



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

OPTIMALIZACE TVORBY CEN V LOGISTICE

OPTIMIZATION IN LOGISTICS WITH PRICING

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Tomáš Langr

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

BRNO 2021

Zadaní bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Tomáš Langr**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **RNDr. Pavel Popela, Ph.D.**
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Optimalizace tvorby cen v logistice

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student se seznámí s problematikou matematických modelů v logistice a problematikou tvorby cen (pricing). Student využije své znalosti z lineární algebry doplněné o znalosti optimalizace v rozsahu matematické analýzy, nastuduje problematiku síťových optimalizačních úloh, pro vybraný problém sestaví matematický model, prostuduje jeho vlastnosti, úlohu vyřeší pomocí vlastní modifikace a implementace vhodného algoritmu a provede diskusi výsledků. Odborná problematika bude navazovat na řešení projektů na FSI (TIRSM) a bude konzultována se specialisty Ing. Hrabcem a Ing. Šomplákem.

Cíle bakalářské práce:

1. Studium matematických modelů v logistice.
2. Seznámení s problematikou tvorby cen (pricing).
3. Optimalizační modelování síťových optimalizačních úloh a zahrnutí prvků pricingu.
4. Výběr a modifikace algoritmů a jejich softwarová implementace.
5. Aplikace na vybraný reálný problém a testovací výpočty.

Seznam doporučené literatury:

KLAPKA, J., DVOŘÁK, J. a POPELA, P. Metody operačního výzkumu. Vyd. 2. Brno: VUTUM, 2001. ISBN 80-214-1839-7.

RARDIN, R. L. Optimization in Operations Research. 2nd ed. Hoboken, New Jersey: Pearson, 2015.

NASH, S. and SOFER, A. Linear and nonlinear programming. McGraw-Hill, 1995. ISBN 978-0-898-1-661-0.

GHIANI, G., LAPORTE, G., MUSMANNO, R. Introduction to Logistics systems planning and control. Wiley-interscience series in systems and optimization, John Wiley & Sons, Chichester, 2004.

WILLIAMS, H. P. Model building in mathematical programming. 5th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons. 2013. ISBN 978-1-118-44333-0.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce je zaměřena na dynamickou cenotvorbu a její aplikaci v síťových dopravních modelech s cílem optimalizovat ceny, jež v těchto modelech hrají důležitou roli. Teoretická část se věnuje základním pojmům optimalizace, lineárního programování, teorii grafů a teorii vztahující se k dynamickému oceňování. Důraz je kladen na propojení všech těchto poznatků a jejich aplikaci při řešení logistických modelů.

Summary

This bachelor thesis concerns itself with dynamic pricing and its application in network transport models in order to optimize the prices that play an important role in these models. In the theoretical part, we deal with the basic concepts of optimization, linear programming, graph theory and theory related to dynamic pricing. Emphasis is put on linking all this knowledge and its application in solving logistics models.

Klíčová slova

Optimalizace, lineární programování, dopravní úloha, dynamická cenotvorba, poptávka, GAMS

Keywords

Optimization, linear programming, transportation problem, dynamic pricing, demand, GAMS

LANGR, T. *Optimalizace tvorby cen v logistice*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2021. 33 s. Vedoucí bakalářské práce Pavel Popela.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Pavla Popely, Ph.D. s využitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Tomáš Langr

Rád bych tímto poděkoval všem, kteří mi byli při psaní této práce oporou a motivovali mě v těchto časech. Především mým rodičům a mé přítelkyni Adéle.

Tomáš Langr

Obsah

1	Úvod	2
2	Optimalizace	3
2.1	Lineární programování	4
3	Teorie grafů	8
4	Logistika	9
4.1	Dopravní model přeprava zboží sklad - zákazník	9
4.2	Dopravní model přeprava zboží továrna - sklad - zákazník	11
5	Dynamická cenotvorba	14
5.1	Poptávka	14
5.2	Vybrané poptávkové funkce	17
6	Aplikace dynamické cenotvorby na dopravní úlohy	19
6.1	Dopravní model sklad - zákazník s lineární poptávkou	19
6.2	Dopravní model sklad - zákazník s isoelastickou poptávkou	21
6.3	Dopravní model sklad - zákazník s logit poptávkou	23
6.4	Dopravní model továrna - sklad - zákazník s lineární poptávkou	25
7	Aplikace na větší množství dat	29
7.1	Dopravní model přeprava zboží továrna - sklad - zákazník	29
7.2	Dopravní model přeprava zboží továrna - sklad - zákazník s lineární po- ptávkou	29
8	Závěr	31
9	Seznam příloh	33

1. Úvod

Dynamická cenotvorba [9] se stává nedílnou součástí dnešního globalizovaného a mnohdy uspěchaného světa. Problematika efektivního nastavování cen se stává klíčovým nástrojem, jež dává tomu, kdo nabyde schopnosti účinné optimalizace cen, nejen výhodu vůči konkurenci, ale může dokonce rozhodnout o osudu firmy. Důležitým faktorem je rychlost, s jakou jsme schopni přizpůsobovat naše ceny aktuální situaci na trhu. Díky stále rozvíjejícím se technologiím jsou přístupná data o zákaznících s jejichž pomocí jsme schopni analyzovat jejich chování a přizpůsobit ceny. Podrobněji budeme sledovat tři typy poptávkových funkcí - lineární, isoelatickou a logit. V této bakalářské práci se budeme zabývat aplikací dynamické cenotvorby na síťové dopravní modely s cílem optimalizovat ceny. S tímto je spojena znalost modelování optimalizačních úloh a jejich řešení. Základní poznatky optimalizace a nástroje sloužící k řešení optimalizačních problémů jsou uvedeny v kapitole 2. Kapitola 3 obsahuje pojmy teorie grafů, které budou hrát roli při vytváření síťového modelu. V kapitole 4 aplikujeme dosavadní znalosti na logistické modely s cílem minimalizovat náklady. Poté si představíme dynamickou cenotvorbu (kapitola 5), kterou aplikujeme na naše logistické modely (kapitola 6,7) a pozorujeme její vliv.

2. Optimalizace

Slovo "optimum" je latinského původu jehož českým významem je slovo "nejlepší". Optimalizace je disciplína aplikované matematiky zabývající se minimalizací či maximalizací účelové funkce, která podléhá omezujícím podmínkám. Funkci minimalizujeme (resp. maximalizujeme) nalezením vhodných hodnot proměnných, pro které je příslušná hodnota účelové funkce minimální (resp. maximální). Optimalizace má široké využití v ekonomii, logistice, inženýrských oborech, nebo v managementu. V praxi se tak může jednat o minimalizaci nákladů/maximalizaci zisků, hledání nejkratší cesty, nebo nalezení ideálních rozměrů součástí. V této kapitole je čerpáno z [1,7,8,12].

Optimalizační úlohu můžeme obecně zapsat jako:

minimalizuj účelovou funkci $f(\mathbf{x})$,

$$\text{za podmínek } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I},$$

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in \mathcal{E},$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\mathbf{x})$ je zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pro $\forall i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$. Podmínky vyjádřené rovnostmi lze rozdělit na dvojici nerovností. Obecně lze převést minimalizační úlohu na maximalizační, protože platí $\max f(\mathbf{x}) = -\min(-f(\mathbf{x}))$. Velmi časté jsou podmínky nezápornosti nebo jsou dokonce stanoveny meze, kterých daná proměnná může nabývat:

$$x_i^d \leq x_i \leq x_i^h$$

V případě x_i^d se jedná o dolní mez a x_i^h o horní mez. Množinu vektorů proměnných, které splňují dané omezující podmínky, nazveme množinou přípustných řešení. Optimální řešení je takové přípustné řešení, které minimalizuje (respektive maximalizuje) danou účelovou funkci. [1]

Definice 2.1. Necht $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce na množině $S \subset \mathbb{R}^n$. Necht $\hat{\mathbf{x}} \in S$ je libovolný bod a $B_r(\hat{\mathbf{x}}) := \{ \mathbf{x} \in S : \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| < r \}$ je otevřená koule s poloměrem r a se středem v bodě $\hat{\mathbf{x}}$. Pak se $\hat{\mathbf{x}}$ nazývá:

(a) *lokální minimum* funkce f , když platí

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in B_r(\hat{\mathbf{x}}),$$

a *ostré lokální minimum* f , když platí

$$f(\hat{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in B_r(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}},$$

(b) *globální minimum* funkce f na množině S , když platí

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S,$$

a *ostré globální minimum* f na množině S , když platí

$$f(\hat{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S, \mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}.$$

2.1. LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

Analogicky bychom mohli zavést definici i pro *maximum* viz [8].

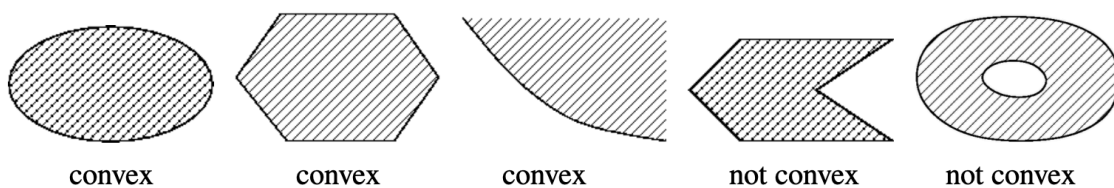
Věta 2.2. (Weierstrass)[8]. Necht $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce na kompaktní a neprázdné množině $S \subset \mathbb{R}^n$, pak existuje globální minimum, respektive maximum $\hat{\mathbf{x}} \in S$ takové, že

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S,$$

respektive

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S.$$

Definice 2.3. Necht $S \subset \mathbb{R}^n$. Množinu S nazveme *konvexní množina* pokud platí $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \lambda \in (0, 1) \Rightarrow (1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in S$ [1].



