P S E U D O I N V E R Z N Í   M A T I C E

metoda nejmenších čtverců

Ladislav Skula

Brno, leden 2015

Obsah

1 Úvod

Tento příspěvek má sloužit jako doplněk k látce z lineární algebry přednášené v oboru matematického inženýřství na VUT. Motivací je následující problematika často potřebná v mnoha aplikacích matematiky ([An],[BG],[DMP],[Sea],[Si]) :

Jestliže máme nějaký systém lineárních rovnic (koeficienty jsou reálná čísla), který máme řešit, pak pro množinu $\mathcal{R}$ všech řešení tohoto systému rovnic platí jedna z následujících možností:

(a) množina $\mathcal{R}$ je jednoprvková (systém rovnic má právě jedno řešení),

(b) množina $\mathcal{R}$ je nekonečná (systém rovnic má nekonečně mnoho řešení),

(c) množina $\mathcal{R}$ je prázdná množina, t.j. $\mathcal{R} = \emptyset$ (systém rovnic nemá žádné řešení).

Velmi často v aplikacích matematiky je ale potřeba mít nějaké "řešení" systému lineárních rovnic. Proto je nutno v případě (b) z množiny řešení vybrat jedno v jakémsi smyslu "*význačné řešení*" a to používat. V případě, že systém nemá řešení (případ (c)), musí se nějaká n- tice reálných čísel (n je počet neznámých) určit a brát jako "*významné řešení*" soustavy.

Tento výběr řešení však nemůže být libovolný, musí nějakým způsobům odpovídat potřebám aplikační oblasti. V praxi takových možností se vyskytuje celá řada, ale nejvýznamnější a nejčastěji požívaná metoda je tzv. metoda nejmenších čtverců, která je založena na pojmu pseudoinverzní matice. Tuto metodu se pokusíme v tomto semináři vysvětlit.

Budeme předpokládat znalosti lineární algebry v rozsahu přednášky v prvním semestru z této oblasti ve studiu matematického inženýrství prezentované ve skriptech [KS]. Tyto znalosti jenom rozšíříme o skutečnost, že uvedené výsledky platí nejenom pro reálná čísla, ale též pro čísla komplexní tvořící těleso $\mathbb{C}$ (dokonce pro lineární algebru nad libovolným komutativním tělesem).

Tudíž prvky matice A budou komplexní čísla, transponovanou matici matice A budeme značit symbolem A^T a symbolem $\overline{A}$ budeme označovat matici vzniklou z matice A nahrazením prvků matice A, což jsou komplexní čísla, čísly komplexně sdruženými. V teorii matic s komplexními čísly se zavádí tzv. hermitovský operátor značený symbolem * definovaný pro matici A typu $m \times n$ vztahem:

$$\boxed{A^* = (\overline{A})^T} \, .$$

Zřejmě matice A^* je typu $n \times m$ a pro matice A, B typů vhodného pro násobení máme:

$$\boxed{(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*,\ (A^*)^* = \mathrm{A}} \, .$$

Také v případě, že matice A,B jsou stejného typu platí identita:

$$\boxed{(A \ + \ B)^* = B^* \ + \ A^*} \, .$$

Hodnost matice A budeme označovat symbolem r(A) (z angličtiny *the rank*). Zřejmě $\mathrm{r}(A) \ = \ \mathrm{r}(A^*)$.

Poznamenejme, že partie, která pojednává o psedoinverzní matici a metodě nejmenších čtverců, je velmi dobře vysvětlena v knize [PO] v kapitole 5 a 8. V této knize každá kapitola je doplněna odstavcem MATLAB Moment, ve kterém je popsáno použití systému MATLAB na výpočty uvedených pojmů.

2 Některé pojmy a tvrzení z lineární algebry.

V tomto odstavci uvedeme některé výsledky z lineární algebry, které budou v dalším používány:

2.1 Hodnost součinu matic

Pro hodnost součinu matic vhodných typů uvádíme následující nerovnost:

Věta 1. *Nechť A je matice typu $m \times n$, B je matice typu $n \times p$. Pak platí:*

$$\boxed{\mathrm{r}(A \cdot B) \ \leq \min(\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B))}\ .$$

Důkaz. Nechť U, V je množina všech p-rozměrných sloupcových vektorů X (tj.matic typu $p{\times}1$), pro které platí:

$$B \cdot X \ = \ 0_n, \text{ resp. } A \cdot B \cdot X \ = \ 0_m.$$

Pak U, V jsou vektorové prostory řešení homogenních lineárních rovnic

$$B \cdot X \ = \ 0_n, \text{ resp. } A \cdot B \cdot X \ = \ 0_m,$$

odkud plyne

$$\dim U \ = \ p \ - \ \mathrm{r}(B), \ \dim V \ = \ p \ - \mathrm{r}(A \cdot B).$$

Jelikož $U \subseteq V$, máme

$$\mathrm{r}(A \cdot B) \ \leq \mathrm{r}(B).$$

Odtud pak dostaneme

$$\mathrm{r}(A \cdot B) \ = \ \mathrm{r}((A \cdot B)^*) \ = \ \mathrm{r}(B^* \cdot A^*) \ \leq \mathrm{r}(A^*) \ = \ \mathrm{r}(A).$$

□

Z této věty obdržíme následující tvrzení:

Tvrzení 2. *Násobením (zleva nebo zprava) matice regulární maticí (vhodného řádu) se nemění hodnost matice.*

Důkaz. Nechť A je matice typu $m \times n$ a P je regulární matice řádu m. Položme $B \ = \ P \cdot A$. Pak $A \ = \ P^{-1} \cdot B$ a z nerovnosti ve větě 1 dostáváme:

$$\mathrm{r}(B) \ \leq \ \mathrm{r}(A) \ \leq \ \mathrm{r}(B),$$

odkud plyne r(A) $=$ r(B). Podobně se dokáže tvrzení pro násobení regulární maticí zprava. □

Tvrzení 3. *Pro každou matici M platí:*

$$r(M^* \cdot M) \ = \ r(M).$$

Důkaz. Vzhledem k větě 1 stačí dokázat r$(M^* \cdot M) \geq$ r(M). Nechť M je matice typu $m \times n$. Buďte:

U,V množiny všech n-rozměrných sloupcových vektorů X (tj. matic typu $n \times 1$) s vlastností $MX = O_m$, resp. $M^*MX = 0_n$.

Pak U, V jsou vektorové prostory řešení homogenních lineárních rovnic

$$M \cdot X \;=\; 0_m, \text{ resp. } M^* \cdot M \cdot X \;=\; 0_n,$$

odkud plyne

$$\dim U \;=\; n \;-\; \mathrm{r}(M), \; \dim V \;=\; n \; - \mathrm{r}(M^*M).$$

Buď $X \in V$ a nechť Y = MX,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Máme

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i \overline{y}_i = Y^*Y = (MX)^*MX = X^*M^*MX = 0,$$

Tudíž $y_1 = \ldots y_m = 0$ a $MX = 0_m$ a vektor X patří do vektorového prostoru

U, odkud plyne $V \subseteq U$, dim $V \leq$ dim U, tudíž r$(M^*M) \geq$ r(M). $\square$

Poznámka. Jelikož pro každou matici M máme r(M) = r(M^*), můžeme tvrzení 3 formulovat následovně:

Pro každou matici M mají matice $M, M^*, M \cdot M^*, M^* \cdot M$ stejnou hodnost.

2.2 Blokové matice

Definice 4. Uvažujme obecný tvar rozdělení matice A typu $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kl} \end{pmatrix},$$

kde pro $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$ je A_{ij} podmatice matice A typu $m_i \times n_j$ $(i, j, k, l \in \mathbb{N})$. Máme pak $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$, $\sum_{j=1}^{l} n_j = n$. Matice A_{ij} se nazývá *blok matice* A, matice A v uvedeném rozdělení se nazývá *bloková matice blokového typu* $k \times l$. Podobně maticové názvy používáme pro blokovou matici s přívlastkem *blokový* (např. $(A_{i1}, \dots, A_{ij})$ se nazývá *i-tý blokový řádek*). Počet řádků m_i matice A_{ij} je stejný pro každé $1 \leq j \leq l$ a stejně počet sloupců n_j matice A_{ij} je stejný pro každé $1 \leq i \leq l$.

Příklad 5. Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 9 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Matice A je matice typu 4×4 (neboli čtvercová matice řádu 4). Můžeme ji považovat za blokovou matici:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix},$$

kde

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ H = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Matice E, F, G, H jsou bloky matice A, která má blokový typ 2×2. Matici A můžeme také považovat za blokovou matici blokového typu 2×3:

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix},$$

kde

$$B_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 9 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \ B_{12} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ B_{13} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},\ B_{22} = \begin{pmatrix} -7 \end{pmatrix},\ B_{2,3} = \begin{pmatrix} 8 \end{pmatrix}.$$

Snadno se dokáží následující věty 6 – 8:

Věta 6. *Nechť A je bloková matice blokového typu $k \times l$:*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \dots & A_{kl} \end{pmatrix}.$$

Pak pro komplexní číslo c máme

$$cA = \begin{pmatrix} cA_{11} & \dots & cA_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ cA_{k1} & \dots & cA_{kl} \end{pmatrix}.$$

Matice A^T, A^* mohou být uvažovány jako blokové matice blokového typu $l \times k$:

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \dots & A_{kl} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \dots & A_{k1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1l}^T & \dots & A_{kl}^T \end{pmatrix},$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \dots & A_{kl} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & \dots & A_{k1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1l}^* & \dots & A_{kl}^* \end{pmatrix}.$$

Věta 7. *Nechť A,B jsou blokové matice stejného typu a stejného blokového typu $k \times l$,*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \dots & A_{kl} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{k1} & \dots & B_{kl} \end{pmatrix},$$

kde pro $1 \le i \le k,\ 1 \le j \le l$ jsou podmatice A_{ij}, B_{ij} stejného typu. Pak

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \dots & A_{1l} + B_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} + B_{k1} & \dots & A_{kl} + B_{kl} \end{pmatrix}.$$

Věta 8. *Nechť A je bloková matice typu $m \times n$ a blokového typu $q \times r$ a B je bloková matice typu $n \times p$ a blokového typu $r \times s$,*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & \dots & A_{qr} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & \dots & B_{rs} \end{pmatrix},$$

kde pro $1 \le i \le q, 1 \le j \le r, 1 \le k \le s$, matice A_{ij} je typu $m_i \times n_j$ a matice B_{jk} je typu $n_j \times p_k$. Pak

$$A \cdot B \ = \ C \ = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{q1} & \dots & C_{qs} \end{pmatrix},$$

kde pro $1 \le i \le q, 1 \le k \le s$ máme

$$C_{ik} \ = \ \sum_{j=1}^{r} A_{ij} \cdot B_{jk}.$$

Příklad 9. a) Nechť U,V jsou čtvercové matice řádu n a W je bloková matice s blokovým řádem 2:

$$W = \begin{pmatrix} U & V \\ V & -U \end{pmatrix}.$$

Pak

$$W^2 = \begin{pmatrix} U^2 + V^2 & UV - VU \\ VU - UV & U^2 + V^2 \end{pmatrix}.$$

b) Nechť A je čtvercová matice řádu n, B je matice typu $n \times m, C$ je čtvercová matice řádu m a 0 je nulová matice typu $m \times n$. Pak pro blokovou čtvercovou matici

$$W = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

blokového řádu 2 máme:

$$\det(W) \ = \ \det(A) \cdot \det(C).$$

Pojem blokové matice využijeme pro důkaz "*Sylvesterova zákona nulity*" týkajícího se hodnosti součinu matic:

Věta 10. *Sylvesterův zákon nulity - Sylvester's Law of Nullity.* *Nechť A je matice typu m×n, B je matice typu n × p. Pak platí:*

$$\boxed{\mathrm{r}(A)\ +\ \mathrm{r}(B)\ -\ n\ \leq\ \mathrm{r}(A\cdot B)}\ .$$

Důkaz. Jestliže A nebo B jsou nulové matice, pak tvrzení je zřejmé. Předpokládejme, že matice A,B jsou nenulové a označme r hodnost matice A (r je pak přirozené číslo).

