Fourierova Analýza

Matej Dolník

30. ledna 2020

Děkuji svému školiteli prof. Alexandre Lomtatidze DrSc. za ochotu a pomoc při tvorbě tohoto materiálu. Dále děkuji Ing. Barboře Adámkové a Ing. Aleně Valové za vzorné sepisování si poznámek na hodinách.
Tvorba tohoto materiálu podpořena projektem RV90900000323.

Obsah

Kapitola 1

Vztah měřitelných a spojitých funkcí

1.1 Měřitelné funkce

Pro zavedení pojmu měřitelnosti funkce budeme potřebovat rozumné označení některých vybraných množin. Proto pro měřitelnou množinu $E \subset \mathbb{R}$, zobrazení $f : E \to \mathbb{R}$ a $a, b \in \mathbb{R}$ zavedeme označení

$$\begin{aligned} E(f > a) &:= \{x \in E : f(x) > a\} \\ E(f \geq a) &:= \{x \in E : f(x) \geq a\} \\ E(f \leq a) &:= \{x \in E : f(x) \leq a\} \\ E(f = a) &:= \{x \in E : f(x) = a\} \\ E(a \leq f \leq b) &:= \{x \in E : a \leq f(x) \leq b\} \end{aligned}$$

a podobně.

DEFINICE 1.1.1 (Měřitelná funkce) *Nechť E je měřitelná množina. Funkce $f : E \to \mathbb{R}$ se nazývá měřitelná funkce pokud pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina $E(f > a)$ měřitelná.*

Následující věta je triviálním důsledkem Definice 1.1.1.

VĚTA 1.1.2 *Nechť $\operatorname{mes}(E) = 0$. Potom $f : E \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. (Každá funkce f definována na množině míry nula je měřitelná funkce).*

DEFINICE 1.1.3 (Zúžení funkce) *Nechť $f : E \to \mathbb{R}$. Nechť $A \subset E$. Pak funkce $f|_A : A \to \mathbb{R}$ splňující $f \equiv f|_A$ na A se nazývá zúžením funkce f na množinu A.*

VĚTA 1.1.4 *Nechť E je měřitelná množina a $f : E \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Nechť dále $A \subset E$ je měřitelná množina a $f|_A : A \to \mathbb{R}$ je zúžení funkce f na A. Potom je $f|_A$ měřitelná funkce.*

Důkaz. Z Definice 1.1.1 víme, že $E(f > a)$ je měřitelná množina. Z teorie Lebesgueovy míry je známo, že průnikem konečně mnoha měřitelných množin je opět měřitelná množina. Tedy množina $E(f|_A > a) = A \cap E(f > a)$ je také měřitelnou množinou pro libovolné $a \in \mathbb{R}$. □

VĚTA 1.1.5 *Nechť E je měřitelná množina a $E = \bigcup_{k\in I} E_k$ kde I je nejvíc spočetná množina a každá z množin E_k je měřitelná. Nechť dále $f : E \to \mathbb{R}$ a zúžení $f|_{E_k} : E_k \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Potom je f měřitelná.*

Důkaz. Jelikož platí, že $E(f > a) = \bigcup_{k\in I} E_k(f > a)$ pro libovolné a, funkce f je měřitelná funkce. □

V mnoha případech můžeme pracovat s funkcemi f a g jako se stejnými, pokud platí, že jejich rozdíl je nulová funkce. Proto zavádíme následující relaci:

DEFINICE 1.1.6 (Ekvivalence funkcí v míře) *Nechť $f, g : E \to \mathbb{R}$. Řekněme, že f a g jsou v relaci ($f \sim g$) pokud* $\operatorname{mes}(E(f \neq g)) = 0$.

VĚTA 1.1.7 *Relace $\sim$ je ekvivalence.*

Důkaz. Důkaz je ponechán laskavému čtenáři jako cvičení. □

VĚTA 1.1.8 *Nechť $f, g : E \to \mathbb{R}$ a $f \sim g$. Nechť dále f je měřitelná funkce. Potom funkce g je také měřitelná.*

Důkaz. Položme $A = E(f \neq g)$ a $B = E \setminus A$. Poněvadž $f \sim g$, platí, že $\operatorname{mes}(A) = 0$. Tedy množina B je měřitelná. Vzhledem k Větě 1.1.4 $f\big|_B$ je také měřitelná funkce. Avšak $f|_B \equiv g|_B$ a tedy $g|_B$ je měřitelná.
Zbývá ukázat, že platí $g\big|_A$ je měřitelná. Jelikož platí, že $\operatorname{mes}(A) = 0$, usuzujeme, že $g\big|_A$ je měřitelná.

Použitím Věty 1.1.5 dostáváme, že $g : E \to \mathbb{R}$ je měřitelná, neboť $E = A \cup B$. □

VĚTA 1.1.9 *Nechť E je měřitelná množina, $f : E \to \mathbb{R}$ a $f(x) = c$ pro $x \in E$. Potom je f měřitelná funkce.*

Důkaz. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Zřejmě platí

$$
\begin{aligned}
E(f > a) &= E \quad \text{je-li } a < c,\\
E(f > a) &= \emptyset \quad \text{je-li } a \geq c.
\end{aligned}
$$

Tedy pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina $E(f > a)$ měřitelná. □

DEFINICE 1.1.10 (Charakteristická funkce) *Charakteristická funkce množiny E je funkce $\chi : E \to \{0, 1\}$.*

DEFINICE 1.1.11 (Jednoduchá funkce) *Jednoduchá funkce na $\mathbb{R}$ je funkce $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ měřitelná, nulová mimo kompaktní množinu, nabývající jenom konečně mnoha hodnot z $\mathbb{R}$. Množina jednoduchých funkcí na $\mathbb{R}$ se značí $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

ÚLOHA 1.1.12 *Ukažte, že každá jednoduchá funkce se dá zapsat jako součet konečně mnoha charakteristických funkcí.*

DŮSLEDEK 1.1.13 *Každá jednoduchá funkce je měřitelná.*

ÚLOHA 1.1.14 *Dokažte Důsledek 1.1.13.*

VĚTA 1.1.15 *Nechť E je měřitelná množina a $f : E \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Potom pro každé $a \in \mathbb{R}$ každá z množin*

$$E(f \geq a), \quad E(f = a), \quad E(f \leq a), \quad E(f < a)$$

je měřitelná.

Důkaz. Dá se ukázat, že $E(f \geq a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > a - \frac{1}{k})$. Tedy $E(f \geq a)$ je měřitelná množina. Měřitelnost zbývajících množin plyne z následujících vztahů:

$$\begin{aligned} E(f = a) &= E(f \geq a) \setminus E(f > a), \\ E(f \leq a) &= E \setminus E(f > a), \\ E(f < a) &= E \setminus E(f \geq a). \end{aligned}$$

□

POZNÁMKA 1.1.16 *Zřejmě platí $E(f > a) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f \geq a + \frac{1}{k})$. Proto platí, že je-li pro každé $a \in \mathbb{R}$ množina $E(f \geq a)$ měřitelná, pak pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina $E(f > a)$ měřitelná. V Definici 1.1.1 místo $E(f > a)$ můžeme předpokládat měřitelnost $E(f \geq a)$. Analogicky lze zjistit, že v Definici 1.1.1 místo $E(f > a)$ můžeme psát $E(f \leq a)$ resp. $E(f < a)$.*

V důsledku Věty 1.1.15 a 1.1.9 dostáváme následující větu:

VĚTA 1.1.17 *Nechť $f : E \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce a $c \in \mathbb{R}$. Potom každá z funkcí $f + c, |f|$ a f^2 je měřitelná. Je-li navíc $f(x) \neq 0$ pro $x \in E$ pak je funkce $\frac{1}{f}$ také měřitelná.*

Důkaz. Měřitelnost funkce $f + c$ plyne ze vztahu

$$E(f + c > a) = E(f > a - c).$$

Měřitelnost funkce cf pro $c = 0$ plyne z Věty 1.1.9. Je-li $c \neq 0$, pak

$$\begin{aligned} E(cf > a) &= E(f > \frac{a}{c}) && \text{pro } c > 0, \\ E(cf > a) &= E(f < \frac{a}{c}) && \text{pro } c < 0. \end{aligned}$$

měřitelnost funkce cf plyne z Věty 1.1.15.
Měřitelnost $|f|$ plyne ze vztahů

$$\begin{aligned} E(|f| > a) &= E && \text{pro } a < 0, \\ E(|f| > a) &= E(f > a) \cup E(f < -a) && \text{pro } a > 0. \end{aligned}$$

Měřitelnost funkce f^2 plyne ze vztahů

$$\begin{aligned} E(f^2 > a) &= E && \text{pro } a < 0, \\ E(f^2 > a) &= E(|f| > \sqrt{a}) && \text{pro } a > 0. \end{aligned}$$

Měřitelnost funkce $\frac{1}{f}$ plyne ze vztahů

$$
\begin{aligned}
&E(\frac{1}{f} > a) = E(f > 0) && \text{pro } a = 0,\\
&E(\frac{1}{f} > a) = E(f > 0) \cap E(f < \frac{1}{a}) && \text{pro } a > 0,\\
&E(\frac{1}{f} > a) = E(f > 0) \cup \Big(E(f < 0) \cap E(f < \frac{1}{a})\Big) && \text{pro } a < 0.
\end{aligned}
$$

□

VĚTA 1.1.18 *Nechť $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom f je měřitelná.*

Důkaz. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Poněvadž funkce f je spojitá, zobrazuje kompaktní množiny na kompaktní, množina $E(f \leq a) = \{x \in [\alpha, \beta] : f(x) \leq a\}$ je kompaktní (a tedy uzavřená a ohraničená v $\mathbb{R}$). Měřitelnost f pak plyne z Poznámky 1.1.16. □

VĚTA 1.1.19 *Nechť $M \subset [\alpha, \beta]$ a $\chi_M : [\alpha, \beta] \to \{0, 1\}$ je charakteristickou funkcí množiny M. Potom funkce χ_M je měřitelná právě tehdy, když je měřitelná množina M.*

Důkaz. Nechť χ_M je měřitelná funkce. Potom měřitelnost množiny M plyne z rovnosti

$$M = E(\phi_M > 0).$$

Nechť nyní M je měřitelná množina. Zřejmě platí

$$
\begin{aligned}
&E(\phi_M > a) = \emptyset && \text{pro } a \geq 1,\\
&E(\phi_M > a) = M && \text{pro } a \in [0, 1[,\\
&E(\phi_M > a) = [\alpha, \beta] && \text{pro } a < 0.
\end{aligned}
$$

Tedy pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina $E(\phi_M > a)$ měřitelná. □

POZNÁMKA 1.1.20 *Z Věty 1.1.19 plyne existence měřitelných funkcí.*

ÚLOHA 1.1.21 *Zkonstruujte nespojitou měřitelnou funkci.*
Pomůcka: Použijte Větu 1.1.19.

1.2 Vlastnosti měřitelných funkcí

LEMMA 1.2.1 *Nechť $f, g : E \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Potom je množina $E(f > g)$ měřitelná.*

Důkaz. Víme, že $Q = \{r_1, r_2, ...\}$. Jelikož množiny $E(f > r_k)$ a $E(g < r_k)$ jsou měřitelné pro všechna $k \in \mathbb{N}$, měřitelnost spočetně mnoha jejich průniků

$$E(f > g) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f > r_k) \cap E(g < r_k)$$

je také měřitelná množina. □

VĚTA 1.2.2 *Nechť $f, g : E \to \mathbb{R}$ jsou konečné a měřitelné funkce. Potom funkce $f - g$, $f + g$ a $f \cdot g$ jsou měřitelné. Je-li navíc $g(x) \neq 0$ pro $x \in E$, pak je funkce $\frac{f}{g}$ také měřitelná.*

Důkaz. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Vzhledem k Větě 1.1.17 je funkce $g + a$ měřitelná. Proto plyne z Lemma 1.2.1, že množina $E(f > g + a)$ je měřitelná. Avšak $E(f - g > a) = E(f > g + a)$. Tedy funkce $f - g$ je také měřitelná funkce.
Jednoduchou úpravou dostáváme, že také funkce $f + g = f - (-g)$ je měřitelná. Poněvadž jsme už dokázali, že $f + g$ a $f - g$ jsou měřitelné funkce, vzhledem k Věte 1.1.17 také funkce $(f + g)^2$ a $(f - g)^2$ jsou měřitelné. Navíc funkce

$$fg = \frac{1}{4}\Big((f + g)^2 - (f - g)^2\Big)$$

a tedy fg je měřitelná funkce.
Na závěr, je-li $g(x) \neq 0$ pro $x \in E$, vzhledem k Věte 1.1.17 je měřitelná také funkce $\frac{1}{g}$. Tedy $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ je měřitelná funkce. □

VĚTA 1.2.3 *Nechť $f_k : E \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ jsou měřitelné funkce. Nechť pro každé $t \in E$ existuje konečná limita*

$$F(t) := \lim_{k\to\infty} f_k(t). \tag{1.1}$$

Potom funkce $F : E \to \mathbb{R}$ je měřitelná.

Důkaz. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Nechť dále pro $m, n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$A_m^k := E(f_k > a + \frac{1}{m}),$$
$$B_m^n := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_m^k.$$

Zřejmě množiny A_m^k, B_m^n jsou měřitelné pro všechna $m, n, j \in \mathbb{N}$.
Chceme ukázat, že

$$E(F > a) = \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} B_m^n. \tag{1.2}$$

Nechť $t_0 \in E(F > a)$, t.j. $F(t_0) > a$. Pak existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $F(t_0) < a + \frac{1}{m_0}$. Dále, vzhledem k (1.1) existují $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$f_k(t_0) > a + \frac{1}{m_0} \qquad \text{pro } k \geq n_0.$$

Tedy $t_0 \in A_{m_0}^k$ pro $k \geq n_0$. Proto $t_0 \in B_{m_0}^{n_0}$ a tedy $t_0 \in \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} B_m^n$. Jinými slovy jsme dokázali, že

$$E(f > a) \subset \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} B_m^n. \tag{1.3}$$

Nechť nyní $t_0 \in \bigcup\limits_{m,n\in\mathbb{N}} B_m^n$. Pak existují $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $t_0 \in B_{m_0}^{n_0}$ a tedy $t_0 \in A_{m_0}^k$ pro $k \geq n_0$. Tudíž dostáváme

$$f_k(t_0) < a + \frac{1}{m_0} \quad \text{pro } k \geq n_0.$$

Odtud, vzhledem k (1.1) obdržíme, že $F(t_0) \geq a + \frac{1}{m_0}$ a tedy $t_0 \in E(f > a)$. Dokázali jsme tedy, že

$$\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} B_m^n \subset E(F > a).$$

Vezmeme-li v úvahu také vztah (1.2), zjišťujeme, že množina $E(F > a)$ je sjednocení spočetně mnoha měřitelných množin a tedy je měřitelná. □

Věta 1.2.4 *Nechť $f_k : E \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ jsou měřitelné funkce. Nechť dále pro skoro všechna $t \in E$ platí*

$$F(t) = \lim_{k\to\infty} f_k(t).$$

Potom je funkce F měřitelná.

Důkaz. Označme E_0 množinu těch $t \in E$ pro které neplatí (1.1). Zřejmě $\text{mes}(E_0) = 0$. Proto množina $E \setminus E_0$ je měřitelná. Vzhledem k Věte 1.2.3 (pro $E \setminus E_0$) funkce $F : E \setminus E_0 \to \mathbb{R}$ je měřitelná a tedy také $F : E \to \mathbb{R}$ je měřitelná. □

1.3 Konvergence podle míry

V této sekci je zaveden pojem konvergence podle míry a následně je studován jeho vztah s ostatními typy konvergence, zejména s konvergencí skoro všude.

Úmluva 1.3.1 *V následujícím odstavci se objeví množiny $E(|f - g| \geq a)$ a $E(|f - g| < a)$, kde $f, g : E \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné. Jestli pro nějaké $t_0 \in E$ nastane situace, že $f(t_0)$ a $g(t_0)$ mají nekonečnou hodnotu stejného znamínka, pak rozdíl $|f(t_0) - g(t_0)|$ není definován. Budeme tedy pro jednoduchost předpokládat, že $t_0 \in E(|f - g| \geq a)$.*

Věta 1.3.2 (Lebesgue) *Nechť funkce $f_k : E \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ jsou měřitelné a skoro všude konečné funkce. Nechť dále $f : E \to \mathbb{R}$ je skoro všude konečná funkce a*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

pro skoro všechna $x \in E$. Potom pro každé $\delta > 0$ platí

$$\lim_{k\to\infty} \text{mes}\Big(E(|f_k(x) - f| \geq \delta)\Big) = 0. \tag{1.4}$$

Věta 1.3.2 je dobrou motivací pro následující definici [1].

