



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY V ENERGETICE

OPTIMIZATION MODELS IN ENERGY PRODUCTION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Lucie Němcová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

BRNO 2021

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Lucie Němcová**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **RNDr. Pavel Popela, Ph.D.**
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Optimalizační úlohy v energetice

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student prostuduje aktuální postupy matematického modelování optimalizačních úloh v energetice. Využije osvojené poznatky matematické analýzy, lineární algebry a pravděpodobnosti a statistiky a své dosavadní zkušenosti se softwarovými nástroji. Pro vybraný aplikační problém navrhne a naprogramuje vhodný matematický model a prostuduje jeho vlastnosti. Jeho funkčnost ověří testovacími výpočty a svůj postup srozumitelně zdokumentuje. Předpokládá se spolupráce s odbornými ústavy na problémech řešených v rámci projektů realizovaných na FSI (COMSI) a související odborné konzultace se specialisty (prof. Štětina, doc. Charvát).

Cíle bakalářské práce:

1. Studium vybrané třídy optimalizačních úloh v energetice.
2. Studium odpovídajících modelů matematického programování a jejich vlastností.
3. Výběr algoritmů a jejich případné modifikace pro studované modely.
5. Efektivní softwarová implementace modelů a algoritmů.
6. Aplikace postupu na vybraný reálný problém a testovací výpočty.

Seznam doporučené literatury:

KLAPKA, J., DVOŘÁK, J. a POPELA, P. Metody operačního výzkumu. Vyd. 2. Brno: VUTIM, 2001.
NASH, S. and SOFER, A. Linear and nonlinear programming. McGraw-Hill, 1995.
PARDALOS, P. M. a RESENDE, M. G. C. (eds.). Handbook of applied optimization. Oxford: Oxford University Press, 2002. ISBN 0195125940.

WILLIAMS, H. P. Model building in mathematical programming. 5th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons. 2013.

BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D. a SHETTY, C. M. Nonlinear programming: theory and algorithms. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons. 1993. ISBN 0471599735.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá optimalizací kapacity kotle spalovny odpadů, a to z jeho ekonomie provozu. V práci byl vytvořen model spalovny. Model byl aproximován diskretizací, protože se v modelu spalovny vyskytují náhodné parametry s normálním rozdělením. K posouzení kvality aproximace byly vytvořeny intervaly spolehlivosti na základě aplikace náhodného výběru, metody Sled nezávislých náhodných čísel (IRN z angl. independent random number streams) a metody Sled společných náhodných čísel (CRN z angl. common random number streams). V závěru této práce byly použité metody porovnány a navržen minimální počet scénářů, který „dostatečně dobře“ úlohu aproximuje.

KLÍČOVÁ SLOVA

Optimalizace, spalovna odpadů, stochastické dvoustupňové programování, interval spolehlivosti, náhodný výběr

ABSTRACT

This bachelor's thesis focuses on optimization of a boiler's size of a waste incineration plant from an economic point of view. The problem was approximated by discretization because random parameters with normal distribution occurred in the incineration plant model. To evaluate the quality of such approximation there were created confidence intervals using random sample information, independent random number streams method and common random number streams method. Used methods were compared and the smallest number of scenarios that approximates the problem "well enough" was proposed in the last part of this thesis.

KEYWORDS

Optimization, waste incineration plant, stochastic two-stage programming, confidence interval, random sample

Prohlášení autora o původnosti díla

Jméno a příjmení autora: Lucie Němcová
VUT ID autora: 209444
Typ práce: Bakalářská práce
Akademický rok: 2020/2021
Téma závěrečné práce: Optimalizační úlohy v energetice

Prohlašuji, že svou závěrečnou práci jsem vypracovala samostatně pod vedením vedoucí/ho závěrečné práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autorka uvedené závěrečné práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této závěrečné práce jsem neporušila autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhla nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědoma následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno
podpis autorky*

*Autor podepisuje pouze v tištěné verzi.

PODĚKOVÁNÍ

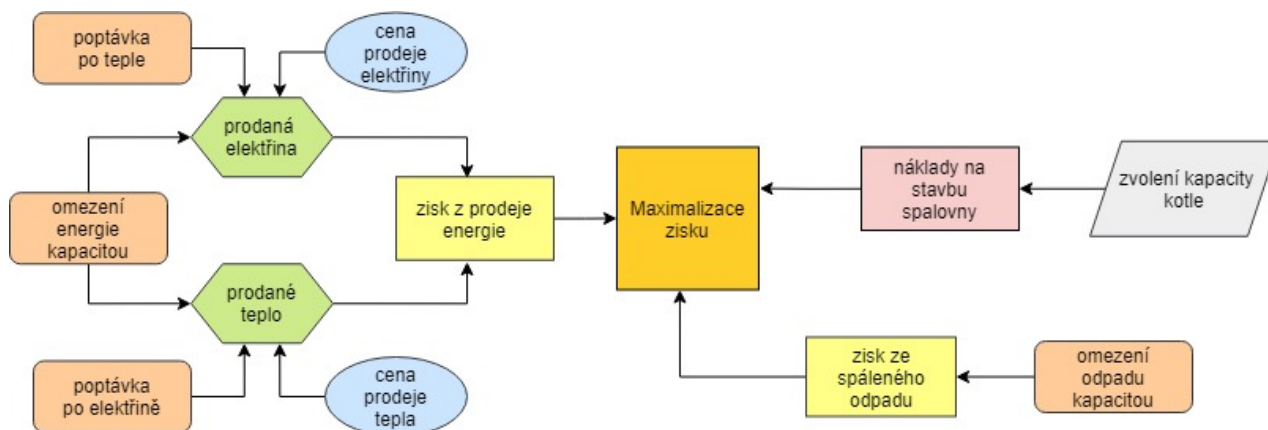
Ráda bych poděkovala vedoucímu diplomové práce panu RNDr. Pavlu Popelovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci. Dále bych chtěla poděkovat rodině za umožnění studia a podporu při studiu.

Obsah

Úvod	2
1 Optimalizace kapacity spalovny	3
1.1 Formulace problému	3
1.2 Matematický model	4
1.2.1 Wait-and-See přístup	4
1.2.2 Here-and-Now přístup	4
1.2.3 Dvoustupňové programování	5
1.2.4 Model kolportéra novin	5
1.3 Model spalovny	7
1.4 Výsledky modelu	8
2 Vybrané teoretické poznatky	10
2.1 Výběrové charakteristiky	10
2.1.1 Limitní věty	11
2.2 Monte Carlo metoda	11
2.2.1 Horní (pesimistický) odhad	12
2.2.2 Dolní (optimistický) odhad	13
2.3 Interval spolehlivosti	13
2.3.1 Aplikace náhodného výběru (NV)	13
2.3.2 Sled nezávislých náhodných čísel (IRN)	14
2.3.3 Sled společných náhodných čísel (CRN)	15
3 Zpracování výsledků	16
3.1 Výsledky modelu	16
3.2 Interval spolehlivosti řešení	17
3.2.1 Zpracování pomocí NV	17
3.2.2 Zpracování pomocí IRN	18
3.2.3 Zpracování pomocí CRN	20
3.3 Porovnání metod	22
Závěr	24
Literatura	25
Seznam symbolů a zkratek	27
A Zdrojový kód modelu kolportéra v GAMSu	28
B Zdrojový kód modelu spalovny v GAMSu	29

Úvod

Vzhledem ke snahám posledních desetiletí o ekologický přístup ve výrobě energie a snižování uhlíkové stopy v energetice, je optimalizace energetických zařízení aktuální téma. Tato bakalářská práce se věnuje optimalizaci kapacity spalovny odpadů. Práce navazuje na úlohu dvoustupňového stochastického modelu spalovny odpadů z diplomové práce Ing. Jakuba Kúdely Ph.D. Stochastic optimization in AIMMS [1]. Je zde představen a použit stejný model, viz obr. , který je vyřešen v této práci pomocí původní implementace v GAMS, a dále se na něj navazuje. Vzhledem k tomu, že je to optimalizační úloha s náhodnými parametry s normálním rozdělením, úloha bude vyřešena pomocí aproximace diskretizací. Přínosem této práce k úloze spalovny je určení intervalů spolehlivosti, díky kterým lze posoudit, jak výsledek získaný diskretizací úlohy odpovídá neaproximované úloze. Intervaly spolehlivosti jsou získané třemi různými metodami, a to zpracováním pomocí aplikace náhodného výběru (NV), metody Sled nezávislých náhodných čísel (IRN z angl. independent random number streams) a Sled společných náhodných čísel (CRN z angl. common random number streams), které jsou založeny na metodě Monte Carlo. Výsledky získané pomocí těchto metod jsou porovnány a použité metody vyhodnoceny. Ze získaných výsledků se určí nejmenší počet scénářů, který „dostatečně dobře“ aproximuje úlohu optimalizace návrhu kapacity kotle spalovny.



Obr. 1: Schéma modelu spalovny komunálního odpadu

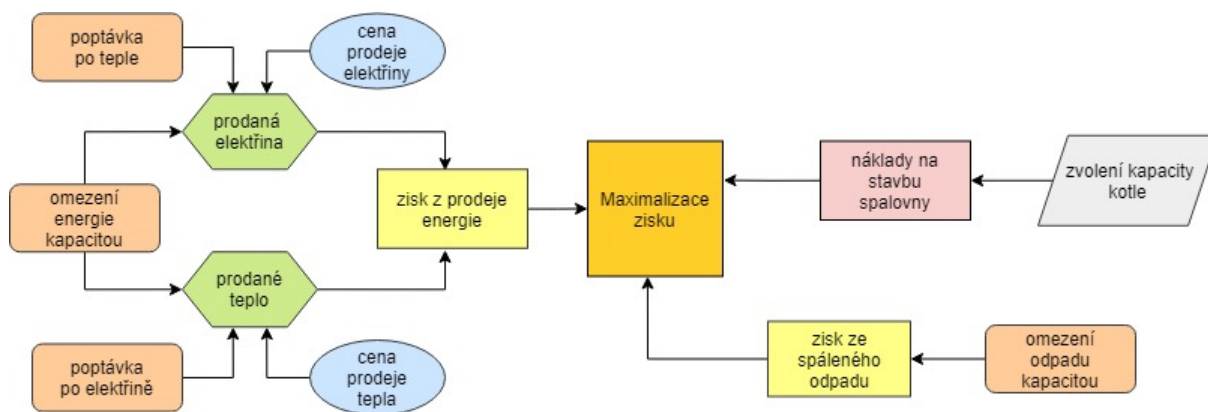
1 Optimalizace kapacity spalovny

Nejprve bude představena úloha optimalizace návrhu kapacity kotle modelu spalovny. Touto úlohou se již zabýval Jakub Kúdela v kapitole 4 své diplomové práce [1], kde se věnoval ukázce, jak aplikovat implementaci dekompozičního algoritmu na problému blízkému realitě. Proto bude tento model s drobnými úpravami převzat z této práce, v dalších kapitolách této práce je rozšířen o odhady umožňující posoudit kvalitu výsledků. Více do detailů se zabýval optimalizačním modelem spalovny odpadů Radovan Šomplák ve své diplomové práci [2].