I. Nerovnost dokážeme nejdříve pro případ blokového vyjádření matice A a matice B:

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

kde nulové matice v blokovém vyjádření matice A mají vhodný typ nebo se v tomto vyjádření nevyskytují. Matice B_{11} je čtvercová řádu r a ostatní matice B_{ij} jsou vhodného typu nebo se ve vyjádření vůbec nevyskytují. Matice I_r značí matici jednotkovou řádu r. Nechť $C = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \end{pmatrix}$. Pak $A \cdot B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$. V případě, že C je nenulová matice, nechť $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_s$ $(s \in \mathbb{N})$ je maximální systém lineárně nezávislých řádků matice C, tudíž $s =$
$= \mathrm{r}(C) = \mathrm{r}(A \cdot B)$. V případě, že matice $\begin{pmatrix} B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ je nenulová existuje maximální systém $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_t$ $(t \in \mathbb{N})$ lineárně nezávislých řádků matice $\begin{pmatrix} B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ tak, že $\{\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_s, \mathbf{s}_1, \ldots \mathbf{s}_t\}$ je maximální systém lineárně nezávislých řádků matice B. Odtud plyne $s + t = \mathrm{r}(B),\ t \leq n - r$. Jelikož $s = \mathrm{r}(A \cdot B)$, máme

$$\mathrm{r}(A \cdot B) = \mathrm{r}(B) - t \geq \mathrm{r}(B) + r - n = \mathrm{r}(B) + \mathrm{r}(A) - n.$$

Triviální případy, které byly vynechány, se snadno podobně dokáží.

II. V obecném případě existují elementární řádkové a sloupcové transformace matice A, které převádí matici A na blokovou matici $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ typu $m \times n$.

Tento převod se dá vyjádřit vynásobením matice A zleva a zprava regulárními maticemi P,Q řádů m,n. Tudíž

$$P \cdot A \cdot Q \;=\; \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Platí úmluva o typech nulových matic.) Podle tvrzení 2 máme

$$\mathrm{r}(A \cdot B) \;=\; \mathrm{r}((P \cdot A \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot B)),\ \mathrm{r}(A) \;=\; \mathrm{r}(P \cdot A \cdot Q),\ \mathrm{r}(B) \;=\; \mathrm{r}(Q^{-1} \cdot B).$$

Pro matice $P \cdot A \cdot Q$ a $Q^{-1} \cdot B$ platí podle I věta 10, tudíž také platí pro matice A,B. □

2.3 Inverzní matice

Připomeneme jen stručně pojem inverzní matice.

Definice 11. Buď A čtvercová matice řádu n. Čtvercová matice X řádu n se nazývá *inverzní matice matice A,* jestliže platí:

$$\boxed{X \cdot A \;=\; I_n \;=\; A \cdot X}\ .$$

Symbolem I_n budeme značit jednotkovou matici řádu n. Tedy

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro existenci a jednoznačnost inverzní matice platí následující věta:

Věta 12. *Nechť A je čtvercová matice. Pak matice A má inverzní matici, právě když matice A je regulární, tj. det(A) $\neq 0$. V tomto případě je inverzní matice jednoznačně určena a pro matice X, Y vhodných typů platí:*

$$A \cdot X \;=\; A \cdot Y \Longrightarrow X \;=\; Y,$$

$$X \cdot A \;=\; Y \cdot A \Longrightarrow X \;=\; Y.$$

Inverzní matice X regulární matice A se označuje symbolem A^{-1}.

Další věta nám říká, že inverzní operátor pro regulární matice a hermitovský operátor jsou zaměnitelné:

Věta 13. *Pro regulární matici A platí:*

$$(A^*)^{-1} \;=\; (A^{-1})^*.$$

Důkaz. Je-li m řád matice A, máme $(A^*)^{-1} \cdot A^* \;=\; I_m$, odkud dostáváme aplikací hermitovského operátoru na součin matic
$A\cdot\,((A^*)^{-1})^* \;= I_m$, z čehož plyne podle věty 12

$$((A^*)^{-1})^* \;=\; A^{-1} \text{ a tedy } (A^*)^{-1} \;= (A^{-1})^*.$$

□

2.4 Permutační matice

Důležitým prostředkem v teorii matic je pojem permutační matice, která je definována následovně:

Definice 14. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a π je permutace množiny $\{1,\ldots,n\}$ (tj. bijekce této množiny na sebe). Pro přirozené číslo $1 \le j \le n$ položme

$$E_j \;=\; (0,\ldots,0,1,0,\ldots 0),$$

kde 1 je na j-tém místě a na ostatních místech vektoru E_j je 0. Permutační matice řádu n je matice

$$P \;=\; P_\pi \;=\; \begin{pmatrix} E_{\pi(1)} \\ E_{\pi(2)} \\ \vdots \\ E_{\pi(n)} \end{pmatrix}.$$

Tudíž pro $P = (p_{ij}),\; 1 \le i,j \le n$ máme

$$p_{ij} \;= \begin{cases} 1, & \text{jestliže} \quad \pi(i) = j, \\ 0, & \text{jestliže} \quad \pi(i) \neq j. \end{cases}$$

Zřejmě každá permutační matice je regulární.

Odtud můžme odvodit následující větu:

Věta 15. *Nechť* $n \in \mathbb{N}$ *a* φ, ψ, χ *jsou permutace množiny* $\{1, \ldots, n\}$*, přičemž* $\chi \;=\; \psi\varphi$*. Pak platí:*

$$P_\varphi \cdot P_\psi \;=\; P_\chi \;=\; P_{\psi\varphi}.$$

Důkaz. Nechť

$$P_\varphi \;=\; (a_{ij}),\; P_\psi \;=\; (b_{ij}),\; P_\chi \;=\; (c_{ij}),\; P_\varphi \cdot P_\psi \;=\; (d_{ij}).$$

Pak

$$a_{ij} \;=\begin{cases} 1, & \text{jestliže} \quad \varphi(i) = j, \\ 0, & \text{jestliže} \quad \varphi(i) \neq j, \end{cases}$$

$$b_{ij} \;=\begin{cases} 1, & \text{jestliže} \quad \psi(i) = j, \\ 0, & \text{jestliže} \quad \psi(i) \neq j, \end{cases}$$

$$c_{ij} \;=\begin{cases} 1, & \text{jestliže} \quad \chi(i) = j, \\ 0, & \text{jestliže} \quad \chi(i) \neq j. \end{cases}$$

Pro $1 \leq i, j \leq n$ máme

$$d_{ij} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \;=\; a_{i\varphi(i)} \cdot b_{\varphi(i)j} \;=\; b_{\varphi(i)j}.$$

Jelikož

$$b_{\varphi(ij} \;=\begin{cases} 1, & \text{jestliže} \quad \psi(\varphi(i)) = j, \\ 0, & \text{jestliže} \quad \psi(\varphi(i)) \neq j, \end{cases}$$

máme

$$b_{\varphi(i)j} \;=\begin{cases} 1, & \text{jestliže} \quad \chi(i) = j, \\ 0, & \text{jestliže} \quad \chi(i) \neq j \end{cases}$$

a tedy $d_{ij} \;=\; c_{ij}$. □

Z věty 15 plyne snadno následující doplněk:

Doplněk. *Nechť* n *je přirozené číslo,* σ, ε *buďte permutace na množině* $\{1, \ldots, n\}$ *a* ε *je identická permutace. Pak platí:*

$$(P_\sigma)^{-1} \;=\; P_{\sigma^{-1}},\; P_\varepsilon \;=\; I_n.$$

Věta 16. *Nechť n,v jsou přirozená čísla a π je permutace množiny $\{1,\dots,n\}$. Nechť M je matice typu $n \times v$ a N je matice typu $v \times n$. Pak matice*

$$P_\pi \cdot M \quad (N \cdot P_\pi)$$

je matice M (N), ve které řádky (sloupce) jsou permutovány permutací π (π^{-1}).

(Přesněji řečeno: indexy řádků (sloupců) jsou permutovány.)

Důkaz. Jelikož pro komplexní čísla $x_1,\dots,x_n$ platí:

$$P_\pi \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ x_{\pi(2)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}$$

a také

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot P_\pi \;=\; (x_{\pi^{-1}(1)}, x_{\pi^{-1}(2)} \dots, x_{\pi^{-1}(n)}),$$

máme dokázanou větu. $\square$

Položíme-li pro přírozené číslo $1 \leq j \leq n$

$$F_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde 1 je na j-tém místě a na ostatních místech vektoru F_j jsou nuly, pak maticie

$$Q \;=\; Q_\pi \;=\; \begin{pmatrix} F_{\pi(1)} & \dots & F_{\pi(n)} \end{pmatrix}$$

je jednotková matice, ve které permutujeme sloupce permutací π. Jelikož $Q_{\pi^{-1}} \;=\; P_\pi$, máme $N \cdot P_\pi \;=\; N \cdot Q_{\pi^{-1}}$. Větu 16 můžeme vyjádřit následovně:

(a) *Jestliže permutujeme řádky matice M typu $n \times v$ permutací π, dostaneme matici M vynásobenou zleva jednotkovou maticí I_n řádu n, ve které permutujeme řádky permutací π.*

(b) *Jestliže permutujeme sloupce matice M typu $v \times n$ permutací π, dostaneme matici M vynásobenou zprava jednotkovou maticí I_n řádu n, ve které permutujeme sloupce permutací π.*

3 Inverzní matice zleva a zprava

Našim úkolem nyní bude studovat otázku, jak zmírnit požadavky v definici inverzní matice, abychom dostali širší okruh matic s novým pojmem inverze. Budeme studovat nejdříve následující přirozené zobecnění inverze:

Definice 17. Nechť A je matice typu $m \times n$ a nechť B (C) jsou matice typu $n \times m$. Matice B (C) se nazývá *inverzní matice zprava (zleva) matice A,* jestliže platí:

$$\boxed{A \cdot B \ = \ I_m \ \ (C \cdot A \ = \ I_n)} \ .$$

Vyšetříme nyní otázku, pro které matice existují inverze zprava a zleva. Za tím účelem si zavedeme následující pojem, který bude též užitečný pro další problematiku:

Definice 18. Řekneme, že *matice A typu $m \times n$ má úplnou řádkovou hodnost,* jestliže r(A) $= m$, tj. počet řádků matice A je roven její hodnosti.