[1] Definice konvergence podle míry má obrovský význam, zejména v teorii pravděpodobnosti. V skutku, konečná míra P vybavená vlastností, že $P(E) = 1$ se nazývá pravděpodobnostní mírou. Pak se konvergenci podle míry hovoří aj konvergenci v pravděpodobnosti.

DEFINICE 1.3.3 (Konvergence podle míry, Riesz) *Nechť $f_k : E \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a $f : E \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné a skoro všude konečné funkce. Řekněme, že posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k funkci f podle míry jestliže pro každé $\delta \in \mathbb{R}$ platí 1.3.2, t.j. že*

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes}\Big(E(|f_k(x) - f| \geq \delta)\Big) = 0.$$

Přirozenou otázkou, co by nás mohla po uvedené definici zajímat je, zdali konvergence podle míry implikuje konvergenci skoro všude, nebo naopak. Následujícími příklady si ukážeme, že ani jedna z těchto implikací neplatí.

PŘÍKLAD 1.3.4 (Konvergence skoro všude $\not\Longrightarrow$ Konvergence podle míry) *Nechť $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována jako $f_n = \chi_{[n,\infty)}$. Tedy $f_n \to 0$ bodově a tedy taky skoro všude, ale pro všechna $\epsilon \in (0,1)$ platí*

$$\operatorname{mes}\Big(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) > \epsilon|\}\Big) = \operatorname{mes}([n,\infty)) = \infty.$$

PŘÍKLAD 1.3.5 (Konvergence podle míry $\not\Longrightarrow$ Konvergence skoro všude, The Typewriter Sequence) *Nechť je posloupnost funkcí $f_n : [0,1] \to [0,1]$ definována následovně. $f_1 = \chi_{[0,1[}$, $f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}[}$, $f_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1[}$, $f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{4}[}$, $f_5 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}[}$, $f_5 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}[}$, $f_7 = \chi_{[\frac{3}{4},1[}$,$f_8 = \chi_{[0,\frac{1}{8}[}$ ... Pro dané $\epsilon > 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{mes}\Big(\{x \in [0,1] : |f_n(x)| > \epsilon\}\Big) = 0$. Na druhé straně nechť $p = \frac{1}{2}$ a nechť $x \in [0,1[$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje $m > n$ takové, že $|f_m(x)| = 1 > \frac{1}{2}$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq 0$ na množině míry 1.*

Na druhé straně je možné ukázat, že skoro stejnoměrná konvergence je silnější než konvergence v míre.

VĚTA 1.3.6 (Skoro stejnoměrná konvergence $\Longrightarrow$ Konvergence podle míry) *Nechť $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je posloupnost funkcí konvergujících téměř stejnoměrně k měřitelné funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Potom $f_n \to f$ podle míry.*

Důkaz. Zvolíme pevné $\epsilon > 0$ a libovolné $\nu > 0$. Zavedeme množinu $E_{\epsilon,\nu} = \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}$. Pokusíme se ukázat, že existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq N$ je $\operatorname{mes}(E_{\epsilon,\nu}) < \nu$. Jelikož $f_n \to f$ téměř stejnoměrně, existuje množina $X_\nu \subset \mathbb{R}$ taková, že $\operatorname{mes}(\mathbb{R} \setminus X_\nu) < \nu$ a $f_n \to f$ stejnoměrně v X_ν. Tedy existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pro všechna $n \geq N$ a pro všechna $x \in X_\nu$. Tedy platí $E_{\epsilon,\nu} \subset \mathbb{R} \setminus X_\nu$. Dostáváme $\operatorname{mes}(E_{\epsilon,\nu}) \leq \operatorname{mes}(\mathbb{R} \setminus X_\nu) < \nu$ pro všechna $\nu \geq N$. □

ÚLOHA 1.3.7 *Nalezněte příklad posloupnosti funkcí $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která konverguje podle míry a současně nekonverguje stejnoměrně.*

Větu 1.3.2 můžeme přeformulovat následujícím způsobem:

VĚTA 1.3.8 *Nechť posloupnost $f_k : E \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ měřitelných a skoro všude spojitých funkcí konverguje skoro všude k funkci $f : E \to \mathbb{R}$. Pak posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k f podle míry.*

ÚLOHA 1.3.9 *Ukažte protipříkladem, že opačný směr implikace ve Větě 1.3.8 neplatí.*

Nejblíže k opačnému směru implikace ve Věte 1.3.8 má následující Věta, která odhaluje vzájemné propojení konvergence podle míry a konvergence skoro všude.

Věta 1.3.10 (Riesz) *Nechť posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ koverguje podle míry k funkci $f : E \to \mathbb{R}$. Potom existuje podposloupnost $\{f_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, která konverguje k funkci f skoro všude.*

Důkaz. Pro všechna $\epsilon > 0$, nechť $E_{\epsilon,\nu} = \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}$. Z předpokladů věty vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} \text{mes}(A_{\epsilon,\nu}) = 0.$$

Nechť $\epsilon = 1$. Potom existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\text{mes}(A_{1,n_1}) < \frac{1}{2}.$$

Nechť $\epsilon = \frac{1}{2}$. Potom existuje $n_2 > n_1$ takové, že

$$\text{mes}(A_{\frac{1}{2},n_2}) < \frac{1}{2^2}.$$

Induktivně dostáváme

$$\text{mes}(A_{\frac{1}{2^k},n_k}) < \frac{1}{2^k}.$$

Nechť $E = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_{\frac{1}{k},n_k}$. Nechť $x \notin E$. Potom existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $x \notin \bigcup\limits_{k=j}^{\infty} E_{\frac{1}{k},n_k}$, tedy $x \notin E_{\frac{1}{k},n_k}$ pro všechna $k \geq j$ (nebo ekvivalentně $|f_{n_k} - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ pro $k \geq j$. Tedy posloupnost $\{f_{n_k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ konverguje k $f(x)$ pro všechna $x \notin E$. Na závěr je potřeba ukázat, že $\text{mes}(E) = 0$. Pro všechna $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\text{mes}(E) \leq \text{mes}(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_{\frac{1}{k},n_k}) < \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-j+1}.$$

Jelikož j je libovolné, $\text{mes}(E) = 0$. □

Věta 1.3.11 *Nechť posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, ($f_k : E \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$) koverguje podle míry k funkci $f : E \to \mathbb{R}$. Nechť dále existuje funkce $g : E \to \mathbb{R}$, splňující $g \sim f$. Potom posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ koverguje podle míry k funkci g.*

Věta 1.3.12 *Nechť posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ koverguje podle míry jak k funkci $f : E \to \mathbb{R}$ tak k funkci $g : E \to \mathbb{R}$. Potom $f \sim g$.*

Úloha 1.3.13 *Protipříkladem ukažte, že opačná implikace k k Věte 1.3.12 neplatí.*

Závěrečný výsledek této sekce - práce italského matematika (Carlo Sverini) a ruského fyzika a geometra (Dmitri Egorov), odhaluje zajímavou vlastnost téměř všude konvergujících posloupností na množinách konečné míry.

VĚTA 1.3.14 (Severini-Egorov) *Nechť E je podmnožina $\mathbb{R}$ konečné míry. Nechť $f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $f : E \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné a skoro všude konečné funkce. Nechť dále*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \tag{1.5}$$

pro skoro všechna $t \in E$. Potom, ke každému $\delta > 0$ existuje měřitelná množina $E_\delta \subset E$ taková, že $\operatorname{mes}(E_\delta) > \operatorname{mes}(E) - \delta$ a na množině E_δ "konvergence"(1.5) je stejnoměrná.

Důkaz. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ zavedeme

$$E_n^k = \bigcap_{j=n}^{\infty} \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\}.$$

Pozorujeme, že pro pevně zvolené $k, n \in \mathbb{N}$ platí $E_n^k \subset E_{n+1}^k$. Tedy dostáváme $E \setminus E_n^k \subset E \setminus E_{n+1}^k$.

Zavedeme množinu $E^k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n^k$. Jelikož platí (1.5), existuje $N \subset E$ takové, že $m(N) = 0$ a $f_n(x) \to f(x)$. Existuje tedy také $p \in \mathbb{N}$, že $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ pro všechna $n \geq p$. Tedy platí, že $x \in E_p^k \subset E^k$. To implikuje $E \setminus E_k \subset N$. Jelikož $\operatorname{mes}(N) = 0$, platí, že $E \setminus E^k$ je měřitelná a $\operatorname{mes}(E \setminus E^k) = 0$.

Z vlastnosti Lebesgueovy míry dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}(E \setminus E_n^k) = \operatorname{mes}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E \setminus E_n^k)\Big) = \operatorname{mes}(E \setminus E^k) = 0.$$

Tedy pro dané $\delta > 0$ existuje $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{mes}(E \setminus E_{n_k}^k) < \delta 2^{-k}$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Zavedeme $E_\delta = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k}^k$ a ukážeme, že $\operatorname{mes}(E \setminus E_\delta) < \delta$.

$$\operatorname{mes}(A \setminus E_\delta) = \operatorname{mes}(E \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}^k) = \operatorname{mes}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E \setminus E_{n_k}^k)\Big) \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes}(E \setminus E_{n_k}^k) < \delta \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \delta.$$

Teď ukážeme, že $f_n \to f$ stejnoměrně na E_δ. Nechť $\alpha > 0$ a nechť $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{k} < \alpha$. Nechť $x \in E$. Tedy $x \in E_{n_k}^k$ pro všechna k. Dostáváme

$$|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \alpha$$

pro všechna $j \geq n_k = n(\alpha)$. Jelikož n_k nezávisí na x, tvrzení je dokázáno. □

1.4 Aproximace měřitelných funkcí spojitými funkcemi

VĚTA 1.4.1 *Nechť $f : E \to \mathbb{R}$ je měřitelná a skoro všude konečná funkce. Potom ke každému $\epsilon > 0$ existuje ohraničená a měřitelná funkce $g : E \to \mathbb{R}$ taková, že* $\operatorname{mes}\Big(E(f \neq g)\Big) < \epsilon$.

Klasifikace bodů množiny E umožňuje následující formulaci definice bodové spojitosti funkce.

DEFINICE 1.4.2 (Spojitá funkce) *Nechť $f : E \to \mathbb{R}$, $t_0 \in E$ a $f(t_0) \neq \pm\infty$. Řekněme, že funkce f je spojitá v bodě t_0, pokud platí alespoň jedna z následujících možností*

1. *t_0 je izolovaný bod množiny E,*
2. *t_0 je hromadným bodem množiny E a pro libovolnou posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ takovou, že $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = t_0$ platí $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_k) = f(t_0)$.*

VĚTA 1.4.3 (Borel) *Nechť $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ je měřitelná a skoro všude konečná funkce. Potom pro každé $\delta > 0$ a $\epsilon > 0$ existuje spojitá funkce $\Psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ taková, že*

$$\mathrm{mes}\Big(E(|f - \Psi| \geq \delta)\Big) < \epsilon.$$

Jestliže navíc platí $|f(t)| \leq c$ pro $t \in [\alpha, \beta]$, pak lze funkce Ψ vybrat tak, aby $|\Psi(t)| \leq k$, $k \in \mathbb{R}$ pro $t \in [\alpha, \beta]$.

DŮSLEDEK 1.4.4 *Nechť $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ je měřitelná a skoro všude konečná. Potom existuje posloupnost spojitých funkcí $\Psi_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ konvergující k funkci f podle míry.*

Z důsledku 1.4.4 a Věty 1.3.10 plyne následující věta

VĚTA 1.4.5 (Frechét) *Nechť $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ je měřitelná a skoro všude konečná. Pak existuje posloupnost spojitých funkcí (na $[\alpha, \beta]$) konvergujících k f skoro všude.*

VĚTA 1.4.6 (Lusin) *Nechť je $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ měřitelná a skoro všude konečná. Potom pro každé $\delta > 0$ existuje $\phi \in C([\alpha, \beta])$ taková, že*

$$\mathrm{mes}\Big(E(f \neq \phi)\Big) < \delta.$$

Je-li navíc $|f(t)| \leq c$ pro $t \in E$ pak $|\phi(t)| < c$ pro $t \in [\alpha, \beta]$.

1.5 Trigonometrické mnohočleny

V předchozí kapitole jsme mluvily o aproximaci měřitelné funkce spojitými funkcemi. V této kapitole si ukážeme vybrané mnohočleny.

DEFINICE 1.5.1 (Bernsteinův mnohočlen) *Nechť $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ je konečná funkce. Mnohočlen*

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad \textit{pro } x \in [0, 1]$$

se nazývá Bernsteinův mnohočlen funkce f..

VĚTA 1.5.2 (Bernstein) *Nechť funkce $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x) \quad \textit{stejnoměrně na } [0, 1].$$

Následující věta tvoří mimořádně důležitou součást teorie aproximací. Věta dokazuje existenci mnohočlenů potřebných k aproximaci spojitých funkcí. Důležité zobecnění této věty je možno nalézt pod názvem "Stone-Weierstrass approximation theorem".

VĚTA 1.5.3 (Weierstrass) *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom ke každému $\epsilon > 0$ existuje mnohočlen $P : [a, b] \to \mathbb{R}$ takový, že*

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in [a, b].$$

S použitím Věty 1.5.3 lze Borelovu větu 1.4.3 a Fréchetovu větu 1.4.5 přeformulovat. Například větu 1.4.5 můžeme naformulovat následovně

VĚTA 1.5.4 (Fréchet - Reformulace) *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná a skoro všude konečná funkce. Potom existuje posloupnost mnohočlenů $P_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ takových, že*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \quad \textit{skoro všude na } [a, b].$$

DEFINICE 1.5.5 (Trigonometrický mnohočlen) *Funkce $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dána vztahem*

$$T(x) := A + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big) \quad \textit{pro } x \in \mathbb{R}$$

se nazývá trigonometrický mnohočlen.
Je-li $b_i = 0$, $i \in \mathbb{N}$, pak trigonometrický mnohočlen T se nazývá sudým.
Analogicky, je-li $a_i = 0$, $i \in \mathbb{N}$, pak trigonometrický mnohočlen T se nazývá lichým.

ÚLOHA 1.5.6 *Ověřte platnost následujícího lemmatu.*

LEMMA 1.5.7

1. *Funkce $\cos^n(x)$ lze vyjádřit jako sudý trigonometrický mnohočlen.*
2. *Je-li T trigonometrický mnohočlen pak $T(x)\sin(x)$ je taky trigonometrickým mnohočlenem.*
3. *Je-li T trigonometrický mnohočlen pak $T(x + c)$ je taky trigonometrickým mnohočlenem.*

VĚTA 1.5.8 *Nechť je funkce $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ spojitá. Potom ke každému $\epsilon > 0$ existuje sudý trigonometrický mnohočlen T takový, že*

$$|f(x) - T(x)| < \epsilon \quad \textit{pro } x \in [0, \pi].$$

Důkaz. Položme

$$F(x) = f\big(\arccos(y)\big) \quad \text{pro } y \in [-1, 1].$$

Zřejmě je funkce $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ spojitá. Zvolíme $\epsilon > 0$. Vzhledem k Větě 1.5.3 existuje mnohočlen $P(y) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k y^k$ takový, že

$$|F(y) - p(y)| < \epsilon \quad y \in [-1, 1].$$

Nechť $x \in [0, \pi]$. Dosadíme-li v předchozí nerovnosti $y = \cos(x)$, obdržíme

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k(x)| < \epsilon \quad x \in [0, \pi].$$

Vzhledem k Lemma 1.5.7 a) je funkce $\sum_{n=0}^{k} a_k \cos^k(x)$ sudý trigonometrický mnohočlen. □

Důsledek 1.5.9 *Nechť je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodická, sudá a spojitá funkce. Potom, ke každému $\epsilon > 0$ existuje trigonometrický mnohočlen T takový, že*

$$|f(x) - T(x)| < \epsilon \quad \textit{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Následující věta je konkrétním speciálním případem Weierstrassovy Věty 1.5.3 pro trigonometrické mnohočleny.

