' = 1$.

Poznámka 1.66. $(B, \sqcap, \sqcup, 0, 1, ')$ je Booleova algebra $\Rightarrow$ $(B, \sqcap, \sqcup, 0, 1)$ je Booleův svaz. Pokud naopak $(B, \sqcap, \sqcup, 0, 1)$ je Booleův svaz a a' (jednoznačně určený) komplement prvku a, pak je $(B, \sqcap, \sqcup, 0, 1, ')$ Booleova algebra.

Příklad(y) 1.67. $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \emptyset, M, ')$ je Booleova algebra.

Poznámka 1.68. V teorii uspořádaných množin je svaz definován jako uspořádaná množina $(V, \leq)$, v níž má každá dvojice prvků infimum (tj. největší dolní závoru) i supremum (tj. nejmenší horní závoru). Označíme-li pro prvky $x, y \in V$ jejich infimum $x \sqcap y$ a supremum $x \sqcup y$, jsou $\sqcap$ a $\sqcup$ binární operace na V takové, že $(V, \sqcap, \sqcup)$ je svaz ve smyslu Definice 1.50. Naopak, je-li dán svaz $(V, \sqcap, \sqcup)$ ve smyslu této definice, můžeme na množině V definovat uspořádání $\leq$ vztahem $x \leq y \Leftrightarrow x \sqcap y = x$ (nebo ekvivalentně $x \leq y \Leftrightarrow x \sqcup y = y$) a dostaneme tak svaz ve smyslu teorie uspořádaných množin (v němž infimum prvků x a y je $x \sqcap y$ a jejich supremum je $x \sqcup y$). Tímto způsobem je definována bijekce mezi svazy chápanými jako uspořádané množiny a svazy chápanými jako algebry typu $(2, 2)$ (Definice 1.50). Mezi tímto dvojím chápáním svazů obvykle nerozlišujeme.

1.3 Základní pojmy teorie grup

Definice 1.69. Buď $(G, \cdot)$ grupoid, $a_1, \ldots, a_n \in G$ $(n \in \mathbb{N})$. Potom je *součin* $a_1 \cdots a_n$ definován indukcí vztahem $a_1 \cdots a_n := (a_1 \cdots a_{n-1})a_n$.

Příklad(y) 1.70. $a_1a_2a_3a_4 = (a_1a_2a_3)a_4 = ((a_1a_2)a_3)a_4$.

Definice 1.71. Buď $(G, \cdot)$ grupoid, $a \in G$. Potom jsou *mocniny* prvku a definovány takto: $a^1 := a$, $a^{n+1} := (a^n)a$ $(n \in \mathbb{N})$.

Poznámka 1.72. 1) Při počítání se součiny v pologrupě je možno libovolně závorkovat.

2) V komutativní pologrupě platí: $a_1 \cdots a_n = a_{\pi(1)} \cdots a_{\pi(n)}$, přičemž π je libovolná permutace množiny $M = \{1, \ldots, n\}$.

Věta 1.73. *Buď $(G, \cdot, e, ^{-1})$ grupa, $a, b \in G$. Potom platí $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Důkaz. $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = a(ea^{-1}) = aa^{-1} = e$. □

Důsledek 1.74. $(a_1 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$.

Důkaz. Důkaz se snadno provede indukcí podle n. □

Definice 1.75. Buď $(G, \cdot, e, ^{-1})$ grupa, $a \in G$. Pro $n \in \mathbb{N}$ buď a^n jak je definováno výše. Dále klademe $a^0 := e$ a $a^{-n} := (a^{-1})^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Věta 1.76. (Pravidla pro počítání s mocninami v grupách) *Pro všechna $a, b \in G$, $n, m \in \mathbb{Z}$ platí:*

(i) $a^n a^m = a^{n+m}$,

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$,

(iii) $(ab)^n = a^n b^n$, *pokud je* $\cdot$ *komutativní.*

Důkaz. Důkaz je ponechán jako cvičení. □

Poznámka 1.77. Tato pravidla platí pro $m, n \in \mathbb{N}$ také v pologrupách.

Definice 1.78. Buď $(G, \cdot, e, ^{-1})$ grupa, $a \in G$. Potom se kardinální číslo

$$\mathrm{o}(a) := |\{a^0 = e, a^1, a^{-1}, a^2, a^{-2}, \ldots\}| = |\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}|$$

nazývá *řád* prvku a.

Poznámka 1.79. $\mathrm{o}(a) \in \mathbb{N}$ nebo $\mathrm{o}(a) = |\mathbb{N}| = \aleph_0 (= \infty)$.

Příklad(y) 1.80. 1) V $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$ píšeme (stejně tak ve všech grupách s aditivním značením) na místo a^n. Pravidla ve Větě 1.76 pak mají následující tvar: (i) $ma + na = (m+n)a$, (ii) $n(ma) = (mn)a$, (iii) $n(a+b) = na + nb$. Platí $\mathrm{o}(0) = 1$, $\mathrm{o}(k) = \infty$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. (V každé grupě platí $\mathrm{o}(e) = 1$.)

2) V grupě $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1, ^{-1})$ platí: $\mathrm{o}(1) = 1$, $\mathrm{o}(-1) = 2$, $\mathrm{o}(i) = \mathrm{o}(-i) = 4$.

Definice 1.81. Buď $(G, \cdot, e, ^{-1})$ grupa. Potom se $|G|$ (mohutnost množiny G) nazývá *řád* této grupy (takž pro všechna $a \in G$ platí: $\mathrm{o}(a) \leq |G|$). Obecně se pro algebru $(A, (\omega_i)_{i \in I})$ mohutnost $|A|$ nazývá *řád* této algebry.

Lemma 1.82. (Dělení se zbytkem v $\mathbb{Z}$) *Pro libovolná čísla $k, l \in \mathbb{Z}$, $l \neq 0$, existují $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < |l|$, tak, že platí $k = lq + r$.*

Důkaz. Případ 1: $k \geq 0$. Zřejmě $|l|n \leq k$ pro $n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $|l|n_0 > k$ (Archimedův axiom pro $\mathbb{R}$). Tedy $|l|n > k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Položme $q^* := \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid |l|n \leq k\}$ a $q := q^*$ pro $l > 0$, $q := -q^*$ pro $l < 0$. Potom je $k = lq + r$, kde $0 \leq r < |l|$.

Případ 2: $k < 0$. Zřejmě $|l|n \leq k$ pro $n = k$, ovšem $|l|n > k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Nechť $\mathbb{Z}^-$ značí množinu záporných celých čísel. Položme $q^* := \max\{n \in \mathbb{Z}^- \mid |l|n \leq k\}$ a $q := q^*$ pro $l > 0$, $q := -q^*$ pro $l < 0$. Potom je $k = lq + r$, kde $0 \leq r < |l|$. □

Poznámka 1.83. Lze snadno ukázat, že čísla q a r z Lemmatu 1.82 jsou dána jednoznačně. Někdy namísto $k = lq + r$ píšeme $k : l = q$, zb. r (čísla k, l, q a r se nazývají po řadě *dělenec, dělitel, podíl a zbytek*). Pak např. platí $7 : 3 = 2$, zb. 1, ale $(-7) : 3 = -3$, zb. 2 (nikoliv $(-7) : 3 = -2$, zb -1, protože zbytek musí být nezáporný).

Definice 1.84. Pro $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}$ je $r \equiv s \bmod n$ („r je kongruentní s s modulo n“) $:\Leftrightarrow$ $n|(r - s)$ (n dělí $(r - s)$).

Zřejmě platí $r \equiv s \bmod n \Leftrightarrow r = s + kn$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow r, s$ mají stejný zbytek při dělení číslem n. Relace $\equiv \bmod n$ je ekvivalence na $\mathbb{Z}$(viz později).

Věta 1.85. *Buď* $(G, \cdot, e, ^{-1})$ *grupa,* $a \in G$.

a) Je-li $\mathrm{o}(a) = \infty$*, pak jsou mocniny prvku* a *navzájem různé.*

b) Je-li $\mathrm{o}(a) = n \in \mathbb{N}$*, potom platí* $n = \min\{m \in \mathbb{N} \mid a^m = e\}$ *a* $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{a^0 = e, a^1, \ldots, a^{n-1}\}$*. Dále je* $a^r = a^s \Leftrightarrow r \equiv s \bmod n$.

Důkaz. a) Buď $\mathrm{o}(a) = \infty$ a předpokládejme, že exisují $r, s \in \mathbb{Z}$ tak, že $r > s$ a $a^r = a^s$. Pro $m := r - s \in \mathbb{N}$ pak platí $a^m = a^{r-s} = a^r a^{-s} = a^r (a^r)^{-1} = e$. Buď $k \in \mathbb{Z}$. Potom je $k = mq + l$, $q \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}_0$ a $0 \leq l < m$. Odtud plyne $a^k = a^{mq+l} = (a^m)^q a^l = e^q a^l = a^l$, tedy $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{e, a, \ldots, a^{m-1}\}$. To je spor, neboť $\mathrm{o}(a) = \infty$.

b) Je-li $\mathrm{o}(a) = n \in \mathbb{N}$, pak zřejmě exisují $r, s \in \mathbb{Z}$ tak, že $r > s$ a $a^r = a^s$. Tedy podle důkazu tvrzení a) existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $a^m = e$, což dává $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{e, a, \ldots, a^{m-1}\}$. Buď $n_0 = \min\{m \in \mathbb{N} \mid a^m = e\}$. Potom je $a^{n_0} = e$ a prvky $e, a, \ldots, a^{n_0-1}$ jsou po dvou různé. Pokud by totiž tomu tak nebylo, potom by platilo $a^r = a^s$ pro $0 \leq s < r < n_0$. Tedy bychom měli $a^{r-s} = e$ pro $0 < r - s < n_0$, což je spor s minimalitou čísla n_0. Proto platí $n = n_0$. Takže máme $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{e, a, \ldots, a^{n-1}\}$.

Pro $a = e$ zřejmě platí $a^r = a^s \Leftrightarrow r \equiv s \bmod n$. Dokážeme, že $a^r = a^s \Leftrightarrow r \equiv s \bmod n$ platí i pro $a \neq e$.

$\Rightarrow$: $a^r = a^s \Rightarrow a^{r-s} = e$, $r - s = nq + l$, $0 \leq l < n \Rightarrow e = a^{r-s} = (a^n)^q a^l = e^q a^l = a^l \Rightarrow l = 0$ $\Rightarrow r - s = nq \Rightarrow r \equiv s \bmod n$.

$\Leftarrow$: $r \equiv s \bmod n \Rightarrow r - s = nq \Rightarrow a^{r-s} = a^{nq} = (a^n)^q = e \Rightarrow a^r = a^s$. □

Příklad(y) 1.86. Buď M množina a $S_M := \{f : M \to M \mid f \text{ bijektivní}\}$. $(S_M, \circ, \mathrm{id}_M, ^{-1})$ je grupa, která se nazývá *symetrická grupa* na M. Prvky množiny S_M se nazývají *permutace* množiny M. Je-li $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, píšeme S_n místo S_M. Platí: $|S_n| = n!$. Je tedy např.

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cyklem délky k rozumíme permutaci $f : M \to M$ tvaru $f(x_1) = x_2,\ f(x_2) = x_3, ..., f(x_{k-1}) = x_k,\ f(x_k) = x_1$, kde $x_1, x_2, ..., x_3 \in M$ jsou po dvou různé prvky a $f(x) = x$ pro každé $x \in M \setminus \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Cyklus pak zapisujeme ve tvaru $(x_1 x_2 ... x_k)$. Tedy při použití cyklického zápisu máme:

$$S_3 = \{(1), (123), (132), (23), (13), (12)\}.$$

Snadno se nahlédne, že řád libovolného cyklu je roven délce tohoto cyklu.

Připomeňme, že permutace $f : M \to M$ je *sudá (lichá)*, má-li sudý (lichý) počet inverzí, tj. dvojic prvků $x, y \in M$ takových, že $x < y$ a $f(x) > f(y)$.

Transpozicí rozumíme cyklus délky 2. Tedy je každá transpozice lichou permutací. Libovolná permutace je zřejmě složením konečného počtu transpozic, přičemž sudá (lichá) permutace je složením sudého (lichého) počtu transpozic. Sudé permutace tvoří tzv. *alternující* grupu A_n. V našem případě je množina sudých permutací

$$A_3 = \{(1), (123), (132)\}.$$

Řády prvků grupy S_3:

π	$\mathrm{o}(\pi)$
(1)	1
(123)	3
(132)	3
(23)	2
(13)	2
(12)	2

Platí: Každý prvek grupy S_n je možno vyjádřit jako složení cyklů s různými prvky, a to jednoznačně až na pořadí cyklů. Lze snadno ukázat, že parita permutace je rovna paritě počtu cyklů sudé délky v tomto vyjádření. Např. permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

z grupy S_9 má následující cyklické vyjádření, tj. vyjádření pomocí složení cyklů: (16)(29738)(45). Je dobře známo, že řád složení cyklů s různými prvky je nejmenší společný násobek délek (tedy řádů) všech těchto cyklů. Takže v našem případě platí $\mathrm{o}(\pi) = 2 \cdot 5 = \mathrm{NSN}(2, 5, 2)$.

Kapitola 2

Základní algebraické metody

2.1 Podalgebry

Definice 2.1. Buď A množina, $\omega : A^n \to A$ n-ární operace na A ($n \in \mathbb{N}_0$), $T \subseteq A$. Potom se množina T nazývá *uzavřená* vzhledem k $\omega :\Leftrightarrow \omega(T^n) \subseteq T$ (tj. $t_1, \ldots, t_n \in T \Rightarrow \omega t_1 \ldots t_n \in T$; v případě $n = 0$: $\omega \in T$).

Definice 2.2. Buď $\mathcal{A} = (A, (\omega_i)_{i\in I})$ algebra typu $(n_i)_{i\in I}$, $T \subseteq A$. Potom se množina T nazývá *uzavřená* vzhledem k $(\omega_i)_{i\in I} :\Leftrightarrow T$ je uzavřená vzhledem k ω_i pro všechna $i \in I$. V tomto případě se pomocí vztahu $\omega_i^* x_1 \ldots x_{n_i} := \omega_i x_1 \ldots x_{n_i}$, $(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in T^{n_i}$, definuje n_i-ární operace ω_i^* na T, tj. $\omega_i^* = \omega_i|_{T^{n_i}}$. Algebra $(T, (\omega_i^*)_{i\in I})$ se pak nazývá *podalgebra* algebry $\mathcal{A}$. Většinou píšeme: $\omega_i^* =: \omega_i$.

Poznámka 2.3. Často také nazýváme podalgebrou algebry $\mathcal{A}$ pouze množinu T.

Podalgebry speciálních algebraických struktur

1) Buď $(H, \cdot)$ grupoid. $T \subseteq H$ je podalgebrou algebry $(H, \cdot) \Leftrightarrow (x, y \in T \Rightarrow xy \in T)$. Pak je $\cdot = \cdot|_{T\times T}$ binární operace na T a $(T, \cdot)$ je grupoid, který se nazývá *podgrupoid* grupoidu $(H, \cdot)$.

2) Je-li $(H, \cdot)$ pologrupa a $T \subseteq H$ její podgrupoid, pak je $(T, \cdot)$ je pologrupa, neboť asociativní zákon platí v H, a tedy i v T. (Obecně: Je-li v algebře definovaná vlastnost nějaké operace pomocí nějakého *zákona*, pak má tato operace zúžená na některou podalgebru tuto vlastnost přirozeně také.) $(T, \cdot)$ se nazývá *podpologrupa* pologrupy $(H, \cdot)$.

3) Je-li $(G, \cdot)$ grupa a $(T, \cdot)$ její podpologrupa, potom $(T, \cdot)$ nemusí být grupou, jak je zřejmé z příkladu $(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$, $(T, \cdot) = (\mathbb{N}, +)$.

4) Buď $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ grupa chápaná jako algebra typu $(2, 0, 1)$. $T \subseteq G$ je její podalgebra

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x, y \in T \Rightarrow xy \in T \\ e \in T \\ x \in T \Rightarrow x^{-1} \in T \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T \neq \emptyset \\ x, y \in T \Rightarrow xy^{-1} \in T \end{array} \right\}.$$

   Protože zákony grupy platí v G, a tedy také v T, je podalgebra $(T, \cdot, e, {}^{-1})$ opět grupou a nazývá se *podgrupa* grupy $(G, \cdot, e, {}^{-1})$.

5) Je-li $(R, +, 0, -, \cdot)$ okruh chápaný jako algebra typu $(2, 0, 1, 2)$, potom je jeho každá jeho podalgebra také okruhem a nazývá se *podokruh* okruhu $(R, +, 0, -, \cdot)$. To neplatí pro okruh chápaný jako algebra typu $(2, 2)$, neboť např. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ je podalgebrou okruhu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, ale nikoliv jeho podokruhem (ovšem $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je podokruhem okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$).

6) Buď $(K, +, 0, -, \cdot, 1)$ těleso (pole) chápané jako algebra typu $(2, 0, 1, 2, 0)$. Pak $T \subseteq K$ je jeho podalgebra (tedy podokruh se stejným jednotkovým prvkem)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in T \Rightarrow x + y \in T \\ 0 \in T \\ x \in T \Rightarrow -x \in T \\ x, y \in T \Rightarrow xy \in T \\ 1 \in T \\ x \in T, x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \in T. \end{cases}$$

Je-li T tělesem (polem), pak se nazývá *podtěleso*(*podpole*) tělesa (pole) $(K, +, 0, -, \cdot, 1)$.

Například $(\mathbb{R}, +, 0, -, \cdot, 1)$ je podpolem pole $(\mathbb{C}, +, 0, -, \cdot, 1)$, zatímco $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot, 1)$ není.

7) Buď $(V, +, 0, -, K)$ vektorový prostor nad K a $(T, +, 0, -, K)$ jeho podalgebra, tj.

$$\begin{array}{l} x, y \in T \Rightarrow x + y \in T \\ 0 \in T \\ x \in T \Rightarrow -x \in T \\ \lambda \in K, x \in T \Rightarrow \lambda x \in T. \end{array}$$

Potom je také $(T, +, 0, -, K)$ vektorový prostor nad K a nazývá se *vektorový podprostor* prostoru $(V, +, 0, -, K)$.

Věta 2.4. *Buď (A, Ω) algebra a $(T_j)_{j \in J}$ soubor podalgeber. Potom je $\bigcap_{j \in J} T_j$ rovněž podalgebra.*

Důkaz. Buď $\Omega = (\omega_i)_{i \in I}$, ω_i n_i-ární operace, a $T := \bigcap_{j \in J} T_j$. Buď $i \in I$, přičemž $n_i > 0$, a buďte $x_1, \ldots, x_{n_i} \in T$. Potom platí $\forall j \in J : x_1, \ldots, x_{n_i} \in T_j$, tedy $\forall j \in J$: $\omega_i x_1 \ldots x_{n_i} \in T_j$. Proto $\omega_i x_1 \ldots x_{n_i} \in T$. Pro $n_i = 0$ platí $\forall j \in J : \omega_i \in T_j$, takže $\omega_i \in T$. □

Poznámka 2.5. Předchozí věta platí i pro prázdný soubor algeber, tj. pro případ $J = \emptyset$. Pak totiž máme $\bigcap_{j \in J} T_j = A$.

Věta 2.6. *Buď (A, Ω) algebra a $S \subseteq A$ podmnožina. Potom je*

$$\langle S \rangle := \bigcap \{T \mid T \supseteq S,\ T \text{ je podalgebra algebry } (A, \Omega)\}$$

nejmenší podalgebra algebry (A, Ω), která S obsahuje.

Definice 2.7. $\langle S \rangle$ se nazývá *podalgebra algebry* (A, Ω) *generovaná množinou* S . Množina S se nazývá *systém generátorů* podalgebry $\langle S \rangle$.

Věta 2.8. *Buď $(G, \cdot, e, ^{-1})$ grupa, $x \in G$, $S = \{x\}$. Potom platí:*

$$\langle x \rangle := \langle S \rangle = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Důkaz. Máme dokázat, že $\{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\} =: T$ je nejmenší podgrupa grupy $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ obsahující prvek x.
T je podgrupa grupy $(G, \cdot, e, {}^{-1})$, neboť pro $x^k, x^l \in T$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ platí $x^k x^l = x^{k+l} \in T$ (jelikož $k + l \in \mathbb{Z}$), $x^0 \in T$ (protože $0 \in \mathbb{Z}$) a $(x^k)^{-1} = x^{-k} \in T$ (neboť $-k \in \mathbb{Z}$). Dále platí $x = x^1 \in T$.
Buď U podgrupa grupy $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ taková, že $x \in U$. Potom platí $x^n \in U$ $(n \in \mathbb{N})$, $e = x^0 \in U$, $x^{-n} = (x^n)^{-1} \in U$, takže $T \subseteq U$. Tedy je T nejmenší podgrupa grupy $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ obsahující prvek x. □

Definice 2.9. $\langle x \rangle$ se nazývá *podgrupa grupy* $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ *generovaná prvkem* x.

Poznámka 2.10. 1) Pro vektorové prostory máme:

$$\langle \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle = \{ \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in K \}.$$

2) Je-li $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ *abelovská* grupa, potom platí:

$$\langle \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle = \{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \mid k_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Vyjádříme-li abelovskou grupu ve tvaru $(G, +, 0, -)$, potom platí:

$$\langle \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle = \{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n \mid k_i \in \mathbb{Z}\}.$$

3) Pro *neabelovské* grupy platí např.:

$$\langle \{x_1, x_2\} \rangle = \{x_1^{k_{11}} x_2^{k_{12}} x_1^{k_{21}} x_2^{k_{22}} \cdots x_1^{k_{n1}} x_2^{k_{n2}} \mid n \in \mathbb{N},\ k_{ij} \in \mathbb{Z}\}.$$

4) Obecně platí:

$$\langle \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle = \{t(x_1, \ldots, x_n) \mid t \text{ je libovolný } n\text{-ární } \textit{term} \text{ v algebře } (A, \Omega)\}.$$

Definice 2.11. Grupa $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ se nazývá *cyklická* $:\Leftrightarrow \exists x \in G : G = \langle x \rangle$. Prvek x se pak nazývá *generátor* cyklické grupy G.

Z Věty 1.85 a Věty 2.8 plyne

Důsledek 2.12. *Buď* $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ *cyklická grupa a nechť* $\langle x \rangle = G$. *Potom můžeme rozlišit dva případy:*

a) Je-li $\mathrm{o}(x) = \infty$, *potom je také* G *nekonečná a platí* $G = \{e, x, x^{-1}, x^2, x^{-2}, \ldots\}$.

b) Je-li $\mathrm{o}(x) = n \in \mathbb{N}$, *potom máme* $|G| = n$, *a platí* $G = \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$.

V obou případech jsou uvedené mocniny v dané množině navzájem různé.

Příklad(y) 2.13. a) pro $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$ platí $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$.

b) pro $(\mathbb{Z}_m, +, 0, -)$ (operace modulo m, viz odstavec 2.4) platí $\mathbb{Z}_m = \langle 1 \rangle = \langle k \rangle$, kde $\mathrm{NSD}(m, k) = 1$.

2.2 Relace ekvivalence a rozklad na třídy ekvivalence

Definice 2.14. Je-li M množina, potom se podmnožina R množiny $M \times M$ nazývá *binární relace* na M. Místo $(x, y) \in R$ píšeme většinou xRy. Speciální relace: $\alpha_M := M \times M$ se nazývá *univerzální relace* , $\iota_M := \{(x, x) \mid x \in M\}$ se nazývá *identická relace* nebo *relace rovnosti* .