Jestliže r(A) $=$ n, tj. počet sloupců matice A je roven její hodnosti, řekneme, že *matice A má úplnou sloupcovou hodnost.*

Věta 19. *Pro matici A jsou následující výroky ekvivalentní:*

(a) *matice A má inverzi zprava,*

(b) *matice A má úplnou řádkovou hodnost,*

(c) *matice $A \cdot A^*$ je regulární.*

Důkaz. Nechť A je typu $m \times n$.

I. Předpokládejme, že platí (a) a matice B je inverzní matice zprava matice A. Pak $A \cdot B = I_m$. Z věty 1 plyne

$$m = \mathrm{r}(A \cdot B) \leq \mathrm{r}(A) \leq m.$$

Odtud dostáváme $m = \mathrm{r}(\ A)$, tudíž matice A má úplnou řádkovou hodnost.

II. Nechť platí (b), tedy $\mathrm{r}(\ A) = m$. Pak podle poznámky za tvrzením 3 máme

$$\mathrm{r}(A \cdot A^*) = \mathrm{r}(A) = m,$$

tudíž matice $A \cdot A^*$ je regulární.

III. Jestliže matice $A \cdot A^*$ je regulární, položíme $A^* \cdot (A \cdot A^*)^{-1} =$ $=$ B. Pak $A \cdot B = I_m$, tudíž B je inverze zprava matice A. Platí výrok (a). □

Analogická věta platí pro matice, které mají inverzi zleva:

Věta 20. *Pro matici A jsou následující výroky ekvivalentní:*

(a) *matice A má inverzi zleva,*

(b) *matice A má úplnou sloupcovou hodnost,*

(c) *matice $A^* \cdot A$ je regulární.*

Důkaz je analogický jako důkaz věty 19. □

V další části tohoto odstavce udáme popis množiny všech inverzí zprava pro matice s úplnou řádkovou hodností a množiny všech inverzí zleva pro matice s úplnou sloupcovou hodností.

Jestliže matice A je regulární řádu m , pak má právě jednu inverzi zprava a právě jednu inverzi zleva a tyto inverze se rovnají a rovnají se matici A^{-1}. Jestliže matice A je čtvercová a singulární, pak nemá úplnou řádkovou hodnost a také nemá úplnou sloupcovou hodnost, tudíž matice A nemá žádnou inverzi zprava a nemá žádnou inverzi zleva. Pro popis množiny všech inverzí zprava resp. zleva můžeme se tudíž omezit na matice typu $m \times n, m < n$ s úplnou řádkovou hodností pro případ inverze zprava a pro případ inverze zleva na matice typu $n \times m, m < n$ s úplnou sloupcovou hodností.

Předpokládejme nyní, že A je matice typu $m \times n, m < n$, která má úplnou řádkovou hodnost. Jelikož r(A) $= m$, existuje podle věty 16 permutace π množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že sloupce matice A jsou permutovány permutací π^{-1} a matice

$$A \cdot P_\pi = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix},$$

kde A_1 je regulární matice řádu m a A_2 je matice typu $m \times (n-m)$. Matici P_π vyjádříme jako blokovou matici

$$P_\pi = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix},$$

kde P_1 je matice typu $n \times m$ a P_2 je matice typu $n \times (n-m)$.

Můžeme nyní vyslovit větu:

Věta 21. *Nechť platí výše uvedené předpoklady a označení. Pak množina všech inverzních matic zprava matice A je rovna množině všech matic B typu $n \times m$ tvaru*

$$B \;=\; P_1 \cdot A_1^{-1} \;+\; (P_2 \;-\; P_1 \cdot A_1^{-1} \cdot A_2) \cdot C,$$

kde C je matice typu $(n-m) \times m$.

Důkaz. I. Předpokládejme, že matice B je uvedeného tvaru a pro stručnost položme

$$D = \begin{pmatrix} A_1^{-1} - A_1^{-1} \cdot A_2 \cdot C \\ C \end{pmatrix}.$$

Pak

$$B = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} \cdot D = P_\pi \cdot D,$$

odkud plyne

$$A \cdot B = A \cdot P_\pi \cdot D = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1^{-1} - A_1^{-1} \cdot A_2 \cdot C \\ C \end{pmatrix} = I_m,$$

tudíž matice B je inverzí zprava matice A.

II. Předpokládejme, že matice B typu $n \times m$ je inverzí zprava matice A. Pak $A \cdot B = I_m$. Nechť M je čtvercová matice řádu m a C je matice typu $(n-m) \times m$, přičemž platí:

$$(P_\pi)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} M \\ C \end{pmatrix}.$$

Pak

$$I_m = A \cdot P_\pi \cdot (P_\pi)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ C \end{pmatrix} = A_1 \cdot M + A_2 \cdot C.$$

Odtud plyne $M = A_1^{-1} - A_1^{-1} \cdot A_2 \cdot C$. Odtud a z definice matice B obdržíme

$$B = P_\pi \cdot \begin{pmatrix} M \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ C \end{pmatrix} = P_1 \cdot M + P_2 \cdot C =$$

$$= P_1 \cdot A_1^{-1} + (P_2 - P_1 \cdot A_1^{-1} \cdot A_2) \cdot C.$$

$\square$

Příklad 22. Udejte všechny inverze zprava matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

která má úplnou řádkovou hodnost.

Matici A uvažujme jako blokovou matici, kde sloupce tvoří bloky matice:

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix}.$$

Tuto matici chceme permutace π^{-1} sloupců převést na tvar

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} s_2 & s_4 & s_3 & s_1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

tedy

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P_2 \; = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále máme

$$A \cdot P_\pi = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; A_1 \; = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; A_2 \; = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem pak obdržíme:

$$5 \cdot P_1 \cdot A_1^{-1} \; = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; 5 \cdot (P_2 \; - \; P_1 \cdot A_1^{-1} \cdot A_2) \; = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -10 \\ 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Položíme-li

$$C \; = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix},$$

kde x, y, u, v jsou komplexní čísla, dostáváme ze vzorce ve větě 21:

množina všech inverzí zprava matice A je množina všech matic B tvaru:

$$B \; = \; \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5u & 5v \\ x - 10u + 2 & y - 10v + 3 \\ 5x & 5y \\ 2x - 1 & 2y + 1 \end{pmatrix},$$

kde x, y, u, v jsou libovolná komplexní čísla.

Podobně se řeší otázka inverzí zleva pro matici úplné sloupcové hodnosti:

Předpokládejme, že A je matice typu $n \times m, m < n$, která má úplnou sloupcovou hodnost. Jelikož r(A) $= m$, existuje podle věty 16 permutace π množiny $\{1, 2, \ldots, \}$ tak, že matice

$$P_\pi \cdot A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

kde A_1 je regulární matice řádu m a A_2 je matice typu $(n-m)\times m$. Matici P_π vyjádříme jako blokovou matici

$$P_\pi \;=\; \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix},$$

kde P_1 je matice typu $m \times n$ a P_2 je matice typu $(n-m)\times n$.

Stejným způsobem jako větu 21 můžeme dokázat následující větu:

Věta 23. *Nechť platí před větou uvedené předpoklady a označení. Pak množina všech inverzních matic zleva matice A je rovna množině všech matic B typu $n \times m$ tvaru*

$$B \;=\; A_1^{-1}\cdot P_1 \;+\; C\cdot(P_2 \;-\; A_2\cdot A_1^{-1}\cdot P_1),$$

kde C je libovolná matice typu $m \times (n-m)$.

Větu 23 můžeme získat z věty 21 pomocí hermitovského operátoru * (v.větu 13).

4 Pseudoinverzní matice.

V tomto odstavci zavedeme pojem pseudoinverzní matice, kterou má každá matice a tato pseudoinverzní matice je jednoznačně určena.

Definice 24. Nechť A je matice (nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$) typu $m \times n$. Matice X typu $n \times m$ se nazývá pseudoinverzní matice matice A, jestliže platí:

$$\begin{aligned}
(1)\ \mathrm{AXA} &= \mathrm{A},\\
(2)\ \mathrm{XAX} &= \mathrm{X},\\
(3)\ (\ \mathrm{AX})^* &= \mathrm{AX},\\
(4)\ (\ \mathrm{XA})^* &= \mathrm{XA}.
\end{aligned}$$

Podmínky (1) - (4) se nazývají Penroseovy podmínky a pseudoinverzní matice se často nazývá **Moore-Penroseova inverze matice** A nebo stručně M-P inverze ([Da]). Mluvíme také jen o pseudonverzi matice A.

Věta 25. ***Jednoznačnost pseudoinverzní matice.*** *Jestliže matice A má pseudoinverzi, pak tato pseudoinverze je určena jednoznačně.*

Důkaz. Předpokládejme, že matice B,C jsou pseudoinverze matice A. Pak platí:

$$B \overset{(2)}{=} (BA)B \overset{(4)}{=} (A^*B^*)B \overset{(1)}{=} (A^*C^*A^*)B^*B \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} (CA)(A^*B^*B) \overset{(4)}{=} (CA)(BAB) \overset{(2)}{=} CAB.$$

$$C \overset{(2)}{=} C(AC) \overset{(3)}{=} CC^*A^* \overset{(1)}{=} CC^*(A^*B^*A^*) \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} CC^*A^*(AB) \overset{(3)}{=} (CAC)(AB) \overset{(2)}{=} CAB.$$

Odtud plyne $B = C$ a věta je dokázána. □

Čísla nad symbolem rovnosti označují číslo Penroseovy podmínky, která se používá při důkazu příslušné rovnosti. Při zjišťování, zdali matice X je pseudoinverze matice A, se obvykle postupuje tak, že se ověřují Penroseovy podmínky (1) - (4). V případě jejich platnosti je pak X jedoznačně definovaná pseudoinverzní matice A^+ matice A.

Označení. Jelikož je pseudoinverze jednoznačně určena, můžeme pro ni zavést označení. Tuto pseudoinverzi budeme označovat symbolem A^+.

