Algebry rotací a jejich aplikace

Jaroslav Hrdina
Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství,
Vysoké učení technické v Brně, Technická 2896/2 616 69 Brno
E-mail: hrdina@fme.vutbr.cz

Abstrakt: Následující text pokrývá jeden s cyklů přednášek předmětu Aplikovaná algebra pro inženýry (0AA) na FSI VUT. Text vznikl při druhém běhu tohoto předmětu ve školním roce 2013/2014. Jeho cílem je motivace pro studium pokročilých metod lineární algebry. U čtenáře se předpokládá znalost na úrovni základního kurzu matematiky obvyklého na technických fakultách. Konkrétně se předpokládá znalost maticového počtu, definice a vlastností determinantů a základy geometrie vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Základ textu tvoří kapitoly 1, 2, 5, kapitola 4 je doplňková a kapitola 3 slouží jako úvod ke kapitolám 4, 5.

Contents

1. Grupa $SO(3)$ 1
2. Metoda pohyblivého reperu 6
3. Projektivní prostor $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 9
4. Topologické vlastnosti $SO(3)$ a popis $SU(2)$ 12
5. Kvaterniony 15
References 16

1. Grupa $SO(3)$

Motivováni inženýrskými aplikacemi pracujeme s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^3$. Prvky vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ budeme zapisovat jako trojice reálných čísel (x, y, z). Operace sčítání na $\mathbb{R}^3$ je pak definována po složkách

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

a operace násobení číslem $k \in \mathbb{R}$ předpisem:

$$k \cdot (x, y, z) = (kx, ky, kz).$$

V další kapitole uvidíme, že takto zadefinované operace na $\mathbb{R}^3$ splňují podmínky obecné definice vektorového prostoru nad polem skalárů $\mathbb{R}$, ale obecnější úvahy o vektorových prostorech zatím nepotřebujeme. Pro danou konečnou množinu $M = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^3$ definujeme *lineární kombinace* jako konečné kombinace sčítání vektorů z M vynásobených reálnými čísly, tj.

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n,\ a_i \in \mathbb{R}.$$

Vidíme, že každý prvek $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je možné jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvků $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$ takto:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Pokud má být toto vyjádření jednoznačně musí platit:

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n \Rightarrow a_i = b_i$$

a tato podmínka jde přepsat na stručnější podmínku:

$$c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0 \Rightarrow c_i = 0 \text{ (kde } c_i = b_i - a_i),$$

která v našem příkladě triviálně platí:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = 0 \Rightarrow x = y = z = 0.$$

Množině prvků pro které platí, že jejich lineární kombinací lze jednoznačně vyjádřit každý prvek vektorového prostoru se říká *báze* a příslušným koeficientům lineární kombinace pak *souřadnice vektoru* v dané bázi. Tento pojem bude hrát zásadní roli v našich dalších úvahách. Prvky námi nalezené báze označíme

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$$

a bázi $\{e_1, e_2, e_3\}$ říkáme *kanonická.* Standardní notace říká, že vektory $\mathbb{R}^3$ zapisujeme řádkově a jeho souřadnice v příslušné bázi sloupcově. Vektor (x, y, z) má tedy v kanonické bázi souřadnice $(x, y, z)^T$. Jinou bází prostoru $\mathbb{R}^3$ je třeba množina

$$\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

kde každý prvek (x, y, z) lze vyjádřit jako lineární kombinaci

$$(x, y, z) = (x - y)(1, 0, 0) + (y - z)(1, 1, 0) + z(1, 1, 1)$$

a vektor (x, y, z) má tedy v bázi $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ souřadnice $(x - y, y - z, z)$ a podmínka nezávislosti

$$c_1(1, 0, 0) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 1, 1) = 0$$

vede na soustavu

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

která má jen triviální řešení $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Poznamenejme, že operace sčítání vektorů indukuje operaci sčítání po složkách na souřadnicích v libovolné bázi, stejně tak operace násobení skalárem.

Definice. 1.1. Lineární transformací *na* $\mathbb{R}^3$ *rozumíme zobrazení* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *splňující následující vlastnosti:*

$$\begin{aligned} T(v + w) &= T(v) + T(w), \text{ pro všechna } v, w \in \mathbb{R}^3, \\ T(\alpha w) &= \alpha T(w), \text{ pro všechna } w \in \mathbb{R}^3, \ \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Přímočarým použitím vlastností lineární transformace vidíme, že lineární transformace závisí jen na obrazech prvků báze jak ukazuje následující výpočet:

$$T(xe_1 + ye_2 + ye_3) = xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3). \tag{1}$$

Obraz každého prvku báze je opět prvek vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ a můžeme ho vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze.

$$\begin{aligned} T(e_1) &= m_{11}e_1 + m_{12}e_2 + m_{13}e_3 \\ T(e_2) &= m_{21}e_1 + m_{22}e_2 + m_{23}e_3 \\ T(e_3) &= m_{31}e_1 + m_{32}e_2 + m_{33}e_3 \end{aligned}$$

Pokud toto vyjádření dosadíme do výrazu (1) dostáváme následující výpočet

$$\begin{aligned} T(xe_1 + ye_2 + ze_3) &= m_{11}xe_1 + m_{12}xe_2 + m_{13}xe_3 + m_{21}ye_1 + m_{22}ye_2 + m_{23}ye_3 \\ &+ m_{31}ze_1 + m_{32}ze_2 + m_{33}ze_3 \\ &= (m_{11}x + m_{21}y + m_{31}z)e_1 + (m_{12}x + m_{22}y + m_{32}z)e_2 \\ &+ (m_{13}x + m_{23}y + m_{33}z)e_3 \end{aligned}$$

Nahradíme–li vektor $xe_1 + ye_2 + ze_3$ sloupcem jeho souřadnic $(x, y, z)^T$ pak poslední výraz není nic jiného než přepsané násobení maticí:

$$T((x, y, z)^T) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} (x, y, z)^T$$

Tahle úvaha ukazuje, že každé lineární transformaci v $\mathbb{R}^3$ odpovídá ve zvolené bázi matice 3×3 která vznikne tak, že ve sloupcích jsou souřadnice obrazů bázových prvků. Není těžké ověřit, že naopak násobení libovolnou maticí 3×3 funguje na souřadnicích vektorů $\mathbb{R}^3$ jako lineární transformace. Matice dané lineární transformace je dána jednoznačně a každé odpovídá právě jedna (jednoznačnost je dána volbou báze). Lineární transformace na $\mathbb{R}^3$ jsou tedy v jedno jednoznačné korespondenci s maticemi 3×3 přičemž tato korespondence je dána volbou báze.