Definice 2.15. Relace $R \subseteq M \times M$ se nazývá:

1) *reflexivní* $:\Leftrightarrow \iota_M \subseteq R$, tj., $\forall x \in M : xRx$.

2) *symetrická* $:\Leftrightarrow \forall x, y \in M : xRy \Rightarrow yRx$.

3) *antisymetrická* $:\Leftrightarrow \forall x, y \in M : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.

4) *transitivní* $:\Leftrightarrow \forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Relace splňující 1), 2) a 4) se nazývá *ekvivalence*, relace splňující 1), 3) a 4) se nazývá *(částečné) uspořádání.*

Příklad(y) 2.16. α_M a ι_M jsou vždy relace ekvivalence. Relace $\leq$ na množině $\mathbb{R}$, $\subseteq$ na množině $\mathcal{P}(M)$ a $|$ (dělí) na množině $\mathbb{N}$ jsou relace uspořádání.

Definice 2.17. Buď M množina. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(M)$ se nazývá *rozklad množiny* $M :\Leftrightarrow$

1) $\bigcup_{C \in \mathcal{P}} C = M$,

2) $\emptyset \notin \mathcal{P}$,

3) $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A = B \vee A \cap B = \emptyset$ (tj. množiny v $\mathcal{P}$ jsou po dvou disjunktní).

Prvky rozkladu $\mathcal{P}$ se nazývají jeho *třídy.*

Věta 2.18. *Buď π ekvivalence na množině M, $a \in M$, $[a]_\pi := \{b \in M \mid b\pi a\}$ tzv. třída ekvivalence prvku a a $M/\pi := \{[a]_\pi \mid a \in M\}$ tzv. faktorová množina množiny M podle ekvivalence π. Potom je M/π rozklad množiny M.*

Je-li naopak $\mathcal{P}$ rozklad množiny M a π je definováno vztahem $a\pi b :\Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{P} : a, b \in C$, potom je π ekvivalence na množině M a platí $M/\pi = \mathcal{P}$.

$\pi \mapsto M/\pi$ je bijektivní zobrazení množiny všech ekvivalencí na množině M na množinu všech rozkladů množiny M. Inverzní zobrazení je dáno výše uvedeným předpisem $\mathcal{P} \mapsto \pi$.

Důkaz. Úloha k procvičení. □

Věta 2.19. *Buďte M, N množiny, $f : M \to N$ zobrazení a $x\pi_f y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Potom platí:*

a) π_f je ekvivalence na M, která se nazývá jádro *zobrazení f.*

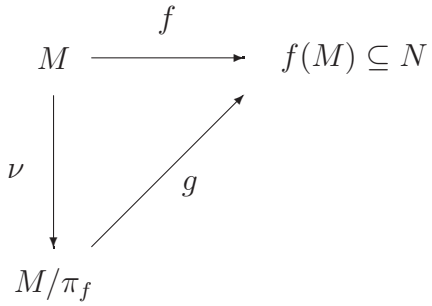
b) Zobrazení

$$g : \begin{cases} M/\pi_f \to f(M) := \{f(x) \mid x \in M\} \subseteq N \\ [x]_{\pi_f} \mapsto f(x) \end{cases}$$

je korektně definováno a bijektivní.

Důkaz. Úloha k procvičení. □

Poznámka 2.20. Význam zobrazení g definovaného v předchozí větě je možno znázornit následujícím *komutativním diagramem* :



Zde je

$$\nu : \begin{cases} M \to M/\pi_f \\ x \mapsto [x]_{\pi_f} \end{cases}$$

tzv. *kanonické* neboli *faktorové* zobrazení. Platí: $f = g \circ \nu$.

Rozklad grupy na třídy podle podgrupy

Označení: Pokud nebude moci dojít k nedorozumění, budeme dále klást $G := (G, \cdot, e, ^{-1})$, resp. $G := (G, \cdot)$, tj. označíme grupu tímtéž symbolem jako její nosnou množinu. Podobně pro okruhy.

Věta 2.21. *Buď $(G, \cdot, e, ^{-1})$ grupa a $(H, \cdot, e, ^{-1})$ podgrupa grupy G. Buď dále $\pi \subseteq G \times G$ relace definovaná pomocí vztahu $x\pi y :\Leftrightarrow x^{-1}y \in H$ $(x, y \in G)$. Potom je π ekvivalence na G.*

Důkaz. 1) π je reflexivní: $\forall x : x\pi x$, neboť $x^{-1}x = e \in H$.
2) π je symetrická: $x\pi y \Rightarrow x^{-1}y \in H \Rightarrow (x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x \in H \Rightarrow y\pi x$.
3) π je tranzitivní: $x\pi y$, $y\pi z \Rightarrow x^{-1}y \in H$, $y^{-1}z \in H \Rightarrow (x^{-1}y)(y^{-1}z) = x^{-1}z \in H \Rightarrow x\pi z$. □

Poznámka 2.22. Analogicky platí: pomocí vztahu $x\varrho y :\Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ je na G rovněž definována relace ekvivalence.

Definice 2.23. Buď $(G, \cdot, e, ^{-1})$ grupa, $A, B \subseteq G$. Potom se nazývá $AB := \{ab \mid a \in A,\, b \in B\}$ *složený součin* A a B. Speciální případy: $A = \{a\}$: $AB =: aB = \{ab \mid b \in B\}$, $B = \{b\}$: $AB =: Ab = \{ab \mid a \in A\}$. Pro podgrupu H grupy G a libovolný prvek $a \in G$ se množina aH nazývá *levá třída rozkladu* grupy G podle H a množina Ha se nazývá *pravá třída rozkladu* grupy G podle H.

Věta 2.24. *Buďte π, ϱ výše definované relace ekvivalence na grupě G. Potom platí pro všechna $a \in G$: $[a]_\pi = aH$, $[a]_\varrho = Ha$.*

Důkaz. Platí $\{y \mid a^{-1}y \in H\} = aH$ ($\subseteq$: $a^{-1}y = x \in H \Rightarrow y = ax \in aH$; $\supseteq$: $y = ax \in aH \Rightarrow a^{-1}y = x \in H$). Odtud plyne $[a]_\pi = \{y \mid a\pi y\} = \{y \mid a^{-1}y \in H\} = aH$.

Důkaz vztahu $[a]_\varrho = Ha$ se provede analogicky. □

Důsledek 2.25. $\{aH \mid a \in G\}$ *je rozklad grupy* G*, který se nazývá* levý rozklad *grupy* G *podle* H*. Podobně se nazývá* $\{Ha \mid a \in G\}$ pravý rozklad *grupy* G *podle* H*.*

Příklad(y) 2.26. $G = S_3 = \{(1), (123), (132), (12), (23), (13)\}$, $H = \{(1), (23)\}$.

$$\begin{array}{ll} (1)H{=}H & H(1){=}H \\ (123)H{=}\{(123),(12)\} & H(123){=}\{(123),(13)\} \\ (132)H{=}\{(132),(13)\} & H(132){=}\{(132),(12)\} \end{array}$$

Obecně tedy platí $Ha \neq aH$! Pro $a = e$ však platí vždy $He = eH = H$. V abelovských grupách platí $Ha = aH$ pro všechna $a \in G$.

Věta 2.27. *Buď* $(G, \cdot, e, ^{-1})$ *grupa,* H *podgrupa grupy* G*,* $a, b \in G$*. Potom je vztahem*

$$i : \begin{cases} aH \to bH \\ ax \mapsto bx \end{cases}$$

definováno bijektivní zobrazení.

Důkaz. 1) i je korektně definováno: $ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow bx_1 = bx_2$.
2) i je injektivní: $i(ax_1) = i(ax_2) \Rightarrow bx_1 = bx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.
3) i je surjektivní: každé $bx \in bH$ je obrazem $ax \in aH$. □

Důsledek 2.28. $\forall a, b \in G : |aH| = |bH| = |H|$*. (Analogicky:* $\forall a \in G : |Ha| = |H|$*.)*

Věta 2.29. *Vztahem* $aH \mapsto Ha^{-1}$*,* $a \in G$*, je definováno bijektivní zobrazení* φ *levého rozkladu na pravý rozklad grupy* G *podle* H*.*

Důkaz. 1) φ je korektně definováno: $aH = bH \Rightarrow a\pi b \Rightarrow a^{-1}b \in H \Rightarrow a^{-1}(b^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow a^{-1}\varrho b^{-1} \Rightarrow Ha^{-1} = Hb^{-1}$.
2) φ je surjektivní: $\forall a \in G : \varphi(a^{-1}H) = H(a^{-1})^{-1} = Ha$.
3) φ je injektivní: $\varphi(aH) = \varphi(bH) \Rightarrow Ha^{-1} = Hb^{-1} \Rightarrow a^{-1}\varrho b^{-1} \Rightarrow a^{-1}b \in H \Rightarrow a\pi b \Rightarrow aH = bH$. □

Definice 2.30. Počet všech různých tříd levého rozkladu (pravého rozkladu) grupy G podle H se nazývá *index podgrupy* H *v* G , formálně: $[G : H] := |\{aH \mid a \in G\}| = |\{Ha \mid a \in G\}|$.

Věta 2.31. (Lagrangeova) *Buď* $(G, \cdot, e, ^{-1})$ *konečná grupa,* H *podgrupa* G*. Potom platí:*

$$[G : H] \cdot |H| = |G|.$$

Poznámka 2.32. Lagrangeova věta platí také pro nekonečné grupy.

Důsledek 2.33. *a) Je-li* H *podgrupa* G*, pak* $|H|$ *dělí* $|G|$*.*

b) $x \in G \Rightarrow \mathrm{o}(x) = |\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}| = |\langle x \rangle|$ *dělí* $|G|$*.*

c) $|G| = p$ *prvočíslo,* H *podgrupa* $G \Rightarrow H = \{e\}$ *nebo* $H = G$*. Pro* $x \in G$*,* $x \neq e$*, dostáváme* $\langle x \rangle = G$*, tedy* G *je cyklická.*

2.3 Izomorfizmy a homomorfizmy

Definice 2.34. Buďte $\mathcal{A} = (A, (\omega_i)_{i\in I})$ a $\mathcal{A}^* = (A^*, (\omega_i^*)_{i\in I})$ algebry téhož typu $(n_i)_{i\in I}$. Zobrazení $f : A \to A^*$ se nazývá *homomorfizmus algebry $\mathcal{A}$ do algebry $\mathcal{A}^*$* :$\Leftrightarrow$

1) Pro $i \in I$, kde $n_i > 0$, platí $\forall x_1, \ldots, x_{n_i} \in A : f(\omega_i x_1 \ldots x_{n_i}) = \omega_i^* f(x_1) \ldots f(x_{n_i})$,

2) pro $i \in I$, kde $n_i = 0$, platí $f(\omega_i) = \omega_i^*$.

Lemma 2.35. *Buďte $(G, \cdot, e, ^{-1})$ a $(H, \cdot, e, ^{-1})$ grupy, $f : G \to H$. Potom platí: f je homomorfizmus grupy $(G, \cdot, e, ^{-1})$ do grupy $(H, \cdot, e, ^{-1}) \Leftrightarrow$ f je homomorfizmus grupoidu $(G, \cdot)$ do grupoidu $(H, \cdot)$.*

Důkaz. $\Rightarrow$: Triviální.
$\Leftarrow$: Nechť $f(xy) = f(x)f(y)$. Máme ukázat, že $f(e) = e$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$. Platí $ee = e \Rightarrow f(e)f(e) = f(e) \Rightarrow f(e) = e$. Dále, $xx^{-1} = e \Rightarrow f(x)f(x^{-1}) = f(e) = e = f(x)(f(x))^{-1} \Rightarrow f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$. □

Důsledek 2.36. *1) Buďte $\mathcal{V} = (V, +, 0, -, K)$ a $\mathcal{W} = (W, +, 0, -, K)$ vektorové prostory nad tímtéž polem K a $f : V \to W$. Potom platí: f je homomorfizmus vektorového prostoru $\mathcal{V}$ do vektorového prostoru $\mathcal{W} \Leftrightarrow$ f je lineární zobrazení, tj. $\forall x, y \in V : f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall \lambda \in K, x \in V : f(\lambda x) = \lambda f(x)$.*

2) Buďte $(R, +, 0, -, \cdot)$ a $(S, +, 0, -, \cdot)$ okruhy, $f : R \to S$. Potom platí: f je homomorfizmus okruhu $(R, +, 0, -, \cdot)$ do okruhu $(S, +, 0, -, \cdot) \Leftrightarrow$ f je homomorfizmus algebry $(R, +, \cdot)$ do algebry $(S, +, \cdot)$.

Definice 2.37. Buďte $\mathcal{A} = (A, (\omega_i)_{i\in I})$ a $\mathcal{A}^* = (A^*, (\omega_i^*)_{i\in I})$ algebry téhož typu $(n_i)_{i\in I}$ a $f : A \to A^*$ homomorfizmus algebry $\mathcal{A}$ do algebry $\mathcal{A}^*$. f se nazývá

1) *izomorfizmus* , pokud je f bijektivní (v tomto případě říkáme, že $\mathcal{A}$ je *izomorfní obraz* $\mathcal{A}^*$, a píšeme $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}^*$),

2) *endomorfizmus* , pokud $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$,

3) *automorfizmus* , pokud $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ a f izomorfizmus,

4) *epimorfizmus* , pokud je f surjektivní (v tomto případě se nazývá $\mathcal{A}^*$ *homomorfní obraz* $\mathcal{A}$),

5) *monomorfizmus*, pokud je f injektivní (v tomto případě se nazývá $\mathcal{A}$ *izomorfně vnořená* v $\mathcal{A}^*$).

Lemma 2.38. *a) Buďte $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}^{**}$ algebry téhož typu, f homomorfizmus algebry $\mathcal{A}$ do algebry $\mathcal{A}^*$, g homomorfizmus algebry $\mathcal{A}^*$ do algebry $\mathcal{A}^{**}$. Potom je $g \circ f$ homomorfizmus algebry $\mathcal{A}$ do algebry $\mathcal{A}^{**}$. Jsou-li f, g izomorfizmy, pak je také $g \circ f$ izomorfizmus.*

b) Je-li f izomorfizmus $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}^*$, pak je f^{-1} izomorfizmus $\mathcal{A}^*$ do $\mathcal{A}$.

Obrazy a (úplné) vzory podalgeber při homomorfizmech jsou opět podalgebry. (Je-li $f : A \to A^*$ zobrazení, $U^* \subseteq A^*$, pak se $f^{-1}(U^*) := \{x \in A \mid f(x) \in U^*\}$ nazývá *úplný vzor* množiny U^*.)

Homomorfizmy a zákony

Věta 2.39. *Buďte $(H,\cdot)$, $(H^*,\cdot)$ grupoidy a $f : H \to H^*$ homomorfizmus. Je-li $(H,\cdot)$ pologrupa, potom je podalgebra $(f(H),\cdot)$ grupoidu $(H^*,\cdot)$ také pologrupa.*

Důkaz. Buď $(H,\cdot)$ pologrupa a nechť $x,y,z \in f(H)$. Potom existuje $a,b,c \in H$, kde $f(a) = x$, $f(b) = y$ a $f(c) = z$. Protože platí $a(bc) = (ab)c$, máme $f(a)(f(b)f(c)) = (f(a)f(b))f(c)$, takže $x(yz) = (xy)z$. Tedy je $(f(H),\cdot)$ pologrupa. □

Poznámka 2.40. Buďte $(A,(\omega_i)_{i\in I})$ a $(A^*,(\omega_i^*)_{i\in I})$ algebry téhož typu, $f : A \to A^*$ epimorfizmus (tj. A^* je homomorfní obraz A). Platí-li pro vhodné termy t_1,t_2 v A rovnice (zákon) $\forall a,b,c,\ldots : t_1(a,b,c,\ldots) = t_2(a,b,c,\ldots)$, pak plyne ze vztahu $t_1(f(a),f(b),f(c),\ldots) = f(t_1(a,b,c,\ldots)) = f(t_2(a,b,c,\ldots)) = t_2(f(a),f(b),f(c),\ldots)$, že zákon platí též v A^*. Termy jsou přitom vytvořeny z konečného počtu proměnných a symbolů operací (pro A, resp. A^*). Je-li $(A,(\omega_i)_{i\in I})$ algebra, pak se $(\omega_i)_{i\in I}$ nazývají *fundamentální* operace, příslušné termy se naproti tomu nazývjí *odvozené* operace.

Poznámka 2.41. Interpretace Věty 2.39: každý homomorfní obraz pologrupy je pologrupa. Podle Poznámky 2.40 je také každý homomorfní obraz
1) (abelovské) grupy je (abelovská) grupa,
2) (komutativního) okruhu je (komutativní) okruh,
3) okruhu s jednotkovým prvkem je okruh s jednotkovým prvkem,
4) svazu je svaz,
5) Booleovy algebry je Booleova algebra,
6) vektorového prostoru nad K je vektorový prostor nad K.

Buď $(A,\cdot)$ grupoid, kde $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$, a $(A^*,\circ)$ další grupoid, kde $A^* = \{a_1^*,\ldots,a_n^*\}$ Buď $f : A \to A^*$ izomorfizmus, kde $a_i^* = f(a_i)$, $1 \le i \le n$. Tabulky operací obou algeber pak vypadají následovně:

$\cdot$	a_1	$\ldots$	a_n
a_1	a_1a_1	$\ldots$	a_1a_n
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	a_na_1	$\ldots$	a_na_n

$\circ$	a_1^*	$\ldots$	a_n^*
a_1^*	$a_1^* \circ a_1^*$	$\ldots$	$a_1^* \circ a_n^*$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n^*	$a_n^* \circ a_1^*$	$\ldots$	$a_n^* \circ a_n^*$

Je-li v levé tabulce $a_ia_j = a_k$, pak je v pravé tabulce $a_i^* \circ a_j^* = a_k^*$. Z algebraického hlediska je proto izomorfizmus pouhé „přeznačení“. Na izomorfní algebry je nutno „pohlížet jako na stejné“.

Algebraické vlastnosti jsou takové vlastnosti, které zůstávají zachovány při izomorfizmech. Například všechny zákony jsou algebraickými vlastnostmi, protože podle výše uvedené poznámky zůstávají zachovány dokonce už při epimorfizmech.

Často je možné charakterizovat algebraické struktury „až na izomorfizmus“. Tak jsou např. všechny konečnědimenzionální vektorové prostory nad polem K až na izomorfizmus dány vektorovým prostorem K^n, $n \in \mathbb{N}_0$ (s obvyklými operacemi). Analogická tvrzení platí pro konečná pole a konečné Booleovy algebry. Dalším výsledkem tohoto charakteru je následující věta:

Věta 2.42. (Cayleyova věta o reprezentaci) *Buď $(G,\cdot,e,^{-1})$ grupa. Potom je G izomorfní s podgrupou symetrické grupy $(S_G,\circ,\mathrm{id}_G,^{-1})$.* Krátce: *Každá grupa je izomorfní s nějakou grupou permutací.*

Důkaz. Zkonstruujeme vnoření (monomorfizmus) $\pi : G \to S_G$, $a \mapsto \pi_a$, následujícím způsobem:

$$\forall g \in G : \pi_a(g) := ag.$$

1) $\pi_a \in S_G$, tj., π_a je injektivní a surjektivní (injektivní: $\pi_a(g_1) = \pi_a(g_2) \Rightarrow ag_1 = ag_2 \Rightarrow g_1 = g_2$; surjektivní: $h \in G \Rightarrow h = \pi_a(a^{-1}h)$).
2) π je injektivní: $\pi_{a_1} = \pi_{a_2} \Rightarrow \pi_{a_1}(e) = \pi_{a_2}(e) \Rightarrow a_1 e = a_2 e \Rightarrow a_1 = a_2$.
3) $\pi_{ab} = \pi_a \circ \pi_b$: $\pi_{ab}(g) = (ab)g = a(bg) = \pi_a(bg) = \pi_a(\pi_b(g)) = (\pi_a \circ \pi_b)(g)$. □

Poznámka 2.43. Analogická věta platí také pro monoidy.

2.4 Relace kongruence a faktorové algebry

Definice 2.44. Buď $\mathcal{A} = (A, (\omega_i)_{i\in I})$ algebra typu $(n_i)_{i\in I}$ a π ekvivalence na A. π se nazývá *(relace) kongruence* na $\mathcal{A} :\Leftrightarrow$ pro všechna $i \in I$, kde $n_i > 0$, $a_1, \ldots, a_{n_i}, b_1, \ldots, b_{n_i} \in A$, platí

$$a_1\pi b_1 \wedge \ldots \wedge a_{n_i}\pi b_{n_i} \Rightarrow \omega_i a_1 \ldots a_{n_i}\pi\omega_i b_1 \ldots b_{n_i}.$$

Příklad(y) 2.45. Buď $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot, 1)$ obor integrity celých čísel a $n \in \mathbb{N}_0$ pevné (n se nazývá modul). Nechť binární relace π na $\mathbb{Z}$ je definována pomocí vztahu:

$$a\pi b :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a - b = cn, \qquad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Dále budeme psát, podobně jako v odstavci 1.3, $a \equiv b \bmod n$ místo $a\pi b$. Platí: $\equiv \bmod n$ je kongruence, neboť:
1) $\equiv \bmod n$ je ekvivalence: $a \equiv a \bmod n$ protože $a - a = 0 = 0n$; $a \equiv b \bmod n \Rightarrow a - b = cn \Rightarrow b - a = (-c)n \Rightarrow b \equiv a \bmod n$; $a \equiv b \bmod n \wedge b \equiv c \bmod n \Rightarrow a - b = d_1 n \wedge b - c = d_2 n \Rightarrow a - c = (d_1 + d_2)n \Rightarrow a \equiv c \bmod n$.
2) Operace $+$: $a_1 \equiv b_1 \bmod n \wedge a_2 \equiv b_2 \bmod n \Rightarrow a_1 - b_1 = c_1 n \wedge a_2 - b_2 = c_2 n \Rightarrow (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = (c_1 + c_2)n \Rightarrow (a_1 + a_2) \equiv (b_1 + b_2) \bmod n$.
3) Operace $-$: $a \equiv b \bmod n \Rightarrow a - b = cn \Rightarrow (-a) - (-b) = (-c)n \Rightarrow (-a) \equiv (-b) \bmod n$.
4) Operace $\cdot$: $a_1 \equiv b_1 \bmod n \wedge a_2 \equiv b_2 \bmod n \Rightarrow a_1 = b_1 + c_1 n \wedge a_2 = b_2 + c_2 n \Rightarrow a_1 a_2 = b_1 b_2 + (b_1 c_2 + b_2 c_1 + c_1 c_2 n)n \Rightarrow a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \bmod n$.

Příslušný rozklad na třídy: Platí $[a] = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Pro $n = 0$ máme $[a] = \{a\}$ pro všechna $a \in \mathbb{Z}$ ($\equiv \bmod n$ je potom relace rovnosti). Pro $n > 0$ platí: $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/\equiv \bmod n = \{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{[0], \ldots, [n-1]\}$.