Věta 1.5.10 (Weierstrass) *Nechť je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá a 2π-periodická. Potom ke každému $\epsilon > 0$ existuje trigonometrický mnohočlen T takový, že*

$$|f(x) - T(x)| < \epsilon \quad \textit{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Vzhledem k Důsledku 1.5.9 pro (sudé funkce) $f(x) + f(-x)$ a $(f(x) - f(-x))\sin(x)$ pro dané $\epsilon > 0$ existují trigonometrické mnohočleny T_1 a T_2 takové, že

$$f(x) + f(-x) = T_1(x) + \alpha_1(x), \tag{1.6}$$

$$\Big(f(x) - f(-x)\Big)\sin(x) = T_2(x) + \alpha_2(x) \tag{1.7}$$

pro $x \in \mathbb{R}$, přičemž α_1 a α_2 jsou spojitá a $|\alpha_1(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, $|\alpha_2(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Vynásobíme-li vztah (1.6) funkcí $\sin^2(x)$ a vztah (1.7) funkcí $\sin(x)$, sčítáním rovnic a podělením dvěma obdržíme

$$f(x)\sin^2(x) = T_3(x) + \beta(x) \tag{1.8}$$

kde (vzhledem k Lemma 1.5.7) T_3 je trigonometrický mnohočlen a $|\beta(x)| < \epsilon$ pro $x \in \mathbb{R}$.
Obdobně, (poněvadž f je libovolná funkce) existují trigonometrické mnohočleny T_4 a γ takové, že

$$f(x - \frac{\pi}{2})\sin^2(x) = T_4(x) + \gamma(x) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$
$$|\gamma(x)| < \epsilon \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Odtud dostáváme, že

$$f(x)\cos^2(x) = T_4(x + \pi) + \gamma(x + \pi) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Vzhledem k Lemma 1.5.7 $T_4(x+\pi)$ je trigonometrický mnohočlen a tedy

$$f(x)\cos^2(x) = T_5(x) + \gamma_1(x) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \tag{1.9}$$

kde $T_5(x)$ je trigonometrický mnohočlen a $|\gamma_1| < \epsilon$ pro $x \in \mathbb{R}$. Závěr Věty plyne z (1.7) a (1.9). $\square$

Kapitola 2

Lebesgueův Integrál

2.1 Zavedení Lebesgueova Integrálu

DEFINICE 2.1.1 (Lebesgueův Integrál ohraničené funkce) *Nechť $f : E \to \mathbb{R}$ je měřitelná a ohraničená funkce. Pak je funkce f integrovatelná. Její integrál pak značíme*

$$\int\limits_E f(x)\,dx.$$

LEMMA 2.1.2 *Nechť $f \in M(E)$ a $f(x) \geq 0$ pro $x \in E$. Nechť dále $n \in \mathbb{N}$ a*

$$[f(x)]_{n\in\mathbb{N}} = \min\{n, f(x)\} \quad \textit{pro } x \in E.$$

Potom $[f]_n$ je měřitelná funkce.

Důkaz. Zřejmě platí, že

$$E([f]_n > a) = E(f > a) \quad \text{pro } a < n,$$
$$E([f]_n > a) = \emptyset \quad \text{pro } a > n.$$

Také platí

$$[f(x)]_1 \leq [f(x)]_2 \leq ...[f(x)]_k \leq ... \quad \text{pro } x \in E.$$

□

Kromě toho, každá z $[f]_k$ je ohraničená a měřitelná (viz. Lemma 2.1.2) a tedy integrovatelná. Dále

$$\int\limits_E [f(x)]_1\,dx \leq \int\limits_E [f(x)]_2\,dx \leq ... \int\limits_E [f(x)]_k\,dx \leq ...$$

Uvažujeme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E [f(x)]_n\,dx \tag{2.1}$$

která určitě existuje a nabývá konečných a nebo nekonečných hodnot.

DEFINICE 2.1.3 (Lebesgueův integrál nezáporné funkce) *Limitě* (2.1) *se říká Lebesgueův integrál funkce f na množině E a značí se*

$$\int_E f(x)\,dx.$$

Pokud tato limita je konečná, pak říkáme, že funkce f (nezáporná) je integrovatelná.

VĚTA 2.1.4 *Nechť nezáporná funkce $f : E \to \mathbb{R}_+$ je integrovatelná na E. Potom je f skoro všude konečná.*

Důkaz. Položme $A := E(f = \infty)$. Zřejmě $[f(x)]_n = n$ pro $x \in A$. Proto

$$\int_E [f(x)]_n\,dx \geq \int_A [f(x)]_n\,dx = n\,\mathrm{mes}(A).$$

Tedy pokud $\mathrm{mes}(A) > 0$, pak limita (2.1) nabývá hodnoty ∞. □

VĚTA 2.1.5 *Nechť $f : E \to \mathbb{R}_+$, $f \geq 0$, $\mathrm{mes}(E) = 0$. Potom je funkce f integrovatelná na E a $\int_E f(x)\,dx = 0$.*

VĚTA 2.1.6 *Nechť $f, g : E \to \mathbb{R}_+$ a $f \sim g$. Potom*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx.$$

Důkaz. $E(f = g) = E([f]_n = [g]_n)$. □

VĚTA 2.1.7 *Nechť $f : E \to \mathbb{R}_+$ a $f \in M(E)$. Nechť dále $E_0 \subset E$ měřitelná. Pak*

$$\int_{E_0} f(x)\,dx \leq \int_E f(x)\,dx.$$

VĚTA 2.1.8 *Nechť $f, g : E \to \mathbb{R}_+$ a $f, g \in M(E)$ a $f(x) \leq g(x)$ pro $x \in E$. Pak*

$$\int_E f(x)\,dx \leq \int_E g(x)\,dx.$$

VĚTA 2.1.9 *Nechť $f : E \to \mathbb{R}_+$ a $\int_E f(x)\,dx = 0$. Potom $f \sim 0$.*

VĚTA 2.1.10 (Aditivita integrálu) *Nechť $f, g : E \to \mathbb{R}_+$ a $f, g \in M(E)$. Potom*

$$\int_E (f(x) + g(x))\,dx = \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx.$$

VĚTA 2.1.11 (Homogenita integrálu) *Nechť $f : E \to \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{R}_+$. Pak $\int_E kf(x)\,dx = k\int_E f(x)\,dx$.*

Na závěr sekce si ukážeme alternativní zavedení Lebesgueova integrálu, pomocí jednoduchých funkcí. Toto zavedení je ekvivalentně předchozímu avšak umožňuje najít explicitní formule pro výpočet Lebesgueovo integrálu. Jelikož ale tuto formuli nebudeme v rámci tohoto kurzu potřebovat toto zavedení je jen doplňkovou informací.

DŮSLEDEK 2.1.12 (Integrál z jednoduché funkce) *Nechť je $\phi : E \to \mathbb{R}$ jednoduchá funkce (t.j. $\phi(x) = \sum\limits_j c_j \Phi_{E_j}(x)$, kde E_j jsou disjunktní kompaktní množiny). Pak její Lebesgueův integrál je*

$$\int\limits_E \phi(x)\,dx = \sum_j c_j m(E_j).$$

DŮSLEDEK 2.1.13 (Integrál z nezáporné funkce) *Nechť $f : E \to \mathbb{R}$ je nezáporná měřitelná funkce. Pak její Lebesgueův integrál se rovná*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \sup_{\phi \le f}\{\int\limits_E \phi(x)\,dx\}.$$

2.2 Konvergenční Vlastnosti Lebesgueova Integrálu

VĚTA 2.2.1 (Beppo-Levi, Monotone Convergence Theorem) *Nechť $f_k : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ je posloupnost měřitelných funkcí s vlastností*

$$f_k(x) \le f_{k+1}(x) \tag{2.2}$$

pro skoro všechna $x \in E$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\int\limits_E \Big(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\Big)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_E f_k(x)\,dx.$$

Důkaz. Zavedeme $f(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$. Jelikož platí $f_k \le f$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_E f_k(x)\,dx = \sup_k \int\limits_E f_k(x)\,dx \le \int\limits_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx.$$

Aby jsme dokončili důkaz, je nutno ukázat, že

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_E f_k(x)\,dx \ge \int\limits_E f(x)\,dx.$$

Nechť $\phi(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j \Phi(x)$ je jednoduchá funkce, taková, že $0 \le \phi(x) \le f(x)$. Pro $t \in]0,1[$ zavedeme $E(f_k(x) \ge t\phi(x))$. Vzhledem k (2.2) platí, že $E_k \subset E_{k+1}$.

Ukážeme, že $\bigcup\limits_k E_k = E$. Nechť $x \in E$. Platí $t\phi(x) < \phi(x) \le f(x)$. Jelikož $f_k(x) \to f(x)$, platí $f_k(x) \ge t\phi(x)$ pro všechna $k \ge K$, $K \in \mathbb{N}$. Dostáváme

$$\int\limits_E f_k(x)\,dx \ge \int\limits_{E_k} f_k(x)\,dx \ge t \int\limits_{E_k} \phi(x)\,dx = t \sum_{j=1}^{N} c_j \operatorname{mes}(E_k \cap B_j).$$

Nechť $k \to \infty$. Díky monotónnosti Lebesgueové míry dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx \geq t \int_E \phi(x)\,dx.$$

Jelikož je ϕ libovolná jednoduchá funkce, můžeme vzít supremum těchto funkcí, čímž dostáváme hledaný výsledek. □

Věta 2.2.2 (Fatou) *Nechť $f_k : E \to \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$ je posloupnost měřitelných funkcí. Potom platí*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx.$$

Důkaz. Nechť $g_n(x) = \inf_{k\geq n}\{f_k(x)\}$. Platí

$$\liminf_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n}\{f_k(x)\} = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

Jelikož g_n je monotonní rostoucí funkce, díky Větě 2.2.1 platí

$$\int_E \liminf_{n\to\infty}\{f_n(x)\}\,dx = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx.$$

Pro všechna $k \geq n$ platí $g_n(x) \leq f_k(x)$ a tedy

$$\int_E g_n(x)\,dx \leq \inf_{k\geq n} \int_E f_k(x)\,dx.$$

Dostáváme tedy

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\,dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \int_E f_k(x)\,dx = \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx.$$

□

Poznámka 2.2.3 *Beppo-Leviho 2.2.1 i Fatouova Věta 2.2.2 se dají dokázat nezávisle na sobě.*

Věta 2.2.4 (Tonelli) *Nechť $u_k : E \to \mathbb{R}_+$, $u_k \in M(E)$, $k \in \mathbb{N}$. Nechť dále*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = F(x) \quad \text{pro } x \in E.$$

Potom platí

$$\int_E F(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k(x)\,dx$$

Věta 2.2.5 (Úplná aditivita integrálu) *Nechť E je měřitelná množina a $E = \bigcup_{k\in I} E_k$ přičemž $E_k \cap E_i = \emptyset$ pro $k \neq i$, E_k je měřitelná a indexová množina I nejvíc spočetná. Nechť dále $f : E \to \mathbb{R}_+$. Potom*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k\in I} \int_{E_k} f(x)\,dx.$$

2.3 Lebesgueův integrál (obecný případ)

Nechť $f : E \to \mathbb{R}$ kde E je měřitelná množina a $f \in M(E)$. Položme

$$[f(x)]_+ := \begin{cases} f(x), & \text{pro } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{pro } f(x) < 0 \end{cases} \qquad [f(x)]_- := \begin{cases} 0, & \text{pro } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{pro } f(x) < 0. \end{cases}$$

(nebo alternativně $[f(x)]_+ = \frac{1}{2}\Big(|f(x)| + f(x)\Big)$ a $[f(x)]_- = \frac{1}{2}\Big(|f(x)| - f(x)\Big)$.
Zřejmě platí $f(x) = [f(x)]_+ - [f(x)]_-$.

Definice 2.3.1 *Nechť alespoň jedna z funkcí $[f]_+$ nebo $[f]_-$ je integrovatelná. Potom výraz (připouštíme i nekonečnou hodnotu)*

$$\int\limits_E [f(x)]_+ \, dx - \int\limits_E [f(x)]_- \, dx$$

se nazývá Lebesgueovým integrálem funkce f a značí se $\int\limits_E f(x)\, dx$.

Definice 2.3.2 (Lebesgueovsky integrovatelné funkce) *Funkce $f : E \to \mathbb{R}$ (měřitelná) se nazývá Lebesgueovsky integrovatelná jestli integrál $\int\limits_E f(x)\, dx$ existuje a je konečný.*
Množinu Lebesgueovsky integrovatelných funkcí označíme $L(E)$.

Poznámka 2.3.3 *Pro nezáporné funkce tato "nová" definice je téměř shodná se "starou". Dále platí, že každá ohraničená funkce je integrovatelná.*

Věta 2.3.4 *$f \in L(E)$ právě tehdy když $|f| \in L(E)$. Pokud $|f| \in L(E)$ pak*

$$\int\limits_E |f(x)|\, dx \geq |\int\limits_E f(x)\, dx|.$$

Důkaz. Plyne ze vzorce $|f| = [f]_+ + [f]_-$. □

Uvedeme několik vlastností:

1. Pokud $f \in L(E)$, pak je f skoro všude konečná.
2. Je-li $\text{mes}(E) = 0$, pak libovolná $f \in L(E)$.
3. Nechť $f \in L(E)$ a $E_0 \in E$ je měřitelná. Pak $f \in L(E_0)$.
4. Nechť $f, g : E \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné. Nechť navíc $|f(x)| \leq g(x)$ pro $x \in E$. Pokud navíc $g \in L(E)$ pak $f \in L(E)$.

Věta 2.3.5 *Nechť $f, g : E \to \mathbb{R}$ a $f \sim g$. Pak $f \in L(E)$ právě tehdy když $g \in L(E)$.*

Věta 2.3.6 (Konečná aditivita) *Nechť $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, kde $E_k \cap E_i = \emptyset$ pro $k \neq i$ a E_k jsou měřitelná. Nechť dále $f \in L(E_k)$ pro $k = 1, .., n$. Pak $p \in L(E)$ a*

$$\int\limits_E f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f(x)\, dx.$$

POZNÁMKA 2.3.7 *Ve Věte 2.3.6 předpoklad o tom, že E je sjednocením konečného počtu E_k je důležitým a nelze ho vypustit. V skutku, nechť $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ je dána vztahem*

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{pro } \frac{2n+1}{2n(n+1)} < x \le \frac{1}{n} \\ -n & \text{pro } \frac{1}{n+1} < x \le \frac{2n+1}{2n(n+1)} \end{cases} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Potom $f \in L(]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}])$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx = 0.$$

Avšak $f \notin L(]0,1])$ neboť

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(x)|\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

Platí však následující tvrzení:

VĚTA 2.3.8 *Nechť $f \in L(E)$ a $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, kde $E_k \cap E_i = \emptyset$ po $k \ne i$ a E_k jsou měřitelné množiny. Potom*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx. \tag{2.3}$$

VĚTA 2.3.9 *Nechť E je měřitelná množina. $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Nechť dále $f \in L(E_k)$ pro $k \in \mathbb{N}$ a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)|\,dx < \infty,$$

potom $f \in L(E)$ a platí (2.3).

Mezi nejdůležitejší věty, které si uvedeme rozhodně musí patřit i následující věta, která poskytuje možnost záměny limit a integrálů v případě Lebesgueovho integrálu obecné funkce.

VĚTA 2.3.10 (Lebesgue Dominated Convergence Theorem) *Nechť $\{f\}_{n\in\mathbb{N}} : E \to \mathbb{R}$ je posloupnost měřitelných funkcí a funkce $f : E \to \mathbb{R}$ je také měřitelná a nechť platí $f_n(x) \to f$ pro s.v. $x \in E$. Dále nechť existuje funkce $g : E \to \mathbb{R}_+$, $g \in L(E)$, měřitelná, a taková, že*

$$|f_n(x)| \le g(x) \qquad \text{pro s.v. } x \in E.$$

Potom

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx.$$

2.4 Prostor $L(E)$

Uvažujme množinu $L(E)$. Zápis $f = g$ pro nás znamená $f \sim g$. Vzhledem k Větě 2.3.4 můžeme zavést pro $f \in L(E)$ normu

$$\|f\|_L = \int\limits_E |f(x)|dx.$$

ÚLOHA 2.4.1 *Dokažte, že $L(E)$ tvoří lineární prostor.*

ÚLOHA 2.4.2 *Dokažte, že $(L(E), || \cdot ||)$ tvoří normovaný prostor.*

VĚTA 2.4.3 (Riesz-Fisher [1]) *Prostor $(L(E), \| \cdot \|_L)$ je úplný.*

VĚTA 2.4.4 *Množina spojitých funkcí $C(E)$ je hustá v $L(E)$.*

DEFINICE 2.4.5 (Nosič funkce) *Nechť $E \in \mathbb{R}$ je otevřená množina. Nechť f je spojitá funkce na E. Nosič funkce f na E je množina*

$$\mathrm{spt}(f) = \{x \in E : f(x) \neq 0\}.$$

Pokud je $\mathrm{spt}(f)$ *kompaktní, nazýváme f s kompaktním nosičem. Prostor funkcní s kompaktním nosičem na E značíme $C_C(E)$.*

POZNÁMKA 2.4.6

$$C_C(E) \subset C(E).$$

VĚTA 2.4.7 *$C_C(E)$ je hustá v $L(E)$.*

DEFINICE 2.4.8 (Esenciální supremum)

VĚTA 2.4.9 *Prostor $L(E)$ je separabilní.*

Důkaz. Nechť $E \in \mathbb{R}$. Nechť $\mathcal{E} = \bigcup\limits_k \mathcal{E}_k$ je spočetná množina, kde $\mathcal{E}_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[$ kde $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$. Nechť ζ je lineární prostor nad $\mathbb{Q}$ generovaný funkcemi $\chi_{\mathcal{E}_k}$. Prostor ζ tedy pozůstává z konečných lineárních kombinací s racionálními koeficienty indikátorových funkcí množin typu $\mathcal{E}_k$. Ukážeme, že $\mathcal{E}$ je hustá v $L(E)$. Nechť $f \in L(E)$, $\epsilon > 0$. Díky 2.4.7 víme, že existuje $f_1 \in C_C(E)$ taková, že $||f - f_1||_L \leq \epsilon$. Nechť E_j je libovolná množina obsahující $\mathrm{spt}(f_1)$. Pro dané $\delta > 0$ konstruujeme funkci $f_2 \in \mathcal{E}$ splňující $||f_1 - f_2||_L \leq \delta$, takovou, že $f_2 = 0$ mimo E_j. Dostáváme

$$||f_1 - f_2||_L \leq \mathrm{Esssup}\{f_1 - f_2\} m(E_j).$$

Volbou $\delta > 0$ dostáváme $||f - f_2||_L < 2\epsilon$. □

[1] Tento výsledek je malou částí teorému známého jako Riesz-Fisherova Věta, který ukazuje mimo jiné úplnost L^p prostorů.