Jako další krok definujeme na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ *skalární součin* jako zobrazení

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

následujícím předpisem

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Na vektorových prostorech se skalárním součinem jsou pojmy jako velikost vektoru (norma) a úhel mezi vektory zavedeny právě pomocí skalárního součinu následovně:

$$|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}, \quad \cos\varphi = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}.$$

Nás zajímají lineární transformace, které zachovávají délky a úhly, takovým transformacím se říká *transformace pevného tělesa* a jsou to právě ty transformace, které zachovávají skalární součin. Všimněme si, že maticově můžeme skalární součin zapsat jako $\langle u, v\rangle = uv^T$ jak vidíme s následujícího výpočtu.

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle := (x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2)^T = (x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Nás zajímají transformace reprezentované maticí A zachovávající skalární součin, který je na souřadnicích kanonické báze indukovaný předpisem

$$\langle u, v\rangle = u^T v$$

a můžeme z následujícího výpočtu odvodit podmínku na matici A. Z výrazu

$$(Au)^T(Av) = u^T A^T Av = u^T v$$

dostáváme $A^T A = E$, protože předpokládáme $(Au)^T(Av) = u^T v$ a $(u^T v)$ je reálné číslo. Dostáváme tak množinu matic zachovávajích skalární součin

$$O(3) = \{A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3)|\ A^T A = E\}.$$

Na množině $O(3)$ můžeme nadefinovat operaci násobení jako násobení dvou matic $A, B \in O(n)$, protože výsledná matice po vynásobení nevypadne z $O(3)$:

$$(AB)^T(AB) = B^T(A^T A)B = B^T B = E.$$

Ukážeme, že prvky množiny $O(3)$ mají inverzi, která leží v $O(3)$, protože prvky A a A^T komutují

$$(AA^T - A^T A)A = (AA^T - E)A = (A - A) = 0 \Rightarrow AA^T - A^T A = 0$$

platí

$$(A^T)^T A^T = A^T(A^T)^T = A^T A = E$$

a tedy $A^T \in O(3)$, kde jednička je jednotková matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pro kterou identita $E^T E = E$ platí triviálně. Množina s jednou binární operací $(M, \cdot)$ která je asociativní, tj.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\ \forall a, b, c \in M$$

(matice jsou obecně asociativní a tedy každá její podmnožina musí být asociativní také), obsahuje jedničku a každý prvek má inverzi říkáme *grupa*. Množina $(O(3), \cdot)$ tedy tvoří grupu, kterou nazýváme *ortogonální grupa*.

Další zajímavou vlastností je, že prvky množiny $O(3)$ mají determinant ± 1, protože determinant součinu je součin determinantů a determinant transponované matice A^T je stejný jako determinant matice A dostaneme

$$1 = \det(E) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = (\det(A))^2$$

a tedy $\det(A) = \pm 1$. Protože $\det(A) = \pm 1$ grupa $O(3)$ se rozpadá na dvě podmnožiny, množinu $SO(3)$ matic s determinantem jedna a množinu $O_-(3)$ matic s determinantem mínus jedna. Součin dvou matic s determinantem jedna je opět matice s determinantem jedna, množina $SO(3)$ je tedy uzavřena na násobení. Protože transpozice determinant nemění a jednotková matice má determinant jedna tvoří množina $SO(3)$ opět grupu (asociativitu dokazovat nemusíme protože se jedná opět o násobení matic). Množina $O_-(3)$ neobsahuje jedničku a není uzavřena na násobení.

Platí, že násobení libovolným prvkem z $O_-(3)$ určuje jedno jednoznačnou korespondenci mezi $O_-(3)$ a $SO(3)$, zvolíme-li za takový prvek třeba matici

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

můžeme každý prvek z $O_-(3)$ chápat jako kompozici prvku z $SO(3)$ a lineární transformace I. Geometrický význam transformace I je zrcadlení kolem roviny $y = 0$. V dalším uvidíme, že prvky $SO(3)$ odpovídají rotacím kolem zvolené osy v kladném směru. Pokud tedy navíc požadujeme zachování orientace (což je přirozený požadavek při transformaci pevného tělesa) dostáváme jako grupu transformaci grupu $SO(3)$, které říkáme *speciální ortogonální grupa* Dalším pojmem který zavedeme je pojem vlastního čísla a vlastního vektoru.

Definice. 1.2. *Nechť $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární transformace. Číslu $\lambda \in \mathbb{C}$ říkáme* vlastní číslo *transformace T pokud existuje $v \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $T(v) = \lambda v$.*

Pokud máme lineární transformaci zadanou maticí A můžeme vlastní čísla a vlastní vektory vypočítat jako kořeny polynomu

$$\det(A - \lambda E),$$

kterému říkáme *charakteristický polynom matice A*.

To plyne z následující úvahy:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ Av - \lambda v &= 0 \\ Av - \lambda E v &= 0 \\ (A - \lambda E)v &= 0 \end{aligned}$$

přičemž poslední výraz nám říká, že v je v jádru zobrazení $(A - \lambda E)$ a protože v je nenulové, musí platit, že $\det(A - \lambda E) = 0$.

Prvně podrobněji prodiskutujeme případ $SO(2)$. Pokud má matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ležet v $SO(2)$ musí splňovat $A^T A = E$ a současně $\det(A) = 1$. Z první podmínky dostaneme:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože $a^2 + c^2 = 1$ můžeme v polárních souřadnicích vyjádřit $a = \cos\varphi$, $c = \sin\varphi$ a dosazením do rovnice $ab + cd = 0$ dostaneme $d = C\cos\varphi$, $b = -C\sin\varphi$. Konečně z rovnice $b^2 + d^2 = 1$ máme $C = \pm 1$ a determinant $\det(A) = C = 1$. Celkem dostáváme vyjádření obecné matice $A \in SO(2)$ jako matici rotace kolem středu o úhel φ:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