Věta 2.46. *Buď $\mathcal{A} = (A, (\omega_i)_{i\in I})$ algebra a π kongruence na $\mathcal{A}$. Potom jsou vztahy*

$$\omega_i^*[a_1]_\pi \ldots [a_{n_i}]_\pi := [\omega_i a_1 \ldots a_{n_i}]_\pi, \;\; n_i > 0, \;\; a_1, \ldots, a_{n_i} \in A,$$
$$\omega_i^* := [\omega_i]_\pi, \quad n_i = 0,$$

definovány operace $(\omega_i^*)_{i\in I}$ na faktorové množině A/π.

Důkaz. Operace jsou korektně definovány:

$$\left.\begin{array}{c} [a_1]_\pi = [b_1]_\pi \\ \vdots \\ [a_{n_i}]_\pi = [b_{n_i}]_\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a_1\pi b_1 \\ \vdots \\ a_{n_i}\pi b_{n_i} \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_i a_1 \ldots a_{n_i}\pi\omega_i b_1 \ldots b_{n_i}.$$

Proto je $[\omega_i a_1 \ldots a_{n_i}]_\pi = [\omega_i b_1 \ldots b_{n_i}]_\pi$. □

Definice 2.47. Algebra $\mathcal{A}/\pi := (A/\pi, (\omega_i^*)_{i\in I})$ se nazývá *faktorová algebra* algebry $\mathcal{A}$ podle kongruence π. Často klademe $\omega_i := \omega_i^*$.

Příklad(y) 2.48. $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot, 1)$, $\pi = \equiv \mathrm{mod}\, n$. Faktorová algebra $\mathcal{A}/\pi$ je potom algebra $(\mathbb{Z}_n, +^*, 0^*, -^*, \cdot^*, 1^*)$, kde $[a] +^* [b] = [a+b]$, $0^* = [0]$, $-^*[a] = [-a]$, $[a] \cdot^* [b] = [ab]$, $1^* = [1]$ (tj. počítáme s „reprezentanty“ tříd). Dále budeme symbol * u operací na faktorové množině vynechávat (viz druhou větu Definice 2.47). Platí: $(\mathbb{Z}_n, +, 0, -, \cdot, 1)$ je komutativní okruh s jednotkovým prvkem, který se nazývá *okruh zbytkových tříd modulo n* .

Věta 2.49. *Buď $\mathcal{A} = (A, (\omega_i)_{i\in I})$ algebra, π kongruence na $\mathcal{A}$. Potom je faktorové zobrazení*

$$\nu : \begin{cases} A \to A/\pi \\ a \mapsto [a]_\pi \end{cases}$$

surjektivní homomorfizmus algebry $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}/\pi$, který se nazývá přirozený homomorfizmus .

Důkaz.

$$\nu(\omega_i a_1 \dots a_{n_i}) = [\omega_i a_1 \dots a_{n_i}]_\pi = \omega_i [a_1]_\pi \dots [a_{n_i}]_\pi = \omega_i \nu(a_1) \dots \nu(a_{n_i}), \quad n_i > 0,$$
$$\nu(\omega_i) = [\omega_i]_\pi = \omega_i, \quad n_i = 0.$$

□

Důsledek 2.50. *$\mathcal{A}/\pi$ je homomorfní obraz $\mathcal{A}$, tedy každý zákon, který platí v $\mathcal{A}$, platí také v $\mathcal{A}/\pi$ - viz poznámku 2.40. Speciálně tedy máme (viz poznámku 2.41):*

i) každá faktorová algebra pologrupy je pologrupou,

ii) každá faktorová algebra (abelovské) grupy je (abelovskou) grupou,

iii) každá faktorová algebra vektorového prostoru je vektorovým prostorem,

iv každá faktorová algebra (komutativního) okruhu je (komutativním) okruhem,

v) každá faktorová algebra okruhu s jednotkovým prvkem je okruhem s jednotkovým prvkem,

vi) každá faktorová algebra svazu (resp. Booleovy algebry) je svazem (resp. Booleovou algebrou).

Poznámka 2.51. Faktorová algebra oboru integrity nemusí být oborem integrity, jak je vidět na příkladu $(\mathbb{Z}_n, +, 0, -, \cdot, 1)$, kde $n \in \mathbb{N}$ není prvočíslo.

Věta 2.52. (O homomorfizmu) *Buďte $\mathcal{A} = (A, (\omega_i)_{i\in I})$ a $\mathcal{A}^* = (A^*, (\omega_i^*)_{i\in I})$ algebry téhož typu $(n_i)_{i\in I}$ a $f : A \to A^*$ homomorfizmus. Potom je jádro π_f kongruencí na $\mathcal{A}$ a existuje přesně jeden injektivní homomorfizmus g z $\mathcal{A}/\pi_f$ do $\mathcal{A}^*$ takový, že $f = g \circ \nu$ (ν je přirozený homomorfismus).*

Důkaz. 1) π_f je relace ekvivalence a existuje injektivní zobrazení $g : A/\pi_f \to A^*$, kde $f = g \circ \nu$ (viz odstavec 2.2).

2) π_f je kongruence: Buď $i \in I$, $n_i > 0$. Máme:

$$\left.\begin{array}{c} a_1 \pi_f b_1 \\ \vdots \\ a_{n_i} \pi_f b_{n_i} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(a_1) = f(b_1) \\ \vdots \\ f(a_{n_i}) = f(b_{n_i}) \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_i^* f(a_1) \dots f(a_{n_i}) = \omega_i^* f(b_1) \dots f(b_{n_i})$$

$\Rightarrow f(\omega_i a_1 \dots a_{n_i}) = f(\omega_i b_1 \dots b_{n_i}) \Rightarrow \omega_i a_1 \dots a_{n_i} \pi_f \omega_i b_1 \dots b_{n_i}$. Jednoznačnost g je triviální: $g([a]_{\pi_f}) = g(\nu(a)) = (g \circ \nu)(a) = f(a)$.

3) g je homomorfizmus: Buď $i \in I$, $n_i > 0$, potom platí:

$$\begin{array}{l} g(\omega_i [a_1]_{\pi_f} \dots [a_{n_i}]_{\pi_f}) = g([\omega_i a_1 \dots a_{n_i}]_{\pi_f}) = g(\nu(\omega_i a_1 \dots a_{n_i})) = f(\omega_i a_1 \dots a_{n_i}) \\ = \omega_i^* f(a_1) \dots f(a_{n_i}) = \omega_i^* g(\nu(a_1)) \dots g(\nu(a_{n_i})) = \omega_i^* g([a_1]_{\pi_f}) \dots g([a_{n_i}]_{\pi_f}). \end{array}$$

Analogicky pro $n_i = 0$: $g(\omega_i) = g([\omega_i]_{\pi_f}) = f(\omega_i) = \omega_i^*$. □

Důsledek 2.53. *Pro podalgebru $(f(A), (\omega_i^*)_{i \in I})$ algebry $\mathcal{A}^*$ platí $(f(A), (\omega_i^*)_{i \in I}) \cong \mathcal{A}/\pi_f$, tedy je každý homomorfní obraz algebry izomorfní s nějakou faktorovou algebrou.*

Poznámka 2.54. Relace rovnosti $\iota = \{(x, x) \mid x \in A\}$ a univerzální relace $\alpha = A \times A$ jsou vždy kongruencemi na $\mathcal{A}$ a nazývají se *triviální* kongruence na $\mathcal{A}$. Platí: $\mathcal{A}/\iota \cong \mathcal{A}$ a $|\mathcal{A}/\alpha| = 1$. $\mathcal{A}/\iota$ a $\mathcal{A}/\alpha$ jsou *triviální* faktorové algebry .

Definice 2.55. Algebra $\mathcal{A}$ se nazývá *prostá* , má-li pouze triviální kongruence.

Poznámka 2.56. Algebra $\mathcal{A}$ je prostá tehdy a jen tehdy, když má pouze *triviální* homomorfní obrazy (tj. pouze obrazy izomorfní s $\mathcal{A}$, resp. jednoprvkové homomorfní obrazy).

2.5 Relace kongruence na grupách a okruzích

Věta 2.57. *Buď $(G, \cdot, e, ^{-1})$ grupa a π relace ekvivalence na G. Potom platí:*

a) π je kongruence na $(G, \cdot, e, ^{-1}) \Leftrightarrow \pi$ je kongruence na $(G, \cdot)$.

b) Je-li π kongruence na $(G, \cdot)$ a $[e]_\pi =: N$, potom platí:

i) N je podgrupa $(G, \cdot, e, ^{-1})$.

ii) $xNx^{-1} = \{xyx^{-1} \mid y \in N\} \subseteq N$ pro všechna $x \in G$.

iii) $x \pi y \Leftrightarrow x^{-1}y \in N$ pro všechna $x, y \in G$ (tj., $[x]_\pi = xN$ pro všechna $x \in G$).

Důkaz. a) $\Rightarrow$: Triviální.
$\Leftarrow$:

$$\left.\begin{array}{c} x \pi y \\ x^{-1} \pi x^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} e = x x^{-1} \pi y x^{-1} \\ y^{-1} \pi y^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow y^{-1} \pi y^{-1} y x^{-1} = x^{-1}.$$

b) i) $e \in N$ protože $e \pi e$. $x, y \in N \Rightarrow x \pi e \wedge y \pi e \Rightarrow xy \pi ee = e \Rightarrow xy \in N$.
$x \in N \Rightarrow x \pi e \Rightarrow x^{-1} \pi e^{-1} = e \Rightarrow x^{-1} \in N$.
ii) $y \in N \Rightarrow y \pi e \Rightarrow xyx^{-1} \pi x e x^{-1} = e \Rightarrow xyx^{-1} \in N$.
iii) $\Rightarrow$: $x \pi y \Rightarrow e = x^{-1} x \pi x^{-1} y \Rightarrow x^{-1} y \in N$.
$\Leftarrow$: $x^{-1} y \in N \Rightarrow x^{-1} y \pi e \Rightarrow y = x x^{-1} y \pi x e = x$. □

Poznámka 2.58. Buď $(G, \cdot, e, ^{-1})$ grupa a $x \in G$. Potom je zobrazení

$$\varphi_x : \begin{cases} G \to G \\ g \mapsto xgx^{-1} \end{cases}$$

automorfizmus $(G, \cdot, e, ^{-1})$, který se nazývá *vnitřní* automorfizmus grupy G. Vlastnost ii) v předchozí větě je tedy ekvivalentní s vlastností: $\varphi_x(N) \subseteq N$ pro všechna $x \in G$.

Definice 2.59. Podgrupa N grupy $(G, \cdot, e, ^{-1})$ se nazývá *normální podgrupa* grupy G, symbolicky $N \lhd G$, jestliže $xNx^{-1} \subseteq N$ pro všechna $x \in G$.

Poznámka 2.60. V abelovské grupě je každá podgrupa normální podgrupou. Pro neabelovské grupy tomu tak není. Např. existují podgrupy grupy S_3, které nejsou normálními podgrupami, totiž: $\{(1), (12)\}$, $\{(1), (13)\}$ a $\{(1), (23)\}$.

Lemma 2.61. *Pro podgrupu N grupy G jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

a) N je normální podgrupa grupy G.

b) $\forall x \in G : xNx^{-1} = N$.

c) $\forall x \in G : Nx = xN$, tj. pravá třída rozkladu = levá třída rozkladu.

Důkaz. a) $\Rightarrow$ b): N normální podgrupa $\Rightarrow \forall x \in G : xNx^{-1} \subseteq N \Rightarrow \forall x \in G : x^{-1}Nx \subseteq N$ $\Rightarrow \forall x \in G : N = xx^{-1}Nxx^{-1} \subseteq xNx^{-1} \Rightarrow \forall x \in G :\ xNx^{-1} = N$.

b) $\Rightarrow$ a) je triviální.

b) $\Leftrightarrow$ c): $xNx^{-1} = N \Rightarrow xN = xNx^{-1}x = Nx$; $xN = Nx \Rightarrow xNx^{-1} = Nxx^{-1} = N$ pro všechna $x \in G$. □

Věta 2.62. *Buď $(G, \cdot, e, ^{-1})$ grupa, $N \lhd G$ a π buď binární relace na G definovaná vztahem $x\pi y :\Leftrightarrow x^{-1}y \in N$, $x, y \in G$. Potom je π kongruence na G, kde $[e]_\pi = N$.*

Důkaz. π je relace ekvivalence a $[x]_\pi = xN = Nx$ podle Věty 2.21 a Lemmatu 2.61. π je kongruence:

$$\left.\begin{array}{l} x_1\pi y_1 \\ x_2\pi y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = y_1 n_1, \text{ kde } n_1 \in N \text{ (neboť } x_1 \in y_1 N) \\ x_2 = n_2 y_2, \text{ kde } n_2 \in N \text{ (neboť } x_2 \in N y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1x_2 = y_1n_1n_2y_2 \in y_1Ny_2 = y_1y_2N \Rightarrow x_1x_2\pi y_1y_2.$$

Dále platí $[e]_\pi = eN = N$. □

Věta 2.63. *Vztahem $\pi \mapsto [e]_\pi$ je definováno bijektivní zobrazení množiny všech kongruencí na grupě G na množinu všech normálních podgrup grupy G. Inverzní zobrazení je dáno pomocí vztahu $N \mapsto \pi$, kde $x\pi y :\Leftrightarrow x^{-1}y \in N$.*

Důkaz. Obě přiřazení jsou navzájem inverzní: $\pi \mapsto [e]_\pi =: N \mapsto \pi_1$, kde $x\pi_1 y :\Leftrightarrow x^{-1}y \in N \Leftrightarrow e\pi x^{-1}y \Leftrightarrow x\pi y$, tj. $\pi = \pi_1$. Obráceně: $N \mapsto \pi$ (kde $x\pi y \Leftrightarrow x^{-1}y \in N$) $\mapsto [e]_\pi = \{y \in G;\ e\pi y\} = \{y \in G;\ y \in N\} = N$. □

Chceme-li najít všechny homomorfní obrazy – až na izomorfizmus – nějaké grupy G, můžeme tedy určit všechny normální podgrupy N grupy G a vytvořit faktorové algebry G/π pomocí odpovídajících kongruencí. Pokud normální podgrupě N odpovídá kongruence π, píšeme $G/N := G/\pi = \{xN \mid x \in G\}$. Takováto faktorová algebra se nazývá *faktorgrupa* grupy G.

Ve faktorgrupě G/N se počítá následujícím způsobem: $(xN)(yN) = (xy)N$, $eN = N$ je jednotkový prvek, $(xN)^{-1} = x^{-1}N$.

Triviálním kongruencím $\iota = \{(x, x) \mid x \in G\}$ a $\alpha = G \times G$ odpovídají tzv. *triviální* normální podgrupy $\{e\}$ a G. Odtud plyne: G je prostá $\Leftrightarrow$ G má pouze triviální normální podgrupy.

Příklad(y) 2.64. 1) Každá cyklická grupa $G = \langle x \rangle$ taková, že $\mathrm{o}(x) = p$ (p prvočíslo), je prostá (věta Lagrangeova). Je známo, že platí také obráceně: Každá prostá abelovská grupa G, kde $|G| > 1$, je cyklická a má prvočíselný řád.

2) Alternující grupa A_n (viz Příklad 1.86) je prostá pro $n \neq 4$.

3) Symetrická grupa S_n není pro $n \geq 3$ prostá, neboť platí $A_n \lhd S_n$. Levý (pravý) rozklad S_n na třídy podle A_n je roven $\{A_n, S_n \setminus A_n\}$, tedy platí $[S_n : A_n] = 2$ (index A_n v S_n).

Věta 2.65. *Buď G grupa, U podgrupa, kde $[G : U] = 2$. Potom platí $U \lhd G$.*

Důkaz. $x \in U \Rightarrow xU = Ux = U$. $x \notin U \Rightarrow xU = Ux = G \setminus U$. □

Poznámka 2.66. Také pro vektorové prostory platí podobný výsledek jako pro grupy: Vztahem $\pi \mapsto [0]_\pi$ je definováno bijektivní zobrazení množiny všech relací kongruence vektorového prostoru $(V, +, 0, -, K)$ na množinu všech podprostorů prostoru V (důkaz je podobný jako u grup).

Je-li U podprostor prostoru V, pak je $V/U = \{x + U \mid x \in V\}$ faktorový prostor s operacemi $(x + U) + (y + U) = (x + y) + U$, $0 + U = U$ (neutrální prvek), $-(x + U) = (-x) + U$, $\lambda(x + U) = (\lambda x) + U$, $x, y \in V$, $\lambda \in K$.

Definice 2.67. Buď $(R, +, 0, -, \cdot)$ okruh a I podokruh okruhu R. Potom se I nazývá

- *levý ideál* okruhu $R :\Leftrightarrow \forall r \in R : rI := \{ri \mid i \in I\} \subseteq I$,
- *pravý ideál* okruhu $R :\Leftrightarrow \forall r \in R : Ir := \{ir \mid i \in I\} \subseteq I$,
- *ideál* okruhu R (formálně: $I \lhd R$) $:\Leftrightarrow \forall r \in R : rI \subseteq I \wedge Ir \subseteq I$.

Příklad(y) 2.68. 1) $\{0\}$ a R jsou vždy ideály okruhu R, tak zvané *triviální* ideály .

2) V $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot)$ je $\{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, ideálem. Tím jsou vyčerpány všechny ideály v $\mathbb{Z}$.

Lemma 2.69. *Buď $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ okruh s jednotkovým prvkem a I ideál okruhu R. Potom platí:* $1 \in I \Leftrightarrow I = R$.

Důkaz. Jestliže $1 \in I$, pak pro každé $r \in R$ platí $r = r1 \in rI \subseteq I$. Proto $R \subseteq I$, takže $R = I$. Opačná implikace je zřejmá. □

Věta 2.70. *Každé těleso má pouze triviální ideály.*

Důkaz. Buď I ideál tělesa $(K, +, 0, -, \cdot, 1)$ a $I \neq \{0\}$. Potom existuje $x \in I$, $x \neq 0$. Protože $1 = x^{-1}x \in x^{-1}I \subseteq I$, platí $I = K$ podle předchozího lemmatu.. □

Věta 2.71. *Buď $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ komutativní okruh s jednotkovým prvkem, který má pouze triviální ideály. Potom je R pole nebo $R = \{0\}$.*

Důkaz. Nechť $R \neq \{0\}$, $x \in R$, $x \neq 0$. Pak $xR = \{xr \mid r \in R\}$ je ideál okruhu R (analogicky k $\mathbb{Z}$), takže $x = x1 \in xR \Rightarrow xR \neq \{0\} \Rightarrow xR = R \Rightarrow \exists r \in R : 1 = xr \Rightarrow x$ má inverzní prvek. □

Z předchozích dvou vět vyplývá:

Důsledek 2.72. *Komutativní okruh $R \neq \{0\}$ s jednotkovým prvkem je pole $\Leftrightarrow$ R má pouze triviální ideály.*

Věta 2.73. *Buď $(R, +, 0, -, \cdot)$ okruh.*

a) Je-li π kongruence na R, potom je $I := [0]_\pi$ ideál okruhu R a platí: $R/\pi = \{x + I \mid x \in R\} =: R/I$.

b) Je-li I ideál okruhu R a π binární relace na R definovaná vztahem $x\pi y :\Leftrightarrow y - x \in I$, $x, y \in R$, potom je π kongruence na R a $[0]_\pi = I$.

c) $\pi \mapsto [0]_\pi$ definuje bijektivní zobrazení množiny všech kongruencí na R na množinu všech ideálů okruhu R. Inverzní zobrazení je dáno vztahem $I \mapsto \pi$, kde π je kongruence definovaná v b).

Důkaz. a) $i \in I \wedge r \in R \Rightarrow i\pi 0 \wedge r\pi r \Rightarrow ir\pi 0r = 0$ a podobně $ri\pi r0 = 0$, takže $ir, ri \in I$. Zbytek tvrzení plyne z věty 2.57 (jelikož π je kongruence na grupě $(R, +, 0, -)$).

b) Buďte $x_1, y_1, x_2, y_2 \in R$, $x_1\pi y_1 \wedge x_2\pi y_2$. Pak $y_1 = x_1 + i_1 \wedge y_2 = x_2 + i_2$, $i_1, i_2 \in I$. Tedy $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + i_1 + i_2$, kde $i_1 + i_2 \in I$, takže $(x_1 + x_2)\pi(y_1 + y_2)$. Dále, $y_1y_2 = x_1x_2 + i$, kde $i = x_1i_2 + i_1x_2 + i_1i_2 \in I$ (I je ideál) $\Rightarrow x_1x_2\pi y_1y_2$. Zbytek tvrzení plyne z Věty 2.62.

c) $\pi \mapsto [0]_\pi = I \mapsto \pi$, $I \mapsto \pi \mapsto [0]_\pi = I$ (analogicky k odpovídajícímu důkazu pro normální podgrupy). □

Je-li I ideál okruhu R, potom je faktorová algebra $(R/I, +, I, -, \cdot)$ okruhem a nazývá se *faktorový okruh* nebo *okruh zbytkových tříd* okruhu R modulo I. Operace v R/I jsou: $(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$ (je identická se součtem $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$), $(x + I)(y + I) = xy + I$ (*není* identická se součinem $AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$), $-(x + I) = (-x) + I$, $0 + I = I$ je nulový prvek.

Příklad(y) 2.74. Nechť $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/I$, $I = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Pak $y - x \in I \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y - x = kn$ $\Leftrightarrow x \equiv y \bmod n$. Tedy zadaný ideál I odpovídá relaci $\equiv \bmod n$, což zapíšeme jako $I =: (n)$.

Poznámka 2.75. Okruh R je prostý $\Leftrightarrow$ R má pouze triviální kongruence $\Leftrightarrow$ R má pouze triviální ideály $\{0\} =: (0)$ a R.

Z Důsledku 2.72 ihned plyne:

Věta 2.76. *Komutativní okruh $R \neq \{0\}$ s jednotkovým prvkem je prostý právě tehdy, když je pole.*

Příklad(y) 2.77. Lze snadno ukázat, že každý okruh matic $M_n(K)$ nad polem K je prostý.

2.6 Přímé součiny algeber

Definice 2.78. Buďte $\mathcal{A}_k = (A_k, (\omega_i^{(k)})_{i\in I})$, $k \in K$, algebry téhož typu $(n_i)_{i\in I}$ a $A := \prod_{k\in K} A_k = \{(a_k)_{k\in K} \mid a_k \in A_k\}$ kartézský součin všech množin A_k. Pro všechna $i \in I$ buď operace ω_i na A definována vztahem:

$$\omega_i(a_k^{(1)})_{k\in K} \dots (a_k^{(n_i)})_{k\in K} := (\underbrace{\omega_i^{(k)} a_k^{(1)} \dots a_k^{(n_i)}}_{\in A_k})_{k\in K} \quad \text{pro } n_i > 0,$$
$$\omega_i := (\omega_i^{(k)})_{k\in K} \qquad \text{pro } n_i = 0.$$

Algebra $(A, (\omega_i)_{i\in I})$ se nazývá *přímý součin* algeber $\mathcal{A}_k$ a značí se $\prod_{k\in K} \mathcal{A}_k$.