Příklad 26. a) Jestliže A je regulární matice, pak matice $X = A^{-1}$ vyhovuje Penroseovým podmínkám, tudíž

$$A^+ \; = \; A^{-1}.$$

b) Je-li $A = O_{m,n}$ nulová matice typu $m \times n$, pak podobně ověříme Penroseovy podmínky pro $X = O_{n,m}$, odkud plyne

$$O_{m,n}^+ \; = \; O_{n,m}.$$

c) Jestliže matice A má pseudoinverzi, pak má pseudoinverzi též matice A^+ a platí:

$$\boxed{(A^+)^+ \; = \; A}\,.$$

d) Jestliže matice A má pseudoinverzi, pak má pseudoinverzi i matice A^* a platí:

$$\boxed{(A^*)^+ \; = = (A^+)^*} \, .$$

Důkaz. Položme $X = (A^+)^*$ a ověřme Penroseovy podmínky pro matice A^* a X:

$$(1)\ A^* \cdot X \cdot A^* \;=\; A^* \cdot (A^+)^* \cdot A^* \;=\; (A \cdot A^+ \cdot A)^* \;=\; A^*,$$

$$(2)\ X \cdot A^* \cdot X \;=\; (A^+)^* \cdot A^* \cdot (A^+)^* \;=\; (A^+ \cdot A \cdot A^+)^* \;=\; (A^+)^* \;=\; X,$$

$$(3)\ (A^* \cdot X)^* \;=\; (A^* \cdot (A^+)^*)^* \;=\; A^+ \cdot A \;=\; (A^+ \cdot A)^* \;=\; A^* \cdot (A^+)^* \;= A^* \cdot X,$$

$$(4)\ (X \cdot A^*)^* \;=\; A \cdot X^* \;=\; A \cdot ((A^+)^*)^* \;=\; A \cdot A^+ \;=\; (A \cdot A^+)^* \;=\; (A^+)^* \cdot A^* \;=\; X \cdot A^*.$$

□

e) Jestliže D je diagonální matice řádu n

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix},$$

pak pro Moore-Penroseovu inverzi matice D máme

$$D^+ = \begin{pmatrix} d_1^+ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^+ & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n^+ \end{pmatrix},$$

kde pro komplexní číslo c symbol c^+ značí 0, jestliže c = 0. V případě, že c je nenulové komplexní číslo, položíme $c^+ = c^{-1}$.

f) Jestliže A je matice, která má pseudoinverzi, a c je komplexní číslo, pak matice $c \cdot A$ má pseudoinverzi a platí:

$$\boxed{(c \cdot A)^+ \;=\; c^+ \cdot A^+} \, .$$

V případě, že matice má úplnou řádkovou nebo sloupcovou hodnost, pak má tato matice pseudoinverzi a pro tuto pseudoinverzi platí rovnosti uvedené následovně:

Tvrzení 27. (a) *Nechť matice A typu $m \times n, m < n$ má úplnou řádkovou hodnost. Pak má matice A pseudoinveverzi, matice $A \cdot A^*$ je regulární a platí:*

$$\boxed{A^+ = A^* \cdot (A \cdot A^*)^{-1} \text{ a } A \cdot A^+ = I_m}\ .$$

(b) *Jestliže matice A typu $m \times n, n < m$ má úplnou sloupcovou hodnost, pak má matice A pseudoinverzi, matice $A^* \cdot A$ je regulární a platí:*

$$\boxed{A^+ = (A^* \cdot A)^{-1} \cdot A^* \text{ a } A^+ \cdot A = I_n}\ .$$

Důkaz. Dokážeme jen tvrzení (a). Tvrzení (b) se dokáže analogicky. Předpokládejme, že A je matice typu $m \times n, m < n$, která má úplnou řádkovou hodnost. Podle tvrzení 3 (poznámka) máme $m = \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A \cdot A^*)$, z čehož plyne, že matice $A \cdot A^*$ je regulární. Položme

$$X = A^* \cdot (A \cdot A^*)^{-1}.$$

Pak $A \cdot X = A \cdot A^* \cdot (A \cdot A^*)^{-1} = I_m$. Odsud snadno plyne, že jsou splněny Penroseovy podmínky (1) - (3). Ukážeme platnost Penroseovy podmínky (4). Z věty 13 obdržíme

$$(X \cdot A)^* = A^* \cdot X^* = A^* \cdot ((A \cdot A^*)^{-1})^* \cdot A =$$

$$= A^* \cdot ((A \cdot A^*)^*)^{-1} \cdot A = A^* \cdot (A \cdot A^*)^{-1} \cdot A = X \cdot A.$$

□

Příklad 28. Určit Moore-Penroseovu inverzi matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice A je rovna 2, tudíž A je matice úplné sloupcové hodnosti a podle tvrzení 27(b) máme

$$A^+ \;=\; (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \;=\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;=$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro konstrukci pseudoinvrze se často používá následující věty:

Věta 29. ***Věta o skeletním rozkladu matice - Lemma on "rank factorization"of a matrix.*** *Nechť A je nenulová matice typu $m \times n$ s hodností r ($r \geq 1$). Pak existují matice B,C typu $m \times r, r \times n$ takové, že platí:*

$$\boxed{A \;=\; B \cdot C,\; r(B) \;=\; r(C) \;=\; r}\;.$$

Rozklad $A = B \cdot C$ se pak nazývá *skeletní rozklad matice A.*

Důkaz. Matici A vyjádřejme jako blokovou matici, kde bloky jsou sloupce matice A:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix}.$$

Vybereme ze sloupců matice A r lineárně nezávislých sloupců $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, které pak tvoří maximální systém lineárně nezávislých sloupců matice A. Položíme

$$B \;=\; \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

Pak B je matice typu $m \times r$ s hodností r. Matici C budeme uvažovat také jako blokovou matici, ve které bloky jsou neznámé sloupcové vektory $\xi_1, \dots, \xi_n$ dimenze r a pro kterou platí $A = B \cdot C$, tudíž

$$C \;=\; \begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \text{a } A \;=\; \begin{pmatrix} B\xi_1 & \dots & B\xi_n \end{pmatrix}.$$

Odtud pak dostáváme n systémů lineárních rovnic pro r neznámých:

$$B \cdot \xi_j \;=\; s_j \; (1 \;\leq j \;\leq n).$$

Pro matici B těchto systémů platí r(B) $= r$. Rozšířená matice j - tého systému $(1 \ \leq j \ \leq n)$ má tvar

$$\begin{pmatrix} B & s_j \end{pmatrix}$$

a jelikož s_j je lineární kombinací sloupců matice B, má tato rozšířená matice také hodnost r. Uvedené systémy lineárních rovnic jsou tudíž řešitelné a pro jejich řešení ξ_j pak platí

$$A = B \cdot C = B \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}.$$

Zbývá ověřit vztah $\mathrm{r}(C) = r$. Jelikož podle věty 1 máme

$$r \ = \ A \ = \ r(B \cdot C) \ \leq \ \mathrm{r}(C) \ \leq \ r,$$

dostáváme uvedený vztah. □

Příklad 30. Nalezněte skeletní rozklad matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Libovolným způsobem zjistíme, že hodnost matice A je rovna 2 a 1. a 3. sloupec matice A jsou lineárně nezávislé. Položíme

$$B \ = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \ \xi_1 \ = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ \xi_2 \ = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ \xi_3 \ = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Budeme hledat hodnoty x_i, y_i $(1 \leq i \leq 3)$ tak, aby $A = B \cdot C$, kde

$$C \ = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme tři systémy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 3y_1 = 1 & \quad x_2 + 3y_2 = 4 & \quad x_3 + 3y_3 = 3 \\ -x_1 + 2y_1 = -1 & \quad -x_2 + 2y_2 = -1 & \quad -x_3 + 2y_3 = 2 \\ -2x_1 + 0y_1 = -2 & \quad -2x_2 + 0y_2 = 0 & \quad -2x_3 + 0y_3 = 0. \end{array}$$

Řešením těchto systémů dostaneme $x_1 = 1, \ \ y_1 = 0, \ x_2 = 1, \ y_2 = 1, \ x_3 = 0, \ y_3 = 1$, tudíž

$$C \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } A \ = \ B \cdot C$$

je skeletní rozklad matice A.

Poznámka. Podle věty 29 má každá nenulová matice skeletní rozklad. Nicméně tento skeletní rozklad není určen jednoznačně. Následující tvrzení popisuje všechny skeletní rozklady nenulové matice.

Tvrzení 31. *Nechť A je nenulová matice s hodností r a nechť $A \ = \ B \cdot C$ je skeletní rozklad matice A. Pak všechny skeletní rozklady matice A mají tvar*

$$A \ = \ (B \cdot R) \cdot (R^{-1} \cdot C),$$

kde R probíhá všechny regulární matice řádu r.

Důkaz. Zřejmě pro každou regulární matici R řádu r je $A = (B \cdot R) \cdot (R^{-1} \cdot C)$ skeletní rozklad matice A (v.tvrzení 2). Nechť $A \ = \ G \cdot H$ je skeletní rozklad matice A. Matice H má úplnou řádkovou hodnost a podle tvrzení 27 má psedoinverzní matici, přičemž platí $H \cdot H^+ \ = \ I_r$. Položme $R \ = \ C \cdot H^+$. Ze vztahu $B \cdot C \ = \ G \cdot H$ obdržíme $B \cdot R \ = \ B \cdot C \cdot H^+ \ = G \cdot H \cdot H^+ \ = \ G$. Z věty 1 dostáváme

$$r \ = \ \mathrm{r}(G) \ = \ \mathrm{r}(B \cdot R) \ \leq \mathrm{r}(R) \ \leq r.$$

Tudíž R je regulární matice řádu r, matice $G \ = \ B \cdot R$ je matice úplné řádkové hodnosti a podle tvrzení 27(a) má pseudoinverzi a platí $G^+ \cdot G \ = \ I_r$. Odtud dostáváme

$$H \ = \ G^+ \cdot (G \cdot H) \ = \ G^+ \cdot (B \cdot C) \ = \ G^+ \cdot (B \cdot R) \cdot (R^{-1} \cdot C) \ =$$

$$= \ (G^+ \cdot G) \cdot (R^{-1} \cdot C) \ = \ R^{-1} \cdot C.$$

Tudíž $G \ = \ B \cdot R$ a $H \ = \ R^{-1} \cdot C$. □

Věta 32. ***Věta o existenci pseudoinverzní matice.*** *Nechť A je nenulová matice a $A = B \cdot C$ je její skeletní rozklad. Pak matice A má pseudoinverzní matici, která je dána formulí*

$$\boxed{A^+ = C^+ \cdot B^+}\,.$$

Důkaz. Jelikož matice B,C jsou matice úplné (sloupcové, řádkové) hodnosti máme podle tvrzení 27:

$$B^+ \cdot B = C \cdot C^+ = I_r.$$

Položme

$$X = C^+ \cdot B^+$$

a ověřme Penroseovy podmínky pro matice A a X:

$$(1): \ A \cdot X \cdot A = B \cdot (C \cdot C^+) \cdot (B^+ \cdot B) \cdot C = B \cdot I_r \cdot C = B \cdot C = A,$$

$$(2): X \cdot A \cdot X = C^+ \cdot (B^+ \cdot B) \cdot (C \cdot C^+) \cdot B^+ = C^+ \cdot I_r \cdot B^+ = C^+ \cdot B^+ = X.$$

(3): Máme

$$A \cdot X = B \cdot (C \cdot C^+) \cdot B^+ = B \cdot B^+,$$

tudíž podle Penroseovy podmínky (3)

$$(A \cdot X)^* = (B \cdot B^+)^* = B \cdot B^+ = A \cdot X.$$

(4): Podobně dostáváme

$$(4): X \cdot A = C^+ \cdot (B^+ \cdot B) \cdot C = C^+ \cdot C,$$

odkud stejným způsobem dostaneme podle Penroseovy podmínky (4)

$$(X \cdot A)^* = X \cdot A.$$

□

Příklad 33. Vypočítejte Moore-Penroseovu inverzi matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podle příkladu 30 skeletní rozklad matice A je identita $A = B \cdot C$, kde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pseudoinverze matic B a C vypočítáme podle tvrzení 27

$$B^+ = (B^* \cdot B)^{-1} \cdot B^* = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{77} \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{77} \begin{pmatrix} 10 & -15 & -26 \\ 17 & 13 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C^+ = C^* \cdot (C \cdot C^*)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro pseudoinverzi matice A pak platí

$$A^+ = C^+ \cdot B^+ = \frac{1}{231} \begin{pmatrix} 3 & -43 & -54 \\ 27 & -2 & -24 \\ 24 & 41 & 30 \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Při výpočtu pseudoinverzní matice pomocí systému MATLAB je přkaz pro výpočet pseudoinverze matice A následující:

$$\boxed{\text{pinv}\ (A)}\ .$$

Hodnoty prvků matice A^+ jsou při tomto použití udávány jako desetinné číslo. Tak např. pro matici A z výše uvedeného příkladu dostaneme tímto způsobem její pseudoinverzi následovně:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0.0130 & -0.1861 & -0.2338 \\ 0.1169 & -0.0087 & -0.1039 \\ 0.1039 & 0.1775 & 0.1299 \end{pmatrix}.$$

Známe-li skeletní rozklad matice $A = B \cdot C$, kde prvky matic B, C jsou celá čísla, pak prvky matice

$$\det(B^* \cdot B) \cdot \det(C \cdot C^*) \cdot A^+$$

jsou také celá čísla. Tento fakt plyne z identit

$$B^+ \;=\; (B^* \cdot B)^{-1} \cdot B^*,\; C^+ \;=\; C^* \cdot (C \cdot C^*),\; A^+ \;=\; C^+ \cdot B^+.$$

Položíme-li

$$c \;=\; \det(B^* \cdot B) \cdot \det(C \cdot C^*)$$

a provedeme-li příkaz v MATLABU c*pinv(A), dostaneme matici $c \cdot A^+$, která má celočíselné prvky.