V následujícím odstavci podrobněji rozebereme případ $A \in SO(3)$. Reálné vlastní číslo matice z $O(3)$ může být pouze ± 1, protože

$$\lambda^2 \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle.$$

Současně si všimneme, že charakteristický polynom pro libovolnou matici z grupy $O(3)$ je stupně 3 a jeho kořeny mohou tedy být buď tři reálné, nebo jeden reálný a dva komplexně sdružené. V obou případě, ale platí, že matice z $O(3)$ má vždy alespoň jedno reálné vlastní číslo. Determinant matice se rovná součinu vlastních čísel včetně násobnosti a pokud je matice $A \in SO(3)$ jsou dvě možnosti $(\pm 1)(\pm 1)(\pm 1) = 1$, nebo $(\pm 1)(a + bi)(a - bi)$. V prvním případě je buď jedno, nebo všechna tři čísla rovna jedné, v druhém případě dostaneme $\pm 1(a^2 + b^2) = 1$ a protože $(a^2 + b^2) > 0$ musí být první vlastní číslo 1. Platí tedy, že pro matice z $SO(3)$ existuje alespoň jeden vlastní vektor s vlastním číslem 1. Předpokládejme, že v je vlastní vektor s vlastním číslem 1 pak můžeme zvolit podprostor

$$E = \{w \in \mathbb{R}^3 | \langle v, w \rangle = 0\}$$

Pro zobrazení A pak platí $A(v) = v$ a ukážeme, že zobrazení A zachovává E. Nechť $w \in E$ pak

$$0 = \langle w, v \rangle = \langle A(w), A(v) \rangle = \langle A(w), v \rangle$$

Můžeme tedy zúžit A na podprostor E a protože $A \in SO(3)$, zúžení $A|_E$ musí být v $SO(2)$. Každá matice z $SO(3)$ je tedy rotací kolem osy v o zvolený úhel. V kanonické bázi pak rotace kolem os x, y a z o úhel θ odpovídají maticím

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme bez důkazu, že příslušný uhel vypočteme podle vzorce:

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2},$$

kde Tr je součet prvků na hlavní diagonále, tzv. stopa matice.

Pokud bychom tedy analyzovali matici $A \in Mat_{\mathbb{R}}(3 \times 3)$ postupujeme podle následujícího algoritmu:

(1) Pokud $A^T A = E$ jedná se o matici rotace.
(2) Pokud $det(A) = 1$ jedná se o rotaci v kladném směru.
(3) Nalezneme osu rotace jako řešení systému $(A - E|0)$.
(4) Určíme úhel rotace podle vzorce $\cos\varphi = \frac{\mathrm{Tr}(A)-1}{2}$.

2. Metoda pohyblivého reperu

V předešlé kapitole jsme používali intuitivně pojem báze, ale pro naše další úvahy je potřeba postupovat formálněji. Poznamenejm, že o množině s jednou binární operací $(M, \cdot)$ říkáme, že je komutativní pokud platí

$$a \cdot b = b \cdot a \ \forall a, b, \in M.$$

Definice. 2.1. Vektorový prostor *(nad reálnými čísly $\mathbb{R}$) je množina $\mathbb{V}$ na které je definována operace $+$, taková, že dvojice $(\mathbb{V}, +)$ tvoří komutativní grupu a operace násobení skalárem $\mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ taková, že platí*

$$\begin{aligned} a(u+v) &= au + av, \\ (a+b)u &= au + bu, \\ 1u &= u, \end{aligned}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $u, v \in \mathbb{V}$.

Báze vektorového prostoru je pak nejmenší možná množina generátorů jejíž lineární kombinace generují celý vektorový prostor.

Příklad. 2.2. *Jako netriviální příklad si uvedeme množinu $\mathbb{R}_2[x]$, množinu polynomů maximálně druhého stupně, spolu s operací sčítání polynomů a násobení reálnými čísly. Tedy například*

$$(x^2 + 2x - 3) + 2(x + 12) = (x^2 + 4x + 21)$$

Báze prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ může být například množina $\alpha = \{1, x, x^2\}$, nebo množina $\beta = \{1, 1 + x, x + x^2\}$.

Protože jedna z vlastností báze je, že každý vektor z vektorového prostoru je pak možné jednoznačně vyjádřit jako její lineární kombinace, pro vektorový prostor $\mathbb{R}_2[x]$ a báze α a β z příkladu dostáváme

$$\begin{aligned} (x^2 + 4x + 21) &= 21(1) + 4(x) + 1(x^2) \\ (x^2 + 4x + 21) &= 18(1) + 3(1 + x) + 1(x + x^2) \end{aligned}$$

Pevně zvolená báze každému vektoru jednoznačně přiřazuje n–tici reálných čísel, kterým říkáme *souřadnice vektoru v dané bázi.* Volba báze tedy určuje izomorfismus mezi vektorovým prostorem a $\mathbb{R}^n$ (v našem případě $\mathbb{R}^3$). Souřadnice vektoru v v bázi γ se pak označuje $[v]_\gamma$ a pro vektorový prostor $\mathbb{R}_2[x]$ a báze α a β z příkladu dostáváme

$$[x^2 + 4x + 21]_\alpha = \begin{pmatrix} 21 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[x^2 + 4x + 21]_\beta = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V předešlé kapitole jsme pracovali s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^3$ a takzvanou kanonickou bází $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Příslušná matice transformace T pak byla maticí transformace v bázi α a píšeme $[T]_\alpha$. Série úvah provedená v minulé kapitole, ale na této volbě nezávisí. Volba báze jednoznačně přiřazuje každé lineární transformaci $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ matici 3×3, která pak funguje jako stejná lineární transformace na souřadnicích v této bázi.

Definice. 2.3. *Nechť $\mathbb{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, a nechť $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ je lineární transformace. Pro pevně zvolenou bázi β vektorového prostoru $\mathbb{R}$ je matice $[T]_\beta$* maticí lineární transformace *v bázi β právě tehdy když*

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta [v]_\beta.$$

Nalezení matice $[T]_\beta$ se pak provede tak, že se obrazy bázových prvků báze β vyjádří v souřadnicích báze β a tvoří pak sloupce matice $[T]_\beta$. Definici můžeme ještě zobecnit tak, že na vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ zvolíme dvě báze α, β a uvažujeme matici $[T]_{\alpha\to\beta}$ jako matici splňující

$$[T(v)]_\beta = [T]_{\alpha\to\beta}[v]_\alpha.$$

Na vstupu tedy máme souřadnice vektoru v v bázi α a na výstupu obrazy vektorů v souřadnicích báze β. Vlastní výpočet se pak provede analogicky tak, že se obrazy bázových vektorů báze α vyjádří v souřadnicích báze β a tyto souřadnice pak tvoří sloupce matice $[T]_{\alpha\to\beta}$.