1.1 Formulace problému

Úkolem je zjistit, zda se vyplatí postavit spalovnu, která bude sloužit ke spalování komunálního odpadu. Lze přitom počítat s tím, že energie, která se uvolňuje během procesu spalování, je přeměněna v tepelnou a také elektrickou energii a tyto energie se následně prodávají. Investice do spalovny při zvolení vhodné kapacity spalovny by tedy měla být ve výsledku výdělečná.

Úloha vede na optimalizační problém, kde je cílem najít optimální kapacitu spalovacího kotle tak, aby celkové výdaje byly co nejmenší. Kapacita kotle, tj. množství spáleného odpadu, je tedy proměnná, dále se bude značit x . Od investora spalovny jsou zadány horní mez u a dolní mez l kapacity kotle na základě předpokládaného množství odpadu ke spálení. Dále je určena cena investice za pořízení kotle, včetně jeho uvedení do provozu, a to v závislosti na kapacitě kotle x .



Obr. 1.1: Schéma modelu spalovny komunálního odpadu

Spalovna produkuje teplo a elektřinu. Prodej tepla a elektřiny je omezen jejich poptávkou, a tyto parametry nebudou konstantní. Závisí na těžko předvídatelných okolních podmínkách, jako je počasí a s tím související venkovní teplota a potřeba elektrické energie na trhu. Budou tedy uvažovány jako závislé na náhodném parametru ξ . Na náhodném parametru bude záviset také cena, za kterou tyto energie prodáme. Produkce tepla a

elektřiny je ovšem omezená také množstvím spáleného odpadu, je tedy závislá na zvolené kapacitě kotle x .

Dále je třeba také započítat příjem z poplatku za zpracovaný odpad. Přičemž musí platit, že množství zpracovaného odpadu za rok musí odpovídat kapacitě kotle x .

1.2 Matematický model

Obecně lze optimalizační úlohu zapsat:

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{za podmíněk } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, m \\ h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, l \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ je n -dimenzionální vektor proměnných, které mohou nabývat hodnot z množiny $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$, přičemž pokud $n = 1$ značí se proměnná x . f je účelová funkce definovaná na \mathbb{R}^n , g_1, \dots, g_m a h_1, \dots, h_l jsou omezující funkce definované na \mathbb{R}^n . Množina všech proměnných $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, které vyhovují omezujícím funkcím, se nazývá množina přípustných řešení \mathbf{C} . Úkolem je tedy najít \mathbf{x}^* z množiny přípustných řešení takové, pro které je hodnota účelové funkce nejmenší, tj. platí $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}$ je potom optimální řešení. Pokud je alespoň jedna z omezujících funkcí, popřípadě účelová funkce nelineární, pak celý optimalizační problém se nazývá nelineární, v opačném případě jde o programování lineární [3]. Více o optimalizačních modelech např. v [4] a [5].

Jak je již zmíněno v kapitole 1.1 v optimalizační úloze kapacity spalovny se vyskytuje náhodný parametr ξ . Bude se jednat tedy o stochastický problém:

$$\min \{f(\mathbf{x}, \xi) | \mathbf{x} \in \mathbf{C}(\xi)\}.$$

K stochastickým problémům jsou dva základní přístupy, a to Wait-and-See a Here-and-Now [6].

1.2.1 Wait-and-See přístup

Přístup Wait-and-See (do češtiny přeloženo „počkej a uvidíš“) spočívá ve znalosti realizace náhodného parametru ξ . Podle toho se poté rozhodne o \mathbf{x} . Platí tedy, že \mathbf{x} je proměnná závislá na ξ , tj. $\mathbf{x}(\xi)$.

1.2.2 Here-and-Now přístup

Při použití Here-and-Now přístupu (česky přeloženo jako „tady a teď“) se nejprve rozhodne o \mathbf{x} a to bez znalosti realizace ξ . Potom \mathbf{x} je tedy pro všechny realizace ξ stejné. Tento přístup se využívá primárně v případech, kdy není předem známá realizace náhodného parametru.

1.2.3 Dvoustupňové programování

Dvoustupňové programování spočívá v kombinaci obou přístupů. Obecně tento model pro lineární úlohu lze zapsat:

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ & v = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + E_{\xi} Q(\mathbf{x}, \xi) \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde v představuje hodnotu účelové funkce, která se minimalizuje. V prvním stupni se rozhodne o \mathbf{x} bez znalosti realizace ξ , jde tedy o přístup Here-and-Now. Poté ve druhém stupni se provede kompenzační akce pomocí přístupu Wait-and-See. V tomto okamžiku se realizuje náhodný parametr ξ a $\mathbf{T}, \mathbf{W}, \mathbf{y}, \mathbf{q}$ a \mathbf{h} pro známé ξ nadále nejsou neznámé. Díky tomu již lze rozhodnout o \mathbf{y} . V tuto chvíli se tedy řeší deterministický model, kde

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}, \xi) = \min_{\mathbf{y}} \quad & (\mathbf{q}(\xi)^T \mathbf{y}(\xi)) \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{T}(\xi)\mathbf{x} + \mathbf{W}(\xi)\mathbf{y}(\xi) = \mathbf{h}(\xi) \\ & \mathbf{y}(\xi) \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

Pro náhodný parametr ξ s diskrétním rozdělením potom platí:

$$E_{\xi} Q(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{s \in S} p^s Q(\mathbf{x}, \xi^s)$$

Jde tedy o střední hodnotu $Q(\mathbf{x}, \xi)$, přičemž ξ^s jsou scénáře indexované s z množiny všech indexů scénářů S a p^s je pravděpodobnost, se kterou s -tý scénář nastane. Z definice pravděpodobnosti pak musí platit $\sum_{s \in S} p^s = 1$, $p^s \geq 0$. Model uvedený v (1.1) je lineární, nicméně obdobně lze řešit i model s nelinearitou [8].

1.2.4 Model kolportéra novin

Dvoustupňové programování lze přiblížit na modelu kolportéra novin. Kolportér řeší, kolik novin má nakoupit, aby z nich měl co nejvyšší zisk. Nemůže jich tedy nakoupit příliš, protože by nemusel všechny prodat. Naopak pokud by jich nakoupil málo, mohly by mu brzy dojít a tak by se připravil o zisk. Závisí to tedy na poptávce, kolik novin za den prodá. Z vlastní zkušenosti ví, že se opakují 3 scénáře poptávky, navíc vypořádal jakou pravděpodobnost každý scénář má. Hodnoty pravděpodobnosti a poptávky jsou uvedeny v tabulce 1.1.

Nákupní cena n novin je uvažována např. 10 korun za jedny noviny a prodejní cena novin $d = 25$ korun. Počet novin, který se nakoupí, se označí x , zisk ze všech prodaných novin tedy bude $c = d - n$. Dále počet novin, které kolportér koupí nad poptávku y_p^s , je třeba penalizovat ve výši prodejní ceny, tj. $q_p = 25$. Počet novin, které kolportér nenakoupí a budou chybět do splnění poptávky označíme y_m^s . Pro zjednodušení modelu penále za

scénář s	pravděpodobnost p^s	poptávka h^s [ks]
1	0,3	50
2	0,6	40
3	0,1	20

Tab. 1.1: Hodnoty pravděpodobnosti scénářů poptávky novin v modelu kolportér

y_m^s není uplatněno, tj. $q_m = 0$. Uvedený příklad lze zapsat následovně jako minimalizační problém, kde se minimalizuje záporná hodnota zisku:

$$\begin{aligned}
& \min v \\
& v = -cx + \sum_{s=1}^3 p^s (q_m y_m^s + q_p y_p^s) \\
& \text{za podm. } x + y_m^s - y_p^s = h^s \quad s = 1, 2, 3 \\
& x \geq 0, y_m^s \geq 0, y_p^s \geq 0, \quad s = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

V prvním kroku se rozhodne kolik novin je třeba nakoupit. V druhém kroku se řeší realizace jednoho ze scénářů. Tato realizace je v modelu nahrazena střední hodnotou ze ztrát za špatně zvolený počet nakoupených novin x . Omezení říká, že počet nakoupených novin x s novinami, které chybí do poptávky, a od nich odečtené množství novin, které převyšují poptávku, musí odpovídat poptávce, a to platí pro každý scénář. Dále všechny proměnné musí být nezáporné. Jednotkou času je v této úloze jeden den, noviny totiž nelze prodat další den, protože již nejsou aktuální. Pro zjednodušení nežádáme, aby x bylo celočíselné.

Protože v této práci je kladen důraz hlavně na sestavení modelu, algoritmus řešení zde nebude uveden. Jak lze řešit tento problém se spojitou poptávkou je uvedeno např. v [6]. Na vyřešení modelu (1.2) byl použit program GAMS, viz příloha A. Výsledky jsou následující:

$$\begin{aligned}
x^* &= 40 \text{ ks} \\
v^* &= -550 \text{ korun}
\end{aligned}$$

Tedy kolportér by optimálně měl nakoupit $x^* = 40$ novin a může očekávat zisk $-v^* = 550$ korun.