Obrázek 2.1: Příklady konvexních a nekonvexních množin [1].

Definice 2.4. Necht $S \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna konvexní množina. Funkce $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme *konvexní* na množině S , pokud platí $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \lambda \in (0, 1) \Rightarrow f((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \leq (1-\lambda)f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y})$ [1].

2.1. Lineární programování

Existuje celá řada problémů, které mohou být popsány pomocí lineárních programů. Nicméně při aplikaci musíme myslet na podmínky, které musí model splňovat:

- linearita,
- spojitost,
- deterministicky určené parametry.

Standardní tvar lineárního modelu:

minimalizuj účelovou funkci $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$,

za podmínek $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

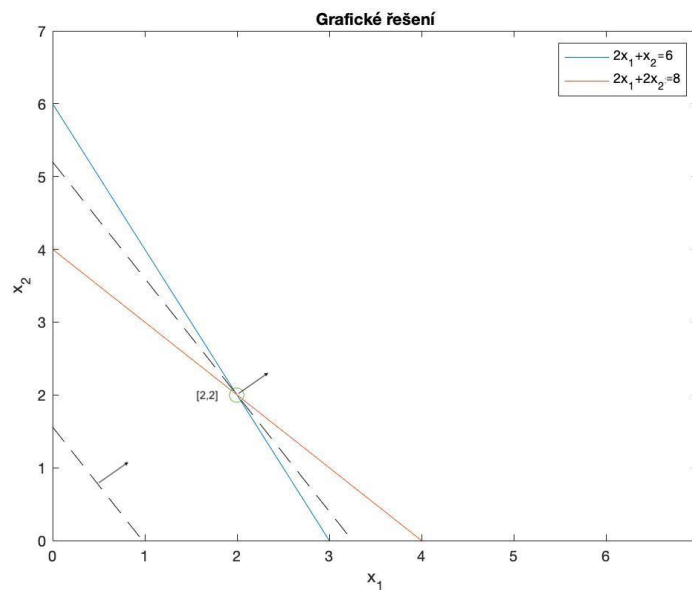
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $h(\mathbf{A}) = m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a pro všechny složky vektoru \mathbf{b} platí $b_i \geq 0$. Každý lineární problém lze vyjádřit ve standardní formě. V případě, kdy bychom měli omezující podmínky nerovnice, mohli bychom snadno soustavu doplnit o nezáporné doplňkové proměnné a tím podmínky převést na rovnice. Dále může nastat situace, kdy některá složka je nekladná $x_i \leq 0$ nebo dokonce neomezená $x_j \in \mathbb{R}$. Pro nekladnou složku zavedeme

substitucí $\tilde{x}_i = -x_i$. Neomezenou proměnnou transformujeme na rozdíl dvou nezáporných proměnných $x_j^+ \geq 0$ a $x_j^- \geq 0$, $x_j = x_j^+ - x_j^-$ [1].

Příklad 2.1.

$$\begin{aligned} \max \quad & z \\ z = \quad & 1,6x_1 + 1x_2, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



Obrázek 2.2: Grafické řešení příkladu 2.1.

Obr. [4.1] obsahuje grafické řešení našeho modelu. Černá šipka označuje směr růstu účelové funkce. Maximální hodnoty dosahuje jen v jednom bodě $[2, 2]$.

Simplexová metoda

Tato metoda je vhodným nástrojem pro řešení většiny problémů lineárního programování. Její princip spočívá ve stanovení hodnoty účelové funkce v počátečním krajním bodě z množiny přípustných řešení. Z tohoto bodu, pokud je to možné, se přesouváme po hraně polyedrické množiny do dalšího krajního bodu, ve kterém je hodnota účelové funkce nižší, respektive vyšší v případě, že řešíme minimalizační úlohu, respektive maximalizační úlohu. V tomto duchu postupně procházíme další body dokud nenarazíme na bod, jehož hodnotu účelové funkce již nelze zlepšit viz [8]. Řešení pomocí simplexové tabulky vyžaduje převod na minimalizační úlohu pomocí $\max f(\mathbf{x}) = -\min(-f(\mathbf{x}))$. Dále je nutné přidat nezáporné doplňkové proměnné, jež převedou omezující podmínky z nerovnic na rovnice. Příklad 2.1 přepíšme v tomto tvaru

2.1. LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

$$\min z$$

$$z = -1,6x_1 - x_2,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 8,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	1,6	1	0	0	0
x_3	0	2	1	1	0	6
x_4	0	2	2	0	1	8

Tabulka 2.1: Přepis úlohy do simplexové tabulky.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	0,2	-0,8	0	-4,8
x_1	0	1	0,5	0,5	0	3
x_4	0	0	1	-1	1	2

Tabulka 2.2: Simplexová tabulka po prvním kroku.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	0	-0,6	-0,2	-5,2
x_1	0	1	0	1	-0,5	2
x_2	0	0	1	-1	1	2

Tabulka 2.3: Simplexová tabulka s optimálním řešením.

Výpočet pomocí softwaru GAMS

Na závěr řešíme příklad 2.1 pomocí softwaru GAMS, který má v sobě zabudované velmi efektivní řešiče. Konkrétně řešič CPLEX, jež je založen na implementaci simplexových algoritmů. Je silným nástrojem k řešení síťových modelů. Ukázka kódu řešící tento příklad viz níže. Optimálním bodem je $[2,2]$ s hodnotou účelové funkce $z = 5,2$.

```

1 Set
2     i /i_1, i_2/
3     j /j_1, j_2/;
4 Parameter
5     c(i) /i_1 1.6, i_2 1/;
6 Parameter
7     b(j) /j_1 6, j_2 8/;
8 Table a(j, i)
9         i_1      i_2
10      j_1      2      1
11      j_2      2      2;
```

```
12 Positive variables x(i);
13 Variables z;
14 Equation
15     ucelf      'ucelova funkce'
16     omez       'omezujici podminka';

18 ucelf..        z=e=sum(i,c(i)*x(i));
19 omez(j)..      sum(i,a(j,i)*x(i))=g=b(j);

21 Model priklad /all/;
22 Solve priklad using LP Minimizing z;
23 Display x.l;
```

3. Teorie grafů

V této kapitole si představíme základní pojmy teorie grafů. Tyto poznatky později využijeme k vytvoření síťové optimalizační úlohy. V této kapitole je čerpáno z [2].

Definice 3.1. *Neorientovaný graf* je trojice $G = (V, E, \varepsilon)$ tvořená neprázdnou konečnou množinou V , jejíž prvky nazýváme *vrcholy*, konečnou množinou E , jejíž prvky nazýváme *neorientovanými hranami*, a zobrazením $\varepsilon : E \rightarrow V^2$, které nazýváme *vztahem incidence*. Toto zobrazení přiřazuje každé hraně $e \in E$ jednoprvkovou nebo dvouprvkovou množinu vrcholů.

Definice 3.2. *Orientovaný graf* je trojice $G = (V, E, \varepsilon)$ tvořená neprázdnou konečnou množinou V , jejíž prvky nazýváme *vrcholy*, konečnou množinou E , jejíž prvky nazýváme *orientovanými hranami*, a zobrazením $\varepsilon : E \rightarrow V^2$, které nazýváme *vztahem incidence*. Toto zobrazení přiřazuje každé hraně $e \in E$ uspořádanou dvojici vrcholů (x, y) . Prvý z nich, x , nazýváme *počátečním vrcholem hrany* a značíme jej $Pv(e)$. Druhý nazýváme *koncovým vrcholem hrany* a značíme jej $Kv(e)$. Oba vrcholy (x, y) také souhrnně nazýváme *krajními vrcholy hrany* e . Jestliže $Pv(e) = Kv(e)$, pak hranu e nazýváme (orientovanou) *smyčkou*.

Definice 3.3. Graf jehož hrany a (nebo) vrcholy jsou opatřeny hodnotami (obvykle číselnými), nazýváme *ohodnoceným grafem* nebo též *sítí*.

Definice 3.4. Posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$ nazýváme *neorientovaným sledem*, jestliže každá hrana e_i z této posloupnosti spojuje vrcholy v_{i-1}, v_i .

Definice 3.5. Posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$ nazýváme *orientovaným sledem*, jestliže pro každou hranu e_i z této posloupnosti platí $Pv(e_i) = v_{i-1}$ a $Kv(e_i) = v_i$.

Definice 3.6. Orientovaný (respektive neorientovaný) sled, v němž se žádná hrana neopakuje, nazýváme *orientovaným* (respektive *neorientovaným*) *tahem*. Orientovaný (respektive neorientovaný) sled, v němž se neopakuje žádný vrchol, nazýváme *orientovanou* (respektive *neorientovanou*) *cestou*.

Definice 3.7. Necht G je orientovaný graf bez smyček. Zvolíme-li (libovolně, ale pevně) nejen pořadí vrcholů v_1, \dots, v_n , ale i pořadí hran e_1, \dots, e_m , můžeme grafu G přiřadit *matici incidence* A_G typu (m, n) předpisem

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } v_i \text{ je počátečním vrcholem hrany } e_j, \\ -1, & \text{jestliže } v_i \text{ je koncovým vrcholem hrany } e_j, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

4. Logistika

Logistika se zabývá plánováním a řízením toku materiálu a souvisejících informací týkajících se organizace, jak ve veřejném, tak i v soukromém sektoru. Historicky za zrodem logistiky stála výzva efektivního zásobování armády jídlem, municí, zbraněmi a náhradními díly nebo samotný transport vojáků. V civilních organizacích se logistika využívá v produkci a distribuci zboží [3,6,8,11].