Příklad. 2.4. *Pokračujeme v Příkladu 2 a na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ zavedeme operaci derivace standardně takto*

$$\partial(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

Na $\mathbb{R}_2[x]$ zavedeme dvě báze $\alpha = \{1, x, x^2\}$, $\beta = \{1, 1 + x, x + x^2\}$ a vypočteme matici $[\partial]_{\alpha\to\beta}$. Vezmeme tedy vektory báze α a zderivujeme je

$$\partial 1 = 0$$
$$\partial x = 1$$
$$\partial x^2 = 2x$$

a souřadnice výsledných vektorů v bázi β jsou pak

$$[0]_\beta = 0(1) + 0(1 + x) + 0(x + x^2)$$
$$[1]_\beta = 1(1) + 0(1 + x) + 0(x + x^2)$$
$$[2x]_\beta = -2(1) + 2(1 + x) + 0(x + x^2)$$

a tedy matice $[\partial]_{\alpha\to\beta}$ je v následujícím tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pokud vezmeme jako lineární transformaci identitu bude příslušná matice transformace $[id]_{\alpha\to\beta}$ přepočítávat souřadnice vektorů báze α do souřadnic vektorů báze β.

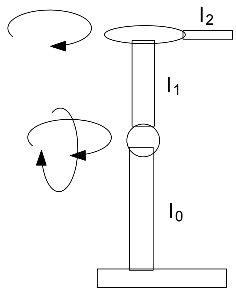

FIGURE 1. Robot se dvěmi kinematickými dvojicemi

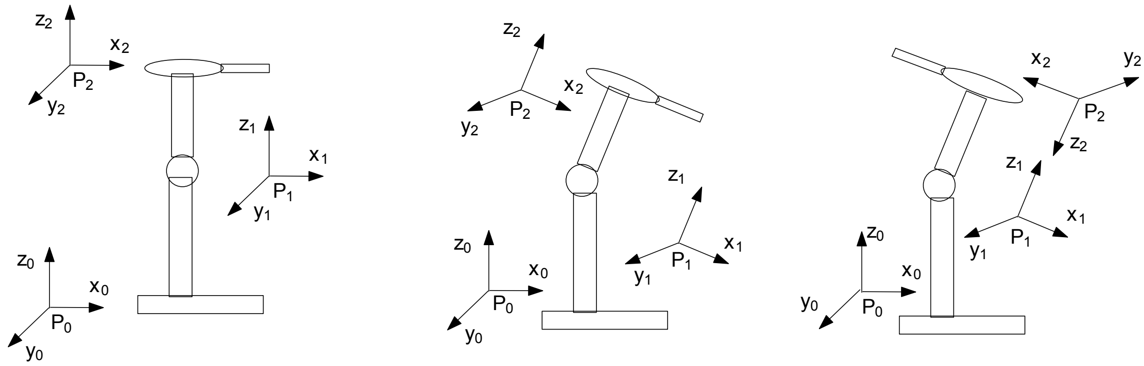

FIGURE 2. Metoda pohyblivého reperu

Definice. 2.5. *Nechť α a β jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{V}$ a matice $[P]_{\alpha\to\beta}$ splňuje*

$$[\mathbf{v}]_\beta = [P]_{\alpha\to\beta}[\mathbf{v}]_\alpha,$$

kde $P = \mathrm{id}$. Pak matici $[P]_{\alpha\to\beta}[\mathbf{v}]_\alpha$ říkáme matice přechodu *od báze α k bázi β.*

Metoda pohyblivého reperu (báze) je způsob jak sestavit kinematický řetězec. Jako příklad volíme robota (Obrázek 1.) se dvěma kinematickými dvojicemi, první sférickou a druhou cylindrickou. Celou kinematickou soustavu řešíme metodu pohyblivé báze. Zavedeme si tři bázové systémy. První je spojený s patou systému a další dva odpovídají příslušným kinematickým dvojicím. Cílem je vyjádření koncového bodu v souřadnicích prvního bázového systému v závislosti na parametrech kinematických dvojic. Označíme si příslušné bázové systémy jako

$$\mathcal{B}_0 = (P_0, x_0, y_0, z_0),\ \mathcal{B}_1 = (P_1, x_1, y_1, z_1),\ \mathcal{B}_2 = (P_2, x_2, y_2, z_2),$$

kde P_i jsou bodu počátku souřadného systému a množiny $\{x_i, y_i, z_i\}$ báze $\mathbb{R}^3$. Příslušné délky ramen jsou pak obecně l_0, l_1 a l_2. Sférickou kinematickou dvojici popíšeme jako složení dvou cylindrických a to prvně v ose z_1 a pak v ose y_1 tedy

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cylindrickou dvojici pak realizujeme jako rotaci v ose z_2, tedy

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu z báze $\mathcal{B}_1$ k bázi $\mathcal{B}_0$ je A_1, matice přechodu z báze $\mathcal{B}_2$ k bázi $\mathcal{B}_1$ je A_2 a matice přechodu z báze $\mathcal{B}_2$ k bázi $\mathcal{B}_0$ je pak A_1A_2. Nechť Q je koncový bod systému (chapadlo), jeho poloha v souřadném systému $\mathcal{B}_i$ je určená vektorem $(P_iQ)_{\mathcal{B}_i}$. Konkrétně v souřadném systému $\mathcal{B}_2$ je poloha určena vektorem

$$(P_2Q)_{\mathcal{B}_2} = [l_2, 0, 0]^T.$$

Dalším krokem je určení polohy P_1Q v souřadném systému $\mathcal{B}_1$ tedy

$$(P_1Q)_{\mathcal{B}_1} = (P_1P_2)_{\mathcal{B}_1} + (P_2Q)_{\mathcal{B}_1} = [0, 0, l_1]^T + A_2[l_2, 0, 0]^T$$

a konečně P_1Q v souřadném systému $\mathcal{B}_0$

$$(P_0Q)_{\mathcal{B}_0} = (P_0P_1)_{\mathcal{B}_0} + (P_1Q)_{\mathcal{B}_0} = [0, 0, l_0]^T + A_1[0, 0, l_1]^T + A_1A_2[l_2, 0, 0]^T.$$

Rozepíšeme si to maticově

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a dostaneme systém závislý na třech parametrech $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \langle 0, 2\pi \rangle$, který odpovídá kinematice zvoleného robota. Volbou parametrů θ_i měníme natočení v jednotlivých kloubech a Q pak určuje souřadnice vektoru mezi patou systému a chapadlem v bázi paty systému, kterou jsme zvolili jako referenční.