Tento model byl zahrnut do této práce, protože je to jednoduchý příklad, na kterém lze demonstrovat strukturu modelu s využitím dvoustupňového programování. Navíc je tu několik podobností s modelem spalovny, který tento model inspiroval. Tyto podobnosti lze pozorovat ve značení proměnných a parametrů.

1.3 Model spalovny

Matematický model spalovny je dále doplněn o hodnoty, které byly získány od Ústavu procesního inženýrství (ÚPI) VUT v Brně [1], tak aby odpovídaly reálnému problému. Více o sestavování optimalizačních modelů lze najít v [7].

Proměnné

x	kapacita kotle v tunách
$y_1(\xi)$	množství prodaného tepla v $\frac{\text{GWh}}{24\text{let}}$
$y_2(\xi)$	množství prodané elektřiny v $\frac{\text{GWh}}{24\text{let}}$
$y_3(\xi)$	množství spáleného odpadu v $\frac{\text{t}}{24\text{let}}$

Parametry

$l = 50000$	dolní mez kapacity kotle v tunách
$u = 400000$	horní mez kapacity kotle v tunách

Náhodné parametry

$q_1(\xi) \sim \mathcal{N}(1044000, 72000)$	cena prodeje 1 $\frac{\text{GWh}}{24\text{let}}$ tepla
$q_2(\xi) \sim \mathcal{N}(1650000, 100000)$	cena prodeje 1 $\frac{\text{GWh}}{24\text{let}}$ elektřiny
$q_3(\xi) \sim \mathcal{N}(1500, 100)$	výdělek z jedné tuny spáleného odpadu
$h_1(\xi) \sim \mathcal{N}(6000, 600)$	poptávka tepla v $\frac{\text{GWh}}{24\text{let}}$
$h_2(\xi) \sim \mathcal{N}(1000, 100)$	poptávka elektřiny v $\frac{\text{GWh}}{24\text{let}}$

Omezující a další rovnice

$c(x) = 2688000x^{0,7}$	cena za pořízení a montáž kotle o kapacitě x
$0,001x \geq 0,2876 + 0,0126y_1 + 0,0828y_2$	omezení množství prodaného tepla a elektřiny v závislosti na kapacitě x dle expertů ÚPI
$24x - y_3 \geq 0$	závislost množství spáleného odpadu na kapacitě x za 24 let

Tab. 1.2: Proměnné, parametry a základní omezení modelu spalovny

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ jako obvykle značí normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 . Omezení v tabulce 1.2 se doplní o podmínku nezápornosti proměnných. Další omezení je

omezení poptávkou tepla, respektive elektřiny, která nesmí být překročena. Kapacita kotle x je navíc omezena dolní mezí l a horní mezí u . Životnost kotle je 24 let, proto všechny proměnné i parametry odpovídají této době. 24 let je tedy v tomto modelu jednotka času.

V modelu se vyskytují náhodné parametry s normálním rozdělení, tedy jsou to spojitě náhodné veličiny. Tento problém se zjednoduší vytvořením aproximačního modelu s konečným počtem scénářů. Vygeneruje se N realizací z příslušného náhodného rozdělení pro všechny náhodné parametry. Pro jednodušší popis bude s -tá realizace, ale i její index označován scénářem s a množina všech scénářů bude $S=1,\dots,N$. Pravděpodobnost p^s každého scénáře bude stejná a to konkrétně $p^s = \frac{1}{N}$, je tedy splněna normovanost pravděpodobnosti $\sum_{s=1}^N p^s = 1$.

Celou úlohu spalovny lze zapsat:

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ v = c(x) - \sum_{s=1}^N p^s (q_1^s y_1^s + q_2^s y_2^s + q_3^s y_3^s) \\ \text{za podm.} \quad & 0,001x - 0,0126y_1^s - 0,0828y_2^s \geq 0,2876, \quad \forall s \in S, \\ & y_i^s \leq h_i^s, \quad \forall s \in S, i = 1, 2, \\ & 24x - y_3^s \geq 0, \quad \forall s \in S, \\ & x \in \langle l, u \rangle, y_i^s \geq 0, \quad \forall s \in S, i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Minimalizují se tedy výdaje v , které se skládají z ceny za investici do kotle, tj. výroba, montáž atd. Od toho je odečtena střední hodnota zisku, která se skládá ze zisku z prodeje tepla, elektřiny a zisku z poplatku za spálený odpad. V případě, že výsledná optimální hodnota účelové funkce v^* vyjde záporná, pak se všechny náklady na pořízení a montáž kotle investorovi vrátí, a tedy taková investice bude výdělečná. Vzhledem k tomu, že funkce $c(x)$ není lineární, tak lineární není ani účelová funkce v v (1.3), proto je třeba využít nelineární programování.

1.4 Výsledky modelu

Hotový model spalovny (1.3) byl naprogramován v modelovacím systému GAMS, viz příloha B. GAMS byl zvolen, protože je určený přímo na řešení optimalizačních úloh a má implementovaných několik řešičů nelineárního programování. Je tedy vhodným nástrojem pro řešení modelu spalovny. Model spalovny je v této práci implementován původně a softwarově odlišně než v [1], kde je zvolen dekompoziční, aproximující přístup a implementace provedena v AIMMS.

Při vygenerování 100 scénářů (tj. $N=100$) za použití příkazu standardně **normal** k vygenerování scénářů je obdrženo optimální řešení:

$$x^* = 85754$$

$$v^* = -1,766 \cdot 10^9$$

Při zvolení kapacity kotle $x^* = 85754$ tun by se tedy po 24 letech měla investice do spalovny vrátit a výsledný zisk bude $-v^* = 1,766 \cdot 10^9$. Ovšem takový zisk je pouze predikcí založenou na scénářích. Přičemž predikce bude reálnému zisku odpovídat podle toho, jak blízké budou reálné hodnoty cen prodeje a poptávky vygenerovaným scénářům.

Proto dále bude předmětem zájmu rozdíl mezi reálným řešením a řešením, které bylo obdrženo z modelu (1.3), a jaký zisk skutečně lze očekávat při zvolení kapacity kotle x^* .

2 Vybrané teoretické poznatky

Jak již bylo zmíněno v kapitole 1.4, řešení, které vyšlo výpočtem modelu spalovny (1.3), nemusí být přesným řešením. Nebude to tedy optimální řešení, jako by bylo pro případ diskrétního rozdělení, ale suboptimální řešení, kvůli výskytu spojitých rozdělení. Pomocí metod, které budou zmíněny v této kapitole, lze určit intervaly spolehlivosti optimálního řešení pro případ normálního rozdělení. Tyto intervaly poskytnou informaci, jak se suboptimální řešení blíží optimálnímu.

2.1 Výběrové charakteristiky

Dále v práci jsou používány charakteristiky a statistiky týkající se náhodného výběru podle [9].

Mějme náhodný výběr X_1, X_2, \dots, X_N rozsahu N z rozdělení s distribuční funkcí $F(x, \theta)$.

Výběrový průměr

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

Výběrový rozptyl

$$S_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$$

Směrodatná výběrová odchylka

$$S_N = \sqrt{S_N^2}$$

Nestranný odhad $T = T(X_1, X_2, \dots, X_N)$ je nestranným odhadem parametrické funkce $\gamma(\theta)$, jestliže platí $E_\theta(T) = \gamma(\theta)$ pro $\forall \theta \in \Theta$.

Platí, že výběrový průměr je nestranným odhadem střední hodnoty náhodného výběru. Navíc výběrový rozptyl je nestranným odhadem rozptylu výběru. Důkazy jsou uvedeny v [9].

Interval spolehlivosti Nechť $L = F_1(X_1, X_2, \dots, X_N)$ a $U = F_2(X_1, X_2, \dots, X_N)$ jsou takové statistiky příslušné parametrické funkci $\gamma(\theta)$ náhodného výběru X_1, X_2, \dots, X_N , že pro číslo $\alpha \in (0, 1)$ platí

$$P(L \leq \gamma(\theta) \leq U) = 1 - \alpha,$$

pak interval $\langle L, U \rangle$ nazveme $100(1 - \alpha)\%$ intervalem spolehlivosti na hladině spolehlivosti α . Přičemž statistikou je myšlena libovolná transformace náhodného výběru [10].

2.1.1 Limitní věty

Dále se uvedou limitní věty, ze kterých budou metody vycházet.

Silný zákon velkých čísel [11] Mějme posloupnost náhodných veličin $\{X_i\}_{i=1}^N$, které jsou nezávislé a mají stejné rozdělení s konečnou střední hodnotou μ a stejnými konečnými rozptyly, pak pro pravděpodobnost P platí:

$$P\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)}{N} = 0\right) = 1.$$

Pokud $\{X_i\}_{i=1}^N$ je náhodný výběr se střední hodnotou μ , pak to znamená, že výběrový průměr \bar{X} konverguje skoro jistě k μ .

Centrální limitní věta (CLT) [11] Mějme posloupnost náhodných veličin $\{X_i\}_{i=1}^N$, které jsou nezávislé a mají stejné rozdělení se střední hodnotou μ a nenulovým konečným rozptylem σ^2 . Pak náhodná veličina

$$U_{\bar{X}} = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{N}}{\sigma}$$

konverguje v distribuci (dále použito \sim) ke standardizovanému normálnímu rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$, tj.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu) \leq y\right) = \Phi(y),$$

kde Φ je distribuční funkce $\mathcal{N}(0, 1)$. Důkaz viz [11].

2.2 Monte Carlo metoda

K získání intervalů spolehlivosti optimálního řešení modelu spalovny (1.3) se využije metody Monte Carlo [13]. Tato metoda se obecně používá k řešení výpočtů, které jsou založeny na stochastických procesech. Stochastickým procesem je myšlen sled stavů, které vychází z náhodných událostí. Tyto události jsou reprezentovány pseudonáhodnými čísly, které vygeneruje počítačový program použitím deterministických algoritmů [12]. V případě modelu spalovny jsou pseudonáhodná čísla generována příkazem `normal` v GAMSu. V této části práce bude odkazováno na [13], [14] a [15].