Příklad(y) 2.79. Nechť $K = \{1, 2\}$, $\mathcal{A}_1 = (A_1, \cdot, e, {}^{-1})$, $\mathcal{A}_2 = (A_2, +, 0, -)$ jsou grupy. Potom se v $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = (A_1 \times A_2, \circ, (e, 0), ')$ počítá následujícím způsobem: $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 + b_2)$, $(a_1, a_2)' = (a_1^{-1}, -a_2)$. Platí: $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ je grupa. Asociativní zákon: $((a_1, a_2) \circ (b_1, b_2)) \circ (c_1, c_2) = (a_1 b_1 c_1, a_2 + b_2 + c_2) = (a_1, a_2) \circ ((b_1, b_2) \circ (c_1, c_2))$; $(e, 0)$ je neutrální prvek: $(e, 0) \circ (a_1, a_2) = (ea_1, 0 + a_2) = (a_1, a_2) = (a_1 e, a_2 + 0) = (a_1, a_2) \circ (e, 0)$; $(a_1, a_2)'$ je inverzní prvek k (a_1, a_2): $(a_1, a_2) \circ (a_1, a_2)' = (a_1, a_2) \circ (a_1^{-1}, -a_2) = (a_1 a_1^{-1}, a_2 + (-a_2)) = (e, 0)$, analogicky $(a_1, a_2)' \circ (a_1, a_2) = (e, 0)$.

Věta 2.80. *Pokud platí při vhodných termech t_1, t_2 zákon tvaru $\forall x_1, \dots, x_n : t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n)$ ve všech algebrách $\mathcal{A}_k$, $k \in K$, potom platí také v $\prod_{k\in K} \mathcal{A}_k$.*

Důkaz. Provede se indukcí podle složitosti termů t_1, t_2. □

Důsledek 2.81. *Přímé součiny pologrup (grup, vektorových prostorů, okruhů, Booleových algeber) jsou opět pologrupy (grupy, vektorové prostory, okruhy, Booleovy algebry).*

Pozor! Přímý součin (alespoň dvou) oborů integrity není *nikdy* obor integrity, neboť $(0, 1) \cdot (1, 0) = (0, 0)$ (kde $0 \neq 1$), takže součin oborů integrity má nenulové dělitele nuly.

Poznámka 2.82. Přímý součin $\prod_{k\in K} \mathcal{A}_k$ je až na izomorfizmus

a) komutativní, tj. nezávislý na pořadí činitelů, např.: $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_1$,

b) asociativní, tj. je možno jej libovolně uzávorkovat, např.: $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3 \cong (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \times \mathcal{A}_3 \cong \mathcal{A}_1 \times (\mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3)$.

V následujícím textu symbolem C_n označíme cyklickou grupu řádu n ($n \in \mathbb{N}$).

Věta 2.83. *Grupa $C_n \times C_m$ je cyklická $\Leftrightarrow$ $\mathrm{NSD}(m, n) = 1$.*

Důkaz. Buď $C_n = \langle x \rangle$, $C_m = \langle y \rangle$.
$\Rightarrow$ (nepřímo): $\mathrm{NSD}(n, m) > 1 \Rightarrow k := \mathrm{NSN}(n, m) < nm$ (neboť $\mathrm{NSN}(n, m) = nm/\mathrm{NSD}(n, m)$) a pro libovolná čísla $i, j \in \mathbb{Z}$ máme $(x^i, y^j)^k = (x^{ki}, y^{kj}) = (e, e)$ (protože $n|ki$ a $m|kj$) $\Rightarrow$ $\mathrm{o}(x^i, y^j)|k < nm \Rightarrow$ řád každého prvku množiny $C_n \times C_m$ je menší než $nm = |C_n \times C_m| \Rightarrow$ $C_n \times C_m$ není cyklická.
$\Leftarrow$: Ukážeme, že $C_n \times C_m = \langle (x, y) \rangle$. Pro libovolné $t \in \mathbb{Z}$ máme $(x, y)^t = (e, e) \Rightarrow x^t = e \wedge y^t = e \Rightarrow n|t \wedge m|t \Rightarrow \mathrm{NSN}(n, m) = nm|t$ (jelikož $\mathrm{NSD}(n, m) = 1$). Tedy volbou $t = \mathrm{o}(x, y)$ dostáváme $nm|\mathrm{o}(x, y)$. Na druhé straně platí $(x, y)^{nm} = (x^{nm}, y^{nm}) = ((x^n)^m, (y^m)^n) = (e, e)$, takže $\mathrm{o}(x, y)|mn$. Proto $\mathrm{o}(x, y) = nm$. □

Důsledek 2.84. *Je-li* $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ *rozklad na prvočinitele čísla* $n \in \mathbb{N}$*, potom platí* $C_n \cong C_{p_1^{e_1}} \times \cdots \times C_{p_k^{e_k}}$.

Věta 2.85. (Hlavní věta o konečně generovaných abelovských grupách) *Je-li* $G = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ abelovská *grupa generovaná prvky* $x_1, \ldots, x_m$*, potom platí:*

$$G \cong C_\infty^k \times C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r},$$

přičemž $k \geq 0$ ($C_\infty^0 := \{e\}$), $n_i \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$. *Přitom platí:* G *je konečná* $\Leftrightarrow k = 0$.

(C_∞ označuje nekonečnou cyklickou grupu.)

Důkaz této věty zde neuvádíme. Lze jej nalézt v mnoha učebnicích zaměřených na algebru či teorii grup.

Příklad(y) 2.86. 1) Všechny abelovské grupy s 12 prvky jsou – až na izomorfizmus – dány grupami C_{12} ($\cong C_3 \times C_4$) a $C_2 \times C_6$ ($\cong C_2 \times C_2 \times C_3$).

2) Všechny abelovské grupy s 8 prvky jsou – až na izomorfizmus – dány grupami C_8, $C_2 \times C_4$ a $C_2 \times C_2 \times C_2$.

Kapitola 3

Polynomy

3.1 Konstrukce okruhů polynomů

Definice 3.1. Buď $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ komutativní okruh s jednotkovým prvkem. Výraz tvaru $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, kde $a_k \in R$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a množina $\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k \neq 0\}$ je konečná, se nazývá *polynom neurčité x nad R* a prvky a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ se nazývají jeho *koeficienty*. Množinu všech polynomů neurčité x nad R označíme symbolem $R[x]$.

Uvažujme nyní algebru $(R[x], +, 0, -, \cdot, 1)$ typu $(2, 0, 1, 2, 0)$, kde operace $+, 0, -, \cdot, 1$ jsou definovány následovně:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k, \quad 0 := \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k, \quad -\big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\big) := \sum_{k=0}^{\infty} (-a_k) x^k,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k := \sum_{k=0}^{\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}\big) x^k, \quad 1 := \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{0k} x^k.$$

Věta 3.2. *$(R[x], +, 0, -, \cdot, 1)$ je komutativní okruh s jednotkovým prvkem.*

Důkaz. Tvrzení se snadno dokáže přímo z definic operací $+, 0, -, \cdot, 1$. Např. asociativní zákon pro násobení dokážeme takto:

$$\big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\big) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}\big) x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} \big(\sum_{j=0}^{l} a_j b_{l-j}\big) c_{k-l}\big) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \big(\sum_{\substack{0 \le i,j,k \le k, \\ i+j+l=k}} a_i b_j c_l\big) x^k =$$
$$= \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\big).$$

□

$0 \in R[x]$ se nazývá *nulový polynom*.

Polynomy neurčité x nad R, tedy prvky množiny $R[x]$, budeme značit $f(x)$, $p(x)$, ... V dalším textu budeme při zápisu polynomu $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ používat pravidlo, že ty členy $a_k x^k$, pro které platí $a_k = 0$, mohou být vynechány. Dále klademe $x^0 = 1$, tedy $a_0 x^0 = a_0$. Polynom $p(x)$ pak můžeme psát ve tvaru $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, kde $n \in \mathbb{N}_0$. Buď dále $q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, $m \le n$, polynom. Kdy platí $p(x) = q(x)$? Zřejmě platí $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, přičemž $b_k = 0$ pro $m < k \le n$. Máme tedy $p(x) = q(x) \Leftrightarrow a_k = b_k$ pro $k = 0, \ldots, n$.

S polynomy budeme počítat podle zákonů komutativního okruhu $R[x]$ s jednotkovým prvkem.

Definice 3.3. Je-li $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, kde $a_n \neq 0$, pak se n nazývá *stupeň* polynomu $p(x)$ (píšeme $n = \operatorname{grad} p(x)$).

Platí: $\operatorname{grad}(p(x)+q(x)) \leq \max(\operatorname{grad} p(x), \operatorname{grad} q(x))$ a $\operatorname{grad}(p(x)q(x)) \leq \operatorname{grad} p(x)+\operatorname{grad} q(x)$, jestliže $p(x)$, $q(x)$, $p(x)+q(x)$ a $p(x)q(x) \neq 0$. Polynomu 0 se obecně nepřiřazuje žádný stupeň.

Každý prvek $a \in R$ můžeme ztotožnit s polynomem $p(x) = a_0 \in R[x]$, kde $a_0 = a$. Máme tedy $R \subseteq R[x]$ a $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ je zřejmě podokruhem okruhu $(R[x], +, 0, -, \cdot, 1)$.

Definice 3.4. Buď $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in R[x]$, $\operatorname{grad} p(x) = n$. Pak se a_n nazývá *vedoucí koeficient* polynomu $p(x)$ a v případě $a_n = 1$ se $p(x)$ nazývá *normovaný* polynom. Polynomy $a \in R \subseteq R[x]$ (tj. polynomy stupně) se nazývají *konstantní* polynomy a polynomy tvaru $ax + b$, kde $a \neq 0$ (tj. polynomy stupně 1), se nazývají *lineární* polynomy.

Věta 3.5. *Je-li R obor integrity, potom je také $R[x]$ obor integrity, a pro $p(x), q(x) \in R[x] \setminus \{0\}$ platí* $\operatorname{grad}(p(x)q(x)) = \operatorname{grad} p(x) + \operatorname{grad} q(x)$.

Důkaz. $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$, $q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, $b_m \neq 0 \Rightarrow p(x)q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$, kde $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$, speciálně tedy $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0$. □

Poznámka 3.6. Není-li R obor integrity, pak ani $R[x]$ není obor integrity, neboť R je podokruh okruhu $R[x]$.

Polynomy n neurčitých $x_1, \ldots, x_n$

Indukcí se definuje:

$$R[x_1] := R[x], \qquad R[x_1, \ldots, x_n] := (R[x_1, \ldots, x_{n-1}])[x_n], \ n > 1.$$

Potom platí (důkaz úplnou indukcí podle n):

$$R[x_1, \ldots, x_n] = \{ \sum_{0 \leq i_1, \ldots, i_n \leq m} a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \mid m \in \mathbb{N}_0, \ a_{i_1 \ldots i_n} \in R \}.$$

Např. prvek z $R[x_1, x_2]$ má obecný tvar: $p(x_1, x_2) = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + \cdots + a_{jk}x_1^j x_2^k$.

3.2 Polynomy a funkce

Princip dosazování. Buď $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ komutativní okruh s jednotkovým prvkem a $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$. Pro $a \in R$ je potom $p(a) := a_n a^n + \cdots + a_1 a + a_0$ opět prvkem z R, který se nazývá *hodnota polynomu $p(x)$ v a*. Funkce

$$\begin{cases} R \to R \\ a \mapsto p(a) \end{cases}$$

se nazývá *polynomiální funkce indukovaná polynomem $p(x)$* a často se také označuje p.

Věta 3.7. *Zobrazení*

$$\varphi : \begin{cases} R[x] \to R \\ p(x) \mapsto p(a) \end{cases}$$

je pro pevně dané $a \in R$ surjektivní homomorfizmus $R[x]$ na R.

Důkaz. Buď $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ a $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$. Potom platí

$$\varphi(p(x) + q(x)) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) a^k = \sum_{k=0}^{n} a_k a^k + \sum_{k=0}^{n} b_k a^k = \varphi(p(x)) + \varphi(q(x)).$$

Analogicky je vidět, že $\varphi(p(x)q(x)) = \varphi(p(x))\varphi(q(x))$. Zbytek důkazu je triviální. □

Příklad(y) 3.8. Platí-li např. $f(x)^2 - g(x)h(x) + k(x) = f(x)^4 + k(x)^2$, kde $f(x), g(x), h(x), k(x) \in R[x]$, a je-li $a \in R$, pak také platí $f(a)^2 - g(a)h(a) + k(a) = f(a)^4 + k(a)^2$.

Definice 3.9. Buď $p(x) \in R[x]$ (R komutativní okruh s jednotkovým prvkem). Potom se $a \in R$ nazývá *kořen* polynomu $p(x) :\Leftrightarrow p(a) = 0$. Polynom $p(x)$ se nazývá *dělitelný* polynomem $q(x) \in R[x]$ (formálně: $q(x)|p(x)) :\Leftrightarrow p(x) = q(x)r(x)$, kde $r(x) \in R[x]$.

Věta 3.10. *Je-li a kořen polynomu $p(x)$, pak je $p(x)$ dělitelný lineárním polynomem $x - a$ (a opačně).*

Důkaz. Buď $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Vytvořme

$$\begin{aligned} q(x) &:= p(x) - a_n x^{n-1}(x - a) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \\ r(x) &:= q(x) - b_{n-1}x^{n-2}(x - a) = c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0, \\ s(x) &:= r(x) - c_{n-2}x^{n-3}(x - a) = d_{n-3}x^{n-3} + \cdots + d_1 x + d_0, \text{ atd.} \end{aligned}$$

Pak obdržíme $p(x) = a_n x^{n-1}(x - a) + q(x) = a_n x^{n-1}(x - a) + b_{n-1}x^{n-2}(x - a) + r(x) = a_n x^{n-1}(x - a) + b_{n-1}x^{n-2}(x - a) + c_{n-2}x^{n-3}(x - a) + s(x) = \ldots = a_n x^{n-1}(x - a) + \cdots + k_1(x - a) + k_0$. Vzhledem k tomu, že $0 = p(a) = a_n a^{n-1}(a - a) + \cdots + k_1(a - a) + k_0 = k_0$, je $k_0 = 0$ a $p(x) = (x - a)(a_n x^{n-1} + \cdots + k_1)$. Tedy $x - a$ dělí $p(x)$. (Vlastně jsme $p(x)$ podělili polynomem $x - a$ a obdrželi jsme zbytek $k_0 = 0$.) □

Je-li a kořenem polynomu $p(x)$, pak se polynom $x - a$ nazývá *kořenovým činitelem* polynomu $p(x)$ (příslušným kořenu a).

Dále nechť je R obor integrity (např. $R = \mathbb{Z}$ nebo R pole).

Je-li $\operatorname{grad} p(x) = n$ a platí $(x - a)^k | p(x)$, tj. $p(x) = (x - a)^k q(x)$, potom je $k + \operatorname{grad} q(x) = \operatorname{grad} p(x) = n$, z čehož plyne $k \leq n$.

Definice 3.11. Buď $p(x) \in R[x] \setminus \{0\}$ a nechť $a \in R$ je kořenem $p(x)$. Potom největší číslo $k \in \mathbb{N}$ takové, že $(x - a)^k | p(x)$, se nazývá *násobnost* kořene a. (Podle právě učiněné poznámky je $k \leq \operatorname{grad} p(x)$.)

Věta 3.12. *Nechť $a_1, \ldots, a_r$ jsou po dvou různé kořeny polynomu $p(x) \in R[x] \setminus \{0\}$ s násobnostmi $k_1, \ldots, k_r$. Potom platí:*

$$(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_r)^{k_r} | p(x).$$

Důkaz. Pro $r = 1$ není co dokazovat. Pro $r > 1$ platí podle předpokladu $p(x) = (x - a_1)^{k_1} q_1(x) = (xa_2)^{k_2} q(x)$. Jelikož $p(a_2) = (a_2 - a_1)^{k_1} q_1(a_2) = 0$ a $(a_2 - a_1)^{k_1} \neq 0$, musí platit $q_1(a_2) = 0$, a proto $q_1(x) = (x - a_2)q_2(x)$. Tedy je $p(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)q_2(x) = (x - a_2)^{k_2} q(x)$, tj. $(x - a_1)^{k_1} q_2(x) = (x - a_2)^{k_2 - 1} q(x)$. Pokud $k_2 - 1 > 0$, dostaneme analogicky $p(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^2 q_3(x) = (x - a_2)^{k_2} q(x)$, tj. $(x - a_1)^{k_1} q_3(x) = (x - a_2)^{k_2 - 2} q(x)$. Po k_2 krocích tak obdržíme $p(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} q_{k_2+1}(x)$, tj. $(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} | p(x)$. S ostatními kořeny $a_3, \ldots, a_r$ naložíme podobně a nakonec obdržíme tvrzení. □

Důsledek 3.13. *Nechť $a_1, \ldots, a_r$ jsou po dvou různé kořeny polynomu $p(x) \in R[x] \setminus \{0\}$ s násobnostmi $k_1, \ldots, k_r$. Potom platí: $k_1 + \cdots + k_r \leq \operatorname{grad} p(x)$.*

Polynom stupně n nad oborem integrity má tedy nejvýše n kořenů, přičemž každý kořen se počítá tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Věta 3.14. *Buďte $p(x), q(x) \in R[x] \setminus \{0\}$, $\operatorname{grad} p(x), \operatorname{grad} q(x) \leq n$ a $p(b_i) = q(b_i)$ pro $n+1$ po dvou různých prvků $b_0, \ldots, b_n$ množiny R. Potom platí $p(x) = q(x)$.*

Důkaz. $(p-q)(b_i) = 0$ pro $0 \leq i \leq n \Rightarrow p - q$ má $n+1$ kořenů $\Rightarrow p - q = 0 \Rightarrow p = q$. □

Polynom nemusí mít žádné kořeny.

Příklad(y) 3.15. 1) $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ nemá kořeny v $\mathbb{Q}$, ale v $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ má, totiž $\pm\sqrt{2}$.

2) $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ nemá kořeny v $\mathbb{R}$, ale v $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ má, totiž $\pm i$.

Definice 3.16. Pole K se nazývá *algebraicky uzavřené* , jestliže každý polynom $p(x) \in K[x] \setminus K$ má aspoň jeden kořen.

Poznámka 3.17. Pokud má nad oborem integrity každý lineární polynom kořen, pak je tento obor integrity pole ($ax - 1$ ($a \neq 0$) má kořen $c \Rightarrow ac = 1 \Rightarrow c = a^{-1}$).

Věta 3.18. (Gaussova základní věta algebry) *Pole $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené.*

Věta 3.19. (Rozklad polynomu na kořenové činitele) *Je-li K pole, potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

a) K je algebraicky uzavřené.

b) Pro všechna $p(x) \in K[x]$, kde $\operatorname{grad} p(x) = n > 0$, platí $p(x) = c(x - b_1)^{k_1} \cdots (x - b_r)^{k_r}$, kde $b_1, \ldots, b_r, c \in K$ a $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Důkaz. b) ⇒ a): Triviální.
a) ⇒ b): Buď $p(x) \in K[x]$, $\operatorname{grad} p(x) > 0$. Potom existuje $a_1 \in K$ takové, že $p(a_1) = 0$, tj. $p(x) = (x - a_1)p_1(x)$. Je-li $\operatorname{grad} p_1(x) > 0$, obdržíme analogicky $p_1(x) = (x - a_2)p_2(x)$, tedy $p(x) = (x - a_1)(x - a_2)p_2(x)$. Další aplikací této úvahy nakonec obdržíme $p(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)c$. Pokud shrneme členy $(x-a_i)$ se stejnými mocninami dohromady, obdržíme tvar obsažený v tvrzení věty. □

Výpočet kořenů polynomů nad poli.
1) $\operatorname{grad} p(x) = 1$: Triviální.
2) $\operatorname{grad} p(x) = 2$: $p(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) má kořeny $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ („2“ resp. „4“ zde označuje $1 + 1$ resp. $1 + 1 + 1 + 1$; vyjádření kořenů musí existovat a musí být $1 + 1 \neq 0$).
3) $\operatorname{grad} p(x) = 3, 4$: Cardanovy vzorce (Cardano Tartaglia).
4) $\operatorname{grad} p(x) > 4$: zde už neexistují obecné "vzorce"(vyžadující pouze základní početní postupy a odmocňování). Pokud se nám podaří nějaký kořen "uhádnout", redukuje se problém na výpočet kořenů polynomu stupně o 1 nižšího (získaného vydělením daného polynomu příslušným kořenovým činitelem).

Kapitola 4

Obory integrity a dělitelnost

4.1 Jednoduchá pravidla dělitelnosti

Definice 4.1. Buď $(I, +, 0, -, \cdot, 1)$ obor integrity. Jsou-li $a, b \in I$, potom říkáme, že prvek b je *dělitelný* prvkem a a a se nazývá *dělitel* prvku b (a „dělí“ b, formálně: $a|b$) $:\Leftrightarrow \exists c \in I : b = ac$.

Elementární pravidla dělitelnosti:

1) $\forall a \in I : a|0$,

2) $\forall a \in I : 1|a$,

3) $\forall a \in I : a|a$,

4) $\forall a, b, c \in I : a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$,

5) $\forall a, b, c \in I : a|b \Rightarrow a|bc$,

6) $\forall a, b, c \in I : a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b + c$,

7) $\forall a, b, c \in I, c \neq 0 : a|b \Leftrightarrow ac|bc$,

8) $\forall a, b, c, d \in I : a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$,

9) $\forall a, b \in I, n \in \mathbb{N} : a|b \Rightarrow a^n|b^n$.

Definice 4.2. Buď $(I, +, 0, -, \cdot, 1)$ obor integrity. Dělitel prvku 1 se nazývá *jednotka* oboru integrity I. Buď $E(I)$ množina všech jednotek I. Prvky $a, b \in I$ se nazývají *asociované* (formálně: $a \sim b$) $:\Leftrightarrow \exists e \in E(I) : a = be$.

Příklad(y) 4.3. 1) $I = \mathbb{Z}$: $E(I) = \{\pm 1\}$, tedy $a \sim b \Leftrightarrow a = \pm b$.

2) $I = K$ (K pole): $E(I) = K \setminus \{0\}$, tedy $a \sim b \Leftrightarrow a, b \neq 0 \vee a = b = 0$.

3) $I = K[x]$ (K pole): $E(I) = K \setminus \{0\}$ (jelikož $\operatorname{grad} p(x)q(x) = \operatorname{grad} p(x) + \operatorname{grad} q(x)$), platí $p(x) \sim q(x) \Leftrightarrow \exists a \in K \setminus \{0\} : p(x) = aq(x)$.

Věta 4.4. *a) $e \in I$ je jednotka oboru integrity $I \Leftrightarrow \exists f \in I : ef = 1$.*

b) $(E(I), \cdot)$ je abelovská grupa, která se nazývá grupa jednotek *oboru integrity I.*

c) $\sim$ je relace kongruence na $(I, \cdot)$.

d) $\forall a, b \in I : a \sim b \Leftrightarrow a|b \wedge b|a$.