Kapitola 3

Prostor $L^2([a, b])$

3.1 Zavedení prostoru

Definice 3.1.1 (L^2 prostor) *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a*

$$\int_a^b f^2(t)\, dt < \infty$$

Potom $f \in L^2([a, b])$.

Tvrzení 3.1.2

$$L^2([a, b]) \subset L([a, b])$$

Důkaz. Nechť $f \in L^2([a, b])$. Jelikož $1 \in L^2([a, b])$, platí

$$\int_a^b \frac{1}{2}\Big(1 + f^2(t)\Big)\, dt < \infty.$$

Využitím nerovnosti

$$|f(t)| \le \frac{1}{2}\Big(1 + f^2(t)\Big) \qquad \text{pro } t \in [a, b]$$

dokazujeme tvrzení. □

Úloha 3.1.3 *Protipříkladem ukažte, že opačná inkluze Tvrzení 3.1.2 neplatí.*

Tvrzení 3.1.4 *Nechť $f, g \in L^2([a, b])$. Potom $f \cdot g \in L([a, b])$.*

Důkaz. Nechť $f, g \in L^2([a, b])$. Důkaz plyne z následující nerovnosti

$$|f(t)g(t)| \le \frac{1}{2}\Big(f^2(t) + g^2(t)\Big).$$

□

3.2 Strukturní vlastnosti L^2

Definice 3.2.1 (Metrika L^2) *Výraz $\rho : L^2([a,b]) \times L^2([a,b]) \to \mathbb{R}$ definován jako*

$$\rho(f,g) := \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)^2 \, dx$$

nazýváme metrikou $L^2([a,b])$.

Tvrzení 3.2.2 *$(L^2([a,b]), \rho(\cdot,\cdot))$ tvoří metrický prostor.*

Úloha 3.2.3 *Dokažte tvrzení 3.2.2.*

Tvrzení 3.2.4 *Množina $L^2([a,b])$ je lineární prostor, tj. $f,g \in L^2([a,b]) \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L^2([a,b])$ pro $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Úloha 3.2.5 *Dokažte Tvrzení 3.2.4.*

Tvrzení 3.2.6 (Cauchy-Bunjakovského-Schwartzova nerovnost) *Nechť $f,g \in L^2([a,b])$ potom platí*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt.$$

Poznámka 3.2.7 *Cauchy-Bunjakovského-Schwartzova nerovnost 3.2.6 je známým tvrzením z kurzů lineární algebry (tuto nerovnost je možno dokázat pro libovolný unitární prostor).*

Úloha 3.2.8 *Laskavý čtenář si zopakuje důkaz Tvrzení 3.2.6.*

Definice 3.2.9 (Skalární součin na L^2) *V prostoru $L^2([a,b])$ je skalární součin $(\cdot,\cdot) : L^2([a,b]) \times L^2([a,b]) \to \mathbb{R}$ definován následovně*

$$(f \cdot g) := \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Tvrzení 3.2.10 *$(L^2([a,b]), (\cdot,\cdot))$ je unitární prostor.*

Úloha 3.2.11 *Dokažte Tvrzení 3.2.10.*

Definice 3.2.12 (L^2-norma) *Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Potom výraz*

$$\|f\|_{L^2} := \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

nazýváme L^2-normou funkce f.

Tvrzení 3.2.13 *Prostor funkcí $(L^2([a,b]), \|\cdot\|_{L^2})$ je normovaný prostor.*

Úloha 3.2.14 *Dokažte Tvrzení 3.2.13.*

POZNÁMKA 3.2.15 *Zřejmě norma prostoru L^2 je provázána s jeho metrikou a skalárním součinem následovnými vztahy*

$$\rho(f,g) = \|f-g\|_{L^2},$$
$$\sqrt{(f\cdot f)} = \|f\|_{L^2}.$$

VĚTA 3.2.16 *Nechť $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost funkcí z $L^2([a,b])$. Nechť dále $f \in L^2([a,b])$ a*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \qquad \textit{podle míry.}$$

Důkaz. Nechť $\sigma > 0$. Zavedeme množinu $A_n(\sigma) = E(|f_n - f| \geq \sigma)$. Potom konvergence plyne následovně

$$\int_a^b \Big(f_n(t) - f(t)\Big)^2 dt \geq \int_{A_n(\sigma)} \Big(f_n(t) - f(t)\Big)^2 dt \geq \sigma^2 \operatorname{mes}\{A_n(\sigma)\}.$$

□

ÚLOHA 3.2.17 *Nalezněte posloupnost funkcí splňující předpoklady Věty 3.2.16, pro kterou neplatí, že*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \qquad \textit{skoro všude v } [a,b].$$

DŮSLEDEK 3.2.18 *Nechť $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost funkcí z $L^2([a,b])$. Nechť dále $f \in L^2([a,b])$ a*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0.$$

Potom existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(t) = f(t) \qquad \textit{skoro všude na } [a,b].$$

Důkaz. Plyne z Věty 3.2.16 a Rieszovy věty 1.3.10. □

POZNÁMKA 3.2.19 *Pokud*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \qquad \textit{pro každé } t \in [a,b], \tag{3.1}$$

pak (obecně) nemůžeme tvrdit, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0.$$

Vskutku, nechť

$$f_n(t) = \begin{cases} n & \textit{pro } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \textit{pro } t \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Potom platí 3.1, kde $f \equiv 0$. Však $\int_0^1 (f_n(t))^2\,dt = n \to \infty$.

VĚTA 3.2.20 *Nechť $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost funkcí z $L^2([a,b])$. Nechť dále $f \in L^2([a,b])$ a*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0.$$

Potom $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

Důkaz. Důkaz plyne z nerovností

$$\|f_n\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + \|f_n - f\|_{L^2},$$
$$\|f\|_{L^2} \leq \|f_n\|_{L^2} + \|f_n - f\|_{L^2}.$$

□

DEFINICE 3.2.21 (Cauchyovská posloupnost) *Posloupnost $\{f_n\} \subset L^2$ se nazývá Cauchyovská, jestliže $\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon > 0$ a pro $\forall n, m : n > n_\epsilon, m > n_\epsilon$ platí $\|f_n - f_m\| < \epsilon$.*

DEFINICE 3.2.22 *Metrický prostor (X, ρ) se nazývá úplný, jestliže každá Cauchyovská posloupnost má limitu, která leží v X.*

VĚTA 3.2.23 (Riesz-Fischer) *Prostor $L^2([a,b])$ je úplný.*

VĚTA 3.2.24 *Každá z následujících množin je hustá v $L^2([a,b])$:*

1. *$M([a,b])$ - množina ohraničených, měřitelných funkcí*
2. *$C([a,b])$ - množina spojitých funkcí*
3. *$P([a,b])$ - množina polynomů*
4. *$\mathcal{S}([a,b])$ - Množina jednoduchých funkcí*

Je-li $[a,b] = [-\pi, \pi]$, pak množina trigonometrického mnohočlenu T je hustá v L^2.

DEFINICE 3.2.25 *Nechť $\{f_n\} \subset L^2([a,b])$ a $f \in L^2$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ konverguje k f slabě, jestliže pro každou funkci $g \in L^2$ platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)g(t) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

VĚTA 3.2.26 *Pokud $\{f_n\}$ konverguje k f (v klasickém smyslu), pak konverguje i slabě.*

Důkaz. Použitím Tvrzení 3.2.6 obdržíme

$$\left(\int_a^b g(t)(f_n(t) - f(t))\,dt\right)^2 \leq \int_a^b g^2(t)\,dt \cdot \int_a^b \Big(f_n(t) - f(t)\Big)^2 dt.$$

□

3.3 Ortogonální systémy

DEFINICE 3.3.1 *Systém $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2([a,b])$ se nazývá ortonormální, jestliže $(\omega_k \cdot \omega_i) = \delta_{ki}$.*

PŘÍKLAD 3.3.2 *Trigonometrický systém $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(t)$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(t)$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2t)$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2t)$, ... je ortonormální v $L([-\pi,\pi])$.*

DEFINICE 3.3.3 (Fourierova řada, Fourierovy koeficienty) *Nechť $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ortonormální systém v $L^2([a,b])$ a $f \in L^2([a,b])$. Čísla*

$$c_k := \int_a^b f(t)\omega_k(t)\,dt, \quad k \in \mathbb{N}$$

se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k systému $\{\omega_k\}$. Dále řada (formální)

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k(t) \tag{3.2}$$

se nazývá Fourierova řada funkce f vzhledem k systému $\{\omega_k\}$.

Zavedením nekonečné řady 3.2 přirozeně vzniká otázka, zdali řada konverguje a k čemu. Než odpovíme na tyto otázky je nutno lépe prostudovat čísla c_k a zavedenou řadu 3.2.

VĚTA 3.3.4 (Besselova nerovnost) *Nechť $f \in L^2([a,b])$ a c_k jsou Fourierovy koeficienty této funkce. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \le ||f||_{L^2}^2.$$

Důkaz. Zavedeme částečné součiny

$$S_n(t) := \sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k(t).$$

Jelikož $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ortonormální systém, platí

$$\int_a^b S_n^2(t)\,dt = \sum_{i,k=1}^{n} c_ic_k \int_a^b \omega_k\omega_i\,dt = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Dále, užitím definice Fourierových koeficientů 3.3.3 dostáváme

$$\int_a^b f(t)S_n^2(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b f(t)\omega_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Na základě těchto rovností obdržíme

$$\|f - S_n\|_{L^2}^2 = \int_a^b \Big(f^2(t) - 2f(t)S_n(t) + S_n^2(t)\Big)\,dt = \|f\|_{L^2} - \sum_{k=1}^{n} c_k^2, \tag{3.3}$$

a tudíž

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|_{L^2}^2.$$

Odtud zřejmě plyne, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|_{L^2}^2.$$

□

DEFINICE 3.3.5 *Řekneme, že ortonormální systém je uzavřený, jestliže pro každou funkci $f \in L^2$ platí tzv. Parsevalova rovnost*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|_L^2.$$

POZNÁMKA 3.3.6 *Smysl Parsevalovy rovnosti spočívá v tom, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n\|_{L^2} = 0$ *neboli f je limitou $\{S_n\}$ v L^2.*

VĚTA 3.3.7 *Nechť ortonormální systém $\{\omega_k\}$ je uzavřený. Potom pro $f, g \in L^2$ platí*

$$(f \cdot g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k,$$

kde $a_k = (f \cdot \omega_k)$, $b_k = (g \cdot \omega_k)$.

Důkaz. Zřejmě $\{a_k + b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jsou Fourierovými koeficienty funkce $f + g$. Tedy podle Parsevalovy rovnosti

$$\|f + g\|_L^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)^2 = \sum a_k^2 + \sum b_k^2 + 2\sum a_k b_k.$$

Na druhé straně vzhledem k Větě 3.3.7

$$\|f + g\|^2 = \int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt = \int_a^b f^2(t)dt + 2\int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 + 2\int_a^b fg.$$

□

DŮSLEDEK 3.3.8 *Nechť $\{\omega_k\}$ je uzavřený systém. Potom pro každou měřitelnou množinu $E \subset [a, b]$ platí*

$$\int_E f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \int_E \omega_k(t)\, dt. \tag{3.4}$$

Důkaz. Nechť g je charakteristická funkce množiny E. Zřejmě $g \in L^2([a,b])$ a pro Fourierovy koeficienty b_k funkce g platí

$$b_k = \int\limits_E \omega_k(t)dt.$$

Nyní 3.4 plyne z Věty 3.3.7. □

POZNÁMKA 3.3.9 *Všimněme si, že samotná řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k(t)$ nemusí (obecně) konvergovat k f vůbec.*

VĚTA 3.3.10 (Steklov - Severini) *Nechť $A \subset L^2([a,b])$ je hustá. Nechť dále $\{\omega_k\}$ je ortonormální systém a pro každou $g \in A$ platí Parsevalova rovnost vzhledem k $\{\omega_k\}$. Potom systém $\{\omega_k\}$ je uzavřený.*

Důkaz. Nechť $f \in L^2$ a c_k jsou Fourierovy koeficienty vzhledem k $\{\omega_k\}$. Položme

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k(t).$$

Zřejmě

$$\begin{aligned} S_n(\lambda f) &= \lambda S_n(f) \quad \text{ pro } \forall\lambda \in \mathbb{R} \\ S_n(f_1 + f_2) &= S_n(f_1) + S_n(f_2). \end{aligned}$$

Dále vzhledem k Besselově nerovnosti platí

$$\|S_n(f)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2},$$

neboť

$$\|S_n(f)\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Poněvadž A je hustá pro $\epsilon > 0$ $\exists g \in A$ tak, že

$$\|f - g\| < \frac{1}{3}\epsilon.$$

Potom zřejmě

$$\|f - S_n(f)\| \leq \|f - g\| + \|g - S_n(g)\| + \|S_n(g) - S_n(f)\|.$$

Dále

$$\|S_n(g) - S_n(f)\| = \|S_n(g - f)\| \leq \|g - f\| < \frac{1}{3}\epsilon.$$

Tedy

$$\|f - S_n(f)\| \leq \frac{2}{3}\epsilon + \|g - S_n(g)\|.$$

Poněvadž $g \in A$ a pro g platí Parsevalova rovnost $\exists n_0$ tak, že

$$\|g - S_n(g)\| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{pro } n > n_0.$$

Tedy pro $\epsilon > 0$ $\exists n_0$ tak, že

$$\|f - S_n(f)\| < \epsilon \qquad \text{pro } n > n_0.$$

Jinými slovy, dokázali jsme, že

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\| = 0.$$

Avšak odtud vzhledem k 3.3 plyne, že pro f platí Parsevalova rovnost. □

Důsledek 3.3.11 *Nechť pro každou funkci $f_k(t) = t^k$ platí Parsevalova rovnost. Potom systém $\{\omega_k\}$ je uzavřený.*

Důkaz. Vzhledem k Větám 3.2.24 a 3.3.10 stačí ukázat, že platí Parsevalova rovnost pro libovolný mnohočlen

$$p(t) = A_0 + A_1(t) + \ldots + A_m t^m.$$

Avšak je zřejmé, že

$$S_n(p) = A_0 S_n(f_0) + A_1 S_n(f_1) + \ldots + A_m S_n(f_m).$$

Tedy

$$\|p - S_n(p)\| \le \sum_{k=0}^{m} |A_k| \cdot \|f_k - S_n(f_k)\|.$$

Poněvadž podle předpokladů pro f_k platí Parsevalova rovnost, pak vzhledem k 3.3 máme, že

$$\lim_{n\to\infty} \|f_k - S_n(f_k)\| = 0,$$

a tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \|p - S_n(p)\| = 0,$$

což opět na základě 3.3 znamená, že pro p platí Parsevalova rovnost. □

Mohla by nás zajímat otázka, zdali vůbec existuje uzavřený systém $\{\omega_k\}$? Odpověď na tuto otázku poskytuje Věta 3.3.10.