Obecně lze dvoustupňový stochastický optimalizační problém, viz lineární model (1.1), zapsat

$$\begin{aligned}
v^* &= \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} E f(\mathbf{x}, \xi), \\
x^* &\in \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} E f(\mathbf{x}, \xi), \\
\text{kde } f(\mathbf{x}, \xi) &= c(\mathbf{x}) + E_\xi Q(\mathbf{x}, \xi), \\
Q(\mathbf{x}, \xi) &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} (\mathbf{q}(\xi)^T \mathbf{y}(\xi)), \\
\mathbf{X} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \\
\mathbf{Y} &= \{\mathbf{y}(\xi) | \mathbf{W}(\xi)\mathbf{y}(\xi) = \mathbf{h}(\xi) - \mathbf{T}(\xi)\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi) \geq \mathbf{0}\},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

přičemž $E_\xi Q(\mathbf{x}, \xi)$ je střední hodnota $Q(\mathbf{x}, \xi)$. Dále bude uveden aproximační problém po diskretizaci, který používá náhodné vektory, které reprezentují realizace a kterými jsou v případě modelu spalovny $\xi^s = (q_1^s, q_2^s, q_3^s, h_1^s, h_2^s)$. Ty jsou pro $s = 1, \dots, N$ nezávislé náhodné složky a se stejným rozdělením.

$$\begin{aligned}
v_N^* &= \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N f(\mathbf{x}, \xi^s), \\
x_N^* &\in \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N f(\mathbf{x}, \xi^s),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

kde f představuje účelovou funkci, která je závislá na \mathbf{x} , což je vektor proměnných z množiny všech přípustných řešení \mathbf{X} , a na náhodných vektorech ξ^s . Vyřešením (2.2) pro realizace bude získán kandidát na optimální řešení, který se označí $\hat{\mathbf{x}}$.

Zavede se pojem *mezera optimality*, který je definován: $E f(\hat{\mathbf{x}}, \xi) - v^*$. Vyjadřuje rozdíl mezi hodnotou účelové funkce při dosazení kandidáta $\hat{\mathbf{x}}$ a skutečnou optimální hodnotou účelové funkce f . Jistě platí $E f(\hat{\mathbf{x}}, \xi) \geq v^*$, tedy horní hranice v^* bude $E f(\hat{\mathbf{x}}, \xi)$, ovšem tato hodnota nejde vždy přesně vyčíslit, proto níže se definuje horní odhad jinak.

Pro použití této metody je třeba splňovat tři předpoklady [14]:

1. \mathbf{X} je neprázdná a kompaktní množina.
2. $f(\mathbf{x}, \xi)$ má konečnou střední hodnotu a rozptyl.
3. $f(\cdot, \xi)$ je spojitá na \mathbf{X} s pravděpodobností 1.

Vzhledem k tomu, že \mathbf{X} je podmnožina euklidovského prostoru, tak kompaktnost bude zaručena uzavřeností a omezeností \mathbf{X} .

2.2.1 Horní (pesimistický) odhad

Horní odhad hodnoty v^* se získá pro velké N vyčíslením

$$\bar{U}_N = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N f(\hat{\mathbf{x}}, \xi^s). \tag{2.3}$$

Potom platí, že \bar{U}_N je nestranný odhad skutečné hodnoty účelové funkce pro $\hat{\mathbf{x}}$, tj. najde se $\hat{\mathbf{x}}$ a dosadí se do účelové funkce ($E\bar{U}_N = Ef(\hat{\mathbf{x}}, \xi) \geq v^*$). Podstatné je, že na horní odhad lze aplikovat CLT, tj. platí

$$\sqrt{N}(\bar{U}_N - Ef(\hat{\mathbf{x}}, \xi)) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2) \text{ pro } N \rightarrow \infty,$$

kde σ_N^2 je rozptyl $f(\hat{\mathbf{x}}, \xi)$. Tento rozptyl není znám, ale vzhledem k tomu, že $f(\hat{\mathbf{x}}, \xi)$ vznikla jako lineární transformace konečně mnoha veličin s náhodným rozdělením s konečným rozptylem, tak i její rozptyl jistě bude konečný. Proto místo σ_N^2 lze využít jeho nestranný odhad, tj. výběrový rozptyl S_N^2 .

2.2.2 Dolní (optimistický) odhad

Dolní odhad stanoví následující věta.

Věta Necht ξ^1, \dots, ξ^N jsou nezávislé vektory se stejným rozdělením z rozdělení ξ . Potom

$$E(v_N^*) = E \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N f(\mathbf{x}, \xi^s) \right] \leq v^*.$$

Důkaz viz [13].

Navíc platí, že pro větší počet scénářů se dolní odhad zvětšuje, tudíž výsledný interval pro v^* bude užší.

2.3 Interval spolehlivosti

2.3.1 Aplikace náhodného výběru (NV)

Nejprve bude představen přístup uvedený [15] a [16]. Tento přístup přímo využívá centrální limitní větu a tedy zakládá se na tom, že v_N^* (viz (2.2)) je konzistentním odhadem v^* (viz (2.1)). To znamená, že platí

$$P \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} v_N^* = v^* \right\} = 1.$$

To stejné lze tvrdit i o x_N^* a x^* . Předpokládá se přitom, že jsou splněny předpoklady centrální limitní věty, tj. musí platit, že v_N^* jsou stejně rozdělené nezávislé veličiny, mají stejnou konečnou střední hodnotu a konečný nenulový rozptyl. Pak můžeme vytvořit $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti

$$\left\langle v_N^* - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(N-1)S_N}{\sqrt{N}}, v_N^* + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(N-1)S_N}{\sqrt{N}} \right\rangle,$$

kde S_N^2 je výběrový rozptyl v_N^* a $t_{\frac{\alpha}{2}}(N-1)$ je $(100-\frac{\alpha}{2})\%$ kvantil Studentova rozdělení pro $N-1$ stupňů volnosti, pro větší vzorky lze využít $(100-\frac{\alpha}{2})\%$ kvantil normálního rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$. Jestliže je aproximace „dostatečně dobrá“, pak pravděpodobnost, že skutečná minimální hodnota účelové funkce bude patřit do intervalu spolehlivosti, je $1-\alpha$.

Tento přístup tedy nevyužívá výše zmíněný horní odhad. Požadované předpoklady pro tento přístup jsou mírnější, než předpoklady zmíněné v kap. 2.2. Dále ovšem budeme uvažovat dva přístupy, kde předpoklady z kap. 2.2 jsou třeba dodržet. Tyto metody jsou uvedeny v [13] a zakládají se na horním a dolním odhadu zmíněných v kap. 2.2.1 a 2.2.2.

2.3.2 Sled nezávislých náhodných čísel (IRN)

Princip použití sledu nezávislých náhodných čísel (IRN z angl. independent random number streams) uvedený v [13] spočívá v tom, že se úloha opakovaně řeší a ze získaných hodnot se poté vytvoří interval spolehlivosti. Při opakování úlohy n_l -krát pro počet scénářů N se vygeneruje soubor náhodných vektorů $\xi^{1i}, \dots, \xi^{Ni}$, $i=1, \dots, n_l$. Definuje se

$$\begin{aligned} v_N^{*i} &= \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N f(\mathbf{x}, \xi^{si}) \\ \bar{L}_{n_l} &= \frac{1}{n_l} \sum_{i=1}^{n_l} v_N^{*i} \end{aligned} \quad (2.4)$$

\bar{L}_{n_l} je tedy výběrový průměr v_N^{*i} a je možné využít centrální limitní větu:

$$\frac{\sqrt{n_l}(\bar{L}_{n_l} - E(v_N^*))}{\sigma_{n_l}^2} \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Přičemž pro určení $\sigma_{n_l}^2$ se využije výběrový rozptyl $S_{n_l}^2$. Pro dostatečně velké n_l a N se určí $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti následovně:

$$P(\bar{L}_{n_l} - \varepsilon_l \leq v^* \leq \bar{U}_N + \varepsilon_u) \approx 1 - \alpha, \quad (2.5)$$

kde $\alpha \in (0, 1)$ a

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(n_l - 1)S_{n_l}}{\sqrt{n_l}} \\ \varepsilon_u &= \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(n_u - 1)S_{n_u}}{\sqrt{n_u}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

S_{n_u} je výběrová odchylka příslušná \bar{U}_N , přičemž pro získání dolního odhadu byla úloha opakována n_u -krát. $t_{\frac{\alpha}{2}}(n - 1)$ je myšlen $100(1 - \frac{\alpha}{2})\%$ kvantil Studentova rozdělení s $n - 1$ stupni volnosti. Pro větší rozsahy náhodného výběru lze $t_{\frac{\alpha}{2}}(n - 1)$ nahradit $100(1 - \frac{\alpha}{2})\%$ kvantilem normálního rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$. Rozsah intervalu spolehlivosti bude tedy

$$\langle 0, \max\{\bar{U}_N - \bar{L}_{n_l}, 0\} + \varepsilon_u + \varepsilon_l \rangle.$$

Maximum je nutné pro případy, kdy se stane, že $\bar{U}_N < \bar{L}_{n_l}$. K tomu by mohlo dojít, pokud je chyba vygenerovaného náhodného výběrů scénářů vůči reálným scénářům velká. Takto je odhad konzervativnější. Pro získání horního a dolního odhadu je možné použít různé sady náhodných parametrů, stejně tak počet opakování může být různý. Ovšem v této práci budou oba parametry počítány ze stejných sad a se stejným počtem opakování, tj. $n_u = n_l$.