Důkaz. a) Plyne bezprostředně z definice.

b) $1 \in E(I)$; $e_1, e_2 \in E(I) \Rightarrow \exists f_1, f_2 : e_1 f_1 = e_2 f_2 = 1 \Rightarrow (e_1 e_2)(f_1 f_2) = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow e_1 e_2 \in E(I)$; $e \in E(I) \Rightarrow \exists f : ef = 1 \Rightarrow f \in E(I)$ a f je inverzní k e.

c) $a \sim a$, neboť $a = a \cdot 1$; $a \sim b \Rightarrow a = be \Rightarrow b = ae^{-1}$ $(e, e^{-1} \in E(I)) \Rightarrow b \sim a$; $a \sim b$, $b \sim c$ $\Rightarrow a = be$, $b = cf \Rightarrow a = c(ef) \Rightarrow a \sim c$ (protože $ef \in E(I)$). Tedy $\sim$ je relace ekvivalence. Dále platí: $a \sim b$, $c \sim d \Rightarrow a = be$, $c = df \Rightarrow ac = (bd)(ef) \Rightarrow ac \sim bd$.

d) $\Rightarrow$: $a \sim b \Rightarrow a = be$, $b = ae^{-1} \Rightarrow b|a \wedge a|b$.
$\Leftarrow$: $b|a \wedge a|b \Rightarrow a = bc \wedge b = ad \Rightarrow a = adc$. Pro $a = 0$ je také $b = 0$. Pro $a \neq 0$ je $1 = dc$, tedy $d, c \in E(I)$, tj. $a \sim b$. □

Příklad(y) 4.5. Třídy ekvivalence vzhledem k $\sim$:

1) $I = \mathbb{Z}$: $\{0\}$, $\{\pm 1\}, \{\pm 2\}, \ldots, \{\pm n\}, \ldots$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $I = K$: $\{0\}, K \setminus \{0\}$.

3) $I = K[x]$: $\{0\}$, $\{ap(x) \mid a \in K \setminus \{0\},\ p(x)$ *normovaný*$\}$.

Definice 4.6. Buď $(I, +, 0, -, \cdot, 1)$ obor integrity, $a \in I$.
Triviální dělitelé prvku a jsou všechna $e \in E(I)$ a všechna b taková, že $b \sim a$.
Vlastní dělitelé prvku a jsou všechna b taková, že $b|a$, $b \notin E(I)$ a $b \not\sim a$.

Definice 4.7. Prvek $a \in I \setminus E(I)$, $a \neq 0$, se nazývá *ireducibilní prvek* $:\Leftrightarrow a$ má pouze triviální dělitele.

Příklad(y) 4.8. 1) $I = \mathbb{Z}$: $a \in I$ je ireducibilní prvek $\Leftrightarrow a = \pm p$, p prvočíslo.

2) $I = K[x]$ (K pole): Ireducibilní prvky se nazýají *ireducibilní polynomy*. Např. lineární polynom $ax + b$, $a \neq 0$ je vždy ireducibilní prvek. V algebraicky uzavřeném poli je každý ireducibilní polynom také lineární.

3) $I = \mathbb{R}[x]$: Ireducibilní prvky jsou zde všechny lineární polynomy a polynomy $ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$ a $b^2 - 4ac < 0$. (Ze základní věty algebry plyne, že žádné jiné neexistují.)

4) $I = K[x]$, K konečné pole: Ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje polynom $p(x) \in K[x]$ takový, že $\operatorname{grad} p(x) = n$ a $p(x)$ je ireducibilní prvek (viz odstavec 5.4).

Definice 4.9. $p \in I \setminus E(I)$, $p \neq 0$, se nazývá *prvočinitel* $:\Leftrightarrow p|ab \Rightarrow p|a \vee p|b$.

Příklad(y) 4.10. Pro $I = \mathbb{Z}, K[x]$ (K pole) platí: p je prvočinitel $\Leftrightarrow p$ je ireducibilní prvek (plyne z Příkladů 4.8).

Poznámka 4.11. 1) a je ireducibilní prvek s $b \sim a \Rightarrow b$ je ireducibilní prvek.

2) p je prvočinitel a $q \sim p \Rightarrow q$ je prvočinitel.

3) p je prvočinitel $\Rightarrow p$ je ireducibilní prvek, neboť $a|p \Rightarrow \exists b \in I : p = ab \Rightarrow p|ab \Rightarrow p|a \vee p|b$ a $a|p \wedge b|p$. Platí tedy $p \sim a \vee p \sim b$. V případě $p \sim b$ je $p = eb = ab$ pro některou jednotku e. Vzhledem k tomu, že $p \neq 0$, je $b \neq 0$, a proto $a = e$. Tedy v každém případě je a triviální dělitel p.

Tvrzení obrácené k tvrzení 3) obecně neplatí, protože např. 3 je ireducibilním prvkem, nikoliv však prvočinitelem, v oboru integrity všech komplexních čísel tvaru $a + ib\sqrt{5}$, $a, b \in \mathbb{C}$.

4.2 Gaussovy okruhy

Definice 4.12. Obor integrity I se nazývá *Gaussův okruh* :⇔ Ke každému prvku $a \in I \setminus E(I)$, $a \neq 0$, existují prvočinitelé $p_1, \ldots, p_r$ (nikoliv nutně po dvou různí) tak, že platí $a = p_1 \cdots p_r$.

Věta 4.13. (Jednoznačnost rozkladu na prvočinitele) *Buď I Gaussův okruh, $a \in I \setminus E(I)$, $a \neq 0$, $a = p_1^{(1)} \cdots p_{r_1}^{(1)} = p_1^{(2)} \cdots p_{r_2}^{(2)}$, kde $p_i^{(1)}, p_j^{(2)}$ jsou prvočinitelé. Potom je $r_1 = r_2 =: r$ a existuje permutace π množiny $\{1, \ldots, r\}$ taková, že $p_i^{(1)} \sim p_{\pi(i)}^{(2)}$, $i = 1, \ldots, r$.*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že $p_1^{(1)} | p_1^{(2)} \cdots p_{r_2}^{(2)}$, existuje $\pi(1)$, $1 \leq \pi(1) \leq r_2$, takové, že $p_1^{(1)} | p_{\pi(1)}^{(2)}$. Protože $p_{\pi(1)}^{(2)}$ je ireducibilní prvek, dostáváme $p_1^{(1)} \sim p_{\pi(1)}^{(2)}$. Pro vhodnou jednotku e_1 proto platí $p_1^{(1)} = e_1 p_{\pi(1)}^{(2)}$, tedy po dosazení a vykrácení máme $e_1 p_2^{(1)} \cdots p_{r_1}^{(1)} = p_1^{(2)} \cdots p_{\pi(1)-1}^{(2)} p_{\pi(1)+1}^{(2)} \cdots p_{r_2}^{(2)}$. Opakovanou aplikací této úvahy nakonec obdržíme tvrzení. □

Příklad(y) 4.14. $\mathbb{Z}$ a $K[x]$ (K pole) jsou Gaussovy okruhy.

Definice 4.15. Buď I obor integrity, $a_1, \ldots, a_n \in I$.

1) $d \in I$ se nazývá *největší společný dělitel (NSD)* prvků $a_1, \ldots, a_n \in I$:⇔ (i) $d | a_i$, $i = 1, \ldots, n$ a (ii) $\forall t \in I : t | a_i$, $i = 1, \ldots, n \Rightarrow t | d$.

2) $v \in I$ se nazývá *nejmenší společný násobek (NSN)* prvků $a_1, \ldots, a_n \in I$:⇔ (i) $a_i | v$, $i = 1, \ldots, n$ a (ii) $\forall w \in I : a_i | w$, $i = 1, \ldots, n \Rightarrow v | w$.

Poznámka 4.16. Buď d NSD prvků $a_1, \ldots, a_n$ a $d_1 \in I$. Potom platí: d_1 je NSD prvků $a_1, \ldots, a_n \Leftrightarrow d_1 \sim d$. Podobné tvrzení platí i pro NSN.

Věta 4.17. *V Gaussově okruhu I je každý ireducibilní prvek prvočinitelem.*

Důkaz. $a \in I$, a ireducibilní prvek $\Rightarrow a \notin E(I)$, $a \neq 0 \Rightarrow a = p_1 \cdots p_r$, kde p_i jsou prvočinitelé $\Rightarrow p_1 | a$, $p_1 \notin E(I)$, tj. $p_1 \sim a \Rightarrow a$ je prvočinitel. □

Uvažujme faktorovou množinu $I/\sim = \{[a]_\sim \mid a \in I\}$ a nechť z každé třídy rozkladu $[a]_\sim = \{b \in I \mid b \sim a\}$ je vybrán pevný prvek $n([a]_\sim)$ (to je možné dle tzv. axiomu výběru, který užíváme), tj.

$$n : \begin{cases} I/\sim \to I \\ [a]_\sim \mapsto n([a]_\sim) \in [a]_\sim. \end{cases}$$

Prvky množiny $n(I/\sim)$ se nazývají *normované prvky* (vzhledem k n).

Každá třída $[a]_\sim$, kde a je prvočinitel, se skládá pouze z prvočinitelů. Prvky $n([a]_\sim)$, kde a je prvočinitel, se nazývají *normovaní prvočinitelé* .

Příklad(y) 4.18. 1) $I = \mathbb{Z}$, $n([a]_\sim) = n(\{\pm a\}) = |a|$.

2) $I = K[x]$, $n(\{0\}) = 0$, $n([p(x)]_\sim) = q(x)$, přičemž $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $q(x) = (1/a_n)p(x)$.

Věta 4.19. *Je-li I Gaussův okruh, $a \in I \setminus E(I)$, $a \neq 0$, potom platí $a = e p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, kde $e \in E(I)$, $p_1, \ldots, p_r$ jsou normovaní navzájem různí prvočinitelé, $e_i \in \mathbb{N}$.*

Lemma 4.20. *Buď I Gaussův okruh, $a, b \in I \setminus \{0\}$, $a = fp_1^{f_1} \cdots p_r^{f_r}$, $b = gp_1^{g_1} \cdots p_r^{g_r}$ (p_j normovaní navzájem různí prvočinitelé, $f_j, g_j \in \mathbb{N}_0$, $f, g \in E(I)$). Potom platí: $a|b \Leftrightarrow f_j \leq g_j$ pro $j = 1, \ldots, r$.*

Důkaz. $a|b \Rightarrow \exists c \in I : b = ac \Rightarrow c = hp_1^{h_1} \cdots p_r^{h_r}$, $h_j \in \mathbb{N}_0$, $h \in E(I)$ (protože I je Gaussův okruh) $\Rightarrow f_j + h_j = g_j$, $j = 1, \ldots, r \Rightarrow f_j \leq g_j$, $j = 1, \ldots, r$.
Obráceně: Je-li $f_j \leq g_j$, $j = 1, \ldots, r$, pak platí pro $h_j := g_j - f_j \in \mathbb{N}_0$, $c := f^{-1}gp_1^{h_1} \cdots p_r^{h_r}$: $ac = b$, tj. $a|b$. □

Věta 4.21. *Buď I Gaussův okruh, $a_1, \ldots, a_n \in I$, $a_i \neq 0$, $a_i = e_i p_1^{e_{1i}} \cdots p_r^{e_{ri}}$, $e_i \in E(I)$, p_j navzájem různí normovaní prvočinitelé, $e_{ji} \in \mathbb{N}_0$. Potom platí:*

$$\mathrm{NSD}(a_1, \ldots, a_n) = p_1^{\min_{1 \leq i \leq n}(e_{1i})} \cdots p_r^{\min_{1 \leq i \leq n}(e_{ri})}$$

a

$$\mathrm{NSN}(a_1, \ldots, a_n) = p_1^{\max_{1 \leq i \leq n}(e_{1i})} \cdots p_r^{\max_{1 \leq i \leq n}(e_{ri})}.$$

Jsou-li některá $a_i = 0$, potom je $\mathrm{NSD}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{NSD}(a_i \mid a_i \neq 0)$; jsou-li všechna $a_i = 0$, potom je $\mathrm{NSD}(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Jsou-li některá $a_i = 0$, pak je $\mathrm{NSN}(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Důkaz. Buď $d := p_1^{\min_{1 \leq i \leq n}(e_{1i})} \cdots p_r^{\min_{1 \leq i \leq n}(e_{ri})}$.
(i) $\min_i(e_{ji}) \leq e_{jk}$ pro všechna $k \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow d|a_k$, $k = 1, \ldots, n$.
(ii) $t|a_k$ pro všechna $k \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow t = fp_1^{f_1} \cdots p_r^{f_r}$, kde $f \in E(I)$, $f_j \leq e_{jk}$, $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r \Rightarrow f_j \leq \min_i(e_{ji})$, $j = 1, \ldots, r \Rightarrow t|d$.
Zvláštní případy (některá nebo všechna $a_i = 0$) jsou triviální.
Tvrzení o NSN se dokáží pododbně jako pro NSD. □

Věta 4.22. *Buď I Gaussův okruh a $\sqcap, \sqcup$ binární operace na $I/\sim = \{[a]_\sim \mid a \in I\}$ definované vztahy*

$$[a]_\sim \sqcap [b]_\sim := [\mathrm{NSD}(a, b)]_\sim, \qquad [a]_\sim \sqcup [b]_\sim := [\mathrm{NSN}(a, b)]_\sim.$$

Potom jsou $\sqcap$ a $\sqcup$ korektně definovány (tj. nezávisle na volbě reprezentantů) a $(I/\sim, \sqcap, \sqcup)$ je svaz s nulovým prvkem $[1]_\sim = E(I)$ a jednotkovým prvkem $[0]_\sim = \{0\}$ („svaz dělitelů“). Příslušné uspořádání $\leq$ je dáno vztahem: $[a]_\sim \leq [b]_\sim :\Leftrightarrow a|b$.

Důkaz. Důkaz této věty plyne snadno z definic. □

Příklad(y) 4.23. $(\mathbb{Z}/\sim, \sqcap, \sqcup) \cong (\mathbb{N}_0, \mathrm{NSD}, \mathrm{NSN})$.

4.3 Okruhy hlavních ideálů

Věta 4.24. *Buď R komutativní okruh s jednotkovým prvkem, $a \in R$, $(a) := \{ar \mid r \in R\}$. Potom je (a) nejmenší ideál okruhu R, který obsahuje a.*

Důkaz. (a) je podokruh okruhu R: $0 = a0 \in (a)$; $ar_1, ar_2 \in (a)$ implikuje $ar_1 + ar_2 = a(r_1 + r_2) \in (a)$ a také $ar_1 \cdot ar_2 = a \cdot (r_1 ar_2) \in (a)$; $-ar_1 = a(-r_1) \in (a)$. (a) je ideál: pro libovolné $r \in R$ je $r(ar_1) = a(rr_1) \in (a)$. Dále je $a = a \cdot 1 \in (a)$. Vzhledem k tomu, že každý ideál, který obsahuje a, musí obsahovat všechna ar, $r \in R$, je (a) nejmenší ideál, který obsahuje a. □

Definice 4.25. (a) se nazývá *hlavní ideál okruhu R generovaný prvkem a.*

Definice 4.26. Obor integrity I se nazývá *okruh hlavních ideálů* $:\Leftrightarrow$ každý ideál oboru integrity I je hlavní ideál.

Příklad(y) 4.27. (1) Každé pole je okruh hlavních ideálů: $\{0\} = (0)$ a $K = (1)$ jsou jediné ideály, protože K je prostý.

2) $\mathbb{Z}$, $K[x]$ (K pole) jsou okruhy hlavních ideálů.

Lemma 4.28. *Buď I obor integrity. Potom platí:*

1) $a|b \Leftrightarrow (a) \supseteq (b)$.

2) $a \sim b \Leftrightarrow (a) = (b)$.

Důkaz. Plyne z definic. □

Definice 4.29. Buď R komutativní okruh s jednotkovým prvkem, $J \lhd R$ (tj. J je ideál okruhu R), $J \neq R$. Potom se J nazývá

1) *maximální ideál* $:\Leftrightarrow (K \lhd R, J \subseteq K \Rightarrow K = J \vee K = R)$,

2) *prvoideál* $:\Leftrightarrow (ab \in J \Rightarrow a \in J \vee b \in J)$.

Věta 4.30. *Buď R komutativní okruh s jednotkovým prvkem a $J \lhd R$. Potom platí:*

a) R/J je pole $\Leftrightarrow$ J je maximální ideál,

b) R/J je obor integrity $\Leftrightarrow$ J je prvoideál.

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek 4.31. *Každý maximální ideál je prvoideál.*

Věta 4.32. *Buď I obor integrity, $p \in I$, $p \neq 0$, $p \notin E(I)$. Potom platí:*

a) (p) je maximální v množině všech hlavních ideálů $\neq I \Leftrightarrow p$ je ireducibilní prvek,

b) (p) je prvoideál $\Leftrightarrow p$ je prvočinitel.

Důkaz. a) $\Rightarrow$: $a|p \Rightarrow (a) \supseteq (p) \Rightarrow (a) = (p) \vee (a) = I = (1) \Rightarrow a \sim p \vee a \sim 1 \Rightarrow p$ je ireducibilní prvek.
$\Leftarrow$: analogicky.

b) $\Rightarrow$: $p|ab \Rightarrow ab \in (p) \Rightarrow a \in (p) \vee b \in (p) \Rightarrow p|a \vee p|b$.
$\Leftarrow$: analogicky. □

Důsledek 4.33. *Buď I okruh hlavních ideálů, $p \in I$, $p \neq 0$, $p \notin E(I)$. Potom platí:*

a) p je ireducibilní prvek $\Leftrightarrow p$ je prvočinitel,

b) $I/(p)$ je pole $\Leftrightarrow p$ je ireducibilní prvek.

Příklad(y) 4.34. $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n)$ je pole $\Leftrightarrow n = \pm p$, p prvočíslo.

Věta 4.35. *Buď I okruh hlavních ideálů, $a_1, \ldots, a_n \in I$. Potom existuje* $\mathrm{NSD}(a_1, \ldots, a_n) =: d$ *a existují prvky $x_1, \ldots, x_n \in I$ takové, že $d = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$.*

Důkaz. Buď $M := \{a_1r_1 + \cdots + a_nr_n \mid r_i \in I\}$. Potom platí $M \lhd I$ (podobně jako pro hlavní ideál (a)). Existuje tedy prvek $d \in I$ takový, že $M = (d)$. Dokážeme, že $d = \mathrm{NSD}(a_1, \ldots, a_n)$: vzhledem k tomu, že $a_1, \ldots, a_n \in M = (d)$, platí $d|a_1, \ldots, d|a_n$; z toho, že $t|a_1, \ldots, t|a_n$, plyne $t|a_1r_1 + \cdots + a_nr_n$, $\forall r_1, \ldots, r_n \in I$, a odtud $t|d$ (neboť $d \in M$). □

Lemma 4.36. (Podmínka klesajících řetězců) *Buď I okruh hlavních ideálů. Potom* každá *posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prvků z I taková, ze pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je prvek a_{n+1} vlastním dělitelem prvku a_n, je konečná.*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje taková posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, která je nekonečná. Potom musí platit $(a_1) \subset (a_2) \subset \ldots \subset (a_n) \subset (a_{n+1}) \subset \ldots$, přičemž všechny inkluze jsou vlastní. Pro $J := \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n)$ pak platí $J \lhd I$ neboť: $0 \in J$; $a, b \in J \Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}$ (bez újmy na obecnosti $n \geq m$): $a \in (a_n)$, $b \in (a_m) \Rightarrow a, b \in (a_n) \Rightarrow a + b, -a, ra \in (a_n)$, $r \in I$, $\Rightarrow a + b, -a, ra \in J$. Tedy existuje prvek $d \in I$ takový, že $J = (d)$. Vzhledem k tomu, že $d \in J$, je $d \in (a_n)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, a proto $(d) \subseteq (a_n) \subseteq (d)$, z čehož plyne $(a_n) = (a_{n+1}) = \ldots$. To je spor s předpokladem! □

Věta 4.37. *Každý okruh hlavních ideálů I je Gaussův okruh.*

Důkaz. Buď $a \in I$, $a \neq 0$, $a \notin E(I)$. Máme dokázat, že a se dá rozložit na prvočinitele prvky. Důkaz provedeme sporem: Nechť neexistuje rozklad prvku a na prvočinitele. Potom a není prvočinitel, a tedy není ireducibilní prvek. Proto existuje netriviální dělitel a_1 prvku a, tj. $a = a_1b_1$, přičemž a_1, b_1 jsou oba vlastní dělitelé (neboť $b_1 \sim a \Rightarrow b_1 = ae$, $e \in E(I)$ $\Rightarrow a = a_1ae \Rightarrow 1 = a_1e \Rightarrow a_1 \in E(I)$, spor!) Jeden z těchto dělitelů (bez újmy na obecnosti nechť je to a_1) nelze rozložit na prvočinitele (jinak by bylo možno rozložit i a). Proto existuje vlastní dělitel a_2 prvku a_1, který rovněž nelze rozložit na prvočinitele. Takovýmto způsobem by bylo možné zkonstruovat nekonečnou posloupnost dělitelů $a, a_1, a_2, \ldots$, což je ve sporu s výše uvedeným lemmatem. □

4.4 Eukleidovy okruhy

Definice 4.38. Obor integrity I se nazývá *Eukleidův okruh* :⇔ existuje zobrazení $H : I \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$ (eukleidovské ohodnocení) s následující vlastností: pro všechna $a \in I \setminus \{0\}$, $b \in I$ existují $q, r \in I$ tak, že $b = aq + r$, kde $r = 0 \vee H(r) < H(a)$ (dělení se zbytkem) .

Příklad(y) 4.39. 1) $\mathbb{Z}$ je Eukleidův okruh, kde $H(a) := |a|$ (viz Lemma 1.82).

2) Každé pole je Eukleidův okruh ($q = a^{-1}b$, $r = 0$).

Věta 4.40. *$K[x]$ (K pole) je Eukleidův okruh, kde $H(p(x)) := \operatorname{grad} p(x)$ pro každé $p(x) \in K[x] - \{0\}$, tj. pro libovolné $p(x), p_1(x) \in K[x]$, $p(x) \neq 0$, existují $q(x), r(x) \in K[x]$ tak, že $p_1(x) = p(x)q(x) + r(x)$, kde $r(x) = 0$ nebo $\operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} p(x)$.*

Důkaz. Buď $p(x) = a_mx^m + \cdots + a_1x + a_0$, $a_m \neq 0$, $m = \operatorname{grad} p(x)$, $p_1(x) = b_nx^n + \cdots + b_1x + b_0$, $n = \operatorname{grad} q(x)$. Je-li $m = 0$, tj. $p(x) = a_0$, pak $q(x) = a_0^{-1}p_1(x)$ a $r(x) = 0$. Pro $n < m$ lze zvolit $q(x) = 0$ a $r(x) = p_1(x)$. Pro $n \geq m$ nechť $p_2(x) := p_1(x) - b_na_m^{-1}x^{n-m}p(x)$. Platí

$p_2(x) = c_k x^k + \cdots + c_1 x + c_0$, kde $k \leq n-1$. Pro $k < m$ lze zvolit $q(x) = b_n a_m^{-1} x^{n-m}$ a $r(x) = p_2(x)$. Pro $k \geq m$ nechť $p_3(x) := p_2(x) - c_k a_m^{-1} x^{k-m} p(x)$. Platí $p_3(x) = d_l x^l + \cdots + d_1 x + d_0$, kde $l \leq k-1$. Pro $l < m$ lze zvolit $q(x) = b_n a_m^{-1} x^{n-m} + c_k a_m^{-1} x^{k-m}$ a $r(x) = p_3(x)$. Pro $l \geq m$ v postupu pokračujeme a po konečném počtu kroků obdržíme polynom $p_t(x)$ takový, že $p_t(x) = 0$ nebo $\operatorname{grad} p_t(x) < m$. □

Důsledek 4.41. *Pro libovolný polynom $p(x) \in K[x]$ a libovolný prvek $a \in K$ existuje $q(x) \in K[x]$ tak, že $p(x) = (x-a)q(x) + p(a)$.*

Důkaz. Buď $p(x) \in K[x]$ a $a \in K$. Podle předchozí věty existuje $q(x) \in K[x]$ a $r \in K$ tak, že $p(x) = (x-a)q(x) + r$. Zřejmě platí $p(a) = r$. □

Poznámka 4.42. Ukážeme způsob, jak určit $q(x)$ a $p(a)$ z předchozího důsledku. Je-li $p(x) = p \in K$, pak $q(x) = 0$ a $p(a) = p$. Nechť tedy $\operatorname{grad} p(x) = n > 0$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Potom zřejmě $\operatorname{grad} q(x) = n-1$. Nechť $q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$. Pak máme $a_n = b_{n-1}$, $a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}$, …, $a_i = b_{i-1} - ab_i$, …, $a_0 = p(a) - ab_0$. Odtud $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{b-1}$, …, $b_{i-1} = a_i + ab_i$, …, $b_0 = a_1 + ab_1$, $p(a) = a_0 + ab_0$. Koeficienty polynomu $q(x)$ a prvek $p(a)$ lze tedy určit pomoí tzv. Hornerova schématu

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
0	ab_{n-1}	ab_{n-2}	…	ab_1	ab_0
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	…	b_0	$p(a)$

Ve schématu se nejprve napíší do prvního řádku koeficienty $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ polynomu $p(x)$. Pak se postupuje zleva po sloupcích tak, že v prvním sloupci se pod a_n napíše do druhého řádku prvek 0 a do třetího řádku součet obou prvků ležících nad ním, tedy a_n. V každém dalším sloupci se do druhého řádku napíše součin prvku a a prvku ze třetího řádku předcházejícího sloupce, do třetího řádku se pak napíše prvek, který je součtem obou prvků ležících nad ním (tedy prvků z prvního a druhého řádku uvažovaného sloupce). Po skončení algoritmu jsou ve třetím řádku schématu koeficienty $b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_0$ následované prvkem $p(a)$ na posledním místě. Je-li tedy tento poslední prvek ve třetím řádku tabulky 0, pak je a kořenem polynomu $p(x)$.

