OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Příklady pro 3.ročník MI – 2013/14

ODR prvního řádu

Vyšetřete ve kterých bodech není zaručena existence a jednoznačnost řešení. Určete obecné (případně také singulární) řešení. Nalezněte řešení procházející zadanými body (splňující počáteční podmínku). V případě existence bodů, kde se řešení kříží, určete všechna úplná řešení. V případě, že řešení jsou definována na intervalu $\langle a, \infty)$ zkoumejte stabilitu a atraktivnost řešení. V případě autonomní rovnice určete trajektorie řešení.

Základní modelové rovnice

1. $y' + y^2 = 0 \qquad [1,1], [-1,1], [2,-1]$
2. $y' = 1 + y^2 \qquad [0,0], [\pi, 0]$
3. $y' + 2\sqrt{y} = 0 \qquad [-1,1], [1,1]$
4. $y' + \sqrt{1-y^2} = 0 \qquad [0,0], [\frac{1}{2}\pi, 0]$
5. $2\,y'\,y + 2x = 0 \qquad [0,1], [0,-2]$
6. $2\,y'\,y = 2x \qquad [0,1], [3,-2]$

Lineární rovnice

1. $y' - y = x^2 \qquad [0,1], [0,0]$
2. $y' - y = e^x \qquad [0,0], [0,1]$
3. $x\,y' + y = 2\,x \qquad [1,0], [1,1], [1,2]$
4. $x\,y' - y = x^2 \qquad [1,0], [1,1]$
5. $x\,y' = 2y + x \qquad [1,1], [1,0]$
6. $x\,y' = y - \frac{2}{x} \qquad [-1,-1], [-1,0]$
7. $x\,y' = 2y + x \qquad [1,-1], [1,0]$

8. $x\,y' - 3y = 2x \qquad [1,-1],[1,0],[1,1]$

9. $x\,y' + y = 3x^2 \qquad [1,1],[1,0]$

10. $x\,y' + 2y = 3x \qquad [1,1],[1,0]$

11. $x\,y' = y + \frac{2}{x} \qquad [-1,1],[-1,0]$

12. $(x^2-1)y' = 2xy - 2x^2 - 2 \quad [0,1],[0,0],[0,-1]$ Pomůcka $[\frac{x}{x^2-1}]' =?$

13. $(x^2+1)y' = 2xy - 2x^2 + 2 \quad [0,1],[0,0],[0,-1]$ Pomůcka $[\frac{x}{x^2+1}]' =?$

Lineární ODR druhého a třetího řádu

Určete obecné řešení uvedených rovnic. Vyšetřete stabilitu a atraktivitu řešení. V případě rovnice druhého řádu pro příslušnou rovnici bez pravé strany načrtněte trajektorie řešení v okolí nulového řešení a určete typ singularity.

1. $y'' = 0$
2. $y'' - 3y' = 0$
3. $y'' + 3y' = 0$
4. $y'' + 3y' + 2y = 0$
5. $y'' + 3y' - 10y = 0$
6. $y'' - 3y' - 10y = 0$
7. $y'' - 7y' + 10y = 0$
8. $y'' + 7y' + 10y = 0$
9. $y'' + y' - 12y = 0$
10. $y'' - y' - 12y = 0$
11. $y'' + 4y' - 12y = 0$
12. $y'' - 4y' - 12y = 0$
13. $y'' + 7y' + 12y = 0$
14. $y'' + 8y' + 12y = 0$
15. $y'' + 5y' + 6y = 0$
16. $y'' - y' + 12y = 0$
17. $y'' - 4y = 0$
18. $y'' + 4y = 0$
19. $y'' - 9y = 0$
20. $y'' + 9y = 0$
21. $y'' - 16y = 0$
22. $y'' + 16y = 0$
23. $y'' + 2y' + y = 0$
24. $y'' + 4y' + 4y = 0$
25. $y'' - 2y' + 4y = 0$
26. $y'' - 4y' + 4y = 0$
27. $y'' + 6y' + 9y = 0$
28. $y'' - 6y' + 9y = 0$

29. $y'' + 2y' + 2y = 0$

30. $y'' - 2y' + 2y = 0$

31. $y'' + 4y' + 5y = 0$

32. $y'' - 4y' + 5y = 0$

33. $y'' + 2y' + 5y = 0$

34. $y'' - 2y' + 5y = 0$

35. $y'' + 4y' + 8y = 0$

36. $y'' - 4y' + 13y = 0$

37. $y'' + 6y' + 13y = 0$

38. $y'' - 6y' + 13y = 0$

39. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

40. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

41. $y''' + 9y' = 2x + e^{3x}$

Soustavy lineárních ODR prvního řádu

Určete obecné řešení uvedené soustavy rovnic. Vyšetřete stabilitu a atraktivitu řešení. Pro příslušnou soustavu bez pravé strany načrtněte trajektorie řešení v okolí nulového řešení a určete typ singularity.

1.
$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2\,y_2 + 2\,e^{-3x} \\ y_2' &= 3\,y_1 - 4\,y_2 - 6\,e^{-3x} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} y' &= -y - 2\,z \\ z' &= 2\,y - -z \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} y' &= -y \\ z' &= 0 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= 0 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} y' &= 3\,y + 4\,z + 6\,e^{-3x}\,, \\ z' &= 5\,y + 2\,z + 10\,e^{-3x}\,. \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} y' &= y + 2\,z + 2\,e^{3x}\,, \\ z' &= 3\,y - 4\,z + e^{3x}\,. \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} y' &= 6\,y - 2\,z - 6\,e^{2x}\,, \\ z' &= 4\,y - 3\,z - 3\,e^{2x}\,. \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} y' &= y + 3\,z + 6\,e^{-2x}\,, \\ z' &= 2\,y - 4\,z - 8\,e^{-2x}\,. \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} y' &= y - 6\,z - 9\,e^{2x}\,, \\ z' &= 3\,y - 8\,z - e^{2x}\,. \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} y' &= y - 5z - 11e^{3x}, \\ z' &= 4y - 8z + e^{3x}. \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} y' &= 5y + 4z + 5e^{2x}, \\ z' &= 3y + z + 10e^{2x}. \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} y' &= 4y - 9z - 9e^{-2x}, \\ z' &= 2y - 7z - e^{-2x}. \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} y' &= y + 4z + 10e^{-2x}, \\ z' &= 2y - 6z \quad . \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 + 2e^{3x}, \\ y_2' &= 3y_1 - 4y_2 + e^{3x}. \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 3y_2, \\ y_2' &= 3y_1 + y_2. \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned} y' &= 3y - z, \\ z' &= y + z. \end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned} y' &= 2y + 4z, \\ z' &= -2y - 2z. \end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' &= 2y_1 - y_2 \qquad (\lambda = 1, 2, -1). \end{aligned}$$

19.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 - y_3, \\ y_2' &= -y_1 + y_2 + y_3, \\ y_3' &= y_1 - y_3 \qquad (\lambda = 0, 2, -1). \end{aligned}$$

20.

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_2 + y_3, \\ y_3' &= 4y_1 - y_2 + 4y_3 \quad (\lambda = 1, 2, 5). \end{aligned}$$