2.3.3 Sled společných náhodných čísel (CRN)

Další metodou k výpočtu intervalu spolehlivosti optimálního řešení dvoustupňového stochastického modelu je pomocí sledu společných náhodných čísel (CRN z angl. common random number streams) [13]. Rozdíl mezi touto metodou CRN a IRN je, že CRN k vypočítání $E(v_N^*)$ a $Ef(\hat{\mathbf{x}}, \xi)$ vždy používá stejné scénáře. Najde se řešení \mathbf{x}_N^{*i} dle (2.2) pro každé ξ^{si} , kde $s=1, \dots, N$ a $i=1, \dots, n_g$. Vypočítá se jejich výběrový průměr $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} \mathbf{x}_N^{*i}$. Pak se definuje mezeru optimality:

$$G_N^i(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N f(\hat{\mathbf{x}}, \xi^{si}) - \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N f(\mathbf{x}, \xi^{si}).$$

Dále se spočítá výběrový průměr

$$\bar{G}_{n_g} = \frac{1}{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} G_N^i(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.7)$$

a příslušný výběrový rozptyl se označí $S_{n_g}^2$. Znovu se využije centrální limitní věta:

$$\frac{\sqrt{n_g}(\bar{G}_{n_g} - E(G_N))}{\sigma_{n_g}^2} \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ pro } n \rightarrow \infty,$$

kde $\sigma_{n_g}^2$ je aproximováno výběrovým rozptylem $S_{n_g}^2$. Intervalový interval na hladině α pro mezeru optimality bude

$$\langle 0, \bar{G}_{n_g} + \varepsilon_g \rangle,$$

kde

$$\varepsilon_g = \frac{t_\alpha(n_g - 1)S_{n_g}}{\sqrt{n_g}} \quad (2.8)$$

je chyba odhadu. Přičemž $t_\alpha(n_g - 1)$ je myšlen $100(1-\alpha)\%$ kvantil Studentova rozdělení, který lze nahradit $100(1-\alpha)\%$ kvantilem standardizovaného normálního rozdělení pro větší vzorky.

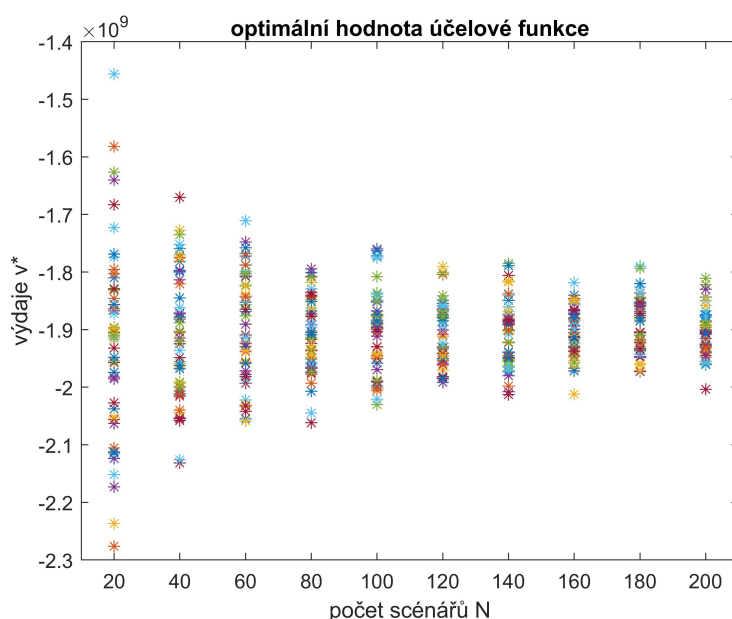
Blízké hodnoty \mathbf{x}_N^{*i} a $\hat{\mathbf{x}}$ značí, že kandidátní řešení $\hat{\mathbf{x}}$ bude dobrým odhadem \mathbf{x}^* a tudíž i N by měl být počet scénářů, který „dostatečně dobře“ aproximuje skutečné parametry. Pokud je interval spolehlivosti příliš široký, pak je možné, že $\hat{\mathbf{x}}$ není číslo blízké optimálnímu řešení nebo odchylka od v_n^* je příliš velká, popřípadě scénáře, které byly vygenerovány, nejsou dobrým reprezentantem skutečného rozdělení. Taková situace by ale neměla nastat při zvolení dostatečně velkého vzorku (tj. n_g).

3 Zpracování výsledků

3.1 Výsledky modelu

Než se budou dále zpracovávat výsledky, budou vykreslena data, která vyplývají z výpočtu programu v GAMSu.

Úloha byla vypočítaná při zvolení počtu scénářů $N = 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200$. Pro každé N byla zopakována padesátkrát (tj. v tomto případě $n_g = n_l = n_u = 50$), přičemž pokaždé byly vygenerovány jiné hodnoty parametrů q_1, q_2, q_3, h_1, h_2 .



Obr. 3.1: Řešení úlohy získané programem GAMS

Na obrázku 3.1 je vidět, že pro větší počet scénářů je rozptyl hodnot řešení v_N^* menší. Proto při použití více scénářů lze očekávat, že obdržené řešení bude bližší optimálnímu řešení. Z toho je možné vyvodit, že by se měl vygenerovat co největší počet scénářů. Na druhou stranu pro N scénářů je počítána optimalizační úloha s $1 + 3N$ proměnnými a $N + 3N$ omezeními (bez započítání omezení nezápornosti proměnných). Pro velká N tedy bude výpočet úlohy náročný. Ovšem již z grafu 3.1 lze předpokládat, že rozptyl se nezmenšuje úměrně s větším N . Od jistého počtu scénářů rozdíl rozptylů již není významný. Tato domněnka bude ověřena pomocí metod zmíněných v kap. 2.2. Také bude snaha určit tento počet scénářů, který již „dostatečně dobře“ aproximuje tuto úlohu.

K výpočtům a vykreslení grafů v této kapitole byly používány programy MATLAB a GAMS, implementace jsou uvedeny v příloze v ZIP souboru, viz seznam příloh C.

3.2 Interval spolehlivosti řešení

3.2.1 Zpracování pomocí NV

První použitá metoda zpracovává výsledky pouze za využití centrální limitní věty, viz kap. 2.3.1. Úloha bude několikrát opakovaně vyřešena a získané hodnoty v_N^* budou považovány za získané pomocí náhodného výběru. Postup bude následující:

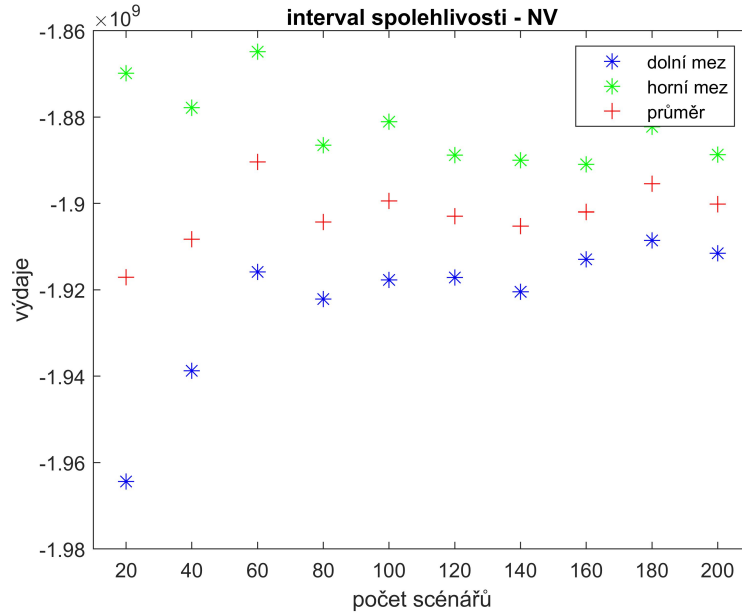
Pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$:

1. Vygenerují se scénáře $\xi^{1i}, \dots, \xi^{Ni}$ v GAMSu.
2. Spočítá se úloha (1.3) v GAMSu a získá se hodnota účelové funkce $v_N^{*i} = \min_{x \in \mathbf{X}} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N f(x, \xi^{si})$.
3. Vypočítá se výběrový průměr $v_N^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_N^{*i}$ a příslušná chybu odhadu $\varepsilon_n = \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)S_N}{\sqrt{n}}$.
4. Interval spolehlivosti bude $\langle v_N^* - \varepsilon_n, v_N^* + \varepsilon_n \rangle$.

Pro $N = 20$ byl při výpočtu chyby použit kvantil Studentova rozdělení a pro $N > 30$ kvantil normálního rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$. Při zvolení počtu opakování $n = 50$ a hladiny spolehlivosti $\alpha = 0,05$ jsou obdržené výsledky následovné:

N	v_N^*	$v_N^* - \varepsilon_n$	$v_N^* + \varepsilon_n$	Int
20	$-1,91709 \cdot 10^9$	$-1,96435 \cdot 10^9$	$-1,86983 \cdot 10^9$	$9,45245 \cdot 10^7$
40	$-1,90826 \cdot 10^9$	$-1,93872 \cdot 10^9$	$-1,877792 \cdot 10^9$	$6,09310 \cdot 10^7$
60	$-1,89036 \cdot 10^9$	$-1,91587 \cdot 10^9$	$-1,86485 \cdot 10^9$	$5,10173 \cdot 10^7$
80	$-1,90430 \cdot 10^9$	$-1,92212 \cdot 10^9$	$-1,88649 \cdot 10^9$	$3,56381 \cdot 10^7$
100	$-1,89938 \cdot 10^9$	$-1,91768 \cdot 10^9$	$-1,88109 \cdot 10^9$	$3,65918 \cdot 10^7$
120	$-1,90297 \cdot 10^9$	$-1,91713 \cdot 10^9$	$-1,88881 \cdot 10^9$	$2,83265 \cdot 10^7$
140	$-1,90522 \cdot 10^9$	$-1,92047 \cdot 10^9$	$-1,88998 \cdot 10^9$	$3,04883 \cdot 10^7$
160	$-1,90195 \cdot 10^9$	$-1,91293 \cdot 10^9$	$-1,89096 \cdot 10^9$	$2,19728 \cdot 10^7$
180	$-1,89541 \cdot 10^9$	$-1,90858 \cdot 10^9$	$-1,88223 \cdot 10^9$	$2,63469 \cdot 10^7$
200	$-1,90011 \cdot 10^9$	$-1,91153 \cdot 10^9$	$-1,88870 \cdot 10^9$	$2,28345 \cdot 10^7$

Tab. 3.1: Odhady při zpracování jako náhodný výběr



Obr. 3.2: 95% interval spolehlivosti při zpracování jako náhodný výběr

Z obrázku 3.2 je zřejmé, že s rostoucím počtem scénářů, se zmenšuje rozsah intervalu spolehlivosti. Nicméně od $N = 80$ již není rozdíl tak výrazný, proto lze považovat úlohu s 80 scénáři za „dostatečně dobrou“ aproximaci původní úlohy.