4.1. Dopravní model přeprava zboží sklad - zákazník

Mezi základní logistické problémy patří stanovení množství přepravovaného zboží ze skladů k zákazníkům a tím uspokojit jejich poptávku viz [7]. Při stanovování přepravovaného množství dbáme na to, abychom minimalizovali náklady spjaté s transportem. Na tento typ úlohy lze aplikovat doposud zmíněné poznatky z kapitol o lineárním programování a teorii grafů.

Označme v_i , $i \in I$ vrcholy představující sklady a v_j , $j \in J$ vrcholy představující zákazníky. Mezi jednotlivými v_i a v_j existují hrany ohodnocené c_{ij} . Ohodnocení může představovat vzdálenost dvou vrcholů, nebo velikost nákladů za převoz jednotky produktu. Omezujícími veličinami je maximální kapacita skladu s_i , $i \in I$ a poptávané množství po produktu b_j , $j \in J$.

Úlohu zapišme následovně

$$\begin{aligned} \min z \\ z &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}, \\ \sum_{j \in J} x_{ij} &\leq s_i, \quad i \in I, \\ \sum_{i \in I} x_{ij} &\geq b_j, \quad j \in J, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i \in I, j \in J, \end{aligned}$$

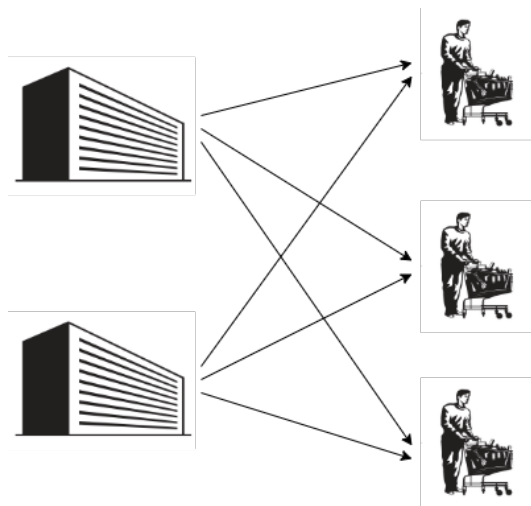
kde proměnné x_{ij} představují množství transportovaného zboží mezi uzly v_i a v_j , jejichž optimální volbou minimalizujeme účelovou funkci z . Na obr. 4.1 je zobrazena vizualizace naší úlohy pro dva sklady a tři zákazníky (modifikace obrázku z [3]).

Tuto úlohu následně vyřešíme pomocí softwaru GAMS viz uvedený zdrojový kód. Obdržíme minimalizovanou hodnotu účelové funkce $z = 104\,600$, množství převezeného zboží nalezneme v tabulce 4.1. Níže se nachází kód, pomocí jehož tuto úlohu řešíme, v tomto kódu jsou obsaženy informace o vstupních hodnotách (vzdálenosti, zásoby, určitá poptávka).

4.1. DOPRAVNÍ MODEL PŘEPRAVA ZBOŽÍ SKLAD - ZÁKAZNÍK

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
sklad1	700	75	575
sklad2	0	800	0

Tabulka 4.1: Množství přepraveného zboží mezi uzly.



Obrázek 4.1: Graf skladů a zákazníků.

```

1  Set
2    i / sklad1, sklad2 /
3    j / zakaznik1, zakaznik2, zakaznik3 /;

5  Parameter
6    s(i) 'mnozstvi zasob ve skladu i'
7        / sklad1 1350
8        sklad2 800 /

10   b(j) 'poptavane mnostvi po produktu zakaznika j'
11       / zakaznik1 700
12       zakaznik2 875
13       zakaznik3 575 /;

15  Table c(i,j) 'naklady na transport'
16      zakaznik1 zakaznik2 zakaznik3
17      sklad1    50        55        45
18      sklad2    49        49.5      50.5;

20  Variable
21    z 'celkove naklady';

23  Positive Variable
24    x(i,j) 'mnozstvi prevezeneho zbozi po hrane ij';

26  Equation
27    ucelf 'ucelova funkce'
28    zasoby(i) 'omezujici podminka'
29    poptavka(j) 'omezujici podminka';
  
```

```

31 ucelf..          z =e= sum((i,j), c(i,j)*x(i,j));
33 zasoby(i)..      sum(j, x(i,j)) =l= s(i);
35 poptavka(j)..    sum(i, x(i,j)) =g= b(j);
37 Model transport / ucelf,zasoby,poptavka /;
38 solve transport using LP minimizing z;
39 display z.L, x.L;

```

4.2. Dopravní model přeprava zboží továrna - sklad - zákazník

Nyní popíšme model, ve kterém transportujeme zboží z továren k zákazníkům využívající skladů, které jsou v tomto případě chápány jako přepravní uzly. Zdůrazněme, že z uzlů představujících továrny, zboží jen vyvážíme a do uzlů zákazníků jen dovážíme. Rozšíření spočívá v tom, že jsme navíc schopni přepravovat zboží přes uzly skladů.

Úlohu zapišme následovně

$$\begin{aligned}
 & \min z \\
 & z = \sum_{mn \in M} c_{mn} x_{mn}, \\
 & \sum_{k \in K} x_{ki} \leq s_i, \quad i \in I, \\
 & \sum_{i \in I} x_{ki} + \sum_{j \in J} x_{kj} \leq t_k, \quad k \in K, \\
 & \sum_{i \in I} x_{ij} + \sum_{k \in K} x_{kj} \geq b_j, \quad j \in J, \\
 & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq \sum_{k \in K} x_{ki}, \quad i \in I, \\
 & x_{mn} \geq 0, \quad mn \in M,
 \end{aligned}$$

kde oproti značení předchozího modelu přibyla množina $M = (K \times I) \cup (K \times J) \cup (I \times J)$, množina továren K a kapacita továrny t_k . Dále přibýly dvě nové omezující podmínky, které zabraňují vývozu více zboží než je kapacita t_k a vývozu více zboží, než jsme dovezli do přepravního uzlu.

K řešení tohoto modelu opět využijeme GAMS. V příloženém kódu jsou obsaženy vstupní hodnoty. Úlohu řešíme pro 3 továrny, 3 sklady a 3 zákazníky, graf této úlohy je zobrazen na obr. 4.2 (modifikace obrázku z [3]). Výstupem je hodnota účelové funkce $z = 596\,350$ a přepravované množství je vyobrazeno v tabulkách 4.2, 4.3 a 4.4.

4.2. DOPRAVNÍ MODEL PŘEPRAVA ZBOŽÍ TOVÁRNA - SKLAD - ZÁKAZNÍK

	sklad1	sklad2	sklad3
tovarna1	0	50	200
tovarna2	150	0	0
tovarna3	0	150	0

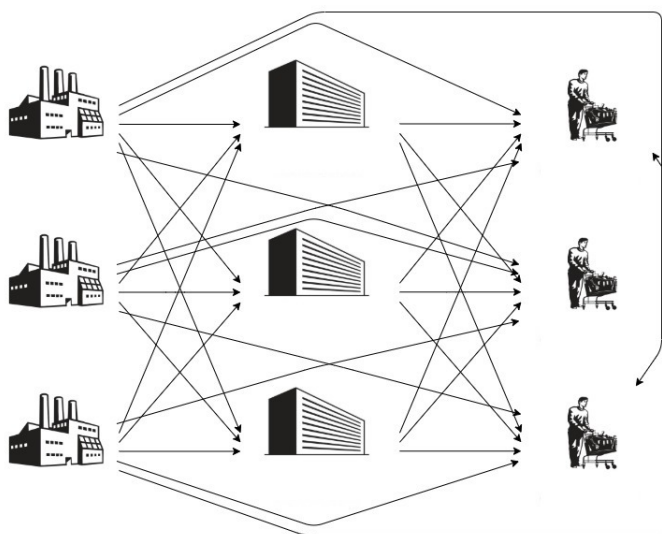
Tabulka 4.2: Množství přepraveného zboží x_{ki} .

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
sklad1	125	0	25
sklad2	0	0	200
sklad3	200	0	0

Tabulka 4.3: Množství přepraveného zboží x_{ij} .

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
tovarna1	0	0	0
tovarna2	0	0	50
tovarna3	0	300	0

Tabulka 4.4: Množství přepraveného zboží x_{kj} .