Důsledek 3.3.12 *Trigonometrický systém je uzavřený (v $L([-\pi,\pi])$).*

Důkaz. Vzhledem k Větě 3.3.10 stačí ukázat, že platí Parsevalova rovnost pro trigonometrický mnohočlen

$$T(t) = A + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \Big),$$

neboť vzhledem k Větě 3.2.24 je systém T hustý v $L([-\pi,\pi])$. Pro T je Parsevalova rovnost triviální. □

VĚTA 3.3.13 (Riesz-Fischer) *Nechť $\{\omega_k\}$ je ortonormální systém a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$. Potom existuje $f \in L^2([a,b])$ taková, že*

$$c_k = (f \cdot \omega_k) \quad a \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f_k\|_{L^2}^2. \tag{3.5}$$

Důkaz. Polože $S_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(t)$ a ukážeme, že posloupnost $\{S_n\}$ je Cauchy-ovská. Vskutku nechť $m > n$,

$$\|S_m - S_n\|^2 = \int_a^b \Big(\sum_{n+1}^{m} c_k \omega_k(t) \Big)^2 dt = \sum_{i,k} c_i c_k \int \omega_i \omega_k \, dt = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2.$$

Vzhledem k Větě 3.2.23 je prostor L^2 úplný a tedy $\exists f \in L^2$ tak, že

$$\lim_{n \to \infty} \|S_n - f\|_{L^2} = 0.$$

Ukážeme nyní, že pro f platí 3.5. Vzhledem k Větě 3.2.26 posloupnost $\{S_n\}$ konverguje k f a i slabě, tj. pro každou funkci $g \in L^2$

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b S_n(t) g(t) \, dt = \int_a^b f(t) g(t) \, dt.$$

Speciálně, je-li $g(t) \equiv \omega_i(t)$ obdržíme

$$\int_a^b f(t) \omega_i(t) \, dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b S_n(t) \omega_i(t) \, dt = c_i.$$

Tedy $c_k = (f \cdot \omega_k)$. Vezmeme-li kromě toho v úvahu 3.3, získáme i Parsevalovu rovnost. □

POZNÁMKA 3.3.14 *Všimněme si, že existuje jediná funkce f v závěru Riesz-Fischerovy věty 3.3.13. Vskutku, nechť obě f a g vyhovují závěru. Pak f a g mají stejné Fourierovy koeficienty c_k (dle první vlastnosti) a dle druhé:*

$$\lim_{n \to \infty} \|S_n - f\| = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \|S_n - g\| = 0,$$

kde $S_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \omega_k(t)$. Z jednoznačnosti limity plyne $f \equiv g$.

DEFINICE 3.3.15 *Systém $\{\omega_k\}_1^\infty$ se nazývá úplným, pokud prostor jím vytvořený je taktéž z $L^2([a,b])$.*

VĚTA 3.3.16 *Systém $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ je úplný právě tehdy, když neexistuje $g \neq 0$ v L^2 tak, že*

$$(g \cdot \omega_k) = 0 \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}.$$

VĚTA 3.3.17 *Systém $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ je úplný právě tehdy, když je uzavřený.*

Důkaz. Nechť $\{\omega_k\}$ je uzavřený. Nechť dále $g \perp \omega_k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom $c_k = 0$ pro $k \in \mathbb{N}$. Podle Parsevalovy rovnosti tedy $\|g\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0$ a tedy $g = 0$. Nyní plyne z Věty 3.3.16, že je $\{\omega_k\}$ úplný.
Nechť nyní je $\{\omega_k\}$ úplný. Položme, že není uzavřený. Pak $\exists g \in L^2$ tak, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|g\|^2, \qquad \text{kde } c_k = (g \cdot \omega_k).$$

Vzhledem k Riesz-Fischerově Větě (3.3.13) existuje funkce $f \in L^2$ taková, že $c_k = (f \cdot \omega_k)$ a $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$. Uvažujeme $h = f - g$. Potom zřejmě $h \neq 0$. Avšak $h \perp \omega_k$, což je ve sporu s Větou 3.3.17. □

Důsledek 3.3.18 *V $L^2([-\pi,\pi])$ je trigonometrický systém úplný.*

Důkaz. Plyne z Věty 3.3.17 a Důsledku 3.3.12. □

Shrnutí: Uvažujme prostor $L^2([-\pi,\pi])$ a trigonometrický systém

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(t), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(t), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2t), \ldots$$

Potom Fourierovy koeficienty funkce $f \in L^2([-\pi,\pi])$ jsou

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

Fourierova řada má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\Big). \tag{3.6}$$

Uvažujme částečnou sumu

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\Big).$$

Potom platí to, že posloupnost $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje ve smyslu prostoru $L^2([-\pi,\pi])$ k funkci f tj.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \Big(f(t) - S_n(t)\Big)^2\,dt = 0.$$

Kromě toho platí

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Obráceně, pokud řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ konvergují, pak $\exists f \in L^2$ tak, že a_k a b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Otevřenou otázkou zůstává, zdali je řada 3.6 konvergentní bodově.

3.4 Lineární nezávislost

Definice 3.4.1 *Systém $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá lineárně nezávislý, pokud žádný z prvků ω_i nemožno vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních prvků.*

Tvrzení 3.4.2 *Nechť je $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormální. Potom je lineárně nezávislý.*

Důkaz. Nechť

$$\sum_{k\in I}\lambda_k\omega_k(t) \sim 0, \quad Card\{I\} < \infty.$$

Potom pro $i \in I$

$$0 = (\omega_i \cdot \sum_{k\in I}\lambda_k\omega_k) = \lambda_i.$$

$\square$

Věta 3.4.3 (Věta o ortogonalizaci) *Nechť $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ je lineárně nezávislý systém. Potom existuje ortonormální systém $\{\omega_k\}$ takový, že*

1. *pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je ω_n lineární kombinace funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$*
2. *pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je φ_n lineární kombinace funkcí $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$*

Uvažujme prostor $L^2([-1,1])$. Lehce lze ověřit, že systém

$$1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$$

tvoří lineárně nezávislý systém. Podle Věty 3.4.3 potom existuje ortonormální systém

$$\omega_0, \omega_1, \dots,$$

přičemž ω_n je polynom n-tého stupně. Tyto polynomy se nazývají Legendrovy polynomy.

Věta 3.4.4 *Systém Legendrových polynomů je uzavřený a tedy i úplný.*

Důkaz. Vzhledem k Větě 3.4.3 (druhá část)

$$t^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k\omega_k(t). \tag{3.7}$$

Tedy a_k jsou Fourierovy koeficienty funkce t^n vzhledem k $\{\omega_k\}_1^\infty$. Z 3.7 zřejmě plyne

$$\int_{-1}^{1} t^{2n}\,dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} t^n \omega_k(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

Tedy pro každou z funkcí t^n platí Parsevalova rovnost. Vzhledem k Důsledku 3.3.11 je proto systém $\{\omega_k\}$ uzavřený. Úplnost plyne z Věty 3.3.17. □

Poznámka 3.4.5 (Rodriguesův vzorec) *Legendrovy polynomy se obvykle značí písmeny $P_0, P_1, \ldots$. (P_k nejsou normované). Dá se ukázat, že*

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^n - 1)^n.$$

Tento vzorec se nazývá Rodriguesovým vzorcem. Dále platí

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) P_m(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \textit{pro } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \textit{pro } n = M. \end{cases}$$

Speciálně:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t, \quad P_4(t) = \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}.$$

3.5 Systémy trigonometrických funkcí v $L^2([0, \pi])$

Příklad 3.5.1 *Uvažujme systémy*

$$1,\ \cos(x),\ \cos(2x),\ \cos(3x), \ldots \tag{3.8}$$

a

$$\sin(x),\ \sin(2x),\ \ldots. \tag{3.9}$$

Víme, že sjednocení systémů (3.8) a (3.9) tvoří ortogonální systém v $L^2([-\pi, \pi])$. Ukážeme, že jak systém (3.8), tak i systém (3.9) je ortogonální a úplný v $L^2([0, \pi])$.

Úloha 3.5.2 *Přímím výpočtem ověřte ortogonalitu systémů (3.8) a (3.9).*

Ukážeme úplnost (3.8). Nechť $f \in L^2([0, \pi])$. Zavedeme označení

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(-t) & \text{pro } t \in [-\pi, 0[\\ f(t) & \text{pro } t \in]0, \pi]. \end{cases}$$

Zřejmě $\bar{f} \in L^2([-\pi, \pi])$. Poněvadž sjednocení systémů (3.8) a (3.9) je úplné v $L^2([-\pi, \pi])$, pak funkci $\bar{f}$ lze aproximovat libovolnou přesností svou Fourierovou řadou, tj. funkcemi

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) + a_0. \tag{3.10}$$

Všimněme si, že $b_k = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$. Vskutku

$$\begin{aligned} b_k &= \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)\sin(kt)dt \\ &= \int_{-\pi}^{0} \bar{f}(t)\sin(kt)dt + \int_{0}^{\pi} \bar{f}(t)\sin(kt)dt \\ &= -\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt + \int_{0}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tedy funkce S_n v (3.10) mají tvar

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt).$$

Poněvadž platí $\|\bar{f} - S_n\|_{L^2([-\pi,\pi])} \to 0$, zřejmě platí i $\|f - S_n\|_{L^2([0,\pi])} \to 0$.

ÚLOHA 3.5.3 *Analogicky ukažte úplnost systému* (3.9). *Předpokládáme*

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} -f(-t) & \text{pro } t \in [-\pi, 0[\\ f(t) & \text{pro } t \in]0, \pi]. \end{cases}$$

Kapitola 4

Singulární integrál

4.1 Motivace

Nechť $\phi_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána tvarem

$$\phi_n(t,x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2(t-x)^2}. \tag{4.1}$$

Nechť dále $f \in L([0,1])$. Položme

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{f(t)}{1+n^2(t-x)^2}dt \quad \text{tj. } = \int_0^1 \phi_n(t,x)f(t)dt. \tag{4.2}$$

Ukážeme, že je-li $x \in]0,1[$ a v bodě x je funkce f spojitá, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x). \tag{4.3}$$

Všimněme si, že

$$\int_0^1 \phi_n(t,x)dt = \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{1+n^2(t-x)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-nx}^{n(1-x)} \frac{ds}{1+s^2}$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \phi_n(t,x)dt = 1. \tag{4.4}$$

Zaveďme označení

$$r_n = f_n(x) - f(x)\int_0^1 \phi_n(t,x)dt.$$

Zřejmě pro dokázaní vztahu (4.3) stačí ukázat (vzhledem k (4.4)), že $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Ukážeme nyní, že platí poslední rovnost. Zvolíme $\epsilon > 0$. Poněvadž x je bodem spojitosti f, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $t \in [0,1] : |t-x| < \delta$ platí $|f(t)-f(x)| < \epsilon$. Zřejmě můžeme předpokládat, že $0 < x-\delta < x+\delta < 1$. Pak

$$r_n = \frac{n}{\pi}\int\limits_0^{x-\delta} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dt + \frac{n}{\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dt + \frac{n}{\pi}\int\limits_{x+\delta}^{1} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dt$$
$$= A_n + B_n + C_n.$$

Odhadneme jednotlivě

$$|B_n| \le \frac{n}{\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dt \le \epsilon\frac{n}{\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{1}{1+n^2(t-x)^2}dt \le \frac{\epsilon}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+infty} \frac{ds}{t+s^2} = \epsilon.$$

Pro odhad A_n si všimneme, že pro jmenovatel platí $|t-x| \ge \delta$, tedy

$$|A_n| \le \frac{n}{\pi(1+n^2\delta^2)}\int\limits_0^{x-\delta} |f(t)-f(x)|dt \le \frac{n}{\pi(1+n^2\delta^2)}\int\limits_0^{1} |f(t)-f(x)|dt \le \frac{A(\delta)}{n}$$

pro dostatečně velké n. Analogicky pro dostatečně velké n platí

$$|C_n| \le \frac{C(\delta)}{n}.$$

Z těchto odhadů zřejmě plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.
Můžeme si všimnout, že konkrétní tvar funkce ϕ_n není tak důležitým a platnost vztahu (4.3) závisí na kvantitativním chování funkce ϕ_n.

DEFINICE 4.1.1 (Jádro a Singulární Integrál) *Nechť $\phi_n : [a,b]\times]a,b[\to \mathbb{R}$ a pro každé $x \in]a,b[$ je $\phi_n(\cdot,x) \in L([a,b])$. Nechť dále pro každé $a \le \alpha < x < \beta \le b$ platí*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_\alpha^\beta \phi_n(t,x)dt = 1.$$

Potom se funkce ϕ_n nazývá jádro. Je-li ϕ_n jádro, pak integrál

$$f_n(x) = \int\limits_a^b \phi_n(t,x)f(t)dt$$

se nazývá singulárním integrálem.

Teorie singulárních integrálů má četné aplikace. Jednou s fundamentálních otázek této teorie je vztah limity $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ a hodnoty $f(x)$. Dále se seznámíme s touto teorií a budeme zkoumat vybrané její aplikace v teorií Fourierových řad a obecně trigonormetrických řad.

VĚTA 4.1.2 (Lebesgue) *Nechť* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M([a,b])$ *a existuje* $M > 0$ *tak, že*

$$|\varphi_n(t)| < M \qquad \textit{pro skoro všechna } t \in [a,b], n \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Nechť dále pro $\forall c \in [a,b]$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(t)dt = 0. \tag{4.6}$$

Potom pro každou $f \in L([a,b])$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt = 0. \tag{4.7}$$

Důkaz. Nejprve si všimneme, že vzhledem k ((4.6)) platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_n(t)\,dt = 0 \tag{4.8}$$

pro libovolný interval $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$. Důkaz věty provedeme v několika fázích. Nechť nejprve $f \in C([a,b])$. Zvolíme $\epsilon > 0$. Potom existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ tak, že

$$\max\{|f(t) - f(s)| : t,s \in [x_i, x_{i+1}], i = \{0,1,...,m-1\}\} < \epsilon. \tag{4.9}$$

Pak zřejmě platí, že

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t) - f(x_k)]\varphi_n(t)\,dt + \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_n(t)\,dt. \tag{4.10}$$

Využitím vztahů (4.5) a (4.9) odhadujeme

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t) - f(x_k)]\varphi_n(t)dt \right| \le M\epsilon(x_{k+1} - x_k) \qquad \text{pro } k = \{0,1,...,m-1\}.$$

Vezmeme-li navíc v úvahu (4.8) obdržíme z (4.10), že

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt \right| \le M\epsilon(b-a).$$

Avšak volba $\epsilon > 0$ byla libovolná. Proto plyne z poslední nerovnosti, že pokud $f \in C([a,b])$, pak platí (4.7).
Nechť nyní funkce f je ohraničená (tedy je také měřitelná a integrovatelná). Potom existuje konstanta $f^* \ge 0$, pro kterou platí

$$|f(t)| \le f^* \qquad \text{pro skoro všechna } t \in [a,b].$$

Zvolíme $\epsilon > 0$. Potom vzhledem k Lusinově větě 1.4.6 existuje funkce $g \in C([a,b])$ taková, že

$$|g(t)| \leq f^* \quad \text{a} \quad \operatorname{mes}\{t \in [a,b] : f(t) \neq g(t)\} < \epsilon.$$

Proto obdržíme

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = \int_a^b [f(t) - g(t)]\varphi_n(t)dt + \int_a^b g(t)\varphi_n(t)dt. \tag{4.11}$$

Na druhé straně, je-li $E = \{t : f(t) \neq g(t)\}$, platí

$$\left|\int_a^b [f(t) - g(t)]\varphi_n(t)dt\right| = \left|\int_E [f(t) - g(t)]\varphi_n(t)dt\right| \leq 2Mf^* - \epsilon.$$

Vezmeme-li nyní v úvahu už dokázanou část, obdržíme z vztahu (4.11), že

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt\right| \leq 2Mf^*\epsilon,$$

a tedy vzhledem k libovolnosti $\epsilon > 0$ platí vztah (4.7). Nechť nyní $f \in L([a,b])$. Zvolíme $\epsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou měřitelnou množinu $A \subset [a,b]$ takovou, že $\operatorname{mes}(A) < \delta$ platí

$$\int_A |f(t)|dt < \epsilon. \tag{4.12}$$

Vzhledem k Větě 1.4.1 existuje ohraničená a měřitelná g taková, že

$$\operatorname{mes}\{t : f(t) \neq g(t)\} < \delta.$$

Z důkazu Věty 1.4.1 můžeme předpokládat, že

$$g(t) = 0 \quad \text{pro } t \in A \text{ kde } A = \{t : f(t) \neq g(t)\}.$$

Dále

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = \int_a^b [f(t) - g(t)]\varphi_n(t)dt + \int_a^b g(t)\varphi_n(t)dt.$$

Avšak vzhledem ke vztahu (4.12)

$$\left|\int_a^b [f(t) - g(t)]\varphi_n(t)dt\right| = \left|\int_A f(t)\varphi_n(t)dt\right| \leq \epsilon M.$$

Opakováním stejných argumentů dokončíme důkaz. □

VĚTA 4.1.3 (Riemann-Lebesgue) *Nechť $f \in L([a,b])$. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0 \quad a \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

Důkaz. Plyne z Věty 4.1.3, protože funkce $\varphi_n(t) = \cos(nt)$ $(= \sin(nt))$ vyhovují ((4.5)) a ((4.6)). $\square$

DEFINICE 4.1.4 (Slabá konvergence posloupnosti k nule) *Nechť* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M([a,b])$ *a pro každé* $f \in L([a,b])$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\varphi_n(t)\, dt = 0.$$

Pak řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *slabě konverguje k nule (na* $[a,b]$*).*

4.2 Věty o reprezentaci

Dále všude budeme navíc předpokládat, že je jádro $\phi_n(\cdot, x)$ ohraničené. Potom singulární integrál

$$f_n(x) = \int_a^b \phi_n(t,x) f(t) dt$$

má smysl pro každou $f \in L([a,b])$.