3.2.2 Zpracování pomocí IRN

Při zpracování výsledků pomocí metody IRN je nejprve třeba ověřit, zda úloha spalovny splňuje podmínky z kap. 2.2. \mathbf{X} je jistě neprázdná množina, která je omezená a uzavřená ($x \in \langle l, u \rangle$, y_1, y_2 jsou omezené poptávkou shora a nezáporností zdola, y_3 je přímo závislé na x), tedy kompaktnost je splněna. Vzhledem k tomu, že $f(x, \xi)$ je tvořena lineární kombinací z konstant a náhodných veličin, které mají konečné střední hodnoty i rozptyl, tak i 2. předpoklad bude splněn. Problém s nespojitostí účelové funkce by mohl nastat pro záporné x , ale protože x je omezeno kladnou konstantou zdola, bude i 3. předpoklad splněn.

Postup při použití metody IRN:

Pro všechna $i = 1, 2, \dots, n_l$:

1. Vygenerují se scénáře $\xi^{1i}, \dots, \xi^{N_i}$ v GAMSu.
2. Spočítá se úloha (1.3) v GAMSu a získá se řešení x_N^{*i} a hodnota účelové funkce v_N^{*i} .
3. Vypočítá se výběrový průměr $\hat{x}_N = \sum_{i=1}^{n_l} x_N^{*i}$.
4. Pomocí \hat{x}_N se podle (2.3) spočítá \bar{U}_N^i .
5. Horní odhad se získá jako výběrový průměr $\bar{U}_N = \frac{1}{n_l} \sum_{i=1}^{n_l} \bar{U}_N^i$.
6. Dolní odhad \bar{L}_{n_l} se spočítá podle (2.4).

7. Dopočítají se příslušné chyby ε_u , ε_l dle (2.6) a interval spolehlivosti (2.5)

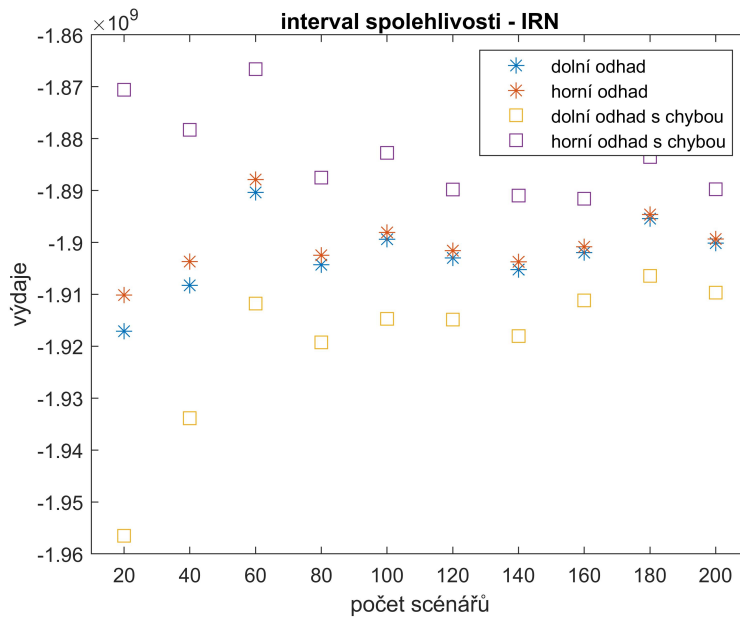
$$\langle \bar{L}_{n_l} - \varepsilon_l, \bar{U}_N + \varepsilon_u \rangle.$$

Lze si všimnout, že dolní odhad \bar{L}_{n_l} s chybou ε_l se získává stejně jako dolní odhad v předchozí metodě. Rozdíl je tedy pouze ve výpočtu horního odhadu.

V tabulce 3.2 jsou výsledné horní a dolní odhady pro jednotlivé počty scénářů N . Dále odhady s příslušnými chybami odhadu, přičemž pro $N < 30$ byl pro výpočet chyb použit kvantil Studentova rozdělení, pro vyšší N se použil kvantil normálního rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$. Int značí velikost intervalu spolehlivosti. Pro každé N byl zvolen počet opakování $n_l = 50$ a hladina spolehlivosti $\alpha = 0,05$.

N	\hat{x}_N	\bar{U}_N	\bar{L}_{n_l}	$\bar{U}_N + \varepsilon_u$	$\bar{L}_{n_l} - \varepsilon_l$	Int
20	85634	$-1,91015 \cdot 10^9$	$-1,91709 \cdot 10^9$	$-1,9565 \cdot 10^9$	$-1,8706 \cdot 10^9$	$8,59175 \cdot 10^7$
40	85423	$-1,90370 \cdot 10^9$	$-1,90826 \cdot 10^9$	$-1,9338 \cdot 10^9$	$-1,8783 \cdot 10^9$	$5,54992 \cdot 10^7$
60	84964	$-1,88788 \cdot 10^9$	$-1,89036 \cdot 10^9$	$-1,9118 \cdot 10^9$	$-1,8666 \cdot 10^9$	$4,51424 \cdot 10^7$
80	85269	$-1,90249 \cdot 10^9$	$-1,90430 \cdot 10^9$	$-1,9193 \cdot 10^9$	$-1,8875 \cdot 10^9$	$3,17368 \cdot 10^7$
100	85758	$-1,89807 \cdot 10^9$	$-1,89938 \cdot 10^9$	$-1,9147 \cdot 10^9$	$-1,8828 \cdot 10^9$	$3,19871 \cdot 10^7$
120	85695	$-1,90158 \cdot 10^9$	$-1,90297 \cdot 10^9$	$-1,9149 \cdot 10^9$	$-1,8897 \cdot 10^9$	$2,50719 \cdot 10^7$
140	85451	$-1,90373 \cdot 10^9$	$-1,90522 \cdot 10^9$	$-1,9180 \cdot 10^9$	$-1,8910 \cdot 10^9$	$2,70675 \cdot 10^7$
160	85377	$-1,90083 \cdot 10^9$	$-1,90195 \cdot 10^9$	$-1,9112 \cdot 10^9$	$-1,8916 \cdot 10^9$	$1,95886 \cdot 10^7$
180	85740	$-1,89461 \cdot 10^9$	$-1,89541 \cdot 10^9$	$-1,9064 \cdot 10^9$	$-1,8835 \cdot 10^9$	$2,29229 \cdot 10^7$
200	85719	$-1,89936 \cdot 10^9$	$-1,90011 \cdot 10^9$	$-1,9097 \cdot 10^9$	$-1,8898 \cdot 10^9$	$1,99223 \cdot 10^7$

Tab. 3.2: Odhady získané pomocí IRN



Obr. 3.3: 95% interval spolehlivosti pomocí IRN

V grafu 3.3 je znázorněna střední hodnota a horní a dolní odhad pro jednotlivé N . I zde je vidět trend zmenšujícího se intervalu spolehlivosti s vyšším N . Dále lze vyvodit, že od $N = 80$ se velikost intervalu spolehlivosti příliš nezmenšuje, proto $N = 80$ lze považovat za „dostatečně dobrou“ aproximaci.

3.2.3 Zpracování pomocí CRN

Pro použití metody CRN je třeba splnit stejné předpoklady jako při použití IRN. Jak bylo zmíněno v kapitole 3.2.2 tyto předpoklady úloha spalovny splňuje, proto CRN použít můžeme.

Postup výpočtu:

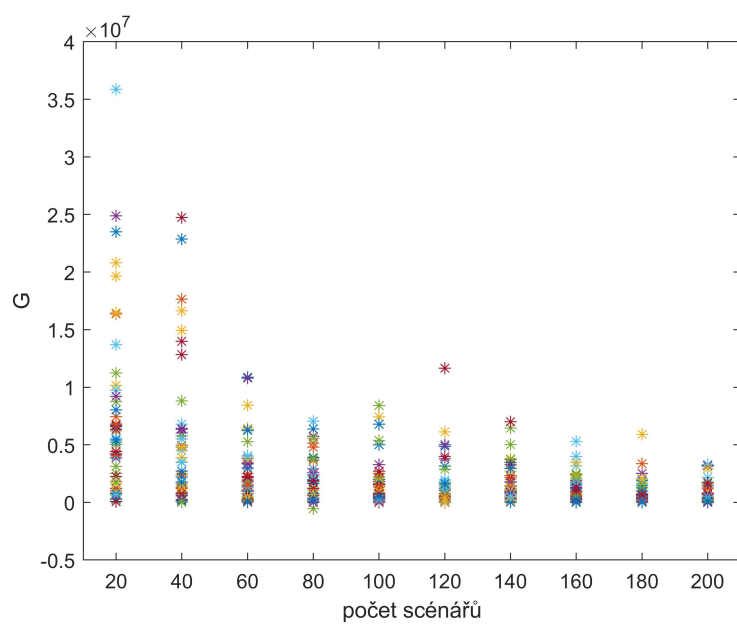
Pro všechna $i = 1, 2, \dots, n_g$:

1. Vygenerují se scénáře $\xi^{1i}, \dots, \xi^{N_i}$ v GAMSu.
2. Spočítá se úloha (1.3) v GAMSu a získá se řešení x_N^{*i} a hodnota účelové funkce $v_N^{*i} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N f(x_N^{*i}, \xi^{si})$.
3. Spočítá se výběrový průměr $\hat{x}_N = \sum_{i=1}^{n_g} x_N^{*i}$.
4. Dopočítá se hodnota $\hat{v}_N^{*i} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N f(\hat{x}_N, \xi^{si})$.
5. Získá se mezera optimality $G_N^i(\hat{x}) = \hat{v}_N^{*i} - v_N^{*i}$.
6. Spočítá se výběrový průměr \bar{G}_{n_g} dle (2.7) a příslušný výběrový rozptyl $S_{n_g} = \frac{1}{n_g-1} \sum_{i=1}^{n_g} (G_N^i(\hat{x}) - \bar{G}_{n_g})^2$.
7. Dopočítá se chyba ε_g dle (2.8) a interval spolehlivosti $\langle 0, \bar{G}_{n_g} + \varepsilon_g \rangle$.