3. Projektivní prostor $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$

Pro naše další úvahy budeme potřebovat definici komplexních čísel a projektivního prostoru. Nejprve připomeňme, že komplexními čísly $\mathbb{C}$ rozumíme dvojice reálných čísel $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ spolu se dvěma binárními operacemi

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Je lehké ověřit, že takto zadefinovaná komplexní čísla tvoří komutativní těleso. Komutativním tělesem přitom rozumíme množinu vybavenou dvěma binárními operacemi $(M, +, \cdot)$, takovou, že dvojice $(M, +)$ tvoří komutativní grupu s nulovým prvkem 0, dvojice $(M - \{0\}, \cdot)$ tvoří také komutativní grupu a operace $+$ a $\cdot$ jsou navzájem distributivní. Poznamenejme, že pro prvek $(a, b) \in \mathbb{C}$ dostaneme inverzi ve tvaru

$$(a, b)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a, -b),$$

souvislost s klasickým zápisem $a + bi := (a, b)$ se lehce ověří výpočtem

$$i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

a není těžké následně dokázat, že definice komplexních čísel jako rozšíření tělesa reálných čísel o prvek i, kde $i^2 = -1$ (tj. $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$) je naší definici ekvivalentní.

Všimněme si, že díváme–li se na $\mathbb{R}^2$ jako na komplexní čísla $\mathbb{C}$ tak pokud zobrazíme vektor $(x, y) = x + iy$ na vektor $e^{i\theta}(x, y)$, kde

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

dostaneme vektor $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ a matice příslušného lineárního zobrazení na $\mathbb{R}^2$ ve standardní bázi je tedy

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Díváme–li se tedy na $\mathbb{R}^2$ jako na komplexní čísla $\mathbb{C}$ pak rotace kolem počátku o úhel θ můžeme reprezentovat jako násobení komplexním číslem

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

a z goniometrických vzorců lehce dokážeme, že

$$\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} | \theta \in \langle 0, 2\pi)\}$$

tvoří grupu (tj. zejména platí $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i\theta+\varphi}$). Množina rotací je izomorfní právě jednotkovým komplexním číslům

$$\mathbb{S}^1 = \{z : |z| = 1\}.$$

Prvky grupy $\mathbb{S}^1$ můžeme reprezentovat maticově

$$R_\theta = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a označíme–li $1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dostaneme opět příslušné identity

$$1^2 = 1, 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, i^2 = -1$$

a alternativní popis $\mathbb{S}^1$ maticově

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a + bi.$$

Poznamenejme, že v maticové reprezentaci je velikost komplexního čísla $|a+bi| = a^2+b^2$ rovna determinantu příslušné matice. Dále, z vlastností pro determinant $|AB| = |A||B|$ dostaneme pro čtveřice reálných čísel zajímavý vztah

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 + b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2.$$

Historicky se problém nalezení čísel x, y pro a_1, b_1, a_2, b_2 takových, že

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = x^2 + y^2,$$

který je ekvivalentní nalezení takového pravoúhlého trojúhelníku jehož odvěsna je součin odvěsen dvou zvolených pravoúhlých trojúhelníků objevuje už před 2000 lety v díle řeckého matematika Diophanta.

Relací na množině M rozumíme podmnožinu uspořádaných dvojic $R \subset M \times M$. Jako příklad můžeme na $\mathbb{R}$ definovat relaci

$$R = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R},\ a < b\},$$

která je formálním ekvivalentem klasické relace ostře menší $<$. Relace může být *reflexivní* pokud

$$\forall a \in M : (a, a) \in R$$

symetrická pokud

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

a *tranzitivní* pokud

$$(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$$

Relace ostře menší není reflexivní ani symetrická a je pouze tranzitivní. Relace, která je současně reflexivní, symetrická a tranzitivní se nazývá relací *ekvivalence*. Relací ekvivalence je třeba relace rovnosti $=$. Pro další úvahy budeme realizovat relaci R graficky. Body M znázorníme jako body v rovině. Pokud pro $a, b \in M$ platí $(a, b) \in R$ nakreslíme šipku z bodu a do bodu b. Například na množině $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, l, m\}$ definujeme relaci

$$R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (f, g), (g, h), (m, e), (l, l)\},$$

kterou můžeme graficky znázornit jako orientovaný graf:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b & f \arrow[r] & g \arrow[dl] & e \\
c \arrow[r] & d & h & l \arrow[loop above] & m \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Tato relace není relací ekvivalence, protože není reflexivní. Jediný prvek který je v relaci sám se sebou je prvek l. Není ani symetrická, protože obsahuje jednostranné šipky a není ani tranzitivní. Aby byla relace reflexivní musí být smyčka na každém prvku. Pro další úvahy budeme předpokládat, že je relace reflexivní a tedy v každém prvku vede smyčka a tyto smyčky nebudeme graficky znázorňovat. Aby byla relace symetrická musí platit, že pokud vede šipka jedním směrem musí vést i opačně. Symetrická relace odpovídá například obrázku:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & b & f \arrow[r, leftrightarrow] & g \arrow[dl, leftrightarrow] & e \arrow[d, leftrightarrow] \\
c \arrow[r, leftrightarrow] & d & h & l & m
\end{tikzcd}$$

Tato relace není tranzitivní, protože například $(a, c), (c, d) \in R$ ale $(a, d) \notin R$. Relace ekvivalence odpovídá například následujícímu obrázku (pokud předpokládáme smyčky na všech uzlech)

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & b \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] & f \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & g \arrow[dl, leftrightarrow] & e \arrow[d, leftrightarrow] \\
c \arrow[r, leftrightarrow] & d & h & l & m
\end{tikzcd}$$

Z obrázků je vidět, že relace ekvivalence určuje na množině M rozklad na podmnožiny, kterým říkáme *třídy relace* a které mají tu vlastnost, že prvky třídy jsou v relaci každý s každým. Současně nejsou v relaci žádné dva prvky z různé třídy.

Pomocí relace ekvivalence můžeme definovat například prostor všech přímek v rovině takto. Vezmeme množinu $\mathbb{R}^2$ na které definujeme relaci

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0 : (x_1, y_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2).$$

Třídy rozkladu jsou pak přímky v $\mathbb{R}^2$. Pokud předpokládáme, že $y \neq 0$, můžeme najít v každé třídě prvek $(\frac{x}{y}, 1)$ a existuje tedy jedno jednoznačná korespondence mezi třídami pro které platí $y \neq 0$ a $\mathbb{R}$. Zbývá jedna třída $(x, 0)$, kterou označujeme jako nekonečno ∞. Na obrázku 3. vidíme geometrický význam projektivního prostoru, každá přímka s nenulovou směrnicí procházející počátkem má průnik s přímkou $y = 1$ právě v jednom bodě a přímka $y = 0$ hraje roli bodu v nekonečnu.