Příklad(y) 4.43. Buď $p(x) = 4x^4 - x^2 + 2x + 5$, $a = -3$. Pomocí Hornerova schématu určíme polynom $q(x)$ a $p(a) \in \mathbb{Z}$ s vlastností $p(x) = (x-a)q(x) + p(a)$:

-3	4	0	-1	2	5
	4	-12	35	-103	314

Tedy $q(x) = 4x^3 - 12x^2 + 35x - 103$, $p(a) = 314$, tj.

$$4x^4 - x^2 + 2x + 5 = (x+3)(4x^3 - 12x^2 + 35x - 103) + 314.$$

Věta 4.44. *Každý Eukleidův okruh je okruhem hlavních ideálů.*

Důkaz. Buď I Eukleidův okruh a $J \lhd I$, $J \neq (0) = \{0\}$. Máme dokázat, že $\exists a \in I : J = (a) = \{aq \mid q \in I\}$. Buď $a \in J \setminus \{0\}$ prvek takový, že $H(a) = \min\{H(x) \mid x \in J \setminus \{0\}\}$. Ukážeme, že potom $J = (a)$. Zřejmě platí $(a) \subseteq J$. Buď naopak $b \in J$. Vzhledem k tomu, že $a \neq 0$, existují $q, r \in I$ tak, že $b = aq + r$ a $r = 0 \vee H(r) < H(a)$. Platí $r = b - aq \in J$ (protože $J \lhd I$), z čehož (vzhledem k minimalitě $H(a)$) plyne $r = 0$, a proto $b = aq \in (a)$. Platí tedy také $J \subseteq (a)$, takže $J = (a)$. □

Důsledek 4.45. *Každý Eukleidův okruh je Gaussův okruh.*

Eukleidův algoritmus pro výpočet NSD v Eukleidových okruzích.

Buď I Eukleidův okruh a $a, b \in I$. Pro $a = b = 0$ je $\mathrm{NSD}(a, b) = 0$. Nechť bez újmy na obecnosti $a \neq 0$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Pak} & \exists q_1, r_1 \in I : b = aq_1 + r_1,\ r_1 = 0 \vee H(r_1) < H(a), \\ \text{pro } r_1 \neq 0 & \Rightarrow & \exists q_2, r_2 \in I : a = r_1 q_2 + r_2,\ r_2 = 0 \vee H(r_2) < H(r_1), \\ \text{pro } r_2 \neq 0 & \Rightarrow & \exists q_3, r_3 \in I : r_1 = r_2 q_3 + r_3,\ r_3 = 0 \vee H(r_3) < H(r_2), \\ & \vdots & \\ \text{obecně:} & & \\ \text{pro } r_i \neq 0 & \Rightarrow & \exists q_{i+1}, r_{i+1} \in I : r_{i-1} = r_i q_{i+1} + r_{i+1},\ r_{i+1} = 0 \vee H(r_{i+1}) < H(r_i). \\ & & \text{(Přitom je třeba dosadit } a = r_0 \text{ a } b = r_{-1}.) \end{array}$$

Po konečném počtu kroků (vzhledem k tomu, že $H(a) = H(r_0) > H(r_1) > H(r_2) > \ldots$) obdržíme k takové, že $r_k = 0$ a $r_{k-1} \neq 0$. Nyní dokážeme, že $r_{k-1} = \mathrm{NSD}(a, b)$. Platí

$$\begin{array}{r} r_{k-2} = r_{k-1}q_k + 0 \Rightarrow r_{k-1} | r_{k-2}, \\ r_{k-3} = r_{k-2}q_{k-1} + r_{k-1} \Rightarrow r_{k-1} | r_{k-3}, \\ r_{k-4} = r_{k-3}q_{k-2} + r_{k-2} \Rightarrow r_{k-1} | r_{k-4}, \\ \vdots \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3 \Rightarrow r_{k-1} | r_1, \\ a = r_1 q_2 + r_2 \Rightarrow r_{k-1} | a, \\ b = aq_1 + r_1 \Rightarrow r_{k-1} | b, \end{array}$$

tedy platí $r_{k-1} | a \wedge r_{k-1} | b$. Pokud pro nějaké t platí $t | a \wedge t | b$, plyne z toho analogicky, že $t | r_1$, $t | r_2$, $t | r_3$, $\ldots$, $t | r_{k-1}$. Tedy $r_{k-1} = \mathrm{NSD}(a, b)$.

Pro okruhy hlavních ideálů (a tedy i pro Eukleidovy okruhy - viz Větu 4.44) podle Věty 4.35 platí, že $\mathrm{NSD}(a, b) = ax + by$, kde $x, y \in I$ (tzv. Bezoutova věta). V Eukleidových okruzích můžeme x, y vypočítat následovně:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{NSD}(a,b) & = r_{k-1} = r_{k-3} + r_{k-2}(-q_{k-1}) = r_{k-3} + (r_{k-4} - r_{k-3}q_{k-2})(-q_{k-1}) = \\ & = r_{k-4}\underbrace{(-q_{k-1})}_{\in I} + r_{k-3}\underbrace{(1 + q_{k-2}q_{k-1})}_{\in I} = \ldots = ax + by. \end{array}$$

Příklad(y) 4.46. Pomocí Eukleidova algoritmu nalezneme $\mathrm{NSD}(84, 245)$ v $\mathbb{Z}$ (místo $b = aq + r$ píšeme $b : a = q(r)$):

1) $245 : 84 = 2(77)$;

2) $84 : 77 = 1(7)$;

3) $77 : 7 = 11(0)$.

Tedy $\mathrm{NSD}(84, 245) = 7$.

Postupným dosazováním za r_2 a r_1 dostaneme $7 = 84 + 77 \cdot (-1) = 84 + (245 - 84 \cdot 2) \cdot (-1) = 84 \cdot 3 + 245 \cdot (-1)$.

Kapitola 5

Teorie polí

5.1 Podílová pole oboru integrity

Budeme potřebovat následující tvrzení, jehož důkaz je snadným cvičením:

Princip izomorfního vnoření. Buďte $\mathcal{A}_1 = (A_1, (\omega_i^{(1)})_{i\in I})$, $\mathcal{A}_2 = (A_2, (\omega_i^{(2)})_{i\in I})$ algebry téhož typu $(n_i)_{i\in I}$ a nechť $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Buď f monomorfizmus algebry $\mathcal{A}_1$ do algebry $\mathcal{A}_2$ a $A := (A_2 \setminus f(A_1)) \cup A_1$. Zobrazení $g : A_2 \to A$ definované vztahem

$$g : \begin{cases} x \mapsto x & \text{pro } x \in A_2 \setminus f(A_1) \\ x \mapsto x_1 & \text{pro } x \in f(A_1) \text{ a } x = f(x_1),\ x_1 \in A_1 \end{cases}$$

je potom korektně definované a bijektivní. Pro $i \in I$ a $n_i > 0$ buď ω_i n_i-ární operace na A definovaná předpisem $\omega_i x_1 \dots x_{n_i} := g(\omega_i^{(2)} g^{-1}(x_1) \dots g^{-1}(x_{n_i}))$, $x_1, \dots, x_{n_i} \in A$ a pro $i \in I$ a $n_i = 0$ buď ω_i nulární operace na A definovaná předpisem $\omega_i := \omega_i^{(1)}$.

Potom je g *izomorfizmus* algebry $\mathcal{A}_2$ na algebru $\mathcal{A} := (A, (\omega_i)_{i\in I})$ a $\mathcal{A}_1$ je *podalgebra* algebry $\mathcal{A}$.

Příklad(y) 5.1. Buď $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ pole reálných čísel a operace $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nechť jsou definovány takto:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Potom je také $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$ pole a zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definované vztahem $f(x) := (x, 0)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je monomorfizmus. Když aplikujeme na tuto situaci princip izomorfního vnoření, obdržíme pole $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ komplexních čísel, které je izomorfní s $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$ a obsahuje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ jako podpole. Podle konstrukce máme $\mathbb{C} := ((\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus f(\mathbb{R})) \cup \mathbb{R}$ a pro $i := (0, 1)$ platí $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Definice 5.2. Buď $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1)$ komutativní monoid. Potom se prvek $a \in M$ nazývá *regulární* (nebo *kratitelný*) $:\Leftrightarrow \forall x, y \in M : ax = ay \Rightarrow x = y$.

Symbolem $R(\mathcal{M})$ se označuje množina všech regulárních prvků monoidu $\mathcal{M}$. Vzhledem k tomu, že $1 \in R(\mathcal{M})$, platí $R(\mathcal{M}) \neq \emptyset$.

V mnoha důležitých případech platí $R(\mathcal{M}) = M$:

Příklad(y) 5.3. *1)* $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, +, 0)$.

2) $\mathcal{M} = (\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$.

3) $\mathcal{M} = (I \setminus \{0\}, \cdot, 1)$, *$I$ obor integrity.*

Nechť $S := M \times R(\mathcal{M}) = \{(a,b) \mid a \in M,\ b \in R(\mathcal{M})\}$ a nechť $\sim$ je na S definováno vztahem

$$(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow ad = bc, \quad a,c \in M,\ b,d \in R(\mathcal{M}).$$

Potom je $\sim$ relace ekvivalence na S (reflexivní, symetrická: zřejmé; tranzitivní: $(a,b) \sim (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow ad = bc \wedge cf = ed \Rightarrow adf = bcf = bed \Rightarrow af = be \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$).

Položme $S/\sim =: S_1$, $[(a,b)]_\sim =: \frac{a}{b}$, $a \in M$, $b \in R(\mathcal{M})$, a definujme

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in S_1.$$

Operace $\cdot$ je na S_1 korektně definována, neboť: 1) $bd \in R(\mathcal{M})$, protože $b,d \in R(\mathcal{M})$, 2) $(a,b) \sim (a_1,b_1) \wedge (c,d) \sim (c_1,d_1) \Rightarrow ab_1 = ba_1 \wedge cd_1 = dc_1 \Rightarrow acb_1d_1 = ab_1cd_1 = ba_1dc_1 = bda_1c_1 \Rightarrow (ac,bd) \sim (a_1c_1,b_1d_1)$. Dále položme $1 := \frac{1}{1}$. Pak $(S_1,\cdot,1)$ je komutativní monoid.

Zobrazení

$$\begin{cases} M \to S_1 \\ a \mapsto \frac{a}{1} \end{cases}$$

je injektivní homomorfizmus (tj. monomorfizmus) monoidu $\mathcal{M}$ do $(S_1,\cdot,1)$. Podle principu izomorfního vnoření tak obdržíme komutativní monoid $\mathcal{T} = (T,\cdot,1) \cong (S_1,\cdot,1)$ takový, že $\mathcal{M}$ je podalgebra algebry $\mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ se nazývá *podílová pologrupa* monoidu $\mathcal{M}$ a má následující vlastnosti:

Věta 5.4.

a) Každé $a \in R(\mathcal{M})$ je v $\mathcal{T}$ invertibilní a má inverzní prvek $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

b) $E(\mathcal{T}) = R(\mathcal{T}) = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in R(\mathcal{M})\}$ a pro $a,b \in R(\mathcal{M})$ platí $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$. Přitom se podobně jako v odstavci 4.1 $E(\mathcal{T})$ definuje jako množina invertibilních prvků monoidu $\mathcal{T}$ (grupa jednotek pologrupy $\mathcal{T}$).

Pro $a \in M$ přitom klademe $a =: \frac{a}{1} =: \frac{ae}{e}$, kde $e \in R(\mathcal{M})$ je libovolné. Podle a) platí

$$T = \{ab^{-1} \mid a \in M,\ b \in R(\mathcal{M})\}.$$

Buď $(R,+,0,-,\cdot,1)$ komutativní okruh s jednotkovým prvkem $1 \neq 0$. Prvek $a \in R$ se nazývá *dělitel nuly* okruhu $R :\Leftrightarrow \exists b \in R \setminus \{0\} : ab = 0$. Potom v komutativním monoidu $\mathcal{M} := (R,\cdot,1)$ platí

$$R(\mathcal{M}) = \{a \in R \mid a \textit{ není} \text{ dělitel nuly okruhu } R\}.$$

Důkaz této rovnosti je snadný: Je-li $a \in R(\mathcal{M})$, pak a není dělitel nuly, neboť v opačném případě by existoval prvek $b \in R$, $b \neq 0$, tak, že $ab = 0 = a0$, což implikuje $b = 0$, tedy bychom dostali spor. Naopak, jestliže $a \in R$ není dělitelem nuly, pak pro libovolné prvky $a,b \in R$ máme $ab = ac \Rightarrow a(b-c) = 0 \Rightarrow b - c = 0 \Rightarrow b = c$.

Při výše uvedeném označení tedy platí $S_1 = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in R,\ b \text{ není dělitel nuly}\}$ a na S_1 můžeme definovat další operace:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd} \quad a,b,c,d \in R,\ b,d \text{ nejsou dělitelé nuly},$$

$$0 := \frac{0}{1},$$

$$-\frac{a}{b} := \frac{-a}{b} \qquad a,b \in R,\ b \text{ není dělitel nuly}.$$

Dá se snadno ukázat, že také tyto operace jsou korektně definovány.

Zobrazení

$$\begin{cases} R \to S_1 \\ a \mapsto \frac{a}{1} \end{cases}$$

je monomorfizmus okruhu $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ do $(S_1, +, 0, -, \cdot, 1)$, a S_1 je opět komutativní okruh s jednotkovým prvkem. Podle principu izomorfního vnoření tak obdržíme komutativní okruh s jednotkovým prvkem $(T, +, 0, -, \cdot, 1) \cong (S_1, +, 0, -, \cdot, 1)$ s následujícími vlastnostmi:

Věta 5.5.

a) $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ *je podalgebra algebry* $(T, +, 0, -, \cdot, 1)$.

b) Každé $a \in R$*, které není dělitelem nuly, je v* T *invertibilní a má inverzní prvek* $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

c) $T = \{ab^{-1} \mid a, b \in R, b \text{ není dělitel nuly}\}$.

d) V $(T, \cdot, 1)$ *jsou invertibilní právě takové* $\frac{a}{b}$*, kde ani jeden z prvků* a, b *není dělitelem nuly, a pak platí* $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

Speciální případ: Je-li R obor integrity, potom je $(T, +, 0, -, \cdot, 1)$ pole a nazývá se *podílové pole* oboru integrity R.

Příklad(y) 5.6. 1) Podílová pologrupa monoidu $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ je izomorfní s $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

2) Podílové pole oboru integrity $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot, 1)$ je izomorfní s $(\mathbb{Q}, +, 0, -, \cdot, 1)$.

3) Je-li K pole, potom se podílové pole pole K rovná poli K.

4) Podílové pole okruhu $K[x_1, \ldots, x_n]$ (kde K je pole) se nazývá *pole racionálních funkcí proměnných* $x_1, \ldots, x_n$ *nad* K a označuje se $K(x_1, \ldots, x_n)$. Platí

$$K(x_1, \ldots, x_n) = \{\frac{p(x_1, \ldots, x_n)}{q(x_1, \ldots, x_n)} \mid p, q \in K[x_1, \ldots, x_n],\ q \neq 0\},$$

speciálně

$$K(x) = \{\frac{p(x)}{q(x)} \mid p, q \in K[x],\ q \neq 0\}.$$

5.2 Minimální pole

Definice 5.7. Pole $(K, +, 0, -, \cdot, 1)$ se nazývá *minimální* , pokud nemá žádná jiná podpole než sebe sama.

Věta 5.8. *Každé pole má vždy jediné podpole, které je minimální.*

Důkaz. Buď L libovolné pole a $K := \bigcap\{M \subseteq L \mid M \text{ je podpole pole } L\}$, tj. K je nejmenší podpole pole L. Zřejmě je K jediné minimální podpole pole K. □

Jak plyne z předchozí věty, minimální podpole je nejmenší podpole vzhledem k inkluzi. Buď $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ okruh s jednotkovým prvkem a pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$ položme

$$n \cdot 1 := \begin{cases} \overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\text{–krát}}, & \text{pokud } n > 0, \\ 0, & \text{pokud } n = 0, \\ \underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{|n|\text{–krát}}, & \text{pokud } n < 0. \end{cases}$$

Potom $\{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ je (cyklická) podgrupa grupy $(R, +, 0, -)$ generovaná prvkem 1 (neboť pro libovolné $m, n \in \mathbb{Z}$ máme $n \cdot 1 + m \cdot 1 = (n+m) \cdot 1$ - srovnej s počítáním mocnin v grupách, Věta 1.76). Platí dokonce:

Lemma 5.9. *Buď $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ okruh s jednotkovým prvkem. Pak $\{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ je komutativní podokruh okruhu R s tímtéž jednotkovým prvkem 1, totiž podokruh generovaný prvkem 1.*

Důkaz. Pro libovolné $n, m \in \mathbb{Z}$, $n, m > 0$, je $(n \cdot 1)(m \cdot 1) = (\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{–krát}})(\underbrace{1+\cdots+1}_{m\text{–krát}}) = \underbrace{1 \cdot 1 + \cdots + 1 \cdot 1}_{nm\text{–krát}} = \underbrace{1+\cdots+1}_{nm\text{–krát}} = (nm) \cdot 1$. Samozřejmě platí $1 \in \{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ a také je zřejmé, že operace $\cdot$ je na $\{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ komutativní. □

Definice 5.10. Buď $(R, +, 0, -, \cdot)$ okruh. Pak symbolem $\operatorname{char} R$ označíme *charakteristiku okruhu R*, tj. nejmenší číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $a \in R$ platí $n \cdot a = 0$ (kde $n \cdot a := \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{–krát}}$). Pokud takové číslo neexistuje, pak klademe $\operatorname{char} R = 0$.

Je-li $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ okruh s jednotkovým prvkem a $n \in \mathbb{N}$, pak pro každé $a \in R$ platí $n \cdot a = 0$, právě když platí $n \cdot 1 = 0$ (platí-li $n \cdot 1 = 0$ a je-li $a \in R$ libovolný prvek, pak máme $n \cdot a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{–krát}} = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{–krát}}) \cdot a = (n \cdot 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$; opačná implikace je zřejmá.) Je-li tedy R okruh s jednotkovým prvkem 1, pak $\operatorname{char} R$ je nejmenší číslo $n \in \mathbb{N}$, pro něž platí $n \cdot 1 = 0$, případně $\operatorname{char} R = 0$, pokud takové číslo neexistuje. Odtud ihned plyne, že platí

$$\operatorname{char} R = \begin{cases} \mathrm{o}(1), & \text{pokud } \mathrm{o}(1) \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{pokud } \mathrm{o}(1) = \infty. \end{cases}$$

Připomeňme, že $\mathrm{o}(1)$ značí řád prvku 1 v abelovské grupě $(R, +)$ (viz odstavec 1.3), tedy $\mathrm{o}(1) = |\{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}|$ pokud je tato kardinalita konečná, jinak $\mathrm{o}(1) = \infty$. Dostáváme tedy následující tvrzení:

Důsledek 5.11. *Buď $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ okruh s jednotkovým prvkem. Potom platí*

$$\operatorname{char} R = \begin{cases} |\{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}|, & \textit{pokud se jedná o konečnou kardinalitu,} \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Příklad(y) 5.12. 1) Pro okruh zbytkových tříd $(\mathbb{Z}_n, +, 0, -, \cdot, 1)$ platí $\operatorname{char} \mathbb{Z}_n = n$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

2) $\operatorname{char} \mathbb{Z} = \operatorname{char} \mathbb{Q} = \operatorname{char} \mathbb{R} = \operatorname{char} \mathbb{C} = 0$.

Následující dvě lemmata uvádíme bez důkazů:

Lemma 5.13. *Buď $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ okruh s jednotkovým prvkem a nechť $m = \operatorname{char} R$. Potom $\{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}_m$.*

Lemma 5.14. *1) Je-li R obor integrity a $m = \operatorname{char} R$, potom také $\{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$, a tedy i $\mathbb{Z}_m$, je obor integrity, takže platí $m = 0$ nebo $m \in \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ značí mmnožinu všech prvočísel).*

2) Je-li R obor integrity a $\operatorname{char} R \in \mathbb{P}$, potom $\{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ je pole.