VĚTA 4.2.1 (Lebesgue) *Nechť* $x \in]a,b[$ *a* $\delta \in]0,\cdot[$ *jádro* ϕ_n *slabě konverguje k nule na množinách* $[a, x-\delta]$ *a* $[x+\delta, b]$. *Nechť dále*

$$\int_a^b |\phi_n(t,x)| dt < H(x) \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Potom pro každou funkci $f \in L([a,b])$*spojitou v* x *platí*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Důkaz. Poněvadž ϕ_n je jádro, stačí ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(t) - f(x)]\phi_n(t,x) dt = 0.$$

Zvolíme $\epsilon > 0$. Jelikož f je spojitá v x, $\exists \delta > 0$ tak, že

$$|f(t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3H(x)} \qquad \text{pro } |t - x| < \delta.$$

Proto je zřejmé, že

$$\left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} [f(t) - f(x)]\phi_n(t,x) dt \right| \leq \frac{\epsilon}{3H(x)} \int_a^b |\phi_n(t,x)| dt < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Na druhé straně, protože $\{\phi_n\}$ slabě konverguje k nule na $[a, x-\delta]$ a $[x+\delta, b]$, tak platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{x-\delta}[f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)dt = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_{x+\delta}^{b}[f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)dt = 0$$

□

Poznámka 4.2.2 *Předchozí věta udává reprezentaci integrovatelné funkce f v bodě spojitosti. Ale integrovatelná funkce nemusí vůbec mít bod spojitosti (např. Dirichletova funkce). Proto má věta omezenou aplikaci. Zajímavější by byla Věta o reprezentaci v Lebegueových bodech.*

Lemma 4.2.3 (Natanson) *Nechť $f \in L([a,b])$ je taková, že*

$$M = \sup_{0<h\le b-a}\left\{\frac{1}{h}\left|\int_a^{a+h} f(t)dt\right|\right\} < \infty.$$

Nechť dále $g \in L([a,b])$, $g(t) \ge 0$ pro $t \in [a,b]$ a g je klesající. Potom $fg \in L([a,b])$ a platí odhad

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \le M\int_a^b g(t)dt.$$

Věta 4.2.4 (Romanovský) *Nechť ϕ_n je jádro, $\phi_n(t,x) > 0$ pro t, x, n a pro n a x (otazník) funkce $\phi_n(\cdot,x)$ je rostoucí na $[a,x]$ a klesající na $[x,b]$. Nechť dále $f \in L([a,b])$ a v bodě x je $f(x) = F'(x)$ (f je derivací své primitivní funkce). Potom*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\phi_n(t,x)dt = f(x) \tag{4.13}$$

Důkaz. Poněvadž ϕ_n je jádro, stačí ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)dt = 0. \tag{4.14}$$

Dále, díky aditivitě integračního oboru integrálu, stačí ukázat, že každý z integrálů $\int_a^x [f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)\,dt$ a $\int_x^b [f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)\,dt$ pro $x \in [a,b]$ platí, že pro $n \to \infty$ konvergují k nule.

Bez újmy na obecnosti ukážeme, že $\int_x^b [f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)\,dt \to 0$. Poněvadž $F'(x) = f(x)$ (v bodě x) pro zvolené $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+b}[f(t)-f(x)]dt\right| < \epsilon \quad \text{pro } h \in]0,\delta].$$

Vzhledem k Lemmatu (4.6) proto platí

$$\left|\int_x^{x+\delta}[f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)dt\right| \le \epsilon \int_x^{x+\delta}\phi_n(t,x)dt \le \epsilon\int_a^b \phi_n(t,x)dt. \tag{4.15}$$

Dále víme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \phi_n(t,x)dt = 1$. Proto existuje konstanta $K(x)$ tak, že

$$\int_a^b \phi_n(t,x)dt \le K(x).$$

Nyní plyne z (4.15), že

$$\left|\int_x^{x+\delta}[f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)dt\right| \le \epsilon K(x). \tag{4.16}$$

Na druhé straně pro $t \in [x+\delta, b]$ platí

$$\phi_n(t,x) \le \phi_n(x+\delta,x) \le \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}\phi_n(s,x)ds < \frac{1}{\delta}K(x).$$

Uvažujme posloupnost funkce $\varphi_n(t) = \phi_n(t,x)$. Předchozí nerovnost říká, že $\{\varphi_n\}$ je stejnoměrně ohraničená posloupnost. Platí tedy podmínka (4.5) Věty 4.1.2. Dále, protože ϕ_n je jádro, platí i vztah (4.6) Věty 4.1.2 (všechno pro $[x+\delta,b]$), tj. φ_n slabě konverguje k 0. Vzhledem k Větě 4.1.2 tedy máme, že pro dostatečně velké n platí

$$\left|\int_{x+\delta}^{b}[f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)dt\right| < \epsilon.$$

Poslední nerovnost spolu s (4.16) dává

$$\left|\int_x^{b}[f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)dt\right| \le \epsilon(K(x)+1).$$

Tedy jsme dokázali Vztah (4.14) a tím dokončujeme také důkaz. □

PŘÍKLAD 4.2.5 (Weierstrassův integrál) *Výraz*

$$W_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-n^2(t-x)^2}f(t)dt$$

se nazývá Weierstrassův integrál. V tomto případě uvažujeme jádro $\phi_n(t,x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2(t-x)^2}$.

$$\int_\alpha^\beta \phi(t,x)dt = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-n^2(t-x)^2}f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{n(\alpha-x)}^{n(\beta-x)} e^{-s^2}ds \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds = 1.$$

Dále je zřejmé, že $\phi_n(\cdot, x)$ je rostoucí na $[a, x]$ a klesající na $[x, b]$. Tedy lze použít Větu 4.2.4. Proto platí: "Je-li $f \in L([a, b])$ a $x \in]a, b[$ je bod, v němž je $f(x)$ derivací své primitivní funkce, pak

$$\lim_{n\to\infty} W_n(x) = f(x).\text{"}$$

Definice 4.2.6 (Hrbolatá majoranta funkce) *Řekneme, že funkce $\psi(t, x)$ je hrbolatou majorantou funkce ϕ, je-li $|\phi(t, x)| \leq \psi(t, x)$ a $\psi(\cdot, x)$ je rostoucí na $[a, x]$ a klesající na $[x, b]$.*

Věta 4.2.7 (Fadeev) *Nechť ϕ_n je jádro a $\forall n \in \mathbb{N}$ je jeho hrbolatou majorantou ψ_n, přičemž existuje konstanta $K(x)$*

$$\int_a^b \psi_n(t, x)dt < K(x) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Potom pro každou $f \in L([a, b])$ pro kterou x je Lebesgueův bod platí Vztah (4.13).

Důkaz. Stačí ukázat, že

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^b [f(t) - f(x)]\phi_n(t, x)dt = 0.$$

Poněvadž x je Lebesgueův bod f pro $\epsilon > 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+b} |f(t) - f(x)|dt < \epsilon.$$

Vzhledem k Lemmatu 4.2.3 platí

$$\left| \int_x^{x+\delta} [f(t) - f(x)]\phi_n(t, x)dt \right| \leq \int_x^{x+\delta} |f(t) - f(x)|\psi_n(t, x)dt \leq \epsilon \int_x^{x+\delta} \psi_n(t, x)dt \leq \epsilon K(x).$$

Na druhé straně $\varphi_n(t) = \phi(t, x)$ je slabě konvergující k 0 (na $[x + \delta, b]$), neboť

$$|\phi_n(t, x)| \leq \psi_n(t, x) \leq \psi_n(x + \delta, x) \leq \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} \psi_n(t, x)dt < \frac{1}{\delta} K(x).$$

Na závěr opakujeme stejné úvahy jako při důkazu předešlé věty. □

4.3 Aplikace pro Fourierovy řady

Uvažujeme systém

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt).$$

Nechť $f \in L([-\pi, \pi])$. Zavedeme označení

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ks) ds, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ks) ds, \tag{4.17}$$

a uvažujme formální řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big).$$

Této řadě budeme opět říkat Fourierova řada. Dále uvažujme částečné sumy

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big).$$

Zřejmě platí, vzhledem ke Vztahu (4.17), že

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k(t-x)) \right] f(t) dt.$$

Je známo, že

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Proto platí

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}(t-x)\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} f(t)\, dt. \tag{4.18}$$

Tomuto singulárnímu integrálu se říká *Dirichletův singulární integrál.* Budeme se zabývat otázkou *konvergence* řady metodou Cesara. Položme

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \Big(S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x) \Big).$$

Vzhledem k Vztahu (4.18)

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k+1}{2}(t-x) \right) \right] \frac{f(t)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\, dt.$$

Avšak

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)\alpha) = \frac{\sin^2(n\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\cos(2k\alpha) - \cos(2(k+1)\alpha) = 2\sin(\alpha)\sin((2k+1)\alpha) \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

spočteme

$$2\sin(\alpha)\sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k+1)\alpha) = 1-\cos(2n\alpha) = 2\sin^2(n\alpha).$$

Proto

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin\left(n\frac{t-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right]^2 f(t)\,dt.$$

Tento integrál se nazývá *Fejerův integrál* a $\frac{1}{2\pi n}\left[\frac{\sin\left(n\frac{t-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right]^2$ je *Fejerovo jádro.* Ukážeme, že můžeme použít Fadeevovu větu 4.2.7. Je-li $f = 1$, pak $a_0 = 2$, $a_k = 0$, $b_k = 0$. Tedy $S_n(x) = 1$. Proto $\sigma_n(x) = 1$ (pro $f = 1$) a tedy

$$\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin\left(n\frac{t-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right]^2 dt = 1. \tag{4.19}$$

Nyní ukážeme, že funkce

$$\frac{1}{2\pi n}\left[\frac{\sin\left(n\frac{t-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right]^2$$

je jádro. Položme $x \in]-\pi,\pi[$, $-\pi \le \alpha < x < \beta \le \pi$,

$$A(x,\alpha) = \max\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\alpha-x}{2}\right)}, \frac{1}{\sin^2\left(\frac{-\pi-x}{2}\right)}\right\}.$$

Zřejmě pro $t \in [-\pi,\alpha]$ platí

$$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)} \le A(x,\alpha),$$

proto

$$\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\alpha}\left[\frac{\sin\left(n\frac{t-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right]^2 dt < \frac{1}{n}A(x,\alpha).$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\alpha}\left[\frac{\sin\left(n\frac{t-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right]^2 = 0.$$

Analogicky lze ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi n}\int_{\beta}^{\pi}\left[\frac{\sin\left(n\frac{t-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right]^2 = 0.$$

Poslední dvě rovnosti spolu s ((4.19)) dávají, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\sin\left(n\frac{t-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} \right]^2 dt = 1,$$

a tedy $\frac{1}{2\pi n} \left[\frac{\sin\left(n\frac{t-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} \right]^2$ je jádro. Sestrojíme nyní hrbolatou majorantu pro Fejerovo jádro. Všimněme si, že $|\sin s| \le |s|$. Tedy $\frac{1}{\sin^2 s} \ge \frac{1}{s^2}$. Zřejmě $\frac{1}{\sin^2 s} \ge 1$. Proto

$$\frac{1}{\sin^2 s} \ge \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{s^2+1}{2s^2},$$

a tedy

$$\sin^2\left(\frac{n(t-x)}{2}\right) \le \frac{2n^2(t-x)^2}{n^2(t-x)^2+4}. \tag{4.20}$$

Na druhé straně pro $|s| \le \frac{\pi}{2}$ platí $|\sin s| \ge \frac{2}{\pi}|s|$. Tedy

$$\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right) \ge \frac{1}{\pi^2}(t-x)^2. \tag{4.21}$$

Nyní plyne ze Vztahů (4.20) a (4.21), že

$$\frac{1}{2\pi n} \left[\frac{\sin\left(n\frac{t-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} \right]^2 \le \frac{1}{2\pi n} \frac{2n^2(t-x)^2}{n^2(t-x)^2+4} \frac{\pi^2}{(t-x)^2} = \frac{n\pi}{n^2(t-x)^2+4}.$$

Tedy $\frac{n\pi}{n^2(t-x)^2+4}$ je hrbolatou majorantou Fejerova jádra. Dále

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{n\pi}{n^2(t-x)^2+4} dt < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi ds}{s^2+4} = \frac{\pi^2}{2},$$

a tedy je stejnoměrně ohraničená. Ukázali jsme že, v tomto případě lze použít Fadeevovu větu, tj. platí nasledující Věta:

VĚTA 4.3.1 (Fejer-Lebesgue) *Nechť $f \in L([-\pi,\pi])$ a*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}(S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)),$$

kde

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}(t-x)\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} f(t)\, dt.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x) \quad \text{pro skoro všechna } x \in [-\pi,\pi]. \tag{4.22}$$

Navíc ((4.22)) platí pro všechny Lebesgueovy body a body spojitosti z otevřeného intervalu $]-\pi,\pi[$.

POZNÁMKA 4.3.2 *V předchozím jsme ukázali, že trigonometrický systém je úplný v $L^2([-\pi,\pi])$. Proto, je-li Fourierův koeficient roven nule, pak $f = 0$. Z Fejer-Lebesgueovy Věty 4.3.1 plyne, že podobný výsledek platí také pro funkce $f \in L([-\pi,\pi])$.*

VĚTA 4.3.3 *Je-li $f \in L([-\pi,\pi])$ taková, že se její Fourierovy koeficienty vzhledem k trigonometrickému systému jsou nulové, potom $f \sim 0$.*

Důkaz. V předpokladech věty máme, že $\sigma_n(x) = 0$ a tedy $f \sim 0$. □

POZNÁMKA 4.3.4 *Všimněme si, že z definice σ_n obdržíme*

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n}\Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big).$$

Dále je zřejmé, že

$$S_n(x) - \sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big). \tag{4.23}$$

Odtud máme

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(S_n(x) - \sigma_n(x)\Big)^2 dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^2}(k^2 + b_k^2). \tag{4.24}$$

DEFINICE 4.3.5 (Lakulární Posloupnost) *Posloupnost přirozených čísel n_1, n_2, ... se nazývá lakunární, pokud existuje $A > 1$ taková, že*

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} > A \quad (> 1) \qquad \textit{pro } i \in \mathbb{N}.$$

VĚTA 4.3.6 (Kolmogorov) *Nechť $f \in L^2([-\pi,\pi])$ a $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ je lakunární posloupnost. Potom*

$$\lim_{i\to\infty} S_{n_i}(x) = f(x) \qquad \textit{skoro všechna na } [-\pi,\pi].$$

Důkaz. Vzhledem k Fejer-Lebesgueově větě stačí ukázat, že

$$\lim_{n_i\to\infty} [S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x)] = 0 \qquad \text{skoro všechna na } [-\pi,\pi]. \tag{4.25}$$

Vzhledem k Větě 2.2.4 pro platnost Vztahu (4.25) stačí ukázat, že

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \big(S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x)\big)^2 dx < \infty. \tag{4.26}$$

Vskutku $u_k(x) = [S_{n_k}(x) - \sigma_{n_k}(x)]^2$, $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Je-li $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_k < \infty$, pak Beppo-Leviho Věta 2.2.4 říká, že $F \in L([-\pi,\pi])$. Tj. F je skoro všude konečná, tedy řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ je skoro všude konvergentní a proto $u_k \to 0$ skoro všude. Zřejmě Vztah (4.26) je ekvivalentní

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n_i^2} \sum_{k=1}^{n_i} k^2(a_k^2 + b_k^2) \right] < \infty.$$

Zavedeme označení $c_k = k^2(a_k^2 + b_k^2)$. Potom

$$\begin{aligned} Q = &\frac{1}{n_1^2} \sum_{k=1}^{n_1} c_k + \\ &+ \frac{1}{n_2^2} \sum_{k=1}^{n_1} c_k + \frac{1}{n_2^2} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} c_k + \\ &+ \frac{1}{n_3^2} \sum_{k=1}^{n_1} c_k + \frac{1}{n_3^2} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} c_k + \frac{1}{n_3^2} \sum_{k=n_2+1}^{n_3} c_k + \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

Přeuspořádáním těchto sum tak, že sečteme sloupce dostáváme

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{n_s^2} \right) \left(\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} c_k \right), \quad n_0 = 0.$$

Díky tomu, že $\{n_i\}$ je lakunární

$$\frac{n_i}{n_s} \le \frac{1}{A^{s-i}}.$$

Proto

$$\begin{aligned} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{n_s^2} \right) \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} c_k &< \sum_{s=i}^{\infty} \left(\frac{n_i}{n_s} \right)^2 \sum_{n_{i-1}+1}^{n_i} (a_k^2 + b_k^2) < \\ &< \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{A^{2s}} \sum_{n_{i-1}+1}^{n_i} (a_k^2 + b_k^2) < \\ &< \frac{A^2}{A^2 - 1} \sum_{n_{i-1}+1}^{n_i} (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Vzhledem k Besselově nerovnosti 3.3.4

$$Q < \frac{A^2}{A^2 - 1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} (a_k^2 + b_k^2) \right) = \frac{A^2}{A^2 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty.$$

□

DEFINICE 4.3.7 *Trigonometrická řada* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \big(a_{n_i} \cos(n_i x) + b_{n_i} \sin(n_i x)\big)$ *se nazývá lakunární, je-li posloupnost* $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ *lakunární.*

VĚTA 4.3.8 (Kolmogorov) *Nechť* $f \in L([-\pi, \pi])$ *a její Fourierova řada je lakunární. Potom tato řada skoro všude konverguje k* f*.*

4.4 Další vlastnosti trigonometrických a Fourierových řad

V tomto odstavci nejprve ukážeme, že ne každá trigonometrická řada je řadou Fourierovou.