Obrázek 4.2: Graf továren, skladů a zákazníků.

```

1 Set k / tovarna1, tovarna2, tovarna3 /
2     i / sklad1, sklad2, sklad3 /
3     j / zakaznik1, zakaznik2, zakaznik3 /;
4 Parameter
5     t(k) 'kapacita tovarny'
6         / tovarna1 250
7           tovarna2 300

```

```

8          tovarna3  450/

10      s(i) 'kapacita sklady'
11          / sklad1  150
12          sklad2  200
13          sklad3  200/

15      b(j) 'poptavane mnostvi po produktu zakaznika j'
16          / zakaznik1  325
17          zakaznik2  300
18          zakaznik3  275/;

20 Table c1(k,i) 'naklady na transport'
21          sklad1  sklad2  sklad3
22      tovarna1      300      270      285
23      tovarna2      279      300      315
24      tovarna3      360      270      285;

26 Table c2(i,j) 'naklady na transport'
27          zakaznik1  zakaznik2  zakaznik3
28      sklad1          270          360          330
29      sklad2          300          285          285
30      sklad3          210          300          405;

32 Table c3(k,j) 'naklady na transport'
33          zakaznik1  zakaznik2  zakaznik3
34      tovarna1          900          900          1000
35      tovarna2          950          900          950
36      tovarna3          900          850          1100;

38 Variable
39      z          'celkove naklady';

41 Positive Variable
42      x1(k,i),x2(i,j),x3(k,j) 'mnozstvi prevezeného zboží po hrane ki, resp. ij
    , resp. kj';

44 Equation
45      ucelf          'ucelova funkce'
46      kapacita_sklad(i) 'omezujici podminka'
47      kapacita_tovarna(k) 'omezujici podminka'
48      poptavka(j) 'omezujici podminka'
49      omezeni(i) 'omezujici podminka';

51 ucelf.. z=e=(sum((k,i), c1(k,i)*x1(k,i)) + sum((i,j), c2(i,j)*x2(i,j)) +
    sum((k,j), c3(k,j)*x3(k,j)));

53 kapacita_sklad(i).. sum(k, x1(k,i)) =l= s(i);
54 kapacita_tovarna(k).. sum(i, x1(k,i))+sum(j,x3(k,j)) =l= t(k);
55 poptavka(j).. sum(i, x2(i,j))+sum(k,x3(k,j)) =g= b(j);
56 omezeni(i).. sum(j, x2(i,j))=l= sum(k, x1(k,i));

58 Model transport_MIN / all /;
59 solve transport_MIN using LP minimizing z;
60 display z.L, x1.l,x2.l,x3.l,c1,c2,c3;

```

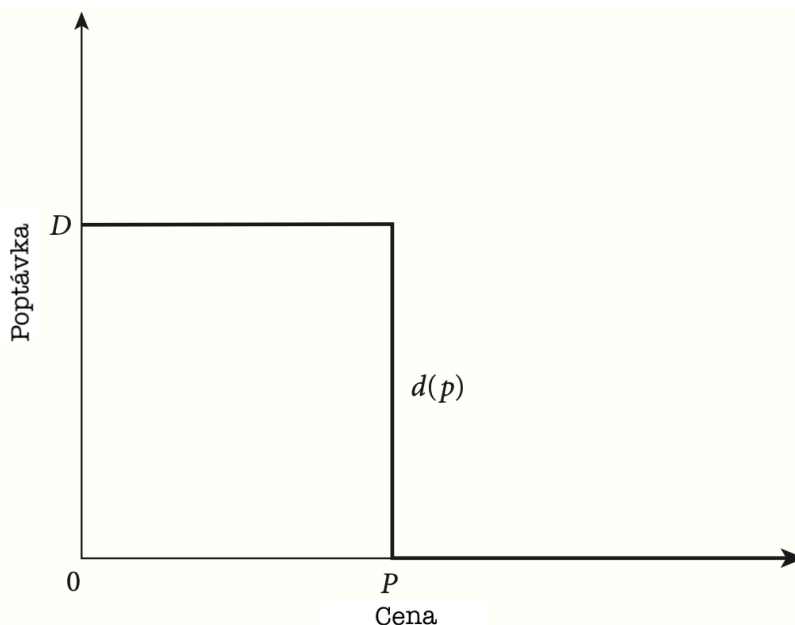
5. Dynamická cenotvorba

Jedna z prvních aplikací cenové optimalizace proběhla v roce 1985 společností American Airlines, jejíž fungování bylo ohroženo nízkonákladovou společností PeopleExpress. V reakci na tuto hrozbu American Airlines vyvinula systém správy příjmů založený na účinném přizpůsobování cen aktuálnímu dění na trhu. V současné době roste důležitost optimalizace cenotvorby v závislosti na množství produktů nabízeného korporátními společnostmi a díky snadnému získávání obrovského množství informací o zákaznících skrze nové technologie. Společnost, která získá schopnost rychle a efektivně manipulovat se svými cenami, bude mít znatelnou výhodu oproti konkurenci [9].

5.1. Poptávka

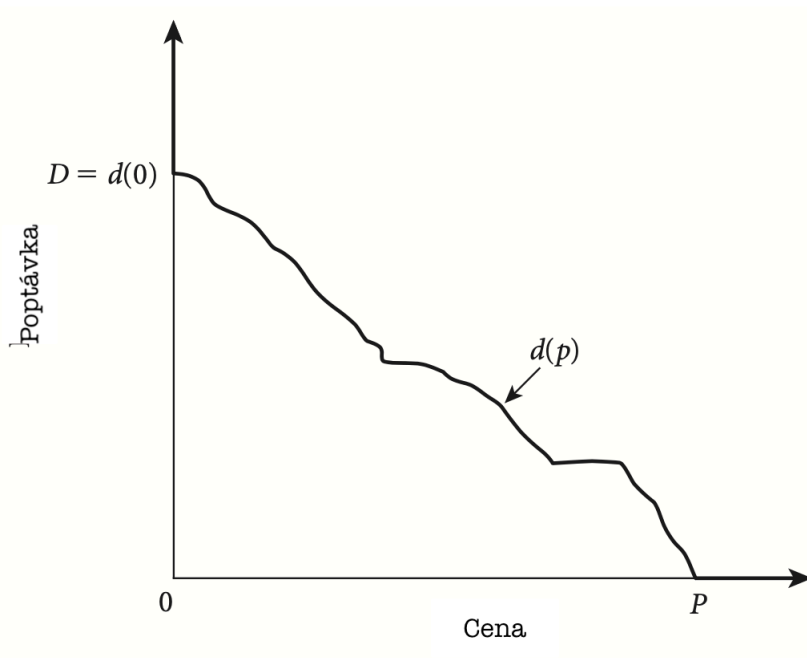
Mezi základní aspekty využívané v optimalizaci tvorby cen patří poptávková funkce $d(p)$ produktu jednoho prodejce. Rozdíly jednotlivých poptávkových funkcí pro různé prodejce jsou kombinací mnoha faktorů, jako je efektivita marketingových kampaní, přístup k zákazníkům, lokalita, atd.

Na obr. 5.1. můžeme vidět poptávkovou křivku jednoho prodejce na dokonale konkurenčním trhu. Prodejce má zanedbatelný podíl na trhu a produkt se neliší od produktů nabízené konkurencí. Prodejce má k dispozici určité množství zásob, které se rovná poptávanému množství D . Písmeno P označuje rovnovážnou tržní cenu, pokud se rozhodneme prodávat za cenu $\hat{P} \leq P$, prodáme veškeré zásoby. Na druhou stranu rozhodnutí prodávat za vyšší cenu $\hat{P} > P$ způsobí ztrátu veškerého zájmu nakupujících a poptávka klesne na nulovou hodnotu.



Obrázek 5.1: Poptávka na dokonale konkurenčním trhu [9].

Prodávající čelící takovému poptávce nemá žádnou kontrolu nad stanovením ceny. Své rozhodnutí musí podřídít tržní ceně P , protože při této hodnotě bude mít největší zisky. Takovéto případy poptávkové funkce jsou však nesmírně vzácné. V praxi se spíše setkáváme s poptávkou vyobrazenou na obr. 5.2.



Obrázek 5.2: Obecná poptávková funkce [9]

Poptávkové funkce, které v této práci budeme uvažovat jsou:

- nezáporné,
- spojité,
- diferencovatelné,
- nerostoucí,

Směrnice poptávkové funkce nám určuje, jak se změní poptávka v závislosti na změně ceny. Pro dvě různé ceny lze směrnice vyjádřit následovně

$$\delta(p_1, p_2) = \frac{d(p_2) - d(p_1)}{p_2 - p_1}.$$

Mějme na paměti, že pro $p_1 > p_2$ platí $d(p_1) \leq d(p_2)$. $\delta(p_1, p_2)$ nabývá jen nekladných hodnot a tedy splníme podmínku, že funkce nesmí být rostoucí. Obdobně lze získat směrnici v bodě p_1 jako

$$\delta(p_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(p_1 + h) - d(p_1)}{h} = d'(p_1).$$

Pravděpodobně nejčastěji využívaná míra citlivosti poptávky na změně ceny je *cenová elasticita*, jež je definovaná jako poměr procentuální změny poptávky k procentuální změně ceny.

5.1. POPTÁVKA

$$\varepsilon(p_1, p_2) = -\frac{100 \frac{d(p_2) - d(p_1)}{d(p_1)}}{100 \frac{p_2 - p_1}{p_1}},$$

kde $\varepsilon(p_1, p_2)$ představuje elasticitu cenové změny z p_1 do p_2 . Upravíme-li tento výraz, obdržíme

$$\varepsilon(p_1, p_2) = -\frac{[d(p_2) - d(p_1)]p_1}{[p_2 - p_1]d(p_1)},$$

nekladnost směrnice nám zaručí, že se poptávka mění vždy v opačném směru, a proto pro elasticitu platí $\varepsilon(p_1, p_2) \geq 0$. Například elasticita 1,2 znamená, že 10% zvýšení ceny, vyústí ve 12% snížení poptávky a elasticita 0,8 znamená, že 10% snížení ceny, vyústí v 8% zvýšení poptávky. Dále můžeme definovat i bodovou elasticitu v bodě p_1 jako

$$\varepsilon(p_1) = -\frac{d'(p_1)p_1}{d(p_1)},$$

kde opět platí, že $\varepsilon(p_1)$ je nezáporná. Bodová elasticita je užitečná jako odhad změny poptávky vyplývající z malé změny ceny. Výhodou elasticity vůči směrnici je, že nezáleží na použitých jednotkách.