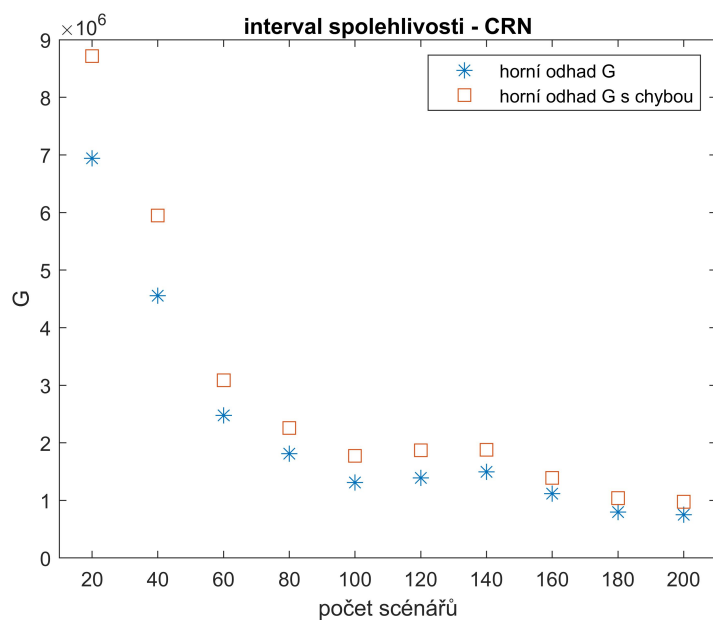
N	\hat{x}_N	\bar{G}_{n_g}	$\bar{G}_{n_g} + \varepsilon_g$	Int
20	85634	$6,94050 \cdot 10^6$	$8,71624 \cdot 10^6$	$8,71624 \cdot 10^6$
40	85423	$4,55453 \cdot 10^6$	$5,94530 \cdot 10^6$	$5,94530 \cdot 10^6$
60	84964	$2,47794 \cdot 10^6$	$3,08474 \cdot 10^6$	$3,08474 \cdot 10^6$
80	85269	$1,80987 \cdot 10^6$	$2,25740 \cdot 10^6$	$2,25740 \cdot 10^6$
100	85758	$1,31021 \cdot 10^6$	$1,77527 \cdot 10^6$	$1,77527 \cdot 10^6$
120	85695	$1,38980 \cdot 10^6$	$1,87080 \cdot 10^6$	$1,87080 \cdot 10^6$
140	85451	$1,49777 \cdot 10^6$	$1,88039 \cdot 10^6$	$1,88039 \cdot 10^6$
160	85377	$1,11908 \cdot 10^6$	$1,38916 \cdot 10^6$	$1,38916 \cdot 10^6$
180	85740	$0,79883 \cdot 10^6$	$1,04344 \cdot 10^6$	$1,04344 \cdot 10^6$
200	85719	$0,75016 \cdot 10^6$	$0,97766 \cdot 10^6$	$0,97766 \cdot 10^6$

Tab. 3.3: Odhad pomocí CRN

V tabulce 3.3 jsou zaznamenány výsledné hodnoty pro zvolené $n_g = 50$ a různý počet scénářů v každé sadě, včetně rozsahu 95% intervalu spolehlivosti. Přičemž při výpočtu chyby odhadu ε_g pro počet scénářů větší než 30 byl použit kvantil normálního rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$, pro menší počet scénářů byl zvolen kvantil Studentova rozdělení.



Obr. 3.4: Závislost G_N^i na počtu scénářů (N)



Obr. 3.5: 95% interval spolehlivosti pomocí CRN

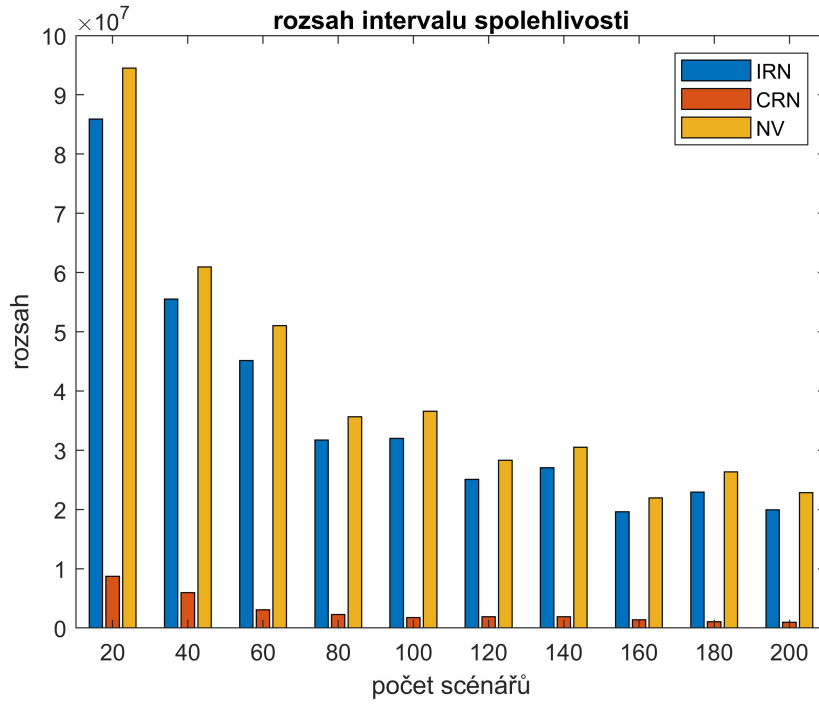
Na obrázcích 3.4 a 3.5 je vidět, že s vyšším počtem scénářů je rozptyl G_N^i menší. Je snaha dosáhnout, aby G_N^i bylo rovno nule. Protože čím menší bude rozdíl mezi \hat{v}_N^{*i} a v_N^{*i} , $\hat{\mathbf{x}}_N$ bude blíže optimálnímu řešení. Tomu také odpovídá délka intervalu spolehlivosti. I u této metody lze říct, že od $N = 80$ se již interval spolehlivosti příliš nezmenšuje.

3.3 Porovnání metod

Nejprve se porovnají metody z hlediska předpokladů. Při zpracování jako náhodný výběr se využívá přímo centrální limitní věta a tedy jediné předpoklady, které je nutné splnit, jsou předpoklady samotné centrální limitní věty. To je tedy existence konečné střední hodnoty a konečného nenulového rozptylu účelové funkce. Metody IRN a CRN požadují přísnější předpoklady. A to konečnost střední hodnoty, konečný rozptyl a spojitost účelové funkce na \mathbf{X} , což musí být kompaktní a neprázdná množina.

Další rozdíly jsou ve výpočtové náročnosti intervalů spolehlivosti. Nejméně náročné je zpracování přímo přes centrální limitní větu, protože po výpočtu modelu stačí pouze dopočítat výběrový průměr a chybu. V případě IRN se dolní odhad získá stejně jako u náhodného výběru. Při počítání horního odhadu je ovšem třeba spočítat další optimalizační úlohu, kde se minimalizuje kompenzační část účelové funkce (tj. $E_\xi Q(x, \xi)$), přičemž za x je dosazen výběrový průměr optimálního řešení x_N^{*i} pro jednotlivé sady scénářů $\xi^{1i}, \dots, \xi^{Ni}$. Tato funkce je již ovšem lineární, proto lze použít lineární programování. A dále se postupuje podobně jako pro náhodný výběr. Stejně jako pro horní odhad metody IRN při počítání mezery optimality G_N^i je nutné řešit lineární optimalizační úlohu. Poté již není problém dopočítat ostatní charakteristiky.

Graf 3.6 ukazuje porovnání rozsahu 95% intervalu spolehlivosti pomocí metody IRN, CRN a zpracování jako náhodný výběr.



Obr. 3.6: Porovnání metod

Jak je vidět na obrázku 3.6 nejmenší intervaly spolehlivosti byly spočítány pomocí metody CRN. Touto metodou tedy získáme interval, ve kterém by se s 95% pravděpodobností měl pohybovat rozdíl mezi skutečnou hodnotou v^* a \hat{v}_N^* při zvolení kapacity \hat{x}_N . Větší interval byl vytvořen pomocí IRN. Pokud bude zvolena kapacita kotle \hat{x}_N , tak skutečná minimální hodnota účelové funkce v^* s 95% pravděpodobností bude ležet v tomto intervalu spolehlivosti. Vůbec největší interval spolehlivosti byl získán v případě, kde získané hodnoty účelové funkce pro jednotlivé sady byly brány jako náhodný výběr. Toto není překvapivé vzhledem k tomu, že předchozí metody byly vytvořeny speciálně pro dvoustupňové optimalizační stochastické úlohy, zato aplikace náhodného výběru je obecnějším přístupem, který navíc nezáleží na distribuci účelové funkce.

Dále lze vyvodit, že „dostatečně dobrá“ aproximace úlohy se spojitými náhodnými parametry dle metod IRN, CRN i NV bude dosažena za pomoci vygenerování 80 scénářů. Dále lze potvrdit zmíněnou domněnku, že aby bylo zajištěno, že úloha bude skutečně dobře aproximovat původní úlohu, je nutné zvolit vyšší počet scénářů. V takovém případě se musí zvážit, zda je to pro danou úlohu skutečně nutné, vzhledem k tomu že se zvyšujícím se počtem scénářů, roste náročnost a tedy i doba výpočtu úlohy.

Závěr

V bakalářské práci je představen model spalovny odpadů, který je dvoustupňovým stochastickým problémem. V modelu se vyskytují náhodné parametry, které mají normální rozdělení. Tato úloha je aproximována diskretizací, proto je ovšem třeba řešit, jak přesná tato aproximace je. Z tohoto důvodu byl vytvořen interval spolehlivosti. Tento interval je v bakalářské práci určen třemi různými metodami. První je aplikace náhodného výběru, která přímo využívá centrální limitní větu a z použitých metod je nejobecnější. Také její předpoklady jsou nejmírnější. Další byla metoda Sled nezávislých náhodných čísel (IRN), která je založena na metodě Monte Carlo. Touto metodou se počítá dolní odhad stejně jako u aplikace náhodného výběru, ale horní odhad je vytvořen speciálně pro dvoustupňové stochastické optimalizační úlohy. Proto také interval spolehlivosti vyšel menší než pro aplikaci náhodného výběru. Na druhou stranu pro použití IRN je třeba splnit přísnější předpoklady. Vůbec nejmenší interval spolehlivosti byl získán pomocí metody Sled společných náhodných čísel (CRN). Tato metoda je založena na mezeře optimality, ke které se také vztahuje získaný interval. CRN je možné použít za stejných předpokladů jako IRN.