V případě uvedené matice A máme

$$B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\;\; C \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne

$$\det(B^* \cdot B) \;=\; \det \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} = 77 = \; 7 \cdot 11,\; \det(C \cdot C^*) \;=\; \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;=\; 3,$$

tudíž $c = 231$ a příkaz (231*pinv$A$) dává v MATLABu matici

$$c \cdot A^+ \;=\; \begin{pmatrix} 3 & -43 & -54 \\ 27 & -2 & -24 \\ 24 & 41 & 30 \end{pmatrix}.$$

Velmi často se k výpočtu pseudoinverzní matice používá t.zv. *Grevilleův algoritmus.* Tento algoritmus udává výpočet rekurzivně vzhledem k počtu sloupců matice. Nejdříve se uvádí vzorec pro pseudoinverzi matice s jedním sloupcem (tedy pro sloupcový vektor). Pak za předpokladu, že známe pseudoinverzi pro matici, která má n - 1 sloupců se udává vzorec pro matici, která má n sloupců, kde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Popíšeme nyní přesně tento postup.

Tvrzení 34. *Nechť A je matice typu $m \times 1$, kde $m \in \mathbb{N}$. Jestliže A je nulová matice, pak $A^+ = O_{1,m}$. Pro nenulovou matici A máme $A^+ = (A^* \cdot A)^{-1} \cdot A^*$.*

Jestliže matice A je nenulová, pak má úplnou sloupcovou hodnost a v důkazu použijeme tvrzení 27 (b). Poznamenejme, že pro

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{pmatrix} \text{ máme } A^* \cdot A = \sum_{k=1}^{m} |\sigma_k|^2.$$

Předpokládejme nyní, že A je matice typu $m \times n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Matici A uvažujme jako blokovou matici

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_{n-1} & s_n \end{pmatrix} =: A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & s_n \end{pmatrix},$$

kde $s_1, \dots, s_n$ jsou sloupce matice A a

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_{n-1} \end{pmatrix}$$

je matice typu $m \times (n-1)$. Předpokládejme, že známe pseudoinverzi matice A_{n-1} a položme

$$d_n := A^+_{n-1} \cdot s_n, \quad c_n = s_n - A_{n-1} \cdot d_n.$$

Dále položme:

$$b_n = \begin{cases} c_n^+, \text{ jestliže } & c_n \neq 0, \\ (1 + d_n^* d_n)^{-1} d_n^* A^+_{n-1}, & \text{jestliže } c_n = 0. \end{cases}$$

Věta 35. ***Grevilleův algoritmus.*** *Za předcházejícího označení a předpokladů má matice A pseudoinverzi a platí:*

$$\boxed{A^+ = A_n^+ = \begin{pmatrix} A^+_{n-1} - d_n \cdot b_n \\ b_n \end{pmatrix}}.$$

Důkaz spočívá v ověření Penroseových podmínek pro pseudoinverzní matici a je technicky náročnější, proto ho nebudeme provádět. Ověřme jen typy matic, které se zde vyskytují:

matice	A	A_{n-1}	A^+	A^+_{n-1}	s_n
typ	$m \times n$	$m \times (n-1)$	$n \times m$	$(n-1) \times m$	$m \times 1$

matice	d_n	d_n^*	c_n	c_n^+	b_n
typ	$(n-1) \times 1$	$1 \times (n-1)$	$m \times 1$	$1 \times m$	$1 \times m$

.

Poznamenejme, že pro výpočet matice c_n^+ se může použít tvrzení 34. Jestliže

$$d_n = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \end{pmatrix},$$

pak $d_n^* \cdot d_n = \sum_{i=1}^{n-1} |\delta_i|^2$ je reálné, nezáporné číslo, tudíž $1 + d_n^* \cdot d_n$ je kladné reálné číslo a výraz $(1 + d_n^* \cdot d_n)^{-1}$ značí reálné kladné číslo, (což se ztotožňuje s maticí typu 1×1).

Grevilleův algoritmus budeme demonstrovat na následujícím příkladu:

Příklad 36. Užitím Grevilleova algoritmu vypočítejte pseudoinverzi matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

uvedenou v příkladu 33.

Řešení: a) První krok: $n = 1$. Pseudoinverzi matice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

vypočítáme podle vzorce z tvrzení 34. Máme

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \; A_1^* \cdot A_1 = (6),$$

tudíž

$$A_1^+ = (A_1^* \cdot A_1)^{-1} \cdot A_1^* = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Druhý krok: $n = 2$. Máme

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

a vypočítáme

$$d_2 = A_1^+ \cdot s_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{7}{6},$$

$$c_2 = s_2 - A_1 \cdot d_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{7}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 17 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Podle tvrzení 34 platí

$$c_2^+ = (c_2^* c_2)^{-1} c_2^* = \frac{6}{77} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 17 & 13 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{77}\begin{pmatrix} 17 & 13 & 2 \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme

$$b_2 = c_2^+ = \frac{1}{77}\begin{pmatrix} 17 & 13 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$A_1^+ - d_2 b_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{77}\begin{pmatrix} 17 & 13 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6 \cdot 11}\begin{pmatrix} -6 & -24 & -24 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Podle věty 35 (pro $n = 2$) dostáváme

$$A_2^+ = \frac{1}{77}\begin{pmatrix} -7 & -28 & -28 \\ 17 & 13 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Třetí krok: $n = 3$. Máme

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a vypočítáme

$$d_3 = A_2^+ \cdot s_3 = \frac{1}{77}\begin{pmatrix} -7 & -28 & -28 \\ 17 & 13 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{77}\begin{pmatrix} -77 \\ 77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c_3 = s_3 - A_2 \cdot d_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jelikož $c_3 = 0$, dostáváme

$$b_3 = (1 + d_3^* d_3)^{-1} d_3^* A_2^+.$$

Dále platí

$$d_3^* d_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$d_3^* A_2^+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{77}\begin{pmatrix} -7 & -28 & -28 \\ 17 & 13 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{77}\begin{pmatrix} 24 & 41 & 30 \end{pmatrix},$$

tudíž

$$b_3 = \frac{1}{3 \cdot 77}\begin{pmatrix} 24 & 41 & 30 \end{pmatrix}.$$

Pro závěrečný výpočet obdržíme

$$A_2^+ - d_3 \cdot b_3 = \frac{1}{77}\begin{pmatrix} -7 & -28 & -28 \\ 17 & 13 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3 \cdot 77}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 41 & 30 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{3 \cdot 77}(\begin{pmatrix} -21 & -84 & -84 \\ 51 & 39 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -24 & -41 & -30 \\ 24 & 41 & 30 \end{pmatrix}) = \frac{1}{231}\begin{pmatrix} 3 & -43 & -54 \\ 24 & -2 & -24 \end{pmatrix}.$$

Užitím věty 35 dostaneme závěr příkladu:

$$A^+ = A_3^+ = \frac{1}{231}\begin{pmatrix} 3 & -43 & -54 \\ 27 & -2 & -24 \\ 24 & 41 & 30 \end{pmatrix}.$$

Ukážeme nyní další možnost důkazu existence pseudoinverze pro libovolnou matici. Nejdříve uvedeme definici unitární matice, která zobecňuje pojem ortogonální matice na matice s komplexními prvky. Připomeňme si definici ortogonální matice: Regulární matice M, jejíž prvky jsou reálná čísla, se nazývá ortogonální, jestliže $M^{-1} = M^T$.

Definice 37. Regulární matice M (jejíž prvky jsou komplexní čísla), se nazývá *unitární,* jestliže platí:

$$\boxed{M^{-1} = M^*}\ .$$

Uvedeme pomocné tvrzení, které budeme potřebovat:

Tvrzení 38. *Nechť r je přirozené číslo a*

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_r \end{pmatrix}$$

je regulární, diagonální matice řádu r. Nechť D je matice typu $m \times n,\ m, n > r$, která má blokový tvar blokového typu 2×2:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0_{r\ (n-r)} \\ 0_{(m-r)\ r} & 0_{(m-r)\ (n-r)} \end{pmatrix}.$$

Pak pro její pseudoinverzi v blokovém tvaru máme:

$$\boxed{D^+ = \begin{pmatrix} D_1^{-1} & 0_{r\ (m-r)} \\ 0_{(n-r)\ r} & 0_{(n-r)\ (m-r)} \end{pmatrix}}\ .$$

Důkaz se snadno provede ověřením Penroseových podmínek.

Poznamenejme ještě, že v případě m $=$ r nebo $n = r$ tvrzení také platí, ale musí se vypustit příslušné nulové matice. Např., jestliže $n = r$ a $m > r$, máme

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0_{(m-r)\ r} \end{pmatrix},\ D^+ = \begin{pmatrix} D_1^{-1} & 0_{r\ (m-r)} \end{pmatrix}.$$

Nová varianta důkazu existence pseudoinverze je založena na větě o "převodu" matice na matici D tvaru uvedeném v předcházejícim tvrzení. Tato věta se nazývá "UDV *věta*"(*the* UDV *Theorem*) nebo (*the diagonal decomposition Theorem*) a je velmi užitečná v teorii matic, neboť umožňuje snadnější manipulaci matic.

Důkaz této věty pro potřebu dalších znalostí z lineární algebry neuvádíme.

Věta 39. *UDV-**Věta.** Nechť A je nenulová matice typu $m \times n$ (s komplexními prvky) a s hodností r. Pak existují unitární matice U, V řádů m,n tak, že*

$$\boxed{A = U \cdot \begin{pmatrix} D_1 & 0_{r\ (n-r)} \\ 0_{(m-r)\ r} & 0_{(m-r)\ (n-r)} \end{pmatrix} \cdot V},$$

kde $D_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_r \end{pmatrix}$ *je regulární, diagonální matice řádu r.*

Věta 40. *Nechť A je nenulová matice typu $m \times n$ s hodností r. Buďte U, V unitární matice řádů m,n a nechť $A = U{\cdot}D{\cdot}V$, kde $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0_{r\ (n-r)} \\ 0_{(m-r)\ r} & 0_{(m-r)\ (n-r)} \end{pmatrix}$ a D_1 je regulární, diagonální matice řádu r. Pak platí:*

$$\boxed{A^+ = V^+ \cdot D^+ \cdot U^+}\ .$$

Důkaz této věty se provede zase ověřením Penroseových podmínek pro matice A a X, kde $X = V^+ \cdot D^+ \cdot U^+$ ($U^+ = U^{-1} = U^*, V^+ = V^{-1} = V^*$).