LEMMA 4.4.1 (Abel) *Nechť $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \{1, ..., n\}$ a $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_k$, přičemž $|S_k| \leq A$ pro $k = \{1, ..., n\}$. Nechť dále $q_1 > q_2 > \ldots > q_n > 0$. Potom*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k q_k \right| \leq A q_1.$$

Důkaz. Zřejmě $a_k = S_k - S_{k-1}$ pro $k > 1$. Proto

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k q_k &= S_1 q_1 + \sum_{k=2}^{n} (S_k - S_{k-1}) q_k = \\ &= \sum_{k=1}^{n} S_k q_k - \sum_{k=2}^{n} S_{k-1} q_k = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} S_k (q_k - q_{k+1}) + S_n q_n. \end{aligned}$$

Proto je zřejmé, že

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k q_k \right| \leq A \left(\sum_{k=1}^{n-1} (q_k - q_{k+1}) \right) = A q_1.$$

□

DEFINICE 4.4.2 (Abelovská řada) *Řekneme, že (formální) řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je Abelovská, je-li $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq A$ pro $n \in \mathbb{N}$.*

LEMMA 4.4.3 *Obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)$ (pro $x \neq 2\pi k$) a $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)$ jsou Abelovské.*

Důkaz. Položme $x \neq 2\pi k$ (druhá řada pro $x = 2\pi k$ je zřejmě Abelovská). Položme

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx), \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx), \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} e^{kxi} \quad \left(= \frac{e^{ix} - e^{(n+1)ix}}{1 - e^{ix}} \right).$$

Zřejmě $Re(C_n) = A_n$, $Im(C_n) = B_n$. Dále $|C_n| \leq \frac{2}{|1-e^{ix}|} = \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$. Proto $|A_n| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$, $|B_n| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$. □

VĚTA 4.4.4 *Nechť je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Abelovská. Nechť dále $q_1 > q_2 > \ldots > \ldots$ a $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$. Potom je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k$ konvergentní.*

Důkaz. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q_k$. Potom vzhledem k Lemmatu 4.4.1 pro $m > n$ platí

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k q_k \right| \leq A q_{n+1}.$$

□

DŮSLEDEK 4.4.5 *Nechť $q_1 > q_2 > \ldots > \ldots$ a $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$. Potom jsou obě řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos(nx) \qquad \text{kde } x \neq 2\pi k$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin(nx) \qquad \text{kde } x \in \mathbb{R}$$

konvergentní.

Dále ukážeme, že trigonometrická řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sin(nx) \tag{4.27}$$

není Fourierovou řadou žádné funkce, i když je dle Důsledku 4.4.5 konvergentní.

LEMMA 4.4.6 *Nechť $\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$. Potom $|\psi_n(x)| < 2\sqrt{\pi}$ $\forall x \in [0, \pi]$ a $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Nechť $x \in]0, \pi[$. Vybereme $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tak, že $q \leq \frac{\sqrt{\pi}}{x} < q + 1$. Pak

$$|\psi_n(x)| \leq |\psi_q(x)| + \left| \sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right|.$$

(Pro $q = 0$ je $\psi_q = 0$ a je-li $q \geq n$ nulový je druhý člen.) Avšak $|\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$. Proto

$$|\psi_q(x)| \leq \sum_{k=1}^{q} \frac{|\sin(kx)|}{k} \leq qx \leq \sqrt{\pi}.$$

Na druhé straně vzhledem k Lemmatu 4.4.1 platí

$$\left| \sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{A}{q+1}, \tag{4.28}$$

kde $A = \max \left| \sum_{k=q+1}^{i} \sin(kx) \right|$ $(q + 1 \leq i \leq n)$. Zopakujeme-li stejné argumenty jako při důkazu Lemma (4.21) zjistíme, že

$$\left| \sum_{k=q+1}^{i} \sin(kx) \right| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|},$$

tedy $A \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}$. Proto plyne ze Vztahu (4.28), že

$$\left| \sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{x} \right| \leq \frac{1}{(q+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Nyní vzhledem k nerovnostem $\sin(\frac{x}{2}) \geq (\frac{x}{\pi})$ a $q+1 > \frac{\sqrt{\pi}}{x}$ obdržíme

$$\left| \sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{x} \right| \leq \sqrt{\pi}.$$

Tedy pro $x \in]0, \pi[$ a pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\psi_n(x)| < 2\sqrt{\pi}.$$

$\square$

VĚTA 4.4.7 *Nechť* $f \in L([-\pi, \pi])$ *a* $b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$. *Potom je řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ *konvergentní.*

Důkaz. Vzhledem k Důsledku 4.4.5 je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ konvergentní. Nechť

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \qquad \psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Potom je zřejmé, že

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) f(x) = \psi(x) f(x) \qquad \text{pro skoro všechna } x \in [-\pi, \pi].$$

Vzhledem k Lemma 4.4.6 však platí

$$|\psi_n(x) f(x)| \leq 2\sqrt{\pi} |f(x)| \qquad \text{pro skoro všechna } x \in [-\pi, \pi].$$

Vzhledem k Lebesqueově větě o limitním přechodu proto máme, že

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x) f(x) dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi(x) f(x) dx.$$

Avšak

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k}.$$

$\square$

Podíváme se nyní, na řadu (4.27) tj. $\sum\limits_{n=e}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sin(nx)$. Ukážeme, že je řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = \infty$. Vskutku $x \to \frac{1}{x\ln(x)}$ je klesající. Proto

$$\frac{1}{n\ln(n)} > \int\limits_{n}^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)} dx.$$

Tedy

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln(n)} > \int\limits_{2}^{N} \frac{1}{x\ln(x)} dx = \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2)) \to \infty \qquad \text{pro } N \to \infty.$$

S použitím Věty 4.4.7 zjistíme, že vztah (4.27) není Fourierovou řadou $f \in L([-\pi,\pi])$, i když je všude konvergentní. Nyní ukážeme jednu pozoruhodnou vlastnost Fourierových řad

VĚTA 4.4.8 *Nechť $f \in L([-\pi,\pi])$ a formální řada*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

je její Fourierova řada. Nechť dále $[A,B] \subset [-\pi,\pi]$. Potom

$$\int\limits_{A}^{B} f(x)dx = \int\limits_{A}^{B} \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A}^{B} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)\, dx.$$

Důkaz. Je-li $f \in L^2$, pak je věta triviální.
Zavedeme funkce

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in [A,B] \\ 0 & \text{pro } x \notin [A,B]. \end{cases}$$

Lze ukázat, že

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \Big) \qquad \text{pro } x \in [-\pi,\pi] \setminus \{-\pi, A, B, \pi\}.$$

Nechť dále

$$S_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)).$$

Víme že

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)dx = \frac{B-A}{\pi}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos(kx)dx = \frac{\sin(kB) - \sin(kA)}{k\pi}$$

$$\beta_k = \frac{\cos(kA) - \cos(kB)}{k\pi}.$$

Potom

$$S_n(x) = \frac{B-A}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin(k(B-x))}{k} - \frac{\sin(k(A-x))}{k}\right).$$

Vzhledem k Lemma (4.24) získáme

$$|S_n(x)| \leq \frac{B-A}{2\pi} + \frac{4}{\sqrt{\pi}}.$$

Tedy posloupnost $\{S_n\}$ je stejnoměrně ohraničená. Proto vzhledem k Lebesgueově větě o limitním přechodu platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx.$$

Avšak

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx + \beta_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\frac{\sin(kB)-\sin(kA)}{k} + b_k\frac{\cos(kA)-\cos(kB)}{k}\right).$$

Tedy

$$\int_{A}^{B} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f\varphi dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{2}(B-A) + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos(kx) + \beta_k\sin(kx))\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{2}(B-A) + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos(kx) + \beta_k\sin(kx))\right).$$

Poslední rovnost je však ekvivalentní s tvrzením věty. □

POZNÁMKA 4.4.9 *Zajímavou vlastností Věty je: "Fourierovu řadu můžeme integrovat člen po členu, i když sama řada nemusí být vůbec konvergentní."*

VĚTA 4.4.10 (Cantor-Lebesgue) *Nechť na množině E, $\mathrm{mes}(E) > 0$ platí*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = 0.$$

Potom $a_n \to 0$ a $b_n \to 0$.

DŮSLEDEK 4.4.11 *Pokud je trigonometrická řada konvergentní na množině kladné míry, potom její koeficienty konvergují k 0.*

VĚTA 4.4.12 (Luzin-Denjoy) *Nechť trigonometrická řada $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big)$ je absolutně konvergentní na množině kladné míry. Potom $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty$.*

4.5 Podmínky konvergence Fourierovy řady

Vrátíme se ke vzorcům odstavců výše. Připomeňme, že je-li $f \in L([-\pi,\pi])$, pak a_k a b_k jsou čísla zavedeny Vztahem (4.17) a částečná suma S_n Fourierovy řady

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big)$$

připustí vyjádření (4.18), tj.

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}(t-x)\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt,$$

čemuž říkáme Dirichletův singulární integrál. Dále položme

$$D_n(s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}s\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Místo funkcí $f \in L([-\pi,\pi])$ je nyní pohodlnější mluvit o 2π periodických funkcích, jejichž zúžení je integrovatelné na $[-\pi,\pi]$. Je-li funkce f právě taková, pak reprezentaci (4.18) můžeme přepsat takto

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}s\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} ds.$$

Dále si všimněme, že při odvození Vztahu (4.18) jsme použili identitu

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ks) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}s\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Odtud jednoduše plyne, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s) ds = 1.$$

Proto platí

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x+s) - f(x) \Big) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}s\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} ds. \tag{4.29}$$

VĚTA 4.5.1 (Dini) *Nechť $f \in L([-\pi,\pi])$ je 2π periodická. Nechť dále $x \in [-\pi,\pi]$ a pro každé $\delta > 0$ existuje integrál*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+s) - f(x)|}{|s|} ds. \tag{4.30}$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x). \tag{4.31}$$

Důkaz. Zavedeme označení

$$\varphi(s) = \frac{1}{2}\frac{f(x+s)-f(x)}{s}\frac{s}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} \quad \text{pro } s \in [-\pi,\pi].$$

Vzhledem ke Vztahu (4.30) platí, že $\varphi \in L([-\pi,\pi])$. Na druhé straně vzhledem ke Vztahu (4.29)

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(s) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) ds.$$

Nyní vzhledem k Větě (4.3) obdržíme platnost Vztahu (4.31). □

POZNÁMKA 4.5.2 *Podmínce (4.30) se říká Diniova podmínka. Tato podmínka platí například tehdy, když v bodě x má funkce f konečnou derivaci nebo obecněji derivaci zleva a zprava.*

Předpokládejme nyní, že bod x je pro funkci f bodem nespojitosti prvního druhu. Označme $f(x+)$, resp. $f(x-)$, jednostranné limity f v x a položme, že pro každé $\delta > 0$ existují intervaly

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{f(x+s)-f(x-)}{s} ds, \quad \int_{0}^{\delta} \frac{f(x+s)-f(x+)}{s} ds. \tag{4.32}$$

Uvažujme výraz

$$S_n(x) - \frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big).$$

Snadno lze ověřit, že platí

$$S_n(x) - \frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big) =$$
$$= \int_{-\pi}^{0} \Big(f(x+s) - f(x-)\Big) D_n(s) ds + \int_{0}^{\pi} \Big(f(x+s) - f(x+)\Big) D_n(s) ds.$$

Stejnými argumenty jako při důkazu Věty (4.5.1) zjistíme, že oba tyto intervaly konvergují k 0.

VĚTA 4.5.3 *Nechť f je ohraničená 2π periodická funkce mající nezvýše body nespojitosti prvního druhu a mající v každém bodě derivaci zleva a zprava. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) \quad \textit{je-li } x \textit{ bodem spojitosti } f,$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big) \quad \textit{je-li } x \textit{ bodem nespojitosti } f.$$

POZNÁMKA 4.5.4 *Diniovu podmínku a tedy i podmínku existence derivace nelze vypustit. Lze sestrojit příklad spojité funkce, jejíž Fourierova řada v některých bodech diverguje. V této souvislosti zmíníme také, že Kolmogorov ukázal příklad $f \in L([-\pi,\pi])$, jejíž Fourierova řada diverguje všude. Navíc v roce 1966 Carleson ukázal, že je-li $f \in L^2([-\pi,\pi])$, potom její Fourierova řada konverguje skoro všude.*

4.6 Stejnoměrná konvergence Fourierových řad

Nyní se budeme zabývat stejnoměrnou konvergencí Fourierových řad. Jak jsme už viděli dřív, jedná-li se o *obyčejnou*, tedy bodovou konvergenci Fourierové řady k funkci f, pak f může být i nespojitá funkce. Co se týče stejnoměrné konvergence Fourierových řad k f, pak je zřejmé, že samotná funkce f musí být spojitá, neboť částečné sumy Fourierové řady jsou spojité. Tedy je-li Fourierova řada stejnoměrně konvergentní, pak její suma je spojitá funkce. Z toho vidíme, že spojitost f je nutnou podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci Fourierové řady.

VĚTA 4.6.1 *Nechť f je 2π periodická absolutně spojitá funkce a $F' \in L^2([-\pi,\pi])$. Pak Frourierova řada funkce f stejnoměrně konverguje k f (v celém $\mathbb{R}$).*

Důkaz. Označme a' a b' Fourierovy koeficienty funkce f'. Tj.

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)dx, \quad b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx.$$

Na druhé straně

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi n}\sin(nx)\int_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx = \frac{-b'_n}{n}.$$

Obdobně

$$b_n = \frac{a'_n}{n}.$$

Tedy

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n}\right). \tag{4.33}$$

Všimněme si, že

$$\frac{|b'_n|}{n} \le \frac{1}{2}\left(b'^2_n + \frac{1}{n^2}\right), \quad \text{a} \quad \frac{|a'_n|}{n} \le \frac{1}{2}\left(a'^2_n + \frac{1}{n^2}\right).$$

Poněvadž $f' \in L^2$, podle Besselovy nerovnosti 3.3.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a'^2_n + b'^2_n\right) < \infty$. Tedy plyne z ((4.33)), že $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(|a_n| + |b_n|\Big) < \infty$. Avšak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ je majorantou Fourierovy řady funkce f, a tedy Fourierova řada funkce f je stejnoměrně konvergentní. Zbývá dokázat, že Fourierova řada konverguje k f. Nechť Fourierova řada konverguje k funkci φ, tj.

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big).$$

Potom φ má tytéž Fourierovy koeficienty jako f. Vzhledem k Větě 4.3.3 pak $f \sim \varphi$. Poněvadž obě funkce jsou spojité, máme že $f = \varphi$. $\square$

Nyní uvedeme jinou podmínku stejnoměrné konvergence, která je podobná Diniově podmínce.

VĚTA 4.6.2 *Nechť* $f \in L([-\pi,\pi])$ *je ohraničená,* $E \subseteq [-\pi,\pi]$ *a* $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$*:*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+s)-f(x)|}{|s|} ds < \epsilon \qquad \text{pro } \forall x \in E.$$

Potom Fourierova řada konverguje k f *stejnoměrně v* E*. Důkaz věty je založen na následujícím Lemmatu:*

LEMMA 4.6.3 *Nechť* $B \subset L([a,b])$ *je prekompaktní množina. Pak* $\forall \epsilon > 0\ \exists N_{(\epsilon)}$: *je-li* $\lambda \geq N_{(\epsilon)}$*, pak*

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| < \epsilon \qquad \text{pro } \forall f \in B.$$

Lemma 4.6.3 je zesílením Věty 4.1.3.

