Příklady z Matematiky 3

1. Určete součet řad

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2.3^n-5.2^n}{5^n}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n+1}{3^n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n+2.4^n}{4^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ e) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(n+1)(n+3)}$

Řešení: **a)** $-\frac{1}{3}$, **b)** $\frac{21}{10}$, **c)** $+\infty$, **d)** $\frac{1}{2}$, **e)** 3.

2. Rozhodněte a dokažte, zda daná řada konverguje či diverguje

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n}{n!}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(2+\frac{1}{n})^n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt[2]{n^5}+2n+1}$

Řešení: **a)** konverguje, **b)** diverguje, **c)** diverguje, **d)** konverguje.

3. Rozhodněte a dokažte, zda daná řada konverguje absolutně, neabsolutně či diverguje

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(3+\frac{1}{n})^n}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+2n+1}{n^3+n^2+3n}$

Řešení: **a)** diverguje, **b)** konverguje neabsolutně, **c)** konverguje absolutně, **d)** konverguje neabsolutně.

4. Určete obor konvergence funkční řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n x^n$

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\ln x)^n$ f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^n}$

Řešení: **a)** $(-1, 1>$, **b)** $<-1, 1)$, **c)** $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, **d)** $(-2, 0>$, **e)** $(\frac{1}{e}, e)$, **f)** $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

5. Určete součet mocninné řady (nezapomeňte určit obor konvergence)

a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+2)x^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Řešení: **a)** $\frac{2-x}{(x-1)^2}$ pro $x \in (-1, 1)$, **b)** $-\ln(1-x)$ pro $x \in <-1, 1)$

6. Určete Taylorovu řadu funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 0$, dále její poloměr resp. obor konvergence.

a) $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{e^x}}$

c) $f(x) = \frac{\arctan \frac{x}{5}}{x}$ d) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}}$

Řešení: **a)** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n+1)!}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$, **b)** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n! 3^n}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$,

c) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)5^{2n+1}}$ pro $x \in <-5, 5>$, **d)** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \frac{x^n}{3^n}$ pro $x \in (-3, 3)$

7. Pomocí Taylorových řad (z Příkladu 6.) spočítejte přibližnou hodnotu integrálu

a) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x^2}{x}\, dx$ s chybou $< 10^{-4}$ b) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{e^x}}\, dx$ s chybou $< 10^{-4}$

c) $\int\limits_0^1 \frac{\arctan\frac{x}{5}}{x}\,dx$ s chybou $< 10^{-4}$ d) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}}{x}\,dx$ pomocí 3 členů příslušného rozvoje

Řešení: **a)** $\sum\limits_{n=0}^{1}(-1)^n \frac{1}{2^{4n+2}(4n+2)(2n+1)!} = 0.124567$, **b)** $\sum\limits_{n=0}^{2}(-1)^n \frac{1}{n!3^{2n+1}(n+1)} = 0.3155$,
c) $\sum\limits_{n=0}^{1}(-1)^n \frac{1}{5^{2n+1}(2n+1)^2} = 0.199111$, **d)** $\frac{5}{54} + \ln 2$

8. Pomocí příslušného rozvoje Taylorovy řady spočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-\frac{2x}{3})}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan(\frac{x}{5})}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[2]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$

Řešení: **a)** $-\frac{2}{3}$, **b)** $\frac{1}{5}$, **c)** $-\frac{5}{6}$.

9. Základní metody řešení ODR1 - najděte obecné řešení rovnic

a) $y' = yx^2 + y$ (rovnice se sep. proměnnými)

b) $y' = \frac{x+1}{x^2 y}$ (rovnice se sep. proměnnými)

c) $y' = \frac{y}{x} + x$ (LODR 1)

d) $y' = y + e^x \cos x$ (LODR 1)

e) $y' = -2y + y^2 e^x$ (Bernoulliova rovnice)

f) $y' = y + \frac{4x}{y}$ (Bernoulliova rovnice)

g) $(x^2 + y^2)\,dx + (2xy + y^2)\,dy = 0$ (exaktní rovnice)

h) $(2xy + y)\,dx + (x^2 + x + 2y)\,dy = 0$ (exaktní rovnice)

i) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ (substituce $u = \frac{y}{x}$)