Doposud jsme k poptávkové funkci přistupovali jako k jednoduše dané. V praxi je poptávková funkce výsledkem mnoha individuálních kupních rozhodnutí ze strany potenciálních zákazníků. Každý potenciální zákazník se rozhoduje, zda si koupí náš produkt za stanovenou cenu. Ti, kteří se rozhodnou produkt nekoupit, si buď koupí produkt od konkurence nebo se rozhodnou produkt nekoupit vůbec. Chování zákazníka budeme popisovat pomocí *ochoty platit*. Tento přístup předpokládá, že každý zákazník má *maximální ochotu platit* za produkt či službu.

Nechť funkce $w(x)$ je distribucí ochoty platit nad populací zákazníků, pak pro ceny $0 \leq p_1 < p_2$ platí

$$\int_{p_1}^{p_2} w(x)dx = D_{12},$$

kde D_{12} představuje množství zákazníků z části populace, jejíž maximální ochota platit náleží do intervalu (p_1, p_2) . Nechť $D = d(0)$ je maximální dosažitelná poptávka. Pak můžeme odvodit $d(p)$ jako

$$d(p) = D \int_p^\infty w(x)dx.$$

Derivací příslušné poptávkové funkce obdržíme

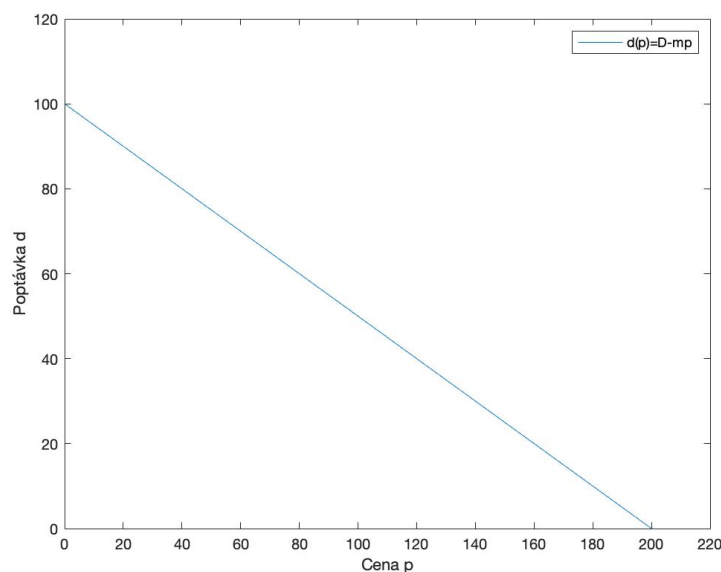
$$d'(p) = -Dw(p).$$

5.2. Vybrané poptávkové funkce

Začneme nejzákladnější poptávkovou funkcí - lineární. Ta je generována uniformní distribuční funkcí ochoty platit a je dána předpisem

$$d(p) = D - mp,$$

kde $D > 0$, $m > 0$ a $D = d(0)$. Graf lineární poptávkové funkce můžeme vidět na obr. 5.3. Směrnice této funkce je rovna $-m$ pro $0 < p < P$ a 0 pro $p \geq P$. Elasticita nabývá hodnot od 0 pro $p = 0$ a jde do ∞ pro p blížící se P .



Obrázek 5.3: Lineární poptávková funkce.

Tato reprezentace poptávkové funkce předpokládá, že změna poptávky vyvolaná určitou změnou ceny bude stejná bez ohledu na výchozí cenu. To je nerealistické, v případě, kdy konkurence nabízí podobné produkty, je dopad při změně ceny na poptávku největší, když je výchozí cena blízká konkurenční ceně. Jedná se tedy spíše o vhodnou lokální aproximaci.

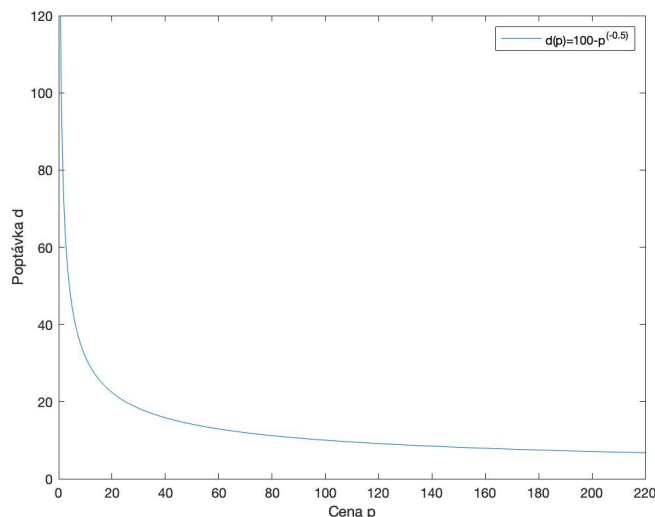
Další v řadě je poptávková funkce s konstantní elasticitou, bodová elasticita nabývá stejné hodnoty ε pro jakoukoliv cenu

$$d(p) = Cp^{-\varepsilon},$$

kde $C > 0$ je parametr zvolený tak, aby splňoval $d(1) = C$. Isoelastická poptávková funkce je taktéž výborná lokální aproximace, nicméně to už neplatí pro účely globální reprezentace, protože poptávka nikdy nedosáhne nuly a naopak poptávka roste do nekonečna, když se cena blíží nule viz obr. 5.4.

Představme si, že prodáváme nějaký produkt za 10 jednotek ceny, a že podobný produkt nabízí za stejnou cenu i konkurence. Pokud cenu zvýšíme na 20 jednotek ceny, pokles poptávky bude významný a zůstanou jen ti nejvěrnější zákazníci. Pokud bychom cenu zvýšili ještě více z 20 jednotek na 21 jednotek, nedojde téměř k žádnému poklesu. Očekáváme tedy největší změny poptávky v závislosti na jednotkovou změnu ceny, když je výchozí cena blízká tržní ceně produktu. V této hodnotě je cenová elasticita nejvyšší.

5.2. VYBRANÉ POPTÁVKOVÉ FUNKCE

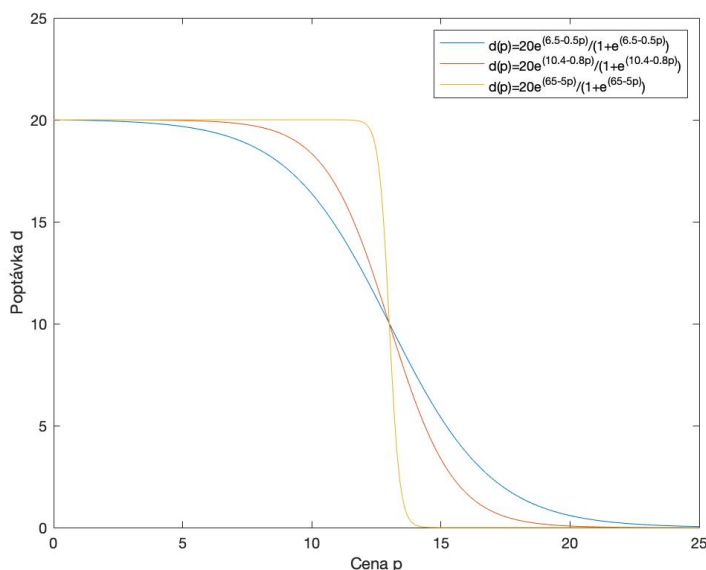


Obrázek 5.4: Isoelastická poptávková funkce

K lepšímu popsání chování zákazníků využijeme logit poptávkovou funkci, která má logistickou distribuci ochoty platit. Předpis pro logit poptávkovou funkci je následující

$$d(p) = \frac{Ce^{-(a+bp)}}{1 + e^{-(a+bp)}},$$

kde $a, b > 0$ a $C > 0$ jsou parametry. C specifikuje celkovou velikost trhu a b specifikuje cenovou senzitivitu, vyšší hodnoty indikují vyšší senzitivitu (nejvyšší v bodě $\hat{p} = -\frac{a}{b}$, bod \hat{p} považujeme za tržní cenu). S rostoucím b se stále více přibližujeme dokonale konkurenčnímu trhu (obr. 5.1). To koneckonců můžeme sledovat i na obr. 5.5, kde vidíme logit poptávkovou funkci pro různé hodnoty b .



Obrázek 5.5: Logit poptávková funkce

6. Aplikace dynamické cenotvorby na dopravní úlohy

V této sekci se budeme soustředit na aplikaci dynamické cenotvorby na dopravní úlohy zmíněné v kapitole 4. Podobnou problematikou se zabývají diplomová a disertační práce [4,5]. My se ovšem na zaměříme místo na maximalizaci zisku na minimalizaci nákladů. Optimalizační modelování bylo inspirováno principy podle [12].