Věta 5.15. *Buď $(K, +, 0, -, \cdot, 1)$ pole takové, že $\operatorname{char} K \in \mathbb{P}$. Potom $\{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ je minimální podpole pole K. V tomto případě tedy platí: minimální podpole pole K je izomorfní se $\mathbb{Z}_m$, kde $m = \operatorname{char} K$.*

Důkaz. Plyne bezprostředně z předchozích dvou lemmat. □

Věta 5.16. *Buď $(K, +, 0, -, \cdot, 1)$ pole, kde $\operatorname{char} K = 0$. Potom je $\{\frac{n\cdot 1}{m\cdot 1} \mid n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ nejmenším podpolem a tudíž minimálním podpolem pole K. Toto minimální podpole je izomorfní s $\mathbb{Q}$. Přitom jsme položili $\frac{n\cdot 1}{m\cdot 1} := (n \cdot 1)(m \cdot 1)^{-1}$.*

Důkaz. Buď L podpole pole K. Potom platí: $1 \in L \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} : n \cdot 1 \in L \Rightarrow \forall n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 : \frac{n\cdot 1}{m\cdot 1} \in L \Rightarrow P := \{\frac{n\cdot 1}{m\cdot 1} \mid n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \subseteq L$.
Ukážeme nyní, že zobrazení $\varphi : \mathbb{Q} \to P$, $\frac{n}{m} \mapsto \frac{n\cdot 1}{m\cdot 1}$, je korektně definováno a je izomorfizmus.
φ je korektně definováno a je bijektivní: $\frac{n\cdot 1}{m\cdot 1} = \frac{p\cdot 1}{q\cdot 1} \Leftrightarrow (n \cdot 1)(m \cdot 1)^{-1} = (p \cdot 1)(q \cdot 1)^{-1} \Leftrightarrow (n \cdot 1)(q \cdot 1) = (m \cdot 1)(p \cdot 1) \Leftrightarrow (nq) \cdot 1 = (mp) \cdot 1 \Leftrightarrow nq = mp \Leftrightarrow \frac{n}{m} = \frac{p}{q}$.
φ je homomorfizmus: $\varphi(\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q}) = \varphi(\frac{np}{mq}) = \frac{(np)\cdot 1}{(mq)\cdot 1} = \frac{(n\cdot 1)(p\cdot 1)}{(m\cdot 1)(q\cdot 1)} = \frac{(n\cdot 1)}{(m\cdot 1)} \cdot \frac{(p\cdot 1)}{(q\cdot 1)} = \varphi(\frac{n}{m})\varphi(\frac{p}{q})$; analogicky se dokáže, že platí $\varphi(\frac{n}{m} + \frac{p}{q}) = \varphi(\frac{n}{m}) + \varphi(\frac{p}{q})$. Rovnosti $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(1) = 1$ jsou zřejmé. □

Důsledek 5.17. *Každé minimální pole je izomorfní se $\mathbb{Z}_p$ ($p \in \mathbb{P}$) nebo $\mathbb{Q}$.*

Věta 5.18. *Buď $(K, +, 0, -, \cdot, 1)$ pole takové, že $\operatorname{char} K = p \in \mathbb{P}$. Potom platí pro všechna $a, b \in K$:*

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

Důkaz. Platí

$$(a + b)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} a^i b^{p-i} = b^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^i b^{p-i} + a^p.$$

Pro $i = 1, \ldots, p-1$ platí $p | \binom{p}{i}$ (vzhledem k tomu, že $\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{1\cdot 2\cdots i} \in \mathbb{Z}$). Proto je $\binom{p}{i} a^i b^{p-i} = 0$ pro $1 \leq i \leq p-1$. □

Důsledek 5.19. *Pro každé $a, b \in K$ a $k \in \mathbb{N}$ platí*

$$(a + b)^{p^k} = a^{p^k} + b^{p^k}.$$

5.3 Rozšíření pole

Definice 5.20. Buďte K, L pole a K podpole pole L. Potom se L nazývá *nadpole* nebo *rozšíření* pole K.

Problém: Je dáno pole K, $f(x) \in K[x]$, $f(x) \neq 0$, $\operatorname{grad} f(x) = n$. Je třeba najít rozšíření L pole K, ve kterém má $f(x)$ právě n kořenů (včetně násobností), tj. ve kterém platí $f(x) = c(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$, kde $\alpha_1, ..., \alpha_n \in L$. Jinými slovy, $f(x)$ lze rozložit v L na lineární činitele. Takové pole L se nazývá *kořenové pole* polynomu $f(x)$ vzhledem ke K.

Buď L kořenové pole polynomu $f(x)$ vzhledem ke K. Potom je

$$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \bigcap \{M \subseteq L \mid M \text{ podpole pole } L,\ K \subseteq M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M\}$$

nejmenší podpole pole L, které obsahuje pole K a prvky $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se nazývá *rozkladové pole* polynomu $f(x)$ vzhledem ke K. Tedy rozkladové pole polynomu $f(x)$ je minimální kořenové pole tohoto polynomu.

Věta 5.21. (Kroneckerova věta) *Ke každému $f(x) \in K[x]$, $f(x) \neq 0$, existuje kořenové pole a tedy také rozkladové pole polynomu $f(x)$ vzhledem ke K.*

Důkaz této věty je poněkud zdlouhavý, proto jej neuvádíme.

Je-li L nadpole pole K, potom je L také vektorovým prostorem nad K s operacemi

$$\begin{aligned} a + b &\ldots \text{součet v } L\ (a, b \in L), \\ \lambda a &\ldots \text{součin v } L\ (a \in L, \lambda \in K). \end{aligned}$$

Existuje proto báze vektorového prostoru L nad K. Vztahem $\dim_K L =: [L : K]$ definujeme tzv. *stupeň rozšíření L pole K* . Je-li $[L : K] < \infty$, pak se L nazývá *konečné rozšíření* pole K.

Poznámka 5.22. 1) $[L : K] = 1 \Leftrightarrow L = K$.

2) Je-li $p(x) \in K[x]$ ireducibilní polynom stupně k, pak existuje rozšíření L pole K a prvek $\alpha \in L$ tak, že $p(\alpha) = 0$ a $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{k-1}\}$ je báze L nad K. Tedy platí $[L : K] = k$.

Definice 5.23. Buď L nadpole pole K a $\alpha \in L$. α se nazývá *algebraický* prvek nad K $:\Leftrightarrow \exists f(x) \in K[x] \setminus \{0\} : f(\alpha) = 0$. α se nazývá *transcendentní* prvek nad K $:\Leftrightarrow \nexists f(x) \in K[x] \setminus \{0\} : f(\alpha) = 0$.

Příklad(y) 5.24. 1) $\sqrt{2}$ je algebraický prvek nad $\mathbb{Q}$ ($f(x) = x^2 - 2$, $L = \mathbb{R}$).

2) $\sqrt[3]{3}$ je algebraický prvek nad $\mathbb{Q}$ ($f(x) = x^3 - 3$, $L = \mathbb{R}$).

3) i je algebraický prvek nad $\mathbb{R}$ ($f(x) = x^2 + 1$, $L = \mathbb{C}$).

4) e, π jsou transcendentní prvky nad $\mathbb{Q}$ (bez důkazu).

Definice 5.25. Je-li L nadpole pole K a $S \subseteq L$ podmnožina, pak definujeme *rozšíření* $K(S)$ pole K takto:

$$K(S) := \bigcap \{E \subseteq L \mid E \text{ je podpole pole } L, \text{ které obsahuje } K \cup S\}.$$

Je-li $S = \{u_1, \ldots, u_r\}$ konečná množina, pak píšeme $K(S) =: K(u_1, \ldots, u_r)$. Je-li speciálně $S = \{\alpha\}$ jednoprvkové, pak píšeme $K(S) =: K(\alpha)$ („jednoduché rozšíření“ pole K) .

Jednoduchá rozšíření $K(\alpha)$, $\alpha \in L \supseteq K$**.**

1. případ: Je-li α transcendentní prvek nad K, pak $K(\alpha) \cong K(x)$, kde $K(x)$ je tzv. *pole racionálních funkcí nad* K, tj. pole

$$K(x) = \{\frac{p(x)}{q(x)} \mid p(x), q(x) \in K[x],\ q(x) \neq 0\}$$

s obvyklými operacemi sčítání a násobení zlomků. Izomorfizmus je dán vztahem $\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} \leftrightarrow \frac{p(x)}{q(x)}$. Protože mocniny α^n jsou lineárně nezávislé, platí $[K(\alpha) : K] = \infty$.

2. případ: Je-li α algebraický prvek nad K, pak $K(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{k-1}\alpha^{k-1} \mid a_i \in K\}$, kde k je stupeň tzv. *minimálního polynomu* kořene α vzhledem ke K, tedy polynomu $f(x)$ nejmenšího stupně nad K, který má kořen α (takže je ireducibilní). Přitom se obecně předpokládá, že $f(x)$ je normovaný (a pak je jednoznačně určen). Platí $[K(\alpha) : K] = k$ a báze vektorového prostoru $K(\alpha)$ je množina $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{k-1}\}$ - viz poznámku 5.22 2).

Příklad(y) 5.26. 1) Pro $\alpha \in K$ je $x - \alpha$ minimální polynom kořene α vzhledem ke K.

2) $x^2 - 2$ je minimální polynom kořene $\sqrt{2}$ vzhledem ke $\mathbb{Q}$.

3) $x^3 - 3$ je minimální polynom kořene $\sqrt[3]{3}$ vzhledem ke $\mathbb{Q}$.

4) $x^2 + 1$ je minimální polynom kořene i vzhledem ke $\mathbb{R}$.

5.4 Konečná (Galoisova) pole

Buď K konečné pole. Potom podle Lemmatu 5.14 a Důsledku 5.11 platí $\operatorname{char} K = p \in \mathbb{P}$ a minimální podpole P pole K je izomorfní se $\mathbb{Z}_p$ (viz Větu 5.15). Protože K je vektorový prostor nad podpolem P, existuje báze $\{a_1, \ldots, a_n\}$ vektorového prostoru K nad P ($[K : P] = n \in \mathbb{N}$). Proto platí $K = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid \lambda_i \in P\}$ a $|K| = p^n$, neboť každý koeficient λ_i lze zvolit $|P| = p$ způsoby.

Otázka: Existuje při daném $p \in \mathbb{P}$ a $n \in \mathbb{N}$ pole K takové, že $|K| = p^n$?

Odpověď na tuto otázku dává následující věta, kterou uvádíme bez důkazu.

Věta 5.27. *Řád každého konečného pole je mocnina prvočísla* p^n *(*$p \in \mathbb{P}$*,* $n \in \mathbb{N}$*). Obráceně, ke každé mocnině prvočísla* p^n *existuje až na izomorfizmus jediné pole* K *takové, že* $|K| = p^n$*.*

Způsob zápisu pro K, kde $|K| = p^n$: $K = \mathrm{GF}(p^n)$ (*Galoisovo pole*) .

Věta 5.28. *Je-li* K *konečné pole, pak je grupa* $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ *cyklická.*

Důkaz. Buď $a \in K \setminus \{0\}$ prvek maximálního řádu r. Musíme dokázat, že $r = p^n - 1$ (přičemž $|K| = p^n$). Buď $b \in K \setminus \{0\}$ libovolné, $\mathrm{o}(b) = s$. Uvažujme rozklady na prvočíselné činitele r a s: $r = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$, $s = p_1^{f_1} \cdots p_k^{f_k}$. Máme

$$\mathrm{NSN}(r,s) \quad = \quad \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max(e_i,f_i)} \quad = \quad \underbrace{p_1^{e_1} \cdots p_j^{e_j}}_{=:\,\tilde{r}} \underbrace{p_{j+1}^{f_{j+1}} \cdots p_k^{f_k}}_{=:\,\tilde{s}}, \qquad 1 \le j \le k.$$

Přitom platí $\mathrm{NSD}(\tilde{r},\tilde{s}) = 1$ a $\mathrm{NSN}(\tilde{r},\tilde{s}) = \tilde{r}\tilde{s} = \mathrm{NSN}(r,s)$. Buď $\tilde{a} := a^{r/\tilde{r}}$ a $\tilde{b} := b^{s/\tilde{s}}$. Potom $\mathrm{o}(\tilde{a}) = \tilde{r}$ (neboť $\tilde{a}^{\tilde{r}} = a^r = 1$ a $\mathrm{o}(a) = r$) a $\mathrm{o}(\tilde{b}) = \tilde{s}$ (analogicky).

Ukážeme nyní, že $\mathrm{o}(\tilde{a}\tilde{b}) = \tilde{r}\tilde{s} = \mathrm{o}(\tilde{a})\mathrm{o}(\tilde{b})$. Vzhledem k tomu, že $(\tilde{a}\tilde{b})^{\tilde{r}\tilde{s}} = (\tilde{a}^{\tilde{r}})^{\tilde{s}}(\tilde{b}^{\tilde{s}})^{\tilde{r}} = 1 \cdot 1 = 1$ platí $\mathrm{o}(\tilde{a}\tilde{b}) | \tilde{r}\tilde{s}$. Dále platí: $(\tilde{a}\tilde{b})^m = 1$ pro $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \tilde{a}^m = \tilde{b}^{-m} \Rightarrow 1 = \tilde{a}^{m\tilde{r}} = \tilde{b}^{-m\tilde{r}} \Rightarrow \mathrm{o}(\tilde{b}) = \tilde{s} \,|\, -m\tilde{r} \Rightarrow \tilde{s} | m$. Analogicky: $\tilde{r} | m$. Z $\mathrm{NSD}(\tilde{r},\tilde{s}) = 1$ tedy plyne $\tilde{r}\tilde{s} | m$.

Platí tedy $\mathrm{o}(\tilde{a}\tilde{b}) = \tilde{r}\tilde{s} = \mathrm{NSN}(r,s) = \frac{rs}{\mathrm{NSD}(r,s)} \le r$, protože r je maximální. Odtud obdržíme $s \le \mathrm{NSD}(r,s) \Rightarrow s = \mathrm{NSD}(r,s) \Rightarrow s | r$. Protože b bylo libovolné, platí $b^r = 1$ pro všechna $b \in K \setminus \{0\}$. Proto polynom $f(x) = x^r - 1 \in K[x]$ má $p^n - 1$ kořenů, takže platí $p^n - 1 \le r$. Zřejmě platí $r | p^n - 1$, tedy $r \le p^n - 1$. Odtud plyne $r = p^n - 1$. □

Nyní se budeme zabývat problémem zkonstruování konečného pole K, kde $|K| = p^n$ pro daná čísla $p \in \mathbb{P}$ a $n \in \mathbb{N}$, tedy Galoisova pole $K{=}\mathrm{GF}(p^n)$.

Každý generátor cyklické grupy $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ se nazývá *primitivní prvek* K. Je-li α primitivní prvek K, pak $K = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{|K|-2}\}$. Buď $\mathbb{Z}_q$, $q \in \mathbb{P}$, minimální podpole pole K (tedy $q = \mathrm{char}\ K$). Pak pro libovolný primitivní prvek α z K platí $K = \mathbb{Z}_q(\alpha)$ a α je algebraický prvek nad $\mathbb{Z}_q$ (neboť je kořenem polynomu $x^{|K|-1} - 1 \in \mathbb{Z}_q[x]$). Buď $f(x)$ minimální polynom kořene α vzhledem k $\mathbb{Z}_q$. Potom je $f(x)$ ireducibilní a platí

$$\mathbb{Z}_q(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{m-1}\alpha^{m-1} \mid a_i \in \mathbb{Z}_q\},$$

kde $m = \mathrm{grad}\, f(x)$. Odtud stáváme $|\mathbb{Z}_q(\alpha)| = q^m$ a z podmínky $|\mathbb{Z}_q(\alpha)| = |K| = p^n$ nyní vyplývá $q = p$ a $m = n$.

Při určování konečného pole $K{=}\mathrm{GF}(p^n)$, tj. při sestavování tabulek jeho operací, lze proto postupovat následujícím způsobem:

1) Za minimální podpole pole K se vezme $\mathbb{Z}_p$.

2) Zvolíme normovaný ireducibilní polynom $q(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ stupně n. Nechť např. $q(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$, kde $a_i \in \mathbb{Z}_p$.

3) Položíme $q(\alpha) = 0$ a uvažujeme bázi $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ vektorového prostoru $\mathrm{GF}(p^n)$ nad $\mathbb{Z}_p$ (víme, že $[\mathrm{GF}(p^n) : \mathbb{Z}_p] = n$). Spočítáme použitím $q(\alpha) = 0$ (tj. $\alpha^n = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$) mocniny α. Platí-li $\alpha^{p^n-1} = 1$ a $\alpha^j \ne 1$ pro $1 \le j < p^n - 1$, je α primitivní prvek $\mathrm{GF}(p^n)$. Jinak učiníme další pokus s novým polynomem $q(x)$.

Příklad(y) 5.29. Určení $\mathrm{GF}(9) = \mathrm{GF}(3^2)$: Vezmeme $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ jako minimální podpole pole $\mathrm{GF}(3^2)$. Polynom $x^2 - x - 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ je ireducibilní, protože nemá v $\mathbb{Z}_3$ žádný kořen.

Položíme $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, tedy máme $\alpha^2 = \alpha + 1$, a uvažujeme bázi $\{1, \alpha\}$ vektorového prostoru $\mathrm{GF}(3^2)$ nad $\mathbb{Z}_3$. Spočítáme nyní prvky GF(9) i s jejich souřadnicemi v bázi $\{1, \alpha\}$:

Prvky	Vyjádření v souřadnicích
0	$(0,0)$
$\alpha^0 = 1$	$(1,0)$
$\alpha^1 = \alpha$	$(0,1)$
$\alpha^2 = 1 + \alpha$	$(1,1)$
$\alpha^3 = 1 + 2\alpha$	$(1,2)$
$\alpha^4 = 2$	$(2,0)$
$\alpha^5 = 2\alpha$	$(0,2)$
$\alpha^6 = 2 + 2\alpha$	$(2,2)$
$\alpha^7 = 2 + \alpha$	$(2,1)$
$\alpha^8 = 1$	$(1,0)$

Mocniny α^j, $0 \leq j < 8$, jsou navzájem různé, tedy je α primitivní prvek GF(9). Můžeme proto sestavit tabulku operací pole GF(9), jehož prvky jsou $0, 1, \alpha, \alpha^2, ...\alpha^7$.
Sčítání: prvky chápeme jako vektory (vzhledem k bázi $\{1, \alpha\}$ a sčítáme po souřadnicích, např.

$$\begin{array}{ccccc} \alpha^2 & + & \alpha^4 & = & \alpha \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ (1,1) & + & (2,0) & = & (0,1). \end{array}$$

Násobení: $0 \cdot \alpha^i = 0$ a, protože α generuje cyklickou grupu $(\{1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^7\}, \cdot)$, máme $\alpha^i \alpha^j = \alpha^{(i+j) \bmod 8}$.

Poznámka 5.30. Konečná pole mají moho důležitých aplikací. Např. v kryptografii jsou používána při symetrickém šifrování, kdy vysílající i přijímající osoby znají společný šifrovací klíč. Zde se totiž často uplatňuje bloková šifra zvaná Advanced Encryption Standard (AES), která je založena na tom, že kódovaný binární text rozdělíme na slova (bloky) o např. 8 bitech. Ty pak zašifrujeme pomocí klíče tak, že dešifrování lze snadno provést pouze se znalostí toho samého klíče. Přitom operaces s 8-mi bitovými slovy chápeme jako aritmetické operace v konečném poli $GF(2^8)$ (pole $GF(2^n)$, $n \in \mathbb{N}$, nazýváme *binárními poli*). Dalším velmi rozšířeným druhem šifrování založeným na využití konečných polích je šifrování pomocí eliptických křivek, které jsou uvažovány právě nad konečnými poli. Podrobněji se nyní zmíníme o známé aplikaci konečných polí v kombinatorice.

Definice 5.31. *Latinským čtvercem A* řádu n ($n \in \mathbb{N}$) rozumíme čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n tvořenou n-prvkovou množinou symbolů tak, že každý řádek a každý sloupec této matice obsahuje všechny symboly (právě jednou).

Například tabulka binární operace libovolné grupy konečného řádu n je latinským čtvercem - viz Poznámku 1.23.

Definice 5.32. Dva latinské čtverce $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ řádu n se nazývají *ortogonální*, jestliže pro libovolná $i, j, k, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j, k, l \leq n$, z rovností $a_{ij} = a_{kl}$ a $b_{ij} = b_{kl}$ plyne $i = k$ a $j = l$ (to znamená, že žádné dva symboly a a b, které se vyskytují na stejných pozicích v maticích A a B (a v A a b v B), se nemohou vyskytovat na jiných stejných pozicích v těchto maticích).

Věta 5.33. *Pro libovolné číslo q, které je mocninou prvočísla (s přirozeným exponentem) existuje $q-1$ ortogonálních latinských čtverců řádu q.*

Důkaz. Protože $q = p^n$, kde p je prvočíslo a $n \in \mathbb{N}$, podle Věty 5.27 víme, že existuje konečné pole $K = GF(q)$ o q prvcích. Označme prvky pole K jako $0, 1, ..., q-1$. Pro každý nenulový prvek $x \in K$ definujme čtvercovou matici $M^x = (m^x_{ij})$ řádu q vztahem $m^x_{ij} = xi+j$ (počítáme v K). Počet těchto matic je $q-1$ a lze snadno ověřit, že každá z nich je latinským čtvercem. Ukážeme, že pro libovolná $x, y \in K - \{0\}$, $x \neq y$, jsou M^x a M^y ortogonální. Nechť proto $i, j, k, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j, k, l \leq q$, a nechť $m^x_{ij} = m^x_{kl}$ a $m^y_{ij} = m^y_{kl}$. Pak $xi + j = xk + l$ a $yi + j = yk + l$. Odečtením druhé rovnice od první dostaneme $(x - y)i = (x - y)k$, takže máme $i = k$. Odtud dosazením do jedné z obou rovnic dostáváme také $j = k$. Tím je důkaz hotov. □

Tvrzení Věty 5.33 neplatí, pokud q není mocnina prvočísla. V tomto případě problém určení počtu ortogonálních latinských čtverců řádu q není pro $q \geq 10$ dosud vyřešen (ví se pouze, že existují nejméně dva ortogonální latinské čtverce řádu 10). Je dobře známo, že neexistují dva ortogonální latinské čtverce řádu 6, což dává negativní odpověď na známý Eulerův problém: Každý z 6 pluků má 6 důstojníků o 6 různých hodnostech. Může být všech 36 důstojníků rozestavěno do čtverce 6 krát 6 důstojníků tak, aby v každé řadě i v každém sloupci se vyskytl důstojník z každého pluku s každou z různých hodností?

Cvičení

1. Buď $(A, \circ)$ algebra typu (2) taková, že platí:

   a) $\circ$ je asociativní,

   b) existuje levý jednotkový prvek e,

   c) ke každému $x \in A$ existuje $y \in A$ takové, že $y \circ x = e$.

   Dokažte, že potom je e jednotkovým prvkem a každé $x \in A$ je invertibilní.

2. Buď M libovolná množina, $\circ$ binární operace skládání funkcí definovaná na M^M a $f \in M^M$. Dokažte:

   a) $\circ$ je asociativní.

   b) id_M je jednotkový prvek vzhledem k $\circ$.

   c) f je injektivní $\Leftrightarrow$ f má levý inverzní prvek.

   d) f je surjektivní $\Leftrightarrow$ f má pravý inverzní prvek.

   e) f je bijektivní $\Leftrightarrow$ f je invertibilní.

3. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro která je operace daná vztahem

$$x \circ y = ax + by \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

   asociativní na $\mathbb{R}$.

4. Buď A množina všech čtvercových matic řádu 2 tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{Z}.$$

   Dokažte, že A tvoří vzhledem k násobení matic pologrupu, ve které existuje nekonečně mnoho levých jednotkových prvků, ale ani jeden pravý jednotkový prvek.

5. Uveďte všechny binární operace na $A = \{a, b\}$ a zjistěte, zda jsou komutativní, asociativní, invertibilní a zda pro ně existuje pravý (levý) jednotkový prvek.

6. Uveďte všechny binární operace $\circ$ na $A = \{a, b, c\}$ takové, že $\circ$ je komutativní a a je jednotkový prvek, a prozkoumejte, zda jsou asociativní a regulární.

7. Je možno následující tabulku operací doplnit tak, že $\circ$ se stane asociativní binární operací na $A = \{a, b, c, d\}$?

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	c	d
d				

8. Dokažte, že symetrická diference $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ považovaná za binární operaci na potenční množině $\mathcal{P}(M)$ je asociativní, komutativní a invertibilní.

9. Buď A množina se dvěma binárními operacemi + a $\cdot$. Buď přitom $\cdot$ distributivní nad + a nechť existuje jednotkový prvek pro $\cdot$. Nechť je + asociativní operace s krácením. Dokažte, že z toho plyne komutativita operace +.