Projektivní geometrii $\mathbb{PC}^1$ definujeme stejným způsobem jen pro komplexní čísla.

Definice. 3.1. *Mějme na $\mathbb{C}^2$ definovanou relaci*

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C},\ (x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2),$$

kde $\lambda \in \mathbb{C}$. Pak třídy relace

$$[(x, y)]_\sim = \{\lambda(x, y) | \lambda \in \mathbb{C}\}$$

tvoří projektivní prostor $\mathbb{PC}^1$.

Prvky projektivního prostor $\mathbb{PC}^1$, takové, že $y \neq 0$ jsou izomorfní komplexním číslům $\mathbb{C}$:

$$\{(x, y) | z \neq 0\} \cong \mathbb{C}.$$

a třídu pro $y = 0$ pak označujeme jako nekonečno:

$$\infty := \{(x, y) | y = 0\}.$$

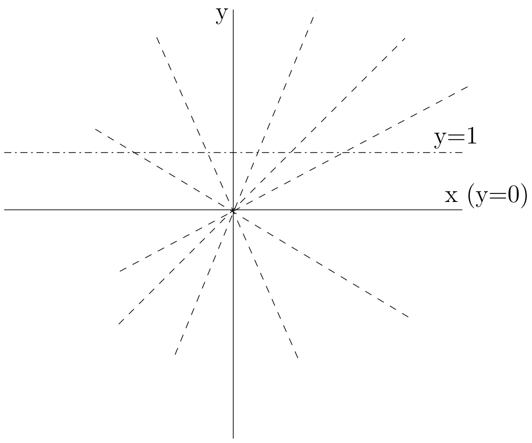

FIGURE 3. Projektivní prostor $\mathbb{R}^1$

Geometricky můžeme $\mathbb{C}^2$ realizovat jako $\mathbb{R}^4$ a prvky $\mathbb{PC}^1$ jsou pak roviny $\mathbb{R}^2$ procházející počátkem zachovávající lineární transformace indukované komplexní strukturou.

4. Topologické vlastnosti $SO(3)$ a popis $SU(2)$

Topologický prostor je souvislý pokud umíme libovolné dva body spojit cestou. Topologický prostor nazveme jednoduše souvislý pokud libovolná cesta začínající i končící ve stejném bodě jde souvislé transformovat do tohoto bodu. Na Obrázku 4. vidíme, že koule je jednoduše souvislá kdežto torus není.

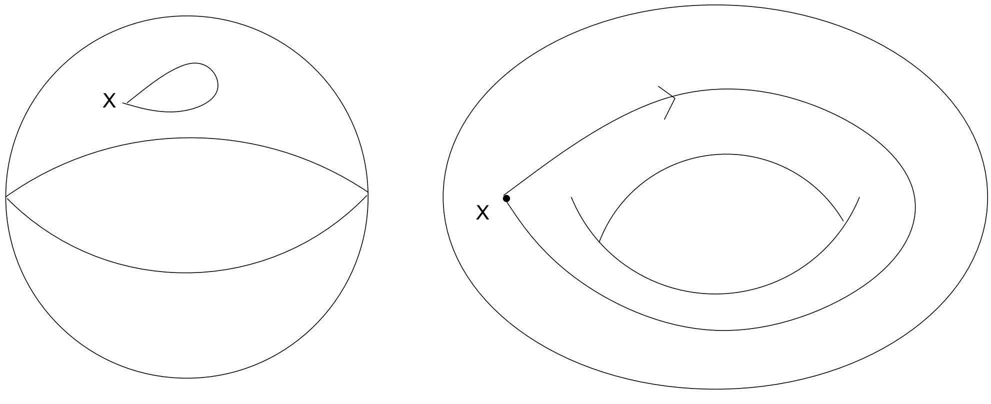

FIGURE 4. Jednoduchá souvislost na příkladech

Grupa $SO(3)$ je grupou ortogonálních matic s jednotkovým determinantem, každá taková matice je rotací kolem osy $n \in \mathbb{R}^3$ o úhel $\psi \in \langle 0, \pi)$ a tato identifikace určuje izomorfismus mezi dvojicemi (n, ψ), kde $|n| = 1$ a prvky $SO(3)$. Dvojice (n, ψ) můžeme pak realizovat jako prvky koule o poloměru π. Opačné body na povrchu koule, tj. body (n, π) a $(-n, \pi)$ určují ale stejnou rotaci a musíme je tedy považovat za totožné. Na Obrázku 5 vidíme řez touto koulí (můžeme třeba předpokládat, že jde o řez rovinou $z = 0$ i když to není podstatné). Na prvním obrázku Obrázku 5 vidíme, že protilehlé body ztotožňujeme, to děláme proto, že rotace odpovídající protilehlým bodům jsou stejné. Na druhém obrázku Obrázku 5 vidíme, že křivka nedotýkající se okraje je stažitelná. Na třetím obrázku Obrázku 5 vidíme, že cesta jde z bodu X nahoru k bodu Q a pak protože horní bod Q spodní bod Q jsou totožné cesta pokračuje od spodního bodu Q k bodu X.

Pokud se budeme snažit tuto cestu transformovat neopustíme hranici, protože pohyb z horní reprezentace bodu Q do vnitřku kruhu vynutí pohyb spodní reprezentace a případná transformace by pak nebyla dána jednoznačně.