6.1. Dopravní model sklad - zákazník s lineární poptávkou

Upravme model ze sekce 4.1, opět budeme minimalizovat náklady spjaté s transportem zboží. Výrazná změna v modelu spočívá v druhé omezující podmínce, kde $\forall j \in J$ nahrazujeme člen b_j členem $b_j(\bar{c}_j) = \alpha_j - \beta_j \bar{c}_j$.

$$\min z$$

$$z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij},$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq s_i, \quad i \in I,$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq \alpha_j - \beta_j \bar{c}_j, \quad j \in J,$$

$$\bar{c}_j = \frac{\sum_{i \in I} c_{ij}}{|I|}, \quad j \in J,$$

$$c_{ij}^d \leq c_{ij} \leq c_{ij}^h, \quad i \in I, j \in J,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J,$$

kde \bar{c}_j jsou průměrné náklady na transport z uzlů i do příslušného uzlu j . Průměrné ceny nyní zastupují roli proměnných. V tomto modelu přibylo také omezení volby cen c_{ij} a to, že nesmíme překročit dolní c_{ij}^d a horní c_{ij}^h hranice. Volíme $c_{ij}^d = 0,95c_{ij}^p$ a $c_{ij}^h = 1,05c_{ij}^p$, kde c_{ij}^p je původní cena. Model vyřešíme opět pomocí software GAMS, v příloženém kódu můžeme vidět vstupní hodnoty, což jsou kapacity skladů s_i , $i \in I$ a koeficienty α_j , β_j , jež charakterizují poptávkovou funkci v uzlu j . Hodnota minimalizované účelové funkce je $z = 102\,148,8$. V tabulce 6.1 jsou vyčíslena množství přepravovaného zboží a v tabulkách 6.2 a 6.3 jsou uvedeny ceny před a po provedení optimalizačního výpočtu. Zvýšením nebo snížením ceny ovlivňujeme poptávané množství.

6.1. DOPRAVNÍ MODEL SKLAD - ZÁKAZNÍK S LINEÁRNÍ POPTÁVKOU

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
sklad1	50	725	575
sklad2	650	150	0

Tabulka 6.1: Množství přepraveného zboží mezi uzly.

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
sklad1	50	55	45
sklad2	49	49,5	50

Tabulka 6.2: Původní ceny.

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
sklad1	47,5	52,25	42,7
sklad2	46,5	47	53,02

Tabulka 6.3: Optimální ceny.

```

1 Set
2   i / sklad1, sklad2 /
3   j / zakaznik1, zakaznik2, zakaznik3 /;

5 Parameter
6   s(i) 'mnozstvi zasob ve skladu i'
7       / sklad1 1350
8       sklad2 800 /

10  b(j) 'poptavane mnozstvi po produktu zakaznika j'
11     / zakaznik1 700
12     zakaznik2 875
13     zakaznik3 575 /;

15 Table cp(i,j) 'naklady na transport'
16     zakaznik1 zakaznik2 zakaznik3
17     sklad1    50        55        45
18     sklad2    49        49.5      50.5;

20 Parameter alfa(j)
21     / zakaznik1 870
22     zakaznik2 905
23     zakaznik3 650 /,
24     beta(j)
25     / zakaznik1 3.86
26     zakaznik2 3.16
27     zakaznik3 1.92 /;

29 Variable
30   x(i,j) 'prepravovane mnozstvi'
31   z      'celkove naklady';

```

```

33 Positive Variable x,c(i,j);

35 Equation
36     ucelf          'ucelova funkce'
37     zasoby(i)      'omezujici podminka'
38     poptavka(j)    'omezujici podminka'
39     lindem(j)      'linearni poptavkova funkce';

41 ucelf..           z=e= sum((i,j), c(i,j)*x(i,j));

43 zasoby(i)..       sum(j, x(i,j)) =l= s(i);

45 poptavka(j)..     sum(i, x(i,j)) =g= b(j);

47 lindem(j)..       b(j)=e=alfa(j)-beta(j)*sum(i, c(i,j))*0.5;

49 Model transport / all /;
50 c.LO(i,j) = 0.95*cp(i,j); c.UP(i,j) = 1.05*cp(i,j);
51 solve transport using NLP minimizing z;
52 display z.L, x.l, c.l, cp;

```

6.2. Dopravní model sklad - zákazník s isoelastickou poptávkou

V modelu 6.1 nahradíme člen b_j členem $b_j(\bar{c}_j) = \alpha_j \bar{c}_j^{-\beta_j}$, kde parametr β_j je konstantní bodová elasticita.

$$\begin{aligned}
 & \min z \\
 & z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}, \\
 & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq s_i, \quad i \in I, \\
 & \sum_{i \in I} x_{ij} \geq \alpha_j \bar{c}_j^{-\beta_j}, \quad j \in J, \\
 & \bar{c}_j = \frac{\sum_{i \in I} c_{ij}}{|I|}, \quad j \in J, \\
 & c_{ij}^d \leq c_{ij} \leq c_{ij}^h, \quad i \in I, j \in J. \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J,
 \end{aligned}$$

Opět stanovujeme hodnoty cen tak, abychom snížili náklady na přepravu zboží. Hodnota účelové funkce $z = 99\,069,1$.

6.2. DOPRAVNÍ MODEL SKLAD - ZÁKAZNÍK S ISOELASTICKOU POPTÁVKOU

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
sklad1	536,7	0	813,3
sklad2	78,6	721,4	0

Tabulka 6.4: Množství přepraveného zboží mezi uzly.

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
sklad1	50	55	45
sklad2	49	49,5	50

Tabulka 6.5: Původní ceny.

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
sklad1	52,5	57,7	42,7
sklad2	51,45	47,48	53,02

Tabulka 6.6: Optimální ceny.

```

1  Set
2      i / sklad1, sklad2 /
3      j / zakaznik1, zakaznik2, zakaznik3 /;

5  Parameter
6      s(i) 'mnozstvi zasob ve skladu i'
7          / sklad1 1350
8          sklad2 800 /;

10 Table cp(i,j) 'puvodni naklady na transport jednotky zbozi'
11         zakaznik1 zakaznik2 zakaznik3
12     sklad1      50      55      45
13     sklad2      49      49.5    50.5;

15 Parameter alfa(j) 'parametr poptavkove funkce'
16         / zakaznik1 1652
17         zakaznik2 1415
18         zakaznik3 1398 /,
19     beta(j) 'parametr poptavkove funkce'
20         / zakaznik1 0.25
21         zakaznik2 0.17
22         zakaznik3 0.14 /;

24 Variable
25     x(i,j) 'prepravovane mnozstvi'
26     z      'celkove naklady';

28 Positive Variable x,c(i,j),b(j);

30 Equation
31     ucelf      'ucelova funkce'
32     zasoby(i)  'omezujici podminka'

```

```

33     poptavka(j) 'omezujici podminka'
34     lindem(j)   'isoelasticka poptavkova funkce';

36     ucelf..      z =e= sum((i,j), c(i,j)*x(i,j));

38     zasoby(i)..  sum(j, x(i,j)) =l= s(i);

40     poptavka(j).. sum(i, x(i,j)) =g= b(j);

42     lindem(j)..  b(j)=e=alfa(j)*(sum(i, c(i,j))*0.5)**(-beta(j));

44     Model transport / ucelf, zasoby, poptavka, lindem/;
45     c.LO(i,j) = 0.95*cp(i,j); c.UP(i,j) = 1.05*cp(i,j);
46     solve transport using NLP minimizing z;
47     display z.L, x.l, c.l, cp;

```

6.3. Dopravní model sklad - zákazník s logit poptávkou

Pro tento případ je člen b_j nahrazen členem $b_j(\bar{c}_j) = \frac{\gamma_j e^{-(\alpha_j + \beta_j \bar{c}_j)}}{1 + e^{-(\alpha_j + \beta_j \bar{c}_j)}}$

$$\begin{aligned}
 & \min z \\
 & z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}, \\
 & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq s_i, \quad i \in I, \\
 & \sum_{i \in I} x_{ij} \geq \frac{\gamma_j e^{-(\alpha_j + \beta_j \bar{c}_j)}}{1 + e^{-(\alpha_j + \beta_j \bar{c}_j)}}, \quad j \in J, \\
 & \bar{c}_j = \frac{\sum_{i \in I} c_{ij}}{|I|}, \quad j \in J, \\
 & c_{ij}^d \leq c_{ij} \leq c_{ij}^h, \quad i \in I, j \in J. \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J,
 \end{aligned}$$

Hodnota účelové funkce $z = 100\,496,5$.

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
sklad1	798,4	111,7	432,8
sklad2	0	800	0

Tabulka 6.7: Množství přepraveného zboží mezi uzly.

6.3. DOPRAVNÍ MODEL SKLAD - ZÁKAZNÍK S LOGIT POPTÁVKOU

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
sklad1	50	55	45
sklad2	49	49,5	50

Tabulka 6.8: Původní ceny.