Důkaz. Důkaz Věty 4.6.2 je založen na skutečnosti, že množina funkcí $\varphi_x(t)$ tvaru

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

je prekompaktní. □

Na závěr uvedeme další *zdůraznění* Lebesgue-Fejerovy věty

VĚTA 4.6.4 (Fejer) *Nechť* f *je spojitá* 2π *periodická funkce. Pak posloupnost* $\sigma_n \to f$ *stejnoměrně.*

Kapitola 5

Fourierův integrál a transformace

5.1 Prostory $L(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$

V této sekci se budeme zabývat rozdílem mezi případy, kdy studujeme prostory L a L^2 na konečných intervalech a na celé reálné ose.

TVRZENÍ 5.1.1 $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L(\mathbb{R})$

PŘÍKLAD 5.1.2 *Příkladem funkce, která leží v prostoru $L^2(\mathbb{R})$ a neleží v prostoru $L(\mathbb{R})$ je funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.*

TVRZENÍ 5.1.3 *Prostor $L(\mathbb{R})$ je úplný.*

TVRZENÍ 5.1.4 *Prostor $L^2(\mathbb{R})$ je úplný, unitární a separabilní.*

Přirozeně vzniká otázka o ortogonální bázi prostoru $L^2(\mathbb{R})$ resp $L^2([0,\infty[)$. Báze lze získat ortogonalizací posloupnosti $\{x^n e^{\frac{-x^2}{2}}\}_{n=0}^{\infty}$. Při této proceduře dostaneme systém funkcí tvaru

$$\phi_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad n = 0, 1, ... \tag{5.1}$$

kde H_n je polynom stupně n. H_n nazýváme *Hermitovými polynomy* a funkce ϕ_n nazýváme Hermitovými funkcemi. Lze ukázat, že Hermitovy polynomy jsou až na multiplikativní konstantu totožné s polynomy

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}). \tag{5.2}$$

Analogicky v prostoru $L^2(\mathbb{R}_+)$ ortogonalizace systému $\{x^n e^{-x}\}_{n=0}^{\infty}$ dává systém $L_n(x)e^{-x}$, který nazýváme Lagnerrovými funkcemi. Příslušné polynomy L_n nazýváme *Lagnerovy polynomy.*

5.2 Základní věta

VĚTA 5.2.1 *Nechť $f \in L(\mathbb{R})$ a v každém $x \in \mathbb{R}$ platí Diniova podmínka. Potom*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Big(\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(\lambda(t-x))\, dt \Big)\, d\lambda. \tag{5.3}$$

Důkaz. Zavedeme označení

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^A \Big(\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(\lambda(t-x))\, dt \Big)\, d\lambda \tag{5.4}$$

a ukážeme, že existují $\lim_{A\to\infty} J(A)$ a že tato limita je rovna $f(x)$. Poněvadž $f \in L(\mathbb{R})$ vnitřní integrál konverguje a vnější integrál konverguje absolutně. Proto můžeme použít Fubiniho větu a tedy dostáváme

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \Big(\int_0^A f(t) \cos(\lambda(t-x))\, d\lambda \Big)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \frac{\sin(A(t-x))}{t-x}\, dt.$$

Substitucí $t - x = z$ přepíšeme

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x+z) \frac{\sin(Az)}{z}\, dz.$$

Je známo, že

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(Az)}{z}\, dz = 1 \qquad \text{pro } A > 0.$$

Proto platí

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin(Az)\, dz.$$

Dále tedy

$$\begin{aligned} J(A) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin(Az)\, dz + \frac{1}{\pi} \int_{|z|\ge N} \frac{f(x+z)}{z} \sin(Az)\, dz - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|z|\ge N} \frac{\sin(Az)}{z}\, dz \\ &= I_{1n} + I_{2n} - I_{3n}. \end{aligned}$$

Zřejmě, pro každé $A \ge 1$ platí $I_{2n} \to 0$, $I_{3n} \to 0$ pro $n \to \infty$.
Dále pro Diniove podmínky pro x a N funkce $\phi(z) = \frac{f(x+z)-f(z)}{z}$ je integr. $\phi \in L([-N, N])$. Proto

$$\int_{-N}^N \phi(z) \sin(Az)\, dz \to 0 \qquad \text{pro } A \to \infty$$

dle Riemann-Lebesgueové věty. Z uvedených úvah plyne, že $J(A) \to f(x)$ pro $A \to \infty$. □

Poznámka 5.2.2 *Rovnost (5.3) se nazývá Fourierův vzorec. Jeho pravou stranou lze chápat jako jisté zobecnění Fourierovy řady. V skutku, položme*

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda t)\, dt$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\lambda t)\, dt$$

Potom pravá strana vztahu (5.3) má tvar

$$\int_{0}^{\infty} \Big(a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x) \Big)\, dx.$$

Poznámka 5.2.3 *Občas je pohodlnější přepsat Fourierův vzorec (resp. pravou stranu, kterou nazveme Fourierovým integrálem) v komplexním tvaru následovně. Všimneme si, že Fourierův integrál je sudá funkce vzhledem k λ - t.j. je-li*

$$g(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda(t-x))\, dt$$

pak $g(-\lambda) = g(\lambda)$. Proto (5.3) lze přepsat takto

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda(t-x))\, dt \Big)\, d\lambda.$$

Dále, poněvadž $f \in L(\mathbb{R})$ funkce

$$h(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\lambda(t-x))\, dt$$

existuje a je lichá. Proto

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Tedy lze psát (5.3) v komplexním tvaru

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)}\, dt \Big)\, d\lambda.$$

5.3 Fourierova transformace

Nechť $f \in L(\mathbb{R})$. Položme

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt \qquad \text{pro } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

Zřejmě pro $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ je funkce g definována. Funkci g nazveme Fourierov obraz funkce f. Zobrazení definované vztahem (5.5) se nazývá Fourierova transformace. Věta 5.2.1 spolu s Poznámkou 5.2.2 říkakí, že pokud navíc funkce f vyhovuji Diniové podmínce pro $\forall x$, potom platí

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

Tento vzorec se nazývá inverzním vzorcem Fourierové transformace. Ještě jednou si všimněme, že aby platila rovnost (5.6) je třeba na f položit dodatečné podmínky.

Poznámka 5.3.1 *Někteří autoři tyto vzorce píší následujícím způsobem*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt.$$

Všimněme si, že vztahy (5.5) *a* (5.6) *mají různý význam. Vztah* (5.5) *definuje a* (5.6) *je Větou.*

Věta 5.3.2 *Nechť $p \in L(\mathbb{R})$ a $g \equiv 0$ t.j.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\lambda i x}\, dx = 0. \tag{5.7}$$

Potom $f \sim 0$.

Důkaz. Z (5.7) plyne, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) e^{-i\lambda x}\, dx = 0 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Zvolíme pevné $y \in \mathbb{R}$ a položíme

$$\phi(x) = \int_{0}^{y} f(x+t)\, dt.$$

Použitím Fubiniho věty lze ověřit , že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-i\lambda x}\, dx = 0 \tag{5.8}$$

(navíc $\phi \in L(\mathbb{R})$). Dále, je zřejmé, že

$$\phi(x) = \int_{x}^{x+y} f(\zeta)\, d\zeta \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Proto je funkce ϕ absolutně spojitá v každém konečném intervalu a tedy má skoro všude konečnou derivaci. Tedy ϕ splňuje skoro všude Diniovou podmínku. Proto lze pro funkce ϕ použít Větu 5.2.1. Vezmeme-li v úvahu (5.8) a Poznámku 5.2.2, zjistíme, že

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-\lambda i(t-x)}\, dx \Big)\, d\lambda = 0 \quad \text{pro s.v. } x \in \mathbb{R}.$$

Poněvadž ϕ je spojitá, máme $\phi \equiv 0$. Jelikož jsme y volili libovolně

$$\int_0^y f(t)\, dt = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

a tedy $f \sim 0$. $\square$

Na závěr si uvedeme několik příkladů.

PŘÍKLAD 5.3.3 *Nechť* $f(x) = e^{-\gamma|x|}$, $\gamma > 0$. *Potom*

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|}(\cos(x) - i\sin(x))\, dx = 2\int_0^{\infty} e^{-\gamma x}\cos(\lambda x)\, dx = \frac{2\lambda}{x^2+\gamma^2}.$$

PŘÍKLAD 5.3.4 *Nechť* $f(x) = 1$ *pro* $|x| \le a$ *a* $f(x) = 0$ *pro* $|x| > a$. *Potom*

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x} f(x)\, dx = \int_{-a}^{a} e^{-\gamma|x|}\, dx = \frac{2\sin(\lambda a)}{\lambda}.$$

Všimněme si, že $g \notin L(\mathbb{R})$.

PŘÍKLAD 5.3.5 *Nechť* $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ *Potom pro* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$g(\lambda) = \frac{\pi e^{-a|\lambda|}}{a}.$$

PŘÍKLAD 5.3.6 *Nechť* $f(x) = e^{-ax^2}$. *Potom pro* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x}\, dx = e^{-\frac{-\lambda^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Pro $a = \frac{1}{2}$

5.4 Základní vlastnosti Fourierovy transformace

Pro stručnost zavedeme označení

$$F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Tedy Fourierova transformace je lineární operátor $F : L(\mathbb{R}) \to \mathcal{X}$.

TVRZENÍ 5.4.1 *Nechť* $\{f_n\} \subset L(\mathbb{R})$ *a* $||f_n - f||_{L(\mathbb{R})} \to 0$. *Potom posloupnost Fourierových obrazů* $\{F[f_n]\} = \{g_n\}$ *konverguje stejnoměrně v* $\mathbb{R}$.

Důkaz. Plyne z

$$|g_n(\lambda) - g_m(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx.$$

□

TVRZENÍ 5.4.2 *Nechť* $f \in L(\mathbb{R})$. *Potom* $F[f]$ *je ohraničená spojitá funcke konvergující k* 0 *pro* $|\lambda| \to \infty$.

Důkaz. $g(\lambda) \equiv F[f](\lambda)$. Ohraničenost je triviální

$$|g(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \quad \text{pro } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dále je-li $\phi_{[a,b]}$ charaketristická funkce intervalu $[a, b]$, pak

$$F[\phi_{[a,b]}](\lambda) \to 0 \quad \text{pro } |\lambda| \to \infty. \tag{5.9}$$

Poněvadž F je lineární operátor, lin. kombinace funkcí má stejnou vlastnost $f_j \to 0$ pro $|\lambda| \to \infty$.

Proto množina jendoduchých funkcí je hustá v $L(\mathbb{R})$. Tedy $\exists\{f_n\}$ jednoduchých funkcí taká, že $||f_n - f||_{L(R)} \to 0$. Posloupnost $g_n = F[f_n] \to 0$ pro $|\lambda| \to 0$. □

POZNÁMKA 5.4.3 *Nechť* B *je prostor všech stenoměrně spojitých funkcí v* R *konvergujících k* 0 *pro* $|\lambda| \to 0$. *Potom lze ukázat, že*

$$F : L(\mathbb{R}) \to B \qquad Ker(f) = \{0\}.$$

TVRZENÍ 5.4.4 *Nechť* $f \in AC([a, b])$ *pro* $\forall a < b$ *a* $f' \in L(\mathbb{R})$. *Potom*

$$F[f'] = i\lambda F[f]$$

Důkaz. Zřejmě platí

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt.$$

Poněvadž $f' \in L(R)$ existuje $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \int_0^x f'(t)\, dt$. Tedy $\exists \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. Jelikož $f \in L(\mathbb{R})$

$$\lim_{x\pm\infty} f(x) = 0.$$

Dále je zřejmé, že

$$F[f'](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ix\lambda}\, dx$$

$$= f(x)e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\, dx = i\lambda F[f](\lambda).$$

□

TVRZENÍ 5.4.5 *Je-li $f^{k-1} \in AC$ pro $\forall$ konečný interval a $f, ..., f^{(k)} \in L(\mathbb{R})$, pak*

$$F[f^k] = (i\lambda)^k F[f]$$

Důkaz. Zřejmý. □

TVRZENÍ 5.4.6 *Nechť $f^{(k)} \in L(\mathbb{R})$. Pak*

$$|F[f]| = \frac{1}{|\lambda|^k}|F[f^{(k)}]| \to 0.$$

(Přesněji $|F[f]| = 0(\frac{1}{|\lambda|^k})$.

Důkaz. Plyne z Tvrzení 5.4.2 □

TVRZENÍ 5.4.7 *Nechť $f'' \in L(\mathbb{R})$. Pak $F[f] \in L(\mathbb{R})$.*

Důkaz. Podle Tvrzení 5.4.5 a 5.4.2

$$|F[f](\lambda)| = \frac{1}{\lambda^2}\phi(\lambda),$$

kde ϕ je spojitá a její limita je 0 pro $|\lambda| \to \infty$. □

TVRZENÍ 5.4.8 *Nechť $f, xf \in L(\mathbb{R})$. Potom $F[f]$ je diferencovtelná a*

$$(F[f](\lambda))' = F[-ixf(x)].$$

Důkaz.

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Derivací podle λ dostaneme

$$g'(\lambda) = -i\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\lambda x}\, dx.$$

□

TVRZENÍ 5.4.9 *Nechť $f, xf, ..., x^p f \in L(\mathbb{R})$. Potom $F[f]$ je diferencovatelná do p-teho řádu včetně. Navíc*

$$g^{(k)}(\lambda) = F[(-ix)^k f(x)] \qquad k = 0, 1, ..., p.$$

5.5 Úplnost systému Hermitových a Lagrangeových funkcí

VĚTA 5.5.1 *Nechť $f : I \to \mathbb{R}$, kde $I = \mathbb{R}$ nebo $I = \mathbb{R}_+$ a $f(x) \neq 0$ pro s.v. $x \in I$. Nechť dále $|f(x)| \leq ce^{-\delta|x|}$ pro $\delta > 0$, $x \in I$. Potom systém $\{x^n f(x)\}_{n=0}^{\infty}$ je úplný v prostoru $L^2(I)$.*

Důkaz. Připustme opak, že $\{x^n f(x)\}_{n=0}^{\infty}$ není úplný. Poněvadž $L^2(I)$ je Hilbertův prostor, existují $h \in L^2(I)$ takové, že $h \not\equiv 0$ a

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)h(x)\,dx = 0 \quad n = 0, 1, ...$$

Zřejmě $fh \in L(I)$ a navíc

$$e^{\delta_1|x|} fh \in L(I) \qquad \text{pro } \delta_1 < \delta.$$

Nechť g je Fourierův obraz funkce fh t.j.

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)e^{-i\lambda x}\,dx.$$

Vzhledem k Tvrzení 5.4.9 je $g^{(n)}(0) = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Avšak funkce g je analytická a proto $g \equiv 0$. Proto plyne z Věty 5.3.2 že $fh \sim 0$. Poněvadž $f(x) \neq 0$ pro s.v. $x \in I$, dostáváme $h \sim 0$ a tedy spor. □

TVRZENÍ 5.5.2 *Systém Hermitových resp. Leguerových funkcí je úplný v příslušných prostorech.*

5.6 Fourierova transformace a konvoluce funkcí

Nechť $f_1, f_2 \in L(\mathbb{R})$ a

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\zeta)f_2(x - \zeta)\,d\zeta \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Pak je f definována pro s.v. $x \in \mathbb{R}$ a je integrovatelná. V skustku dvojný integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\zeta)f_2(x - \zeta)\,d\zeta \Big)\,dx$$

existuje protože extisuje integrál (viz. Fubiniho věta)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\zeta)f_2(x - \zeta)|\,d\zeta \Big)\,dx.$$

Funkce f se nazývá konvolucí funkcí f_1 a f_2 a značí se $f_1 * f_2$.
Použitím Fubiniho věty (a substitucí $x - \zeta = \nu$) obdržíme

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\zeta)f_2(x-\zeta)\,d\zeta\Big)e^{-i\lambda x}\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\zeta)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\zeta)e^{-i\lambda x}\,dx\Big)\,d\zeta\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\zeta)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\nu)e^{-i\lambda\nu}e^{-i\lambda\zeta}\,d\nu\Big)\,d\zeta\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\zeta)e^{-i\lambda\zeta}\,d\zeta\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\nu)e^{-i\lambda\nu}\,d\nu.\end{aligned}$$

Platí tedy

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1]\cdot F[f_2]$$

5.7 Fourierova transformace v prostoru $L^2(\mathbb{R})$

VĚTA 5.7.1 (Plancherel 1910) *Nechť $f \in L^2(\mathbb{R})$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce*

$$g_n(\lambda) := \int_{-n}^{n} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$$

patří do $L^2(\mathbb{R})$. Pro $n \to \infty$ posloupnost $\{g_n\}$ konverguje v metrice k $L^2(\mathbb{R})$ k limitě g, přičemž

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2\,d\lambda = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx.$$

POZNÁMKA 5.7.2 *Funkci g se říká Fourierův obraz funcke $f \in L^2(\mathbb{R})$. Je-li navíc $f \in L(\mathbb{R})$ pak $g \equiv F[f]$.*