Řešení: **a)** $y = Ce^{\frac{x^3}{3}+x}$**, b)** $y^2 = 2\ln x - \frac{2}{x} + C$**, c)** $y = (x + C)x$**, d)** $y = e^x(\sin x + C)$**, e)** $\frac{1}{e^x+e^{2x}C}$**, f)** $y^2 = e^{2x}C - 2 - 4x$**, g)** $\frac{x^3}{3} + xy^2 + \frac{y^3}{3} = C$**, h)** $x^2y + xy + y^2 = C$**, i)** $y^2 - x^2 = Cy$, $y = 0$**.**

10. Aplikace ODR1

a) Rychlost rozpadu Plutonia je přímo úměrná množství dosud nerozpadlého Plutonia. Kolik procent původního množství Plutonia se rozpadne za 100 let, je-li poločas rozpadu Plutonia^{240} 650 let?

b) Rychlost ochlazování tělesa na vzduchu je přímo úměrná rozdílu teploty T tělesa a teploty T_v vzduchu. Je-li teplota vzduchu $T_v = 30°\mathrm{C}$ a těleso se za 30 minut ochladilo z počáteční teploty $T_0 = 150°\mathrm{C}$ na $100°\mathrm{C}$ za jak dlouho se ochladí na $50°\mathrm{C}$?

Řešení: **a)** Rozpadne se 5,2 % Plutonia. **b)** Těleso se ochladí na 50°C za cca 100 minut.

11. Řešení LODRn

a) Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' - 3y = 10\sin x$, dále určete řešení splňující počáteční podmínky $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

b) Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 3y' + 2y = 6e^{2x}$, dále určete řešení splňující počáteční podmínky $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

c) Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' = 4x + 2$, dále určete řešení splňující počáteční podmínky $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

d) Najděte obecné řešení rovnice $y'' + y = 3\sin(2x) - 4e^x$.

Řešení: **a)** $C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \cos x - 2\sin x$; $\frac{e^{3x}}{4} - \frac{5e^{-x}}{4} + \cos x - 2\sin x$**, b)** $C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{2}$; $2e^{-x} - \frac{3e^{-2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{2}$**, c)** $C_1 + C_2e^{2x} - x^2 - 2x$; $-1 + e^{2x} - x^2 - 2x$**, c)** $C_1\sin x + C_2\cos x - \sin(2x) - 2e^x$

12. Řešení ODR pomocí mocninných řad

a) Pomocí mocninné řady (3 členů) určete řešení počáteční úlohy

$$y' - 2\sqrt{y} + xy = 1, \quad y(0) = 1$$

b) Pomocí mocninné řady (4 členů) určete řešení počáteční úlohy

$$y'' - xy' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 1,\; y'(0) = \frac{3}{2}$$

c) Pomocí mocninné řady (4 členů) určete řešení počáteční úlohy

$$y''x + x^2y^2 = 1, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 0$$

Řešení: **a)** $y = 1 + 3x + x^2$**, b)** $y = 1 + \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{8}$**, c)** $y = 2 - \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{5}{6}(x-1)^3$

13. Systémy LODR

a) Najděte řešení homogenního systému LODR1

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + y_2. \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínky $y_1(0) = 4,\ y_2(0) = 1$.

b) Najděte řešení homogenního systému LODR1

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + y_2. \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínky $y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 6$.

c) Najděte obecné řešení nehomogenního systému LODR1

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 2y_2 + 4 \\ y_2' &= 2y_1 - 3y_2 - 2 \end{aligned}$$

Řešení: **a)** $y_1(x) = 3e^{4x} + e^{-x},\ y_2(x) = 2e^{4x} - e^{-x}$**, b)** $y_1(x) = 6e^{5x} - 3e^{-x},\ y_2(x) = 3e^{5x} + 3e^{-x}$ **c)** $y_1(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} - 8,\ y_2(x) = C_1\frac{e^x}{2} + 2e^{-2x} - 6$