Poznámka. Vzhledem k předcházející větě 40 a větě 32 $(B{\cdot}C)^+ = C^+{\cdot}B^+$ o pseudoinverzi matice vyjádřené skeletním rozkladem $B \cdot C$ a také vzhledem k tvrzení o inverzi součinu regulárních matic by se mohlo zdát, že platí podobné tvrzení o pseudoinverzi součinu matic: $(M \cdot N)^+ = N^+ \cdot M^+$. Toto tvrzení ale neplatí pro pseudoinverzi součinu, tedy obecně máme pro matice *M,N* vhodných typů:

$$(M \cdot N)^+ \neq N^+ \cdot M^+.$$

Příklad 41. Nechť *M,N* jsou nenulové matice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Pak

$$M^{+} = M^{T} \cdot (M \cdot M^{T})^{-1} = \frac{1}{a^{2}+b^{2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \; N^{+} = (N^{T} \cdot N)^{-1} \cdot N^{T} = \frac{1}{c^{2}+d^{2}} \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}.$$

V případě, že $ac + bd \neq 0$, obdržíme

$$(M \cdot N)^{+} = (ac + bd)^{-1}, \; N^{+} \cdot M^{+} = \frac{ac+bd}{(a^{2}+b^{2}) \cdot (c^{2}+d^{2})}.$$

Jestliže $(M \cdot N)^{+} = N^{+} \cdot M^{+}$, dostáváme pak

$$(ac + bd)^{2} = (a^{2}+b^{2}) \cdot (c^{2}+d^{2}),$$

odkud plyne

$$ad = bc.$$

V ostatních případech máme $(M \cdot N)^{+} \neq N^{+} \cdot M^{+}$.

Závěrem o větách existence pseudoinverzní matice se zmíníme pro zajímavost bez důkazu další větu o této existenci, která je uvedena např. v Davisově knize [Da] (odstavec 2.8.3, cvičení 5):

Věta 42. *Pro pseudoinverzi A^{+} matice A platí:*

$$\boxed{A^{+} = \lim_{t \to 0} A^{*} \cdot (tI + A \cdot A^{*})^{-1}} \; .$$

5 Moore-Penroseova inverze a systém lineárních rovnic.

Pro řešení soustavy lineárních rovnic se používá aparát teorie matic a vektorů. V tomto příspěvku budeme pro přirozené číslo n rozumět n-rozměrným vektorovým prostorem $\mathbb{C}^{n}$ množinu všech sloupcových vektorů dimenze n, tedy matic typu $n \times 1$. Tyto matice budeme považovat za (n-rozměrné) vektory, přičemž komplexní čísla budou skaláry. Operace sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem se definuje jako tyto operace s maticemi. Zřejmě axiomy z definice vektorového prostoru jsou splněny.

Definice 43. Pro vektory $X, Y \in \mathbb{C}^n$

$$\text{X=}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ Y=}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

položíme

$$(X, Y) \ = \ Y^* \cdot X \ = \ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y}_i$$

a

$$||X|| \ = \ \sqrt{(X, X)} \ = \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{x}_i} \ = \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \ .$$

Poznámka. Odmocnina z reálného nezáporného čísla se považuje za nezápornou.

Komplexní číslo (X,Y) se nazývá (*hermitovský*) *vnitřní součin vektorů* X, Y (*Hermitian inner product*) a číslo $||X||$ se nazývá *norma vektoru X.*

Tvrzení 44. *Pro n-rozměrné vektory X, Y,Z a komplexní číslo* λ *máme:*

(a) *Norma* $||X||$ *je reálné nezáporné číslo, přičemž*

$$||X|| \ = \ 0 \iff X \ = \ 0_{n,1},$$

$$\text{(b) } (Y, X) \ = \ \overline{(X, Y)},$$

$$\text{(c) } (\lambda X, Y) \ = \ \lambda \cdot (X, Y), \ (X, \lambda \cdot Y) \ = \ \overline{\lambda} \cdot (X, Y), \ ||\lambda \cdot X|| \ = \ |\lambda| \cdot ||X||,$$

$$\text{(d) } (X + Y, Z) \ = \ (X, Z) \ + \ (Y, Z), \ (X, Y + Z) \ = \ (X, Y) \ + \ (X, Z).$$

Důkaz. Přímým výpočtem se snadno dokáží výroky (a) - (d). □

Definice 45. Vektory $X, Y \in \mathbb{C}^n$ se nazývají *ortogonální*, jestliže $(X, Y) \ = \ 0$. Píšeme pak

$$X \perp Y \ .$$

Z tvrzení 44(b) dostáváme: z relace $X \perp Y$ plyne relace $Y \perp X$. Pro ortogonální vektory platí t.zv. "Pythagorova věta".

Věta 46. ***Pythagorova věta.*** *Pro ortogonální n-rozměrné vektory X, Y máme*

$$\boxed{||X\ +\ Y||^2\ =\ ||X||^2\ +\ ||Y||^2}\ .$$

Důkaz. Podle tvrzení 44 (d) máme pro ortogonálné vektory X,Y

$$||X+Y||^2\ =\ (X{+}Y, X{+}Y)\ =\ (X,X)+(X,Y)+(Y,X)+(Y,Y)\ =\ ||X||^2+||Y||^2.$$

□

Následující lemma bude užitečné pro vyjádření specielního "řešení"systému lineárních rovnic.

Lemma 47. *Nechť A je matice typu $m \times n$, $P\ =\ A \cdot A^+$, $Q\ =\ A^+ \cdot A$ a nechť X je n-rozměrný a Y m-rozměrný vektor. Pak platí:*

(*a*) $||A \cdot X\ +\ (I_m\ -\ P) \cdot Y||^2\ =\ ||A \cdot X||^2\ +\ ||(I_m\ -\ P) \cdot Y||^2,$

(*b*) $||A^+ \cdot Y\ +\ (I_n\ -\ Q) \cdot X||^2\ =\ ||A^+ \cdot Y||^2\ +\ ||(I_n\ -\ Q) \cdot X||^2.$

Důkaz. (a) Položme

$$R\ =\ A \cdot X,\ S\ =\ (I_m\ -\ P) \cdot Y.$$

Pak R, S jsou m-rozměrné vektory a platí:

$$(R,S)\ =\ (A{\cdot}X, (I_m - P){\cdot}Y)\ =\ ((I_m - P){\cdot}Y)^*{\cdot}A{\cdot}X\ =\ Y^*{\cdot}(I_m{-}P){\cdot}A{\cdot}X\ =$$

$$=\ Y^* \cdot A \cdot X\ - Y^* \cdot A \cdot A^+ \cdot A \cdot X\ =\ Y^* \cdot A \cdot X\ -\ Y^* \cdot A \cdot X\ =\ 0.$$

Tudíž *R,S* jsou ortogonální vektory a platnost identity v (a) plyne z Pythagorovy věty. (b) Výrok (b) dostaneme z výroku (a) záměnou:

$$A\ \longrightarrow\ A^+,\ X\ \longrightarrow\ Y,\ Y\ \longrightarrow\ X,\ P\ \longrightarrow\ Q,\ m\ \longrightarrow\ n.$$

□

Závěrem tohoto odstavce se zaměříme na systém lineárních rovnic. Připomeňme, že systém m lineárních rovnic o n neznámých je systém rovnic v maticovém tvaru:

$$\text{(S)} \quad \boxed{A \cdot X \ = \ B}\ ,$$

kde

$$A \ = \ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

je matice soustavy typu $m \times n$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$ jsou koeficienty u neznámých, X je vektor neznámých:

$$X \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ a } B \ = \ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

je m-rozměrný vektor absolutních členů, $b_j \in \mathbb{C}$.

Za význačné "řešení" systému lineárních rovnic (S) budeme považovat následující n-rozměrný vektor X_0 definovaný rovností

$$\boxed{X_0 \ = \ A^+ \cdot B}\ .$$

Důvodem pro tento výběr vektoru X_0 je následující věta.

Věta 48. ***Hlavní věta.*** *Pro každý n-rozměrný vektor $X \in \mathbb{C}^n$, $X \neq X_0$ máme:*

$$\boxed{||A \cdot X_0 \ - \ B|| \ \leq \ ||A \cdot X \ - B||}$$

a v případě $||AX_0 - B|| = ||AX - B||$ platí

$$\boxed{||X_0|| \ < \ ||X||}\ .$$

Tudíž vektor X_0 minimalizuje normu $||AX - B||$ a ze všech n-rozměrných vektorů X, které minimalizují tuto normu má nejmenší normu. Vektor X_0 se nazývá

$$\boxed{\textit{řešení systému } (S) \textit{ vzhledem k nejmenším čtvercům s minimální normou}}$$

nebo

$$\boxed{\textit{nejlepší přibližné řešení systému } (S)}$$

(*the least squares solution to the system* (S) *with minimum norm*).

([Da,Ga]).

Důkaz hlavní věty. Pro n-rozměrný vektor X platí:

$$A \cdot X \; - \; B \; = \; A \cdot (X \; - \; A^+ \cdot B) \; + \; (I_m \; - \; A \cdot A^+) \cdot (-B).$$

Použijeme-li tuto rovnost na lemma 47(a), ve kterém X bude značit $X \; - \; A^+ \cdot B$ a Y bude značit - B, dostaneme

$$||A \cdot X \; - B||^2 \; = \; ||A \cdot (X \; - \; A^+ \cdot B)||^2 \; + \; ||(I_m \; - \; A \cdot A^+) \cdot (-B)||^2 \; =$$

$$= \; ||A \cdot (X \; - \; X_0)||^2 \; + \; ||A \cdot X_0 \; - \; B||^2.$$

Odtud plyne $||A \cdot X \; - \; B|| \; \geq \; ||A \cdot X_0 \; - \; B||$ a rovnost nastane, právě když $A \cdot X \; = \; A \cdot X_0$. Předpokládejme, že $A \cdot X \; = \; A \cdot X_0$. Pak $A^+ \cdot A \cdot X \; =$ $= \; A^+ \cdot A \cdot X_0 \; = \; A^+ \cdot A \cdot A^+ \cdot B \; = X_0$. Dostáváme tedy rovnosti:

$$\boxed{X \; - \; X_0 \; = \; (I_n \; - \; A^+ \cdot A) \cdot X, \; X \; = \; A^+ \cdot B \; + \; (I_n \; - \; A^+ \cdot A) \cdot X} \; .$$

Použijeme-li pro tuto rovnost lemma 47 (b), ve kterém roli vektoru Y hraje vektor B, dostaneme

$$||X||^2 \; = \; ||A^+ \cdot B||^2 \; + \; ||(I_n \; - \; A^+ \cdot A) \cdot X||^2 \; = \; ||X||^2 \; + |||X \; - \; X_0||^2.$$

Jelikož $X \; \neq \; X_0$, máme $||X \; - \; X_0|| \; > \; 0$, odkud plyne $||X_0|| \; < \; ||X||$ a hlavní věta je dokázána. $\square$

Příklad 49. Nalezněte řešení následujícího systému vzhledem k nejmenším čtvercům s minimální normou:

$$\begin{aligned} x \; + \; 4y \; + +3z \; &= \; 2 \\ -x \; + \; y \; + \; 2z \; &= \; -2 \\ -2x \; - \; 2y \qquad &= \; 1. \end{aligned}$$

Matice této soustavy je matice

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vektory

$$B \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; X \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

jsou vektory absolutních členů a neznámých.

