

ZÁPOČTOVÁ PRÁCE Z MATEMATIKY 2M-K

K udělení zápočtu postačuje správné vyřešení poloviny příkladů.

Termín odevzdání od 3. 3. 2023 do 5. 5. 2023, 12.00.

(Příklady slouží rovněž jako příprava ke zkoušce.)

Zkoušející: J. Klaška

TÉMA I. (definiční obor)

Vyšetřete a nakreslete definiční obor dané funkce $f(x, y)$.

$$(a) f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - xy^2}}{\ln(x + 1)}, \quad (b) f(x, y) = \frac{2 + y}{\arccos(|x| + y)}, \quad (c) f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{\ln(x^3 + y)}.$$

TÉMA II. (lokální extrémy)

Vypočtěte lokální extrémy dané funkce $f(x, y)$.

$$(a) f(x, y) = x + y^2 - \ln(\sqrt{x}). \quad (b) f(x, y) = (y^2 - 7x)e^{-2x}. \quad (c) f(x, y) = \ln(x - y) - x^2 + 3y.$$

TÉMA III. (Taylorův polynom)

Vypočtěte Taylorův polynom prvního stupně funkce $f(x, y)$ v bodě A .

$$(a) f(x, y) = e^{1-x} \sqrt{x^2 + y}, \quad A = [1, 3].$$

$$(b) f(x, y) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{1 + y^2}\right), \quad A = [4, -1].$$

$$(c) f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right), \quad A = [-1, 1].$$

TÉMA IV. (dvojitý integrál – Fubiniho věta)

Vypočtěte dvojrozměrné integrály.

$$(a) \iint_M y \, dx dy, \quad M : y = x^2, \, x + 2y = 3, \, y = 0.$$

$$(b) \iint_M x \, dx dy, \quad M : xy = 1, \, x - y = 0, \, y = 2.$$

$$(c) \iint_M x^2 y \, dx dy, \quad M : x^2 + y^2 \leq 2x, \, y \geq 0.$$

TÉMA V. (Transformace do polárních nebo do válcových souřadnic)

Pomocí transformace do polárních nebo válcových souřadnic vypočtete integrály.

$$(a) \iint_M \sin(x^2 + y^2) \, dx dy, \quad M : x^2 + y^2 \leq 1, \, x, y \geq 0.$$

$$(b) \iiint_M dx dy dz, \quad M : x^2 + y^2 \leq 1, \, z \leq \sqrt{x^2 + y^2} + 1, \, z \geq 0.$$

$$(c) \iiint_M dx dy dz, \quad M : z \leq 3 - x^2 - y^2, \, 2z \geq x^2 + y^2.$$

TÉMA VI. (diferenciální rovnice prvního řádu)

Řešte počáteční úlohu.

$$(a) \, y' + y = e^x, \, y(0) = 2, \quad (b) \, y' + 2y = 4x, \, y(1) = 1, \quad (c) \, y' + y = e^{-x}, \, y(0) = -1.$$

TÉMA VII. (diferenciální rovnice druhého řádu)

Řešte počáteční úlohu.

$$(a) \, y'' + y' - 2y = 0, \, y(0) = 2, \, y'(0) = -1.$$

$$(b) \, y'' - 2y' + y = 0, \, y(0) = 1, \, y'(0) = 0.$$

$$(c) \, y'' - 4y' + 5y = 0, \, y(0) = 2, \, y'(0) = 1.$$

V Brně, 3. 3. 2023

Jiří Klaška