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
sklad1	47,5	57,75	42,75
sklad2	51,45	47,02	53,02

Tabulka 6.9: Optimální ceny.

```

1  Set
2      i 'canning plants' / sklad1, sklad2 /
3      j 'markets' / zakaznik1, zakaznik2, zakaznik3 /;

5  Parameter s(i) 'mnozstvi zasob ve skladu i'
6      / sklad1 1350
7      sklad2 800 /;

9  Table cp(i,j) 'puvodni naklady na transport jednotky zbozi'
10      zakaznik1 zakaznik2 zakaznik3
11      sklad1 50 55 45
12      sklad2 49 49.5 50.5;

14 Parameter alfa(j) 'parametr poptavkove funkce'
15      / zakaznik1 -2.08
16      zakaznik2 -1.84
17      zakaznik3 -0.1 /,
18      beta(j) 'parametr poptavkove funkce'
19      / zakaznik1 0.0152
20      zakaznik2 0.0162
21      zakaznik3 0.0095 /
22      gama(j) 'parametr poptavkove funkce'
23      / zakaznik1 1010
24      zakaznik2 1250
25      zakaznik3 1050 /;

27 Variable
28      x(i,j) 'prepravovane mnozstvi'
29      z 'celkove naklady';

31 Positive Variable x,c(i,j),b(j);

33 Equation
34      ucelf 'ucelova funkce'
35      zasoby(i) 'omezujici podminka '
36      poptavka(j) 'omezujici podminka '
37      lindem(j) 'logit poptavkova funkce';

39 ucelf.. z =e= sum((i,j), c(i,j)*x(i,j));

```

```

41 zasoby(i) ..      sum(j , x(i , j)) =l= s(i) ;
43 poptavka(j) ..    sum(i , x(i , j)) =g= b(j) ;
45 lindem(j) ..      b(j)=e=(gama(j)*exp(-alfa(j)-beta(j)*sum(i , c(i , j)) *0.5))
                    *(1+exp(-alfa(j)-beta(j)*sum(i , c(i , j)) *0.5))**(-1);
47 Model transport / ucelf , zasoby , poptavka , lindem / ;
48 c.LO(i , j) = 0.95*cp(i , j) ; c.UP(i , j) = 1.05*cp(i , j) ;
49 solve transport using NLP minimizing z ;
50 display z.L , x.l , c.l , cp ;

```

6.4. Dopravní model továrna - sklad - zákazník s lineární poptávkou

Nyní se přiblížíme více reálnému problému a přidejme závislost lineární poptávky na model 4.2.

$$\begin{aligned}
 & \min z \\
 & z = \sum_{mn \in M} c_{mn} x_{mn}, \\
 & \sum_{k \in K} x_{ki} \leq s_i, \quad i \in I, \\
 & \sum_{i \in I} x_{ki} + \sum_{j \in J} x_{kj} \leq t_k, \quad k \in K, \\
 & \sum_{k \in K} x_{kj} \geq \alpha_j - \beta_j \bar{c}_j, \quad j \in J, \\
 & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq \sum_{k \in K} x_{ki}, \quad i \in I, \\
 & \bar{c}_j = \frac{\sum_{i \in I} c_{mi}}{p}, \quad j \in J, \\
 & c_{mn}^d \leq c_{mn} \leq c_{mn}^h, \quad mn \in M, \\
 & x_{mn} \geq 0, \quad mn \in M,
 \end{aligned}$$

kde \bar{c}_j jsou průměrné náklady pro transport. p je počet všech cest z uzlu k do uzlu j . Princip po zahrnutí dynamické cenotvorby zůstává stále stejný, volbou vhodných hodnot cen ovlivňujeme poptávku zákazníků. Dochází ke zvýšení cen, které vede na snížení poptávky. Hodnota optimalizované účelové funkce $z = 557\,277,1$. V porovnání s modelem 4.2 jsme dosáhli snížení nákladů.

6.4. DOPRAVNÍ MODEL TOVÁRNA - SKLAD - ZÁKAZNÍK S LINEÁRNÍ POPTÁVKOU

	sklad1	sklad2	sklad3
tovarna1	50	200	0
tovarna2	0	0	0
tovarna3	100	0	200

Tabulka 6.10: Množství přepraveného zboží x_{ki} .

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
sklad1	29,8	29,7	90,5
sklad2	153,4	46,6	0
sklad3	29,8	62,6	107,6

Tabulka 6.11: Množství přepraveného zboží x_{ij} .

	zakaznik1	zakaznik2	zakaznik3
tovarna1	0	0	0
tovarna2	68,8	53,3	6,9
tovarna3	0	53,3	3,4

Tabulka 6.12: Množství přepraveného zboží x_{kj} .

```

1 Set k / tovarna1, tovarna2, tovarna3 /
2     i / sklad1, sklad2, sklad3 /
3     j / zakaznik1, zakaznik2, zakaznik3 /;
4 Parameter
5     t(k) 'kapacita tovarny'
6         / tovarna1 250
7           tovarna2 300
8           tovarna3 450/
9     s(i) 'kapacita sklady'
10        / sklad1 150
11          sklad2 200
12          sklad3 200/;
13 Table cp1(k,i) 'puvodni naklady'
14         sklad1  sklad2  sklad3
15     tovarna1    300    270    285
16     tovarna2    279    300    315
17     tovarna3    360    270    285;
18 Table cp2(i,j) 'puvodni naklady'
19         zakaznik1  zakaznik2  zakaznik3
20     sklad1        270        360        330
21     sklad2        300        285        285
22     sklad3        210        300        405;
23 Table cp3(k,j) 'puvodni naklady'
24         zakaznik1  zakaznik2  zakaznik3
25     tovarna1      900        900       1000
26     tovarna2      950        900        950
27     tovarna3      900        850       1100;

```

6. APLIKACE DYNAMICKÉ CENOTVORBY NA DOPRAVNÍ ÚLOHY

```

28 Parameter alfa(j) 'parametr poptavkove funkce'
29           / zakaznik1 550
30           zakaznik2 524
31           zakaznik3 512 /,
32           beta(j) 'parametr poptavkove funkce'
33           / zakaznik1 0.4
34           zakaznik2 0.45
35           zakaznik3 0.47 /;
36 Variable
37     z      'celkove naklady';
38 Positive Variable
39     x1(k,i), x2(i,j), x3(k,j) 'mnozstvi prevezeneho zbozi po hrane ki, resp.
        ij, resp. kj',
40     b(j)      'poptavane mnozstvi',
41     c1(k,i), c2(i,j), c3(k,j) 'naklady',
42     cc(k,j);
43 Equation
44     ucelf      'ucelova funkce'
45     kapacita_sklad(i) 'omezujici podminka'
46     kapacita_tovarna(k) 'omezujici podminka'
47     poptavka(j) 'omezujici podminka'
48     omezeni(i) 'omezujici podminka'
49     lindem(j) 'linearni poptavka'
50     soucet_nakladu_tras11 'scitani nakladu z uzlu k do i'
51     soucet_nakladu_tras12 'scitani nakladu z uzlu k do i'
52     soucet_nakladu_tras13 'scitani nakladu z uzlu k do i'
53     soucet_nakladu_tras21 'scitani nakladu z uzlu k do i'
54     soucet_nakladu_tras22 'scitani nakladu z uzlu k do i'
55     soucet_nakladu_tras23 'scitani nakladu z uzlu k do i'
56     soucet_nakladu_tras31 'scitani nakladu z uzlu k do i'
57     soucet_nakladu_tras32 'scitani nakladu z uzlu k do i'
58     soucet_nakladu_tras33 'scitani nakladu z uzlu k do i';

60 ucelf.. z=e=(sum((k,i), c1(k,i)*x1(k,i)) + sum((i,j), c2(i,j)*x2(i,j)) +
        sum((k,j), c3(k,j)*x3(k,j)));

62 kapacita_sklad(i).. sum(k, x1(k,i)) =l= s(i);
63 kapacita_tovarna(k).. sum(i, x1(k,i))+sum(j, x3(k,j)) =l= t(k);
64 poptavka(j).. sum(k, x3(k,j))=g= b(j);
65 omezeni(i).. sum(j, x2(i,j))=l= sum(k, x1(k,i));
66 lindem(j).. b(j)=e=alfa(j)-beta(j)*(sum(k, cc(k,j))+c3(k,j))
        *((12)**(-1)));

68 soucet_nakladu_tras11.. cc('tovarna1', 'zakaznik1')=e=sum(i, c1('tovarna1',
        i))+sum(i, c2(i, 'zakaznik1')));
69 soucet_nakladu_tras12.. cc('tovarna1', 'zakaznik2')=e=sum(i, c1('tovarna1',
        i))+sum(i, c2(i, 'zakaznik2')));
70 soucet_nakladu_tras13.. cc('tovarna1', 'zakaznik3')=e=sum(i, c1('tovarna1',
        i))+sum(i, c2(i, 'zakaznik3')));
71 soucet_nakladu_tras21.. cc('tovarna2', 'zakaznik1')=e=sum(i, c1('tovarna2',
        i))+sum(i, c2(i, 'zakaznik1')));
72 soucet_nakladu_tras22.. cc('tovarna2', 'zakaznik2')=e=sum(i, c1('tovarna2',
        i))+sum(i, c2(i, 'zakaznik2')));
73 soucet_nakladu_tras23.. cc('tovarna2', 'zakaznik3')=e=sum(i, c1('tovarna2',
        i))+sum(i, c2(i, 'zakaznik3')));

```

6.4. DOPRAVNÍ MODEL TOVÁRNA - SKLAD - ZÁKAZNÍK S LINEÁRNÍ POPTÁVKOU

```
74 soucet_nakladu_tras31..      cc('tovarna3','zakaznik1')=e= sum(i,c1('tovarna3
    ',i))+sum(i,c2(i,'zakaznik1')));
75 soucet_nakladu_tras32..      cc('tovarna3','zakaznik2')=e= sum(i,c1('tovarna3
    ',i))+sum(i,c2(i,'zakaznik2')));
76 soucet_nakladu_tras33..      cc('tovarna3','zakaznik3')=e= sum(i,c1('tovarna3
    ',i))+sum(i,c2(i,'zakaznik3')));

78 Model transport_MIN / all /;
79 c1.LO(k,i) = 0.95*cp1(k,i); c1.UP(k,i) = 1.05*cp1(k,i);
80 c2.LO(i,j) = 0.95*cp2(i,j); c2.UP(i,j) = 1.05*cp2(i,j);
81 c3.LO(k,j) = 0.95*cp3(k,j); c3.UP(k,j) = 1.05*cp3(k,j);
82 solve transport_MIN using NLP minimizing z;
83 display z.L, x1.l,x2.l,x3.l,c1.l,c2.l,c3.l;
```