Hodnost matice A soustavy je rovna 2 a hodnost rozšířené matice soustavy (A B) je rovna 3, tudíž soustava nemá řešení, ale existuje "řešení" X_0 této soustavy vzhledem k nejmenším čtvercům s minimální normou. K získání tohoto "řešení" použijeme psedoinverzi matice A, která byla vypočtena v příkladu 33:

$$A^+ \;=\; \tfrac{1}{231} \begin{pmatrix} 3 & -43 & -54 \\ 27 & -2 & -24 \\ 24 & 41 & 30 \end{pmatrix}.$$

Odtud pak dostaneme

$$\boxed{X_0 \;=\; A^+ \cdot B \;=\; \tfrac{1}{231} \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \\ -4 \end{pmatrix}}\,.$$

Poznámka. Pro nejlepší přibližné řešení X_0 systému (S) je sice norma $||A \cdot X \;-\; B||$ minimální, ale vektor X_0 nemusí být jediný vektor X, pro který je tato norma minimální:

Příklad 50. Uvažujme následující systém lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$x \;+\; y \;=\; 1$$
$$x \;+\; y \;=\; 0\,.$$

Matice tohoto systému A a matice B absolutních členů jsou dány identitami:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro psudoinverzi A^+ máme $A^+ = \frac{1}{4} \cdot A$, odkud plyne pro nejlepší přibližné řešení

$$X_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$A \cdot X_0 - B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a pro minimální normu normy $||A \cdot X - B||$ máme

$$||A \cdot X_0 - B||^2 = \frac{1}{2} .$$

Na př. pro vektor X:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

dostaneme

$||A \cdot X - B||^2 = \frac{1}{2}$ a $||X_0||^2 = \frac{1}{8} < \frac{1}{4} = ||X||^2$.

6 Vážená inverze a obecná involuce.

V aplikacích matematiky se často používá pseudoinverzní matice a to převážně v oblasti numerických metod a v matematické statistice. V těchto oblastech se definuje pseudoinverze pro matice, které mají prvky reálná čísla. Jestliže použijeme např. věu o skeletním rozkladu, odvodíme tvrzení, že pseudoinverzní matice matice, jejíž prvky jsou reálná čísla, má také prvky jen reálná čísla. Pro tyto matice definoval J.S. *Chipman* (1968) ([Chi]) t.zv. *váženou inverzi* (*the weighted inverse*) následovně:

Definice 51. Pro přirozená čísla k,m buďte U, V čtvercové matice řádu k,m, které mají prvky reálná čísla a které jsou pozitivně definitní. Buď A matice, jejíž prvky jsou reálná čísla, typu $m \times k$. Matice X, jejíž prvky jsou reálná čísla typu $k \times m$ se nazývá *vážená inverze matice* A (*the weighted inverse of* A), jestliže platí:

$$(1) \quad \boxed{A \cdot X \cdot A \;=\; A,\; X \cdot A \cdot X \;=\; X}\,,$$

$$(2) \quad \boxed{A \cdot X \cdot V \;=\; V \cdot X^T \cdot A^T,\; X \cdot A \cdot U \;= U \cdot A^T \cdot X^T}\,.$$

Tato vážená inverze vždy existuje a je jednoznačně určena.

Poznámka. Pro přirozené číslo n množinu všech sloupcových vektorů rozměru n (tj. matic typu $n \times 1$), které mají prvky reálná čísla označíme $\mathbb{R}^n$. Vektory s touto vlastností budeme nazývat *reálné vektory.*

Připomeňme, že *pozitivně definitní matice* je symetrická matice M s reálnými prvky s vlastností:

$$(R)\; X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0_n \implies X^T \cdot M \cdot X > 0,$$

kde n značí řád matice M.

Jestliže matice M má komplexní prvky a je hermitovská řádu n, pak řekneme, že je *pozitivně definitní*, jestliže platí:

$$(K)\; X \in \mathbb{C}^n, X \neq 0_n \implies X^* \cdot M \cdot X > 0,$$

V následujícím tvrzení ukážeme, že pro matici s reálnými prvky, která je symetrická, jsou podmínky (R) a (K) ekvivalentní.

Tvrzení 52. *Nechť M je symetrická matice řádu n, která má reálné prvky. Pak jsou vlastnosti* (R) *a* (K) *ekvivalentní.*

Důkaz. Zřejmě (K) implikuje (R). Jelikož matice M je symetrická s reálnými prvky a je pozitivně definitní, existuje ortogonální matice (reálná) P řádu n a diagonální matice

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix},$$

kde $d_1, \dots, d_n$ jsou kladná reálná čísla, s vlastností:

$$M \;=\; P \cdot D \cdot P^T.$$

Předpokládejme, že platí (R) a nechť $X \in \mathbb{C}^n$ je nenulový. Položme

$$Y \;=\; P^T \cdot X \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Pak $Y^* \;=\; X^* \cdot P$ a

$$X^* \cdot M \cdot X = \; X^* \cdot P \cdot D \cdot P^T \cdot X \;=\; Y^* \cdot D \cdot Y \;=\; \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i y_i d_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \cdot d_i \;>\; 0.$$

$\square$

6.1 Obecná involuce a zobecněná inverze

Zavedeme nyní obecný pojem *involuce*, který nám ukáže bližší vztah pojmu "*vážená inverze*"k pojmu "*Moore-Penroseova inverze matice*". Pro další úvahy označme symbolem $\mathcal{M}$ množinu všech matic, jejichž prvky jsou komplexní čísla.

Definice 53. Zobrazení $^{\circledast}$ množiny $\mathcal{M}$ do sebe ($^{\circledast} : \mathcal{M} \;\longrightarrow\; \mathcal{M}$) se nazývá *involuce (na množině* $\mathcal{M}$), jestliže pro každou matici $X \in \mathcal{M}$ a pro matice $A, B \in \mathcal{M}$ vhodných typů pro násobení platí:

$$\boxed{(X^{\circledast})^{\circledast} \;=\; X,\; (A \cdot B)^{\circledast} \;=\; B^{\circledast} \cdot A^{\circledast}}\,.$$

Zřejmě *involuce je bijekce množiny* $\mathcal{M}$ *na* $\mathcal{M}$. *Operátor transpozice* ^{T} *a hermitovský operátor* * *jsou involuce.*

V tomto odstavci udáme popis všech involucí na množině $\mathcal{M}$ podle článku ([Sk1],1998). Tento popis bude záviset na pojmu *involutorního automorfismu tělesa komplexních čísel* $\mathbb{C}$.

Definice 54. Automorfismus tělesa komplexních čísel f nazveme *involutorní*, jestliže platí:

$$\boxed{f^2 \;=\; f \circ f \;= \mathrm{id}_{\mathbb{C}}}\;.$$

Symbol $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ značí identitu na množině komplexních čísel $\mathbb{C}$. Označme symbolem σ zobrazení, které každému komplexnímu číslu přiřazuje jeho komplexně sdružené číslo. Zobrazení $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ a σ jsou involutorní automorfismy. Těchto involutorních automorfismů je však daleko více. V článku ([Sk1]) bylo ukázámo, že množina všech involutorních automorfismů tělesa $\mathbb{C}$ má mohutnost $\exp\exp\aleph_0$.

Definice 55. Nechť f je involutorní automorfismus tělesa komplexních čísel. Pro matici $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}$ typu $m \times n$ nechť

$$A^f \;=\; \begin{pmatrix} f(a_{11}) & \dots & f(a_{m1}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f(a_{1n}) & \dots & f(a_{mn}) \end{pmatrix} = (f(a_{ij}))^T$$

je matice typu $n \times m$, tedy

$$\boxed{A^f \;=\; [b_{lk}]\ (1 \le l \le n, 1 \le k \le m),\ b_{lk} \;= f(a_{kl})}\;.$$

Snadno se dokáže

Tvrzení 56. *Buď f involutorní automorfismus tělesa komplexních čísel. Pak*

(1) $(A^f)^f \;=\; A$ *pro každé* $A \;\in \mathcal{M}$.

(2) *Jestliže A,$B \in \mathcal{M}$ jsou matice vhodných typů pro násobení, pak B^f, A^f mají také typy vhodné pro násobení a platí:*

$$\boxed{(A \cdot B)^f \;=\; B^f \cdot A^f}\;.$$

(3) *Jestliže $A \in \mathcal{M}$ je regulární matice, pak matice A^f je také regulární a platí:*

$$\boxed{(A^f)^{-1} \;=\; (A^{-1})^f}\;.$$

(4) *Jestliže A,$B \in \mathcal{M}$ jsou matice stejných typů, pak matice A^f, B^f jsou také stejných typů a platí:*

$$\boxed{(A + B)^f = A^f + B^f}\,.$$

Pro charakteristiku involuce je potřebný další pojem *f-hermitovské matice*:

Definice 57. Pro involutorní automorfismus f a matici $A \in \mathcal{M}$ řekneme, že *matice A je f-hermitovská*, jestliže je čtvercová a platí

$$A^f = A.$$

Poznámka. Jestliže $f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, pak *matice A je f-hermitovská, právě když je symetrická*. Jestliže f je komplexní konjugovanost - tedy $f = \sigma$, pak *matice A je f-hermitovská, právě když je hermitovská.*

Následující dvě věty udávají úplnou charekterzaci *involuce* ([Sk1].

Věta 58. *Buď f involutorní automorfismus tělesa $\mathbb{C}$ a nechť pro každé přirozené číslo n je A_n regulární f-hermitovská matice. Pro matici $X \in \mathcal{M}$ typu $p \times q$ položme:*

$$\boxed{X^{\circledast} = A_q \cdot X^f \cdot A_p^{-1}}\,.$$

Pak

$$^{\circledast} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

je involuce na množině $\mathcal{M}$.

Věta 59. *Nechť $^{\circledast} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ je involuce. Pak existuje involutorní automorfismus f tělesa $\mathbb{C}$ a posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ regulárních f-hermitovsých matic A_n řádu n tak, že pro každou matici $X \in \mathcal{M}$ typu $p \times q$ máme:*

$$\boxed{X^{\circledast} = A_q \cdot X^f \cdot A_p^{-1}}\,.$$

Odtud snadno plyne užitím tvrzení 56(4) důsledek:

Tvrzení 60. *Nechť $^{\circledast}$ je involuce. Pak pro matice $A, B \in \mathcal{M}$ stejných typů máme*

$$\boxed{(A\,+\,B)^{\circledast}\;=\;A^{\circledast}\,+\,B^{\circledast}}\,.$$

Zavedeme nyní pojem *zobecněné inverze vzhledem k involuci*.