10. Sestavte pro množinu D_3 všech pokrývajících zobrazení rovnostranného trojúhelníka, která se skládá ze tří otočení o 0°, 120° resp. 240° a tří symetrií podle os trojúhelníka, tabulku pro operaci $\circ$ skládání zobrazení. Existuje jednotkový prvek vzhledem k $\circ$? Pokud ano, které prvky jsou invertibilní?

11. Dokažte: Je-li $(H, \cdot)$ pologrupa, potom platí pro $a_1, \ldots, a_n \in H$, $n \geq 3$, a $r, s \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r < s \leq n$:
$$a_1 \cdots a_n = a_1 \cdots a_r (a_{r+1} \cdots a_s) a_{s+1} \cdots a_n.$$

12. Dokažte sestavením tabulky operace, že všechny grupy s nejvýše čtyřmi prvky jsou komutativní.

13. Buď $(H, \circ)$ konečný grupoid. Dokažte: $\circ$ je operace s krácením $\Leftrightarrow$ každý prvek $x \in H$ je invertibilní.

14. Dokažte, že $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \circ)$, kde
$$a \circ b := a + b + ab,$$
tvoří abelovskou grupu.

15. Buď M množina a $S_M := \{f \in M^M \mid f \text{ bijektivní}\}$. Dokažte, že $(S_M, \circ)$ tvoří grupu, a vytvořte pro $M = \{1, 2, 3\}$ tabulku operace S_M.

16. Definujme na $\{e, a, b, c, d, f\}$ grupovou operaci $\cdot$ tak, že e se stane jednotkovým prvkem a platí vztahy $a^2 = b^3 = e$ a $ab = b^2a$. Kterou známou grupu tak dostaneme (až na označení prvků)?

17. Buď $A := \{r + s\sqrt{p} \mid r, s \in \mathbb{Q},\ r^2 + s^2 \neq 0\}$ pro pevné prvočíslo p. Dokažte, že A spolu s obvyklým násobením tvoří grupu.

18. Buď $(H, \cdot, e)$ monoid a $G := \{x \in H \mid x \text{ invertibilní}\}$. Dokažte, že zúžení $\cdot$ na $G \times G$ je binární operace na G a $(G, \cdot)$ je grupa.

19. Buď m pevné přirozené číslo a $\mathbb{Z}_m := \{0, 1, \ldots, m-1\}$. V $\mathbb{Z}_m$ buď definována binární operace $\oplus$:
$$a \oplus b := \begin{cases} a + b & \text{pro } a + b < m, \\ a + b - m & \text{pro } a + b \geq m. \end{cases}$$
Dokažte: $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ je abelovská grupa.

20. Dokažte: Grupa G s operací $\circ$ a jednotkovým prvkem e je abelovská, je-li splněna (alespoň) jedna z následujících podmínek:

    a) $a \circ a = e$ pro všechna $a \in G$.

    b) $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$ pro všechna $a, b \in G$.

    c) $b^{-1} \circ a^{-1} \circ b \circ a = e$ pro všechna $a, b \in G$.

Platí také obrácená tvrzení?

21. Dokažte, že pro prvočíslo p tvoří množina $\{a+b\sqrt{p} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ s obvyklými operacemi sčítání a násobení reálných čísel obor integrity.

22. Buď $n \in \mathbb{N}$ a $T_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ dělí } n\}$. Dokažte, že T_n s operacemi

$$a \cap b := \mathrm{NSD}(a,b), \qquad a \cup b := \mathrm{NSN}(a,b) \qquad (a,b \in T_n)$$

tvoří distributivní svaz s nulou a jedničkou. Pro která n je tento svaz Booleův?

23. Určete řád všech prvků symetrické grupy S_4.

24. Dokažte: Okruh $(R,+,\cdot)$, ve kterém je každý prvek idempotentní , tj. ve kterém pro všechna $a \in R$ platí $a^2 = a$, je nutně komutativní.

25. Buď $(R,+,\cdot)$ okruh s právě jedním pravým neutrálním prvkem e vzhledem k násobení. Dokažte, že e je pak jednotkovým prvkem tohoto okruhu.

26. Dokažte: Komutativní okruh $(R,+,\cdot)$, kde $|R| > 1$, je pole, právě když pro každé $a \in R \setminus \{0\}$ má rovnice $axa = a$ v R právě jedno řešení.

27. Dokažte: $S := \{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$ je podpole pole $(\mathbb{R},+,\cdot)$ (s obvyklými operacemi + a $\cdot$).

28. Nechť $(B,\cap,\cup,0,1,')$ je Booleova algebra a $+$, $-$, $\cdot$ nechť jsou definovány vztahy

$$x+y := (x \cap y') \cup (x' \cap y), \qquad -x := x, \qquad x \cdot y := x \cap y \qquad (x,y \in B).$$

Dokažte, že potom $(B,+,0,-,\cdot,1)$ je komutativní okruh s jednotkovým prvkem, ve kterém platí $x^2 = x$ pro všechna $x \in B$ (takovýto okruh se nazývá *Booleův okruh*).

29. Buď $(B,+,0,-,\cdot,1)$ komutativní okruh s jednotkovým prvkem, ve kterém platí $x^2 = x$ pro všechna $x \in B$ (tj. Booleův okruh), a nechť jsou na B definovány operace $\cap$, $\cup$, $'$ pomocí vztahů

$$x \cap y := x \cdot y, \qquad x \cup y := x + y + x \cdot y, \qquad x' := x + 1 \qquad (x,y \in B).$$

Dokažte, že potom $(B,\cap,\cup,0,1,')$ je Booleova algebra.

30. Dokažte, že přiřazení mezi Booleovými algebrami a Boleovými okruhy (tj. komutativními okruhy s jednotkovým prvkem a vlastností $x^2 = x$ pro každý prvek x) z příkladů 28 a 29 definují navzájem inverzní zobrazení.

31. Určete všechny podgrupy symetrické grupy S_3.

32. Dokažte: Je-li $(G,\cdot)$ grupa, potom je každá konečná neprázdná podpologrupa grupy $(G,\cdot)$ podgrupa.

33. Dokažte: $\{(12),(13),\ldots,(1n)\}$ je systém generátorů symetrické grupy S_n, $n \geq 2$. Návod: použijte fakt, že množina všech transpozic je systémem generátorů grupy S_n.

34. Dokažte, že
a) $\{(12), (23), \ldots, (n-1\,n)\}$ a
b) $\{(12), (12\ldots n)\}$
jsou systémy generátorů grupy S_n, $n \geq 2$.
Návod pro a): Využijte příklad 33.

35. Buď $(G, \cdot)$ grupa a $a \in G$. Dokažte, že $N(a) := \{x \in G \mid xa = ax\}$ je podgrupa grupy G. (Tato podgrupa se nazývá *normalizátor* prvku a.)

36. Dokažte: Je-li H podgrupa grupy G a $a \in G$, potom je také $a^{-1}Ha := \{a^{-1}xa \mid x \in H\}$ podgrupa grupy G.

37. Dokažte: $\mathbb{Q}$ je nejmenší podpole pole $\mathbb{R}$.

38. Dokažte: Je-li π relace ekvivalence na množině M a pro $a \in M$

$$[a]_\pi := \{b \in M \mid b\pi a\},$$

pak je $M/\pi := \{[a]_\pi \mid a \in M\}$ rozklad množiny M na třídy ekvivalence.

39. Dokažte: a) Je-li $\mathcal{P}$ rozklad množiny M a je-li relace π na M definovaná vztahem $a\pi b :\Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{P} : a, b \in C$, potom je π relace ekvivalence a $M/\pi = \mathcal{P}$.
b) $\pi \mapsto M/\pi$ definuje bijektivní zobrazení množiny všech relací ekvivalence na M na množinu všech rozkladů množiny M.

40. Dokažte: Nechť M, N jsou množiny, $f : M \to N$ zobrazení a relace π_f nechť je definována následujícím způsobem:

$$x\pi_f y :\Leftrightarrow f(x) = f(y), \quad x, y \in M.$$

Potom platí: a) π_f je relace ekvivalence na M.
b) $[x]_{\pi_f} \mapsto f(x)$ definuje bijektivní zobrazení množiny M/π_f na $f(M)$.

V příkladech 41–44 značí G cyklickou grupu $G = \langle x \rangle$.

41. Dokažte: a) Jestliže $\mathrm{o}(x) = m \in \mathbb{N}$, pak je G izomorfní s $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ (srovnej s př. 19).
b) Je-li $\mathrm{o}(x) = \infty$, pak je G izomorfní s $(\mathbb{Z}, +)$.

42. Dokažte: Každá podgrupa H grupy G je rovněž cyklická.

43. Dokažte: Jestliže $\mathrm{o}(x) = m \in \mathbb{N}$, pak platí pro všechna $k \in \mathbb{Z}$: $\mathrm{o}(x^k) = m/\mathrm{NSD}(k, m)$.

44. okažte: Jestliže $\mathrm{o}(x) = m \in \mathbb{N}$, pak existuje ke každému děliteli t prvku m právě jedna podgrupa H grupy G taková, že $|H| = t$.

45. Určete všechny podgrupy symetrické grupy S_4. Návod: Je jich 30.

46. Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{A}^*, \mathcal{A}^{**}$ algebry stejného typu. Dokažte:
a) Je-li f homomorfizmus $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}^*$ a g homomorfizmus $\mathcal{A}^*$ do $\mathcal{A}^{**}$, pak je $g \circ f$ homomorfizmus $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}^{**}$. Jsou-li f, g izomorfizmy, pak je také $g \circ f$ izomorfizmus.
b) Je-li f izomorfizmus $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}^*$, pak je f^{-1} izomorfizmus $\mathcal{A}^*$ do $\mathcal{A}$.

47. Dokažte: a) Endomorfizmy algebry $\mathcal{A}$ tvoří vzhledem k operaci skládání $\circ$ pologrupu.
b) Automorfizmy $\mathcal{A}$ tvoří vzhledem k operaci $\circ$ grupu. Tuto grupu určete pro $\mathcal{A} = S_3$.

48. Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{A}^*$ jsou algebry stejného typu a f nechť je homomorfizmus $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}^*$. Dokažte:
a) Je-li U podalgebra algebry $\mathcal{A}$, potom je $f(U)$ podalgebra algebry $\mathcal{A}^*$.
b) Je-li U^* podalgebra algebry $\mathcal{A}^*$, potom je $f^{-1}(U^*)$ podalgebra algebry $\mathcal{A}$.

49. Buď $(G, \cdot)$ grupa. Dokažte, že vztah

$$h \sim g :\Leftrightarrow \exists x \in G : h = xgx^{-1}$$

definuje relaci ekvivalence na G a určete pro $G = S_3$ příslušný rozklad na třídy ekvivalence. Jaký výsledek je možno z tohoto faktu pro $G = S_4$ (obecně pro $G = S_n$) odvodit?

50. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa a pro $x \in G$ nechť je zobrazení $\varphi_x : G \to G$ definováno vztahem $\varphi_x(g) := xgx^{-1}$, $g \in G$. Dokažte: φ_x je automorfizmus grupy G (tzv. *vnitřní automorfizmus*) a $\{\varphi_x \mid x \in G\}$ je podgrupa grupy automorfizmů grupy G.

51. Určete všechny normální podgrupy grupy S_4. Návod: Použijte př. 49.

52. Dokažte: Abelovská grupa G taková, že $|G| > 1$, je právě tehdy prostá, když má prvočíselný řád.

53. Dokažte: Okruh matic $M_n(K)$ nad polem K je vždy prostý.

54. Nechť G, H jsou grupy s jednotkovými prvky e, e^* a $f : G \to H$ nechť je homomorfizmus. Dokažte:
a) $\operatorname{Ker} f := \{a \in G \mid f(a) = e^*\}$ je normální podgrupa grupy G.
b) f je monomorfizmus $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{e\}$.

55. *Centrum* grupy G definujeme takto: $Z(G) := \{x \in G \mid \forall g \in G : xg = gx\}$.
a) Dokažte, že $Z(G)$ je normální podgrupa grupy G.
b) Určete centrum grupy S_n.

56. Určete až na izomorfizmus všechny čtyřprvkové okruhy s cyklickou aditivní grupou.

57. Buď G grupa a pro $a, b \in G$ definujme *komutátor* $K(a, b)$ grupy G takto: $K(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$. Dále nechť $K := \langle\{K(a, b) \mid a, b \in G\}\rangle$ je podgrupa grupy G generovaná množinou všech komutátorů. Dokažte:
a) K je normální podgrupa grupy G.
b) Je-li N normální podgrupa grupy G, potom platí: G/N je abelovská grupa $\Leftrightarrow$ $N \supseteq K$.

58. Dokažte: Jsou-li A, B ideály okruhu R, pak také $A + B$ a $A \cap B$ jsou ideály R.

59. Dokažte s využitím alternující grupy A_4, že nemusí ke každému kladnému děliteli řádu grupy existovat podgrupa, jejíž řád je roven tomuto děliteli.

60. Buď G konečná grupa, N normální podgrupa grupy G a $m := [G : N]$. Dokažte, že $a^m \in N$ pro všechna $a \in G$.

61. Buď $(R, +, \cdot)$ komutativní okruh. Prvek $a \in R$ se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a^n = 0$. Dokažte, že množina I všech nilpotentních prvků okruhu R je ideál okruhu R a faktorový okruh R/I kromě nulového prvku neobsahuje žádné jiné nilpotentní prvky.

62. Buď $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) \neq 0$ polynom a p/q racionální kořen $f(x)$ takový, že $p, q \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{NSD}(p, q) = 1$.
a) Dokažte: $p|a_0$ a $q|a_n$.
b) Najděte všechny kořeny polynomu $12x^4 - 31x^3 + 27x^2 - 9x + 1$.

63. a) Určete kořeny polynomu $x^n - 1$ v $\mathbb{C}$ (n-té odmocniny z jednotky) .
b) Dokažte, že n-té odmocniny z jednotky tvoří v $\mathbb{C}$ vzhledem k násobení cyklickou grupu řádu n.

64. Je-li R komutativní okruh s jednotkovým prvkem a $f(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in R[x]$, potom nechť $f'(x) := a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$ (*derivace* f). Dokažte, že pro všechna $f, g \in R[x]$, $a \in R$ platí:

$$(f + g)' = f' + g', \qquad (f \cdot g)' = f'g + g'f, \qquad (af)' = af'.$$

65. Dokažte: Je-li $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $z \in \mathbb{C}$ a $f(z) = 0$, pak je také $f(\bar{z}) = 0$.

66. Dokažte: a) Je-li $a \in I$ k-násobný kořen ($k > 1$) polynomu $p(x) \in I[x]$, pak je a alespoň $(k - 1)$-násobný kořen polynomu $p'(x)$ (I obor integrity).
b) Jsou-li polynomy $p(x)$ a $p'(x)$ nesoudělné, pak má $p(x)$ pouze prosté kořeny. Platí také obrácené tvrzení?

67. Buď $I = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Dokažte, že I s obvyklými operacemi součtu a součinu v $\mathbb{C}$ tvoří obor integrity, ve kterém je prvek 3 sice ireducibilní, ale není prvoičinitelem. Je I Gaussův okruh?

68. Určete v $\mathbb{Z}_2[x]$ všechny ireducibilní polynomy až do řádu 3.

69. Buď $D \neq 1$ celé číslo bez kvadratických dělitelů.
a) Určete pro $D < 0$ jednotky v $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] := \{a+b\sqrt{D} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Návod: Uvažujte „normu“ $N(a + b\sqrt{D}) := a^2 - b^2D$.
b) Dokažte, že pro $D = 2$ existuje v $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subseteq \mathbb{R}$ nekonečně mnoho jednotek.

70. Buď I obor integrity a $a, b, c \in I$, přičemž $c \neq 0$. Dokažte: existuje-li $\mathrm{NSD}(ac, bc)$, pak také existuje $\mathrm{NSD}(a, b)$ a platí $c \cdot \mathrm{NSD}(a, b) \sim \mathrm{NSD}(ac, bc)$.

71. Dokažte: Jestliže K je pole a grupa $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ je cyklická, pak je K konečné.

72. Dokažte, že $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ s obvyklými operacemi v $\mathbb{C}$ je Eukleidův okruh (nazývaný *okruh celých Gaussových čísel*). Návod: Položte $H(z) := |z|^2$.

73. Určete v $\mathbb{Z}[i]$ NSD prvků $a = 3 - i$ a $b = 1 + 3i$ a vyjádřete jej ve tvaru $ax + by$, kde $x, y \in \mathbb{Z}[i]$.

74. Najděte v $\mathbb{Z}[i]$ rozklady prvků $27 + 6i$ a $-3 + 4i$ na prvočinitele.

75. a) Určete v $\mathbb{Z}$ NSD čísel 6188 a 4709 a vyjádřete jej jako celočíselnou lineární kombinaci čísel 6188 a 4709.
b) Analogicky pro čísla 525 a 231.

76. a) Určete v $\mathbb{Q}[x]$ všechny NSD polynomů $4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$ a $2x^3 - 5x + 4$ a vyjádřete normovaný NSD jako lineární kombinaci obou polynomů.
b) Analogicky pro $2x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 2x - 2$ a $x^5 - 2x^3 - 1$.

77. Dokažte, že faktorový okruh $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ je pole a demonstrujte na příkladu výpočet multiplikativního inverzního prvku (Eukleidovým algoritmem).

S použitím označení z odstavce 5.1 dokažte následující tvrzení (příklady 78–80):

78. Vztahem
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$$
je na S_1 definována operace $\cdot$ a $(S_1, \cdot, \frac{1}{1})$ je komutativní monoid.

79. Vztahem
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$
je na S_1 definována operace $+$ a $(S_1, +, \cdot)$ je komutativní okruh s jednotkovým prvkem.

80. $E(\mathcal{T}) = R(\mathcal{T}) = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in R(\mathcal{M})\}$ a pro $\frac{a}{b} \in R(\mathcal{T})$ platí $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

Dále buď K pole.

81. Nechť L je rozšíření pole K a E rozšíření pole L takové, že $[E : K] < \infty$. Dokažte, že platí $[E : K] = [E : L] \cdot [L : K]$ (věta o stupni).

82. Dokažte: Je-li α transcendentní prvek nad K, pak je $K(\alpha) \cong K(x)$.

83. Dokažte: Je-li $\operatorname{char} K = 0$, pak má každý iredicibilní polynom $f(x) \in K[x]$ v každém rozšíření pole K pouze prosté kořeny.

84. Nechť $\operatorname{char} K = 0$ a nechť $u_1, \ldots, u_r \in L$ jsou algebraické prvky nad K, přičemž L je rozšíření pole K. Dokažte: Existuje $\alpha \in L$ takové, že $K(u_1, \ldots, u_r) = K(\alpha)$.

85. Najděte minimální polynom pro
a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$,
b) $\sqrt{3} + i$
nad $\mathbb{Q}$.

86. Buď $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $\alpha^5 = 1$, ale $\alpha \neq 1$. Najděte minimální polynom pro α nad $\mathbb{Q}$.

87. Určete $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby $\mathbb{Q}(i, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

88. Určete stupeň $\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15})$ nad $\mathbb{Q}$.

89. Pro $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ kořeny polynomu $x^3 - 2$ určete stupeň $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ nad $\mathbb{Q}$.

90. Zkonstruujte tabulky operací konečného pole s 8 prvky.

91. Dokažte: Je-li K konečné pole charakteristiky p, potom $a \mapsto a^p$ $(a \in K)$ definuje automorfizmus na K.

92. Určete počet normovaných ireducibilních polynomů stupně 2 nad GF(q).

93. Dokažte: Je-li φ automorfizmus pole K a P minimální podpole pole K, pak platí $\varphi(a) = a$ pro všechna $a \in P$.

94. Buď K pole charakteristiky $p > 0$. Dokažte: $x^p + a \in K[x]$ je buďto ireducibilní polynom nebo p-tá mocnina lineárního polynomu.

95. Dokažte, že v $\mathbb{Z}_p[x]$ platí: $(x^{p^k} - x)|(x^{p^n} - x) \Leftrightarrow k|n$.

96. Dokažte: V GF(p^n) existuje ke každému kladnému děliteli k čísla n právě jedno podpole GF(p^k).

Seznam literatury

H. Bürger — D. Dorninger — W. Nöbauer: *Boolesche Algebra und Anwendungen*, Österr. Bundesverlag, Wien 1974.

D. Dorninger — W. B. Müller: *Allgemeine Algebra und Anwendungen*, B. G. Teubner, Stuttgart 1984.

G. Eigenthaler: *Begleitmaterial zur Vorlesung ALGEBRA*, Institut für Mathematik und Geometrie, Technische Universität Wien, 2004.

G. Fischer — R. Sacher: *Einführung in die Algebra*, B. G. Teubner, Stuttgart 1978.

J. B. Fraleigh: *A first course in abstract algebra*, Addison-Wesley, Reading (Massachusetts) 1976.

E. Fried: *Abstrakte Algebra — eine elementare Einführung*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1983.

G. Grätzer: *Universal Algebra*, Second Edition, Springer-Verlag, New York 1979.

Th. W. Hungerford: *Algebra*, Springer-Verlag, 3. Auflage, New York 1984.

Th. Ihringer: *Allgemeine Algebra*, B. G. Teubner, Stuttgart 1993.

H. Kaiser: *Skriptum zur Vorlesung Algebra*, Institut für Algebra und Computermathematik, Technische Universität Wien 1999.

H. Kaiser — R. Lidl — J. Wiesenbauer: *Aufgabensammlung zur Algebra*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1975.

H. Kaiser — R. Mlitz — G. Zeilinger: *Algebra für Informatiker*, Springer-Verlag, Wien 1985.

O. Körner: *Algebra*, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt/Main 1974.

G. Kowol — H. Mitsch: *Algebra I, II*, Prugg-Verlag, Eisenstadt 1982/84.

R. Kochendörffer: *Einführung in die Algebra*, Wissenschaftsverlag, Berlin 1962.

E. Kunz: *Algebra*, Vieweg, Braunschweig 1991.

A. G. Kuroš: *Vorlesungen über allgemeine Algebra*, B. G. Teubner, Leipzig 1964.

S. Lang: *Undergraduate Algebra*, Springer-Verlag, New York 1987.

S. Lang: *Algebra*, Addison-Wesley, 3. Auflage, Reading (Massachusetts) 1993.

H. Lausch — W. Nöbauer: *Algebra of Polynomials*, North Holland, Amsterdam 1973.

R. Lidl — H. Niederreiter: *Introduction to finite fields and their applications*, Cambridge University Press, Cambridge 1986.

R. Lidl — G. Pilz: *Angewandte abstrakte Algebra I, II*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1982.

R. Lidl — J. Wiesenbauer: *Ringtheorie und Anwendungen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1980.

S. MacLane — G. Birkhoff: *Algebra*, Chelsea Publishing Company, New York 1988.

K. Meyberg: *Algebra 1, 2*, Carl Hanser Verlag, München 1975/76.

K. Meyberg — P. Vachenauer: *Aufgaben und Lösungen zur Algebra*, Carl Hanser Verlag, München 1978.

L. Rédei: *Algebra*, Pergamon Press, Oxford 1967.

E. Scholz (Hrsg.): *Geschichte der Algebra*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1990.

G. Szász: *Einführung in die Verbandtheorie*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1962.

B. L. van der Waerden: *Algebra I, II*, Springer-Verlag, Berlin 1966/67.