7. Aplikace na větší množství dat

7.1. Dopravní model přeprava zboží továrna - sklad - zákazník

Nyní modifikujeme úlohu 4.2. Vzhledem k tomu, že pracujeme s větším množstvím dat je nutné využít matici incidence A , viz kapitola 3. Důležité je zdůraznit, že množina I tentokrát reprezentuje všechny vrcholy (továrny, zákazníky, sklady/přepravní uzly) a množina J představuje hrany mezi těmito vrcholy. Vektor b_i obsahuje záporné hodnoty pro poptávané množství, kladné hodnoty pro kapacity továren a nulové hodnoty pro přepravní uzly. Jako inspirace pro generování dat posloužila diplomové práce [4]. Úlohu řešíme pro data o počtu 22 vrcholů (10 zákazníků, 3 továren a 9 skladů/přepravních uzlů).

$$\min z$$

$$z = \sum_{j \in J} c_j x_j,$$

$$\sum_{j \in J} A_{ij} x_j \leq b_i \quad i \in I,$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J,$$

Opětovně řešíme pomocí softwaru GAMS. Hodnota minimalizované účelové funkce je $z = 3\,192,2$. Přepravovaná množství x_j po hranách j :

2-1	26.000,	4-2	47.000,	6-3	15.000,	8-4	64.000,
22-5	13.000,	11-6	38.000,	20-7	5.000,	21-7	22.000,
18-8	75.000,	1-9	12.000,	16-10	18.000,	13-12	25.000,
11-16	18.000,	12-18	75.000,	6-20	5.000,	22-21	22.000,
13-22	35.000.						

Tabulka 7.1: Přepravovaná množství x_j po hranách j

7.2. Dopravní model přeprava zboží továrna - sklad - zákazník s lineární poptávkou

Tak jako v předchozích modelech podléhajících dynamickému oceňování, zaměníme hodnotu poptávaného množství ve vrcholech, které reprezentují zákazníky, poptávkovou funkcí. I_1 je množina zákazníků a I_2 množina továren a skladů.

$$\min z$$

$$z = \sum_{j \in J} c_j x_j,$$

$$\sum_{j \in J} A_{ij} x_j \leq -(\alpha_i + \beta_i \bar{c}_i), \quad i \in I_1,$$

$$\sum_{j \in J} A_{ij} x_j \leq b_i \quad i \in I_2,$$

$$c_j^d \leq c_j \leq c_j^h, \quad j \in J.$$

$$\bar{c}_i = \frac{\sum_{j \in J} c_j}{p}, \quad i \in I,$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J,$$

kde \bar{c}_i jsou průměrné náklady na transport do uzlu i . Protože pro poptávané množství v uzlu platí, že musí být záporné, je před poptávkovými funkcemi znaménko minus. Volby cen c_j jsou omezeny dolní c_j^d a horní c_j^h hranicí. Volíme $c_j^d = 0,99c_j^p$ a $c_j^h = 1,01c_j^p$, kde c_j^p představuje původní cenu. $z = 2\,871,2$.

2-1	19.125,	4-2	24.743,	5-3	16.423,	6-3	10.786,
22-5	41.478,	11-6	27.839,	21-7	19.801,	4-8	10.885,
1-9	13.252,	16-10	28.161,	12-13	1.279,	11-16	28.161,
22-21	19.801,	13-22	61.279.				

Tabulka 7.2: Převážovaná množství x_j po hranách j

1	86.015,	2	67.549,	3	57.722,	4	94.091,
5	41.003,	6	67.891,	7	78.156,	8	86.743,
9	124.355,	10	85.534.				

Tabulka 7.3: Původní ceny.

1	86.856,	2	68.216,	3	58.286,	4	93.374,
5	41.412,	6	68.561,	7	78.928,	8	87.608,
9	125.591,	10	86.382.				

Tabulka 7.4: Optimální ceny.

8. Závěr

Cílem bakalářské práce bylo zkoumání a aplikování dynamického oceňování na logistické úlohy a snížení nákladů spojených s přepravou. Toho jsme dosahovali manipulací ceny, zvýšení ceny způsobuje snížení poptávky. Pozitivní přínos tohoto konceptu můžeme nalézt například v ekologii, kde snížení poptávky vyústí v menší potřebu dopravovat a tím snížit i ekologickou zátěž. V kapitole 4 jsme si představili dva logistické modely. Záměrem těchto modelů bylo minimalizovat náklady při přepravě zboží od zdroje k zákazníkům s využitím a bez využití přepravních uzlů. Teorie dynamické cenotvorby byla představena v kapitole 5. V následující kapitole 6 jsme aplikovali dynamickou cenotvorbu na logistické modely. V tabulce 8.1 jsou zapsány optimální výstupy z výpočtů. Skutečně jsme s aplikací dynamické cenotvorby dosáhli snížení nákladů.

Určitá poptávka	Lineární p.	Isoelastická p.	Logit p.
[4.1] 104 600	[6.1] 102 148,8	[6.2] 101 239,4	[6.3] 100 496,5
[4.2] 596 350	[6.4] 557 277,1		

Tabulka 8.1: Hodnoty minimalizovaných účelových funkcí.

Pro simulaci reálného problému jsme zvolil postup náhodného vygenerování rozsáhlejší sítě. Při aplikaci na větší množství dat bylo nutné upustit od tak názorného vyjádření omezujících podmínek, které bylo použito v předchozích modelech. Příhodné bylo využít elegantnějšího zápisu s maticí incidence. Opět jsme řešili dva modely s dynamickou cenotvorbou (s lineární poptávkou) a bez dynamické cenotvorby. I v tomto případě jsme dosáhli lepších výsledků pro model s dynamickou cenotvorbou viz 8.2.

Určitá poptávka	Lineární poptávka
[7.1] 3 192,2	[7.2] 2 871,2

Tabulka 8.2: Hodnoty minimalizovaných účelových funkcí.

V modelu bez cenotvorby je rozhodovacím kritériem pouze převezené množství. V modelu s cenotvorbou se ale zaměřujeme na stanovování cen. To, jak určíme cenu ovlivní poptávku, které čelíme. Touto manipulací jsme schopni dosáhnout snížení nákladů.

Předpokládá se rovněž využití výsledků této práce v rámci projektu “Výpočtové simulace pro efektivní nízkoemisní energetiku“ reg. č.: CZ.02.1.01/0.0/0.0/16_026/0008392 financovaného z OP VVV, Prioritní osy 1: Posilování kapacit pro kvalitní výzkum a při další spolupráci s EÚ a ÚPI na FSI.

Literatura

- [1] ANDRÉASSON, N, EVGRAFOV, A. and PATRIKSSON, M.: *An Introduction to Optimization: Foundations and Fundamental Algorithms*, 2005, 350 p. ISBN 978-91-44-06077-4
- [2] DEMEL, Jiří. *Grafy a jejich aplikace*. Vyd. 2., (Vlastním nákladem 1.). Libčice nad Vltavou: J. Demel, 2015, 258 s. ISBN 978-80-260-7684-1.
- [3] GHIANI, Gianpaolo, LAPORTE, Gilbert and MUSMANN, Roberto: *Introduction to Logistics Systems Planning and Control*, John Wiley & Sons Ltd, 2004, 360 p. ISBN 978-04-70-84916-3
- [4] HRABEC, D.: *Modely stochastického programování pro inženýrský návrh*. Diplomová práce, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011, 70 s.
- [5] HRABEC, D.: *Mathematical Programs for Dynamic Pricing - Demand Based Management*. Disertační práce, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016, 119 s.
- [6] KLAPKA, J., DVOŘÁK, J. a POPELA, P. : *Metody operačního výzkumu*, Vyd. 2. Brno: VUTIUM, 2001. ISBN 80-214-1839-7.
- [7] NASH, S. and SOFER, A.: *Linear and nonlinear programming*, McGraw-Hill, 1995, 692 p. ISBN 978-0-89871-661-0.
- [8] OSMAN, Güler. *Foundations of Optimization*. New York, Springer-Verlag, 2010, XVIII, 442 p. ISBN 978-0-387-34431-7.
- [9] PHILLIPS, Robert L. *Pricing and Revenue Optimization*. Stanford, CA: Stanford University Press, 2005, 368 p. ISBN 978-08-04-74698-4.
- [10] RAMA MURTHY, P.: *Operations Research. 2nd Edition, New Age International Publication, 2007, 720 p, ISBN 978-81-224-2944-2*
- [11] RARDIN, R. L. *Optimization in Operations Research*. 2nd ed. Hoboken, New Jersey: Pearson, 2015., 919 p. ISBN 978-00-23-98415-0.
- [12] WILLIAMS, H. P.: *Model building in mathematical programming*. 5th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons. 2013, 432 p. ISBN 978-1-118-44333-0.

9. Seznam příloh

Spolu s prací je odevzdáván i soubor Prilohy.zip, který obsahuje následující soubory:

[4.1] Model_4_1.gms

[4.2] Model_4_2.gms

[6.1] Model_6_1.gms

[6.2] Model_6_2.gms

[6.3] Model_6_3.gms

[6.4] Model_6_4.gms

[7.1] Model_7_1.gms

[7.2] Model_7_2.gms

Data pro modely [7.1,7.2] Generator.gms