Dále jsem se v práci věnovala, jak počet vygenerovaných scénářů ovlivní interval spolehlivosti. Zjistila jsem, že s vyšším počtem scénářů se tento interval zmenšoval. Ovšem tato závislost není úměrná. Proto dalším cílem bylo stanovit nejnižší počet scénářů, který již „dostatečně dobře“ aproximuje optimalizační úlohu kapacity kotle spalovny (1.3). Tento počet byl stanoven na 80 scénářů, a to vzhledem k tomu že s vyšším počtem scénářů se výrazně navyšuje i náročnost úlohy.

Předpokládá se rovněž využití výsledků této práce v rámci projektu “Výpočtové simulace pro efektivní nízkoemisní energetiku“ reg. č.: CZ.02.1.01/0.0/0.0/16_026/0008392 financovaného z OP VVV, Prioritní osy 1: Posilování kapacit pro kvalitní výzkum.

Literatura

- [1] KŮDELA, Jakub. *Stochastic optimization in AIMMS* [online]. Brno, 2014 [cit. 2021-3-2]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=85257. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Pavel Popela.
- [2] ŠOMPLÁK, Radovan. *Využití metod stochastického programování pro hodnocení investic v energetických zdrojích*. Brno, 2011. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/36879>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce RNDr. Pavel Popela, PhD.
- [3] BAZARAA, Mokhtar S., Hanif D. SHERALI a C.M SHETTY. *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms*. 2nd ed. New York: John Wiley, 1993. ISBN 0471557935.
- [4] NASH, Stephen G. a Ariela SOFER. *Linear and Nonlinear Programming*. McGraw-Hill, 1995. ISBN 0070460655.
- [5] KLAPKA, Jindřich, Jiří DVOŘÁK a Pavel POPELA. *Metody operačního výzkumu*. Vyd. 2. Brno: VUTIUM, 2001. ISBN 80-214-1839-7.
- [6] POPELA, Pavel. *Stochastic Programming*. Textbook. Brno: Brno University of Technology, 2020.
- [7] WILLIAMS, H. Paul. *Model Building in Mathematical Programming*. 5th ed. Hoboken, N. J.: John Wiley, 2013. ISBN 978-1-118-44333-0.
- [8] BIRGE, John R. a François LOUVEAUX. Uncertainty and Modeling Issues: Two-Stage Program with Fixed Recourse. *Introduction to stochastic programming*. 2nd ed. New York: Springer, 2011, s. 59-60. ISBN 978-1-4614-0236-7.
- [9] FORBELSKÁ, Marie a Jan KOLÁČEK. *Pravděpodobnost a statistika II* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2013, s. 4-11 [cit. 2021-4-30]. ISBN 978-80-210-6711-0. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/ps13/prav_stat/web_2/M4122.pdf
- [10] Základy statistické indukce: Intervalové odhady. ŠKRÁŠEK, Josef a Zdeněk TICHÝ. *Základy aplikované matematiky III*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1990, s. 232-233. ISBN 80-03-00111-0.
- [11] FORBELSKÁ, Marie a Jan KOLÁČEK. Konvergence náhodných veličin a centrální limitní věta. *Pravděpodobnost a statistika I* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2013, s. 90-92 [cit. 2021-3-6]. ISBN 978-80-210-6710-3. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/ps13/prav_stat/web_1/M3121_text.pdf

- [12] KALOS, Malvin H. a Paula A. WHITLOCK. What is Monte Carlo?: Introduction. *Monte Carlo Methods*. Second Edition. Weinheim: John Wiley, 2008, s. 2. ISBN 978-3-527-40760-6.
- [13] MAK, Wai-Kei, David P. MORTON a R. Kevin WOOD. Monte Carlo bounding techniques for determining solution quality in stochastic programs. *Operations Research Letters* [online]. 1999, **24**(1-2), 47-56 [cit. 2021-3-6]. ISSN 0167-6377. Dostupné z: [https://doi.org/10.1016/S0167-6377\(98\)00054-6](https://doi.org/10.1016/S0167-6377(98)00054-6)
- [14] CARUANA, Karen. *Portfolio optimisation*. 2003. Dissertation. L-Università ta' Malta.
- [15] DUPAČOVÁ, Jitka. *Bounds for Stochastic Programs in Particular for Recourse Problems*. [online]. Laxenburg, Austria, 1995 [cit. 2021-3-13]. WP-95-085. Dostupné z: <http://pure.iiasa.ac.at/4511/>. IIASA Working Paper. International Institute for Applied Systems Analysis.
- [16] POPELA, Pavel. *An object-oriented approach to multistage stochastic programming: models and algorithms*. 1998. Doctoral thesis. Univerzita Karlova. Vedoucí práce Jitka Dupačová.

Seznam symbolů a zkratek

IRN	sled nezávislých náhodných čísel (z angl. independent random number streams)
CRN	sled společných náhodných čísel (z angl. common random number streams)
NV	aplikace náhodného výběru
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2
\mathbb{R}	množina reálných čísel

A Zdrojový kód modelu kolportéra v GAMSu

```
* model kolportéra
set s realizace scenare / 1, 2, 3 /;

parameters p(s) pravdepodobnost scenaru / 1 0.3, 2 0.6, 3 0.1 /,
h(s) poptávka / 1 50, 2 40, 3 20 / ;
scalar
n nakupni cena / 10 /,
d prodejni cena / 25 /,
qm penale za malou kapacitu / 0 /,
qp penale za velkou kapacitu / 25 /;

variable z zisk;
positive variable
x kolik novin koupit nebo jakou kapacitu zvolit,
ym(s) o kolik nedodrzena poptavka h,
yp(s) o kolik preplnena poptavka h;

equations ucelfce, omezeni(s);
ucelfce.. z =E= -(d-n)*x + sum(s, p(s) * (qm * ym(s) + qp * yp(s)));
omezeni(s).. x + ym(s) - yp(s) =E= h(s);

model kolporter / ucelfce, omezeni /;
solve kolporter minimizing z using LP;
display n, d, qp, qm, s, p, h, z.L, x.L, yp.L, ym.L;
```

B Zdrojový kód modelu spalovny v GAMSu

```
*model spalovny
*počet scénářů ... N=100
set i scénáře /1*100/

parameters
m počet scénářů /100/
l dolní mez kapacity /50000/,
u horní mez kapacity /400000/,
q1(i) cena prodeje tepla,
q2(i) cena prodeje elektřiny,
q3(i) cena prodání odpadu,
h1(i) poptávka tepla,
h2(i) poptávka elekt;

*vygenerování hodnot z normálního rozdělení
q1(i) = normal(1044000, 72000) ;
q2(i) = normal(1650000, 100000) ;
q3(i) = normal(1500, 100) ;
h1(i) = normal(6000, 600) ;
h2(i) = normal(1000,100) ;

*určení proměnných
variable n celkové náklady ;
variable x kapacita ;
variable c cena vystavění spalovny ;
positive variable
y1(i) množství tepla,
y2(i) množství elekt,
y3(i) množství odpadu;

*omezení kapacity x
x.lo=l;
x.up=u;

*použité rovnice
equations
ucelfce účelová funkce, nakl náklady na vystavění spalovny,
omez_energie(i) omezení vytvořené energie kapacitou spalovny,
omez_tepla(i) omezení prodaného tepla poptávkou,
```


omez_elekt(i) omezení prodané elektřiny poptávkou,
omez_odpad(i) omezení odpadu produkcí;

**definování rovnic:*

**účelová funkce se skládá z nákladů na postavení spalovny*

**od této ceny se odečte střední hodota zisků z prodaného tepla, elektřiny a odpadu*

ucelfce.. n =e= c - sum(i, 1/m* (q1(i)*y1(i) + q2(i)*y2(i) + q3(i)*y3(i))) ;

nakl.. c =e= 2688000* x**0.7;

omez_energie(i).. 0.001*x - 0.0126*y1(i) - 0.0828*y2(i) =g= 0.2876 ;

omez_tepla(i).. y1(i) =l= h1(i) ;

omez_elekt(i).. y2(i) =l= h2(i) ;

omez_odpad(i).. 24*x - y3(i) =g= 0 ;

model spalovna /all/ ;

**vyřešení modelu*

**minimalizují se náklady*

solve spalovna minimizing n using NLP ;

**vypsání hodnot*

display 'náklady: ', n.l, 'kapacita: ', x.l,

'ceny: ', q1, q2, q3, 'poptávka:', h1, h2, 'množství tepla:', y1.l,

'množství elektřiny:', y2.l, 'množství odpadu:', y3.l;

C Seznam příloh

Seznam příloh, které jsou obsaženy v `prilohy.zip`:

<code>grafy, schema</code>	složka obsahující všechny grafy a schéma použité v bakalářské práci
<code>kolporter</code>	složka obsahující zdrojový kód modelu koportéra v GAMSu (viz A) a výsledky kompilace programu
<code>spalovna</code>	složka obsahující zdrojový kód modelu spalovny v GAMSu (viz B) a výsledky kompilace programu
<code>spalovna_opakovani_horni_odhad</code>	složka obsahující zdrojový kód modelu spalovny s opakováním úlohy a modelem pro horní odhad v GAMSu a výsledky kompilace programu
<code>vysledky</code>	složka obsahující soubory <code>results_N.xls</code> , kde N představuje počet scénářů, v souboru je list <code>xn</code> s optimální kapacitou pro každé opakování úlohy, list <code>nn</code> s optimální hodnotou účelové funkce a list <code>u</code> s horním odhadem, soubory slouží jako vstupy pro program <code>grafy.m</code>
<code>CRN.m</code>	implementace metody CRN v MATLABu
<code>grafy.m</code>	soubor v MATLABu, ze kterého se spouští funkce CRN, IRN a SampleInfo
<code>IRN.m</code>	implementace metody IRN v MATLABu
<code>SampleInfo.m</code>	implementace metody NV v MATLABu