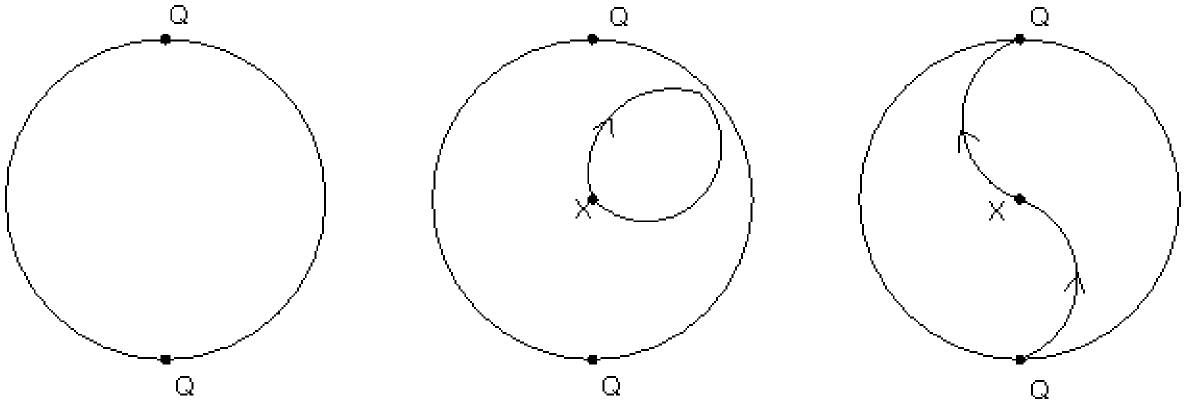

FIGURE 5. Jednoduchá souvislost grupy $SO(3)$

V dalším si zkonstruujeme takzvané *univerzální nakrytí* grupy $SO(3)$, tedy takovou grupu která je jednoduše souvislá a současně je lokálně izomorfní grupě $SO(3)$. Budeme postupovat tak, že si zadefinujeme kruhovou inverzi jako speciální zobrazení ze sféry $\mathbb{S}^2$ do $\mathbb{C}$. Prvek z $SO(3)$ reprezentuje rotaci v $\mathbb{R}^3$, zachovává tedy skalární součin a tedy i normu. Musí tedy zachovávat i sféru $\mathbb{S}^2$. Rotace kolem jednotlivých os pak po kruhové inverzi indukují nějaké zobrazení v $\mathbb{C}$. Toto zobrazení nebude lineární ale mi si ho budeme reprezentovat lineárním zobrazením $\mathbb{PC}^1 \to \mathbb{PC}^1$ na projektivním rozšíření. Všechny pojmy postupně vysvětlíme. Kruhová inverze je zobrazení znázorněné na Obrázku 6. Bod $[x, y, z]$ ze sféry $\mathbb{S}^3$ se zobrazí na bod $a + bi$ z $\mathbb{C}$ tak, že $a + bi$ je průnikem přímky určené severním pólem S a bodem $[x, y, z]$ z rovinou $z = 0$. Vidíme, že takové zobrazení je dáno jednoznačně a je definováno na všech bodech kromě

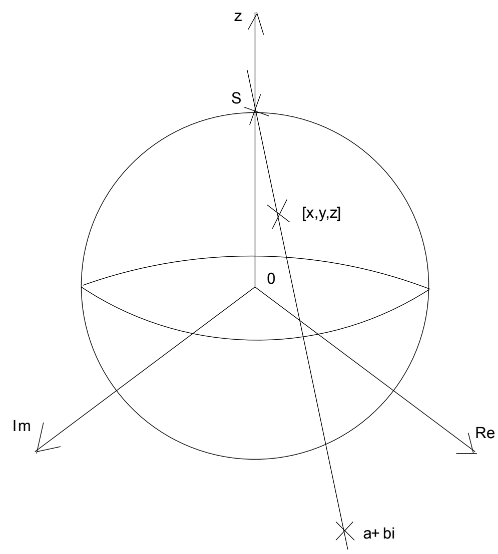

FIGURE 6. Kruhová inverze

severního pólu S. Rozepíšeme teď postupně rotace. Nejjednodušší případ je rotace kolem osy z, v tomto případě je indukovaná rotace na $\mathbb{C}$ středovou rotací a taková je realizována násobením jednotkovým komplexním číslem, tj

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftrightarrow (\cos\varphi + i\sin\varphi)(a + bi) = \mathrm{e}^{i\varphi}(a + bi)$$

Body $\mathbb{C}$ odpovídají bodům v projektivním prostoru $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, tak, že bodu $z \in \mathbb{C}$ odpovídá třída ekvivalence $[(z_1, z_2)] \in \mathbb{C}^2/\sim$, kde relace ekvivalence $\sim$ je definována takto

$$(z_1, z_2) \sim (z_3, z_4) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{C},\ k \neq 0 : (z_1, z_2) = k(z_3, z_4).$$

Hledaná matice s jednotkovým determinantem je pak následující

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \ \det \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} = e^{i\frac{\varphi}{2}} e^{-i\frac{\varphi}{2}} = 1,$$

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} z_1 \\ e^{-i\frac{\varphi}{2}} z_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}}}{e^{-i\frac{\varphi}{2}} z_2} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \frac{z_1}{z_2} \\ 1 \end{pmatrix} \sim e^{i\varphi} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Rotaci kolem osy y o úhel β můžeme realizovat pomocí tří rotací. Rotací kolem osy x o úhel $\frac{\pi}{2}$ rotací kolem osy z o úhel beta a nakonec rotací kolem osy x o úhel $\frac{\pi}{2}$. Potřebujeme tedy nalézt matici transformace kolem osy x o úhel $\pm\frac{\pi}{2}$. Taková rotace zobrazuje v $\mathbb{R}^3$ následující prvky:

$$(0, 0, -1) \mapsto (0, -1, 0) \mapsto (0, 0, 1) \mapsto (1, 0, 0) \mapsto (0, 0, -1)$$

což po stereografické projekci indukuje zobrazeni na $\mathbb{C}$

$$0 \mapsto i \mapsto \infty \mapsto -i \mapsto 0$$

které můžeme realizovat pomoci Möbiova transformace

$$w(z) = -i\frac{z + i}{z - i}$$

která není lineární, ale Möbiovu transformaci můžeme v $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ realizovat maticí

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Celkově tedy dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy y o úhel $\frac{\pi}{2}$ indukuje na $\mathbb{C}$ transformaci

$$\infty \mapsto 1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto \infty,$$

kterou můžeme na $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ realizovat maticí

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a výsledná matice rotace o úhel α kolem osy x je pak dána kompozicí

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2} \\ i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Dostáváme tedy matice jejiž složením dostaneme transformace $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ odpovídající rotacím $\mathbb{R}^3$ patřícím do $SO(3)$

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} & i\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

ležící v $SL(2, \mathbb{C})$ mající tvar

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

a protože $\det(A) = 1$ musí tedy $a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2$ ležet na 3–dimenzionální sféře

$$|a|^2 + |b|^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1.$$

Tyto matice opět tvoří grupu, která se označuje $SU(2)$ a nazývá speciální unitární. Rotace U a $-U$ indukují stejnou rotaci v $SO(3)$.