Definice 61. Nechť $^{\circledast}$ je involuce a $A \in \mathcal{M}$ je matice typu $m \times n$. Matici $X \in \mathcal{M}$ typu $n \times m$ budeme nazývat *zobecněná inverze (pseudoinverze) matice A vzhledem k involuci* $^{\circledast}$, jestliže jsou splněny následující podmínky:

$$\boxed{AXA\;=\;A,\;XAX\;=\;X,\;(AX)^{\circledast}\;=\;AX,\;(XA)^{\circledast}\;=\;XA}\,.$$

V případě, že involuce $^{\circledast}$ je hermitovský operátor *, je zobecněná inverze rovna Moore-Penroseově inverzi matice. Stejně jako vtomto případě se dá ukázat, že v případě existence zobecněné inverze matice A vzhledem k involuci je tato zobecněná inverze jednoznačně určena. Budeme ji značit symbolem $A^{\oplus}$.

Otázka, pro kterou involuci každá matice má zobecněnou inverzi vzhledem k této involuci se řeší pomocí pojmu f - *definitní matice*:

Definice 62. Nechť f je involutorní automorfismus tělesa komplexních čísel $\mathbb{C}$. Řekneme, že čtvercová matice $A \in \mathcal{M}$ řádu n je *f-definitní*, jestliže je f-hermitovská a pro každý n-rozměrný sloupcový vektor $W \in \mathbb{C}^n$ máme

$$\boxed{W^f \cdot A \cdot W \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; W \;=\; 0_n}\,.$$

Následující věta podává charakteristiku involuce, která má vlastnost, že každá matice má zobecněnou inverzi vzhledem k této involuci.

Věta 63. *Nechť involuce $^{\circledast}$ je určena dvojicí $[\mathcal{A}, f]$ (ve smyslu věty 59), kde $\mathcal{A} \;=\; \{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n$ je f-hermitovská matice řádu n a f je involutorní automorfismus tělesa $\mathbb{C}$.*

Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

(a) *Každá matice $A \in \mathcal{M}$ má zobecněnou inverzi vzhledem k involuci $^{\circledast}$.*

(b) *Pro každé přirozené číslo n je matice A_n f-definitní.*

Příklad 64. Nechť automorfismus tělesa komplexních čísel f je komplexní konjugovanost, tedy $f = \sigma$ a nechť pro každé přirozené číslo n je A_n reálná matice, která je pozitivně definitní řádu n. Buď $^{\circledast}$ involuce na množině $\mathcal{M}$, která je vytvořena automorfismem σ a posloupností $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve smyslu věty 58. Matice A_n jsou σ - definitní, tudíž každá matice má zobecněnou inverzi vzhledem k involuci $^{\circledast}$.

Nechť A je matice typu $m \times k$ a X je její zobecněná inverze vzhledm k involuci $^{\circledast}$. Jelikož

$$(A \cdot X)^{\circledast} \;=\; A_m \cdot (A \cdot X)^T \cdot A_m^{-1} \;=\; A_m \cdot X^T \cdot A^T \cdot A_m^{-1} \;=\; A \cdot X,$$

dostáváme odsud $A_m \cdot X^T \cdot A^T \;= = A \cdot X \cdot A_m$. Podobně obdržíme:

$$(X \cdot A)^{\circledast} \;=\; A_k \cdot (X \cdot A)^T \cdot A_k^{-1} \;=\; A_k \cdot A^T \cdot X^T \cdot A_k^{-1} \;=\; X \cdot A,$$

odkud plyne $A_k \cdot A^T \cdot X^T \;=\; X \cdot A \cdot A_k^{-1}$.

Položíme-li

$$U \;=\; A_k \text{ a } V \;=\; A_m,$$

pak U,V jsou pozitivně definitní a platí:

$$\boxed{A \cdot X \cdot V \;=\; V \cdot X^T \cdot A^T,\; X \cdot A \cdot U \;=\; U \cdot A^T \cdot X^T},$$

tedy X *je vážená inverze* ve smyslu definice 51.

Při vyšetřování involucí, při kterých má každá matice pseudoinverzi a vytvořených pomocí automorfismu komplexní konjugovanosti σ, můžeme se omezit na posloupnosti $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde matice A_n jsou pozitivně definitní. Přesněji je to podáno v následující větě:

Věta 65. *Nechť* $^{\circledast}$ *je involuce vytvořená automorfismem* σ *a posloupností regulárních* σ*-definitních matic* $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Pak existuje involuce* $^{\diamond}$ *vytvořená automorfismem* σ *a posloupností pozitivně definitních matic* $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ *tak, že každá matice* A *má stejnou pseudoinverzi vzhledem k involucím* $^{\circledast}$ *a* $^{\diamond}$.

Důkaz. Předpokládejme, že involuce $^{\circledast}$ je vytvořena automorfismem komplexní konjugovanosti σ a posloupností $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ symetrických, regulárních, σ-definitních matic A_n a pro celé nezáporné číslo n položme:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{jestliže} \quad A_n \text{ } \textit{je pozitivně definitní} \\ -1, & \text{jestliže} \quad A_n \text{ } \textit{je negativně definitní,} \end{cases}$$

$$B_n = \varepsilon_n A_n.$$

Pak pro každé celé nezáporné číslo n je matice B_n pozitivně definitní a $B_n^{-1} = \varepsilon_n A_n^{-1}$. Nechť involuce $^{\Diamond}$ je vytvořena automorfismem komplexní konjugovanosti σ a posloupností pozitivně definitních matic B_n. Pro matici A typu $m \times k$ a její pseudoinverzi X jsou spněny Penroseovy podmínky (1) a (2) a platí

$$A \cdot X = (A \cdot X)^{\circledast} = A_k \cdot (A \cdot X)^{\sigma} \cdot A_k^{-1}.$$

Pro involuci $\Diamond$ máme

$$(A{\cdot}X)^{\Diamond} = B_k{\cdot}(A{\cdot}X)^{\sigma}{\cdot}B_k^{-1} = \varepsilon_k A_k{\cdot}(A{\cdot}X)^{\sigma}\varepsilon_k A_k^{-1} = A_k{\cdot}(A{\cdot}X)^{\sigma}{\cdot}A_k^{-1} = A{\cdot}X.$$

Analogicky se ukáže rovnost

$$(X \cdot A)^{\Diamond} = X \cdot A,$$

odkud dostáváme, že matice X je současně pseudoinverze vzhledem k involuci $^{\Diamond}$ matice A. □

6.2 Vážená inverze a norma, řešení systému lineárních rovnic vzhledem k minimální vážené normě

V dalšímm budeme předpokládat, že automorfismus f tělesa komplexních čísel $\mathbb{C}$ je komplexní konjugovanost, tedy $f = \sigma$, a pro každé přirozené číslo n má matice A_n reálné prvky, je pozitivně definitní a dá se též předpokládat $A_1 = (1)$. Dvojice $(\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \sigma\}$ definuje ve smyslu věty 58 involuci $^{\circledast}$ a podobně jako pro hermitovský operátor * definujeme pro vektory $X, Y \in \mathbb{C}$ jejich vnitřní součin (X, Y) následovně:

$$(X,Y) := Y^{\circledast} \cdot X = Y^{\sigma} \cdot A_n^{-1} \cdot X.$$

Norma $||X||_e$ *vektoru* X se pak definuje vzorcem:

$$\boxed{||X||_e := \sqrt{(X,X)} = \sqrt{X^{\sigma} \cdot A_n^{-1} \cdot X}}\,.$$

Jelikož matice A_n^{-1} má reálné prvky a je symetrická, existuje ortogonální matice P řádu n tak, že

$$\boxed{P^T \cdot A_n^{-1} \cdot P = D}\,,$$

kde

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

a prvky $d_1, \dots, d_n$ jsou reálná, kladná čísla. Pro $X \in \mathbb{C}^n$ položme

$$Z := P^T \cdot X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Pak $X = P \cdot Z$ a

$$X^{\circledast} = A_1 \cdot (P \cdot Z)^{\sigma} \cdot A_n^{-1} = Z^{\sigma} \cdot P^T \cdot A_n^{-1},$$

odkud plyne

$$||X||_e^2 = (X,X) = X^{\circledast} \cdot X = Z^{\sigma} \cdot P^T \cdot A_n^{-1} \cdot P \cdot Z = Z^{\sigma} \cdot D \cdot Z,$$

tudíž

$$\boxed{||X||_e = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n \bar{z}_i z_i d_i} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n |z_i|^2 d_i}}\,.$$

V případě, že vektor $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ má reálné prvky x_i, dostaneme

$$\boxed{||X||_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2 d_i}} .$$

Norma $||.||_e$ se nazývá *elipsoidní norma* nebo *vážená euklidovská norma* (*ellipsoidal* nebo *weighted Euclidean norm*).

Tento pojem je možno použít na systém lineárních rovnic (nad tělesem $\mathbb{C}$ i tělesem $\mathbb{R}$) podobně jako v případě Moore-Penroseovy inverze pro definici a vlastnost *řešení systému lineárních rovnic vzhledem k nejmenším čtvercům s minimální normou* náledovně:

Věta 66. *Nechť $A \in \mathcal{M}_{mn}, B \in \mathbb{C}^m$ a nechť:*

$$\boxed{X_0 = A^{\oplus} \cdot B} .$$

Pak pro každý vektor $X \in \mathbb{C}^n, X \neq X_0$ platí

$$(1) \quad \boxed{||A \cdot X - B||_e > ||A \cdot X_0 - B||_e}$$

nebo

$$(2) \quad \boxed{||A \cdot X - B||_e = ||A \cdot X_0 - B||_e \text{ a } ||X||_e > ||X_0||_e} .$$

Vektor X_0 můžeme pak nazvat *řešení systému lineárních rovnic vzhledem k minimální vážené normě.*

Reference

[An] Anděl,J., Matematická statistika, SNTL, Praha, 1985.

[BG] Ben-Israel,A., Greville,T.N.E., Generalized Inverses, Theory and Applications, Springer-Verlag, New York, 2003, Second Edition.

[Da] Davis,P.J., Circulant Matrices, New York,1994, Second Edition.

[DMP] Doty,K.L., Melchiorri,C., Bonivento,C., A Theory of Generalized Inverses Applied to Robotics, The international Journal of Robotics, 1992, 36pp.

[Ga] Gantmacher,F.R., The Theory of Matrices,Chelsea, New York,1959, anglický překlad z ruštiny.

[Chi] Chipman,J.S., Specification problems in regression analysis, in Proceedings of the Symposium on Theory and Applications of Generalized Inverses of Matrices (T.L.Boullion and P.L.Odell, Eds.), 1968, pp. 114-176.

[KS] Karásek,J., Skula,L., Lineární algebra, Teoretická část, Brno, VUT FS, 2012, 3.vydání.

[PO] Piziak,R., Odell,P.L., Matrix Theory, From Generalized Inverses to Jordan Form, Chapman&Hall/CRC,2007.

[Sea] Searle,S.S., Matrix Algebra Useful for Statistics, New York, 1982.

[Sk1] Skula,L., Involutions for matrices and generalized inverses, Linear Algebra and its Applications, 271 (1998), 283 - 308.

[Sk2] Skula,L., Moore-Penroseova inverze matice a její aplikace, Kvaternion, 1/2013, 7 - 14.

[Ši] Šik,F., Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu, Brno, MU, 1998.

[YTT] Yanai,H., Takeuchi,K., Takane,Y., Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition, Springer, 2011.