5. Kvaterniony

V této kapitole prodiskutujeme geometrické vlastnosti kvaternionů a jejich využití pro popis sférického pohybu. Budeme se převážně opírat o knihy [4, 6] a částečně i o knihu [3]. Kniha [6] je matematickým úvodem do Lieovy teorie, kniha [4] je monografie o sférickém pohybu motivovaná technickou praxí. Konečně kniha [3] je dnes již klasickou literaturou dávající do souvislosti kinematiku a Lieovy grupy. Nejprve připomeňme, že kvaterniony $\mathbb{H}$ rozumíme čtveřice reálných čísel $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ spolu se dvěma binárními operacemi

$$\begin{aligned}(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) =&(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2),\\ (a_1, b_1, c_1, d_1) \times (a_2, b_2, c_2, d_2) =&(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_2c_2,\\ &a_1c_2 + c_1a_2 - b_1d_2 + d_1b_2, a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\end{aligned}$$

Je lehké ověřit, že takto zadefinované kvaterniony tvoří opět komutativní těleso. Poznamenejme jen, že pro prvek $(a, b, c, d) \in \mathbb{H}$ dostaneme inverzi ve tvaru

$$(a, b, c, d)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a, -b, -c, -d),$$

souvislost s klasickým zápisem $a + bi + cj + dk := (a, b, c, d)$ se lehce ověří výpočtem

$$\begin{aligned}i^2 &= (0, 1, 0, 0) \times (0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 0, 0) = -1\\ j^2 &= (0, 0, 1, 0) \times (0, 0, 1, 0) = (-1, 0, 0, 0) = -1\\ k^2 &= (0, 0, 0, 1) \times (0, 0, 0, 1) = (-1, 0, 0, 0) = -1\\ ij &= (0, 1, 0, 0) \times (0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1) = k\\ ji &= (0, 0, 1, 0) \times (0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1) = -k\end{aligned}$$

a není těžké následně dokázat, že definice kvaternionů jako rozšíření tělesa reálných čísel o prvky i, j, k, kde $i^2 = j = k = -1$ a $ij = -ji = k$ (tj. $\mathbb{H} = \mathbb{R}[i, j, k]$) je s naší definici ekvivalentní.

Stejně jako komplexní čísla můžeme analogicky reprezentovat kvaterniony $\mathbb{H}$ komplexními maticemi

$$q = \begin{pmatrix} a + id & -b - ic \\ b - ic & a - id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

kde $\alpha = a + di$ a $\beta = b + ic$. Při tomto popisu je determinant příslušné matice opět roven velikosti kvaternionu, tj číslu $a^2+b^2+c^2+d^2$. Ve vhodné bázi můžeme opět libovolný kvaternion vyjádřit jako $q = a1 + bi + cj + dk$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

a dostat klasické vztahy

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k.$$

Pokud do komplexních matic pro 1 a i dosadíme jejich maticové reprezentace dostaneme reprezentaci kvaternionů pomocí reálných matic 4×4:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a opět z vlastností determinantů plyne vztah

$$\begin{aligned}(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2) &= (a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)^2+\\ &+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)^2+\\ &+(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)^2+\\ &+(a_1d_2-b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)^2.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že čistě imaginární kvaterniony $\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$ tvoří ortogonální komplement k $\mathbb{R}1$, že součet dvou ryze imaginárních kvaternionů je opět ryze imaginární kvaternion, ale že součin dvou čistě imaginárních kvaternionů nemusí být vždy imaginární. Pří rozepsání součinu pro libovolné dva imaginární kvaterniony

$$\begin{aligned}uv &= (u_2v_2+u_3v_3+u_4v_4)+(u_2v_3-u_3v_2)i+(u_1v_3-u_3v_1)j\\ &+(u_1v_2-u_2v_1)k = -u\cdot v+u\times v\end{aligned}$$

je zřejmé, že součin uv je ryze imaginární kvaternion pokud u a v jsou ortogonální a ryze reálný pokud jsou rovnoběžné.

Stejně jako u komplexních čísel sféra jednotkových kvaternionů

$$\mathbb{S}^3 = \{z\in\mathbb{H} : |z| = 1\}$$

reprezentuje rotace $\mathbb{R}^4$ jak ukazuje následující postup. Reprezentujeme $\mathbb{R}^3$ jako ryze imaginární kvaterniony $\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$. Abychom mohli použít kvaterniony pro popis rotace v $\mathbb{R}^3$ musíme zavést operaci konjugace $q^{-1}tq$. Pokud kvaternion t absolutní hodnoty 1 napíšeme ve tvaru

$$t = \cos\theta + u\sin\theta,$$

kde u je jednotkový ryze imaginární kvaternion tvaru $\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$ pak konjugování pomocí t reprezentuje rotaci kolem osy u o úhel 2θ. Na závěr poznamenejme, že složení dvou takových rotací je opět rotace a že, celkově tyto rotace tvoří grupu.

Konkrétně poznamenejme, že sférický pohyb odpovídá vždy konjugování prvkem $t=\cos\theta+u\sin\theta$, kde $\theta\in\langle 0,2\pi\rangle$ a $u\in\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$. Grupa takto zadefinovaných zobrazení je stejně jako $SU(2)$ univerzálním nakrytím grupy $SO(3)$.

Cylindrický pohyb, tedy pohyb podle už pevně zvolené osy u, můžeme realizovat konjugováním prvky $t=\cos\theta+u\sin\theta$, kde $\theta\in\langle 0,2\pi\rangle$ a klasické posunutí realizujeme jednoduše jako přičtení prvku z $\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$.

References

[1] P. Horník. *Teorie Lieových grup v robotice*, Brno, 2012. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky.

[2] J. Hrdina, *Některé kinematické dvojice*, Kvaternion, Vol 1., No1., VUT v Brně (2012)

[3] A. Karger, J. Novák, Prostorová kinematika a Lieovy grupy, Státní nakladatelství technické literatury, (1978)

[4] J. B. Kuipers, Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual, Princeton University Press, pp. 400 (2002)

[5] J.M. Selig, Geometric Fundamentals of Robotics, Monographs in Computer Science, Springer, (2004)

[6] John Stillwell, Naive Lie Theory, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, pp. 218 (2008)

[7] B. Petrovič. *Matematické principy navigace*, Brno, 2011. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky.

[8] M. Pivovarník. *Matematické principy robotiky*, Brno, 2012. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky.

[9] M. Pivovarník. *Geometrické algoritmy v robotice*, Brno, 2010. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky.