1 Výroková logika

1.1 Výrokové formule

- *Pravdivostní tabulka* formule: přiřazení pravdivostních hodnot 0,1 ke každému ohodnocení proměnných
- *Tabulka pravdy* formule: výběr všech řádků z pravdivostní tabulky formule nabývajících pravdivostní hodnoty 1
- *Tabulka nepravdy* formule: výběr všech řádků z pravdivostní tabulky formule nabývajících pravdivostní hodnoty 0

1. Tabulkovou metodou rozhodněte, zda je daná formule tautologie:

   (a)

$$((A \to B) \wedge (C \to D)) \vee (\neg(A \vee C) \to (B \vee D))$$

A	B	C	D	$((A$	$\to$	$B)$	$\wedge$	$(C$	$\to$	$D))$	$\vee$	$(\neg$	$(A$	$\vee$	$C)$	$\to$	$(B$	$\vee$	$D))$
1	1	1	1		1	1	1		1	1	1								
1	1	1	0								1	0	1	1		1			
1	1	0	1								1	0	1	1		1			
1	1	0	0								1	0	1	1		1			
1	0	1	1								1	0	1	1		1			
1	0	1	0								1	0	1	1		1			
1	0	0	1								1	0	1	1		1			
1	0	0	0								1	0	1	1		1			
0	1	1	1								1	0		1	1	1			
0	1	1	0								1	0		1	1	1			
0	1	0	1		1	1	1		1	1	1								
0	1	0	0								1					1	1	1	
0	0	1	1								1	0		1	1	1			
0	0	1	0								1	0		1	1	1			
0	0	0	1	0	1		1	0	1		1								
0	0	0	0	0	1		1	0	1		1								

   (b) $((A \to B) \wedge (C \to D)) \to ((A \vee C) \to (B \vee D))$ [je tautologie]

   (c) $((A \vee C) \to (B \vee D)) \to ((A \to B) \wedge (C \to D))$ [není tautologie]

2. K dané pravdivostní tabulce najděte formuli výrokové logiky a zjednodušte ji

   (a)

A	B	C	ϕ
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Řešení: $\phi \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \overset{\text{distribut.}}{\equiv} (A \wedge B \wedge (C \vee \neg C)) \vee (\neg B \wedge ((A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C)) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg B \wedge (A \Leftrightarrow \neg C))$
Jiné řešení: $\phi \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \overset{\text{distribut.}}{\equiv} (A \wedge ((B \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C))) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \equiv (A \wedge (B \vee \neg C)) \vee (\neg A \wedge \neg(B \vee \neg C)) \equiv A \Leftrightarrow (C \Rightarrow B)$

(b) Tabulka pravdy pro ϕ

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

Řešení: pomocí Carnaughovy mapy

	$A \wedge B$	$\neg A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$A \wedge \neg B$
C	1^*	1^*	0	0
$\neg C$	0	0	1^{**}	1^{**}

Z bloků označených $*$ nebo $**$ (obdélníky o rozměrech $2^k \times 2^l$) dostáváme formuli: $(B \wedge C) \vee (\neg B \vee \neg C)$, což je ekvivalentní $B \leftrightarrow C$.

(c) Tabulka nepravdy pro ϕ

A	B	C
1	1	1
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	1	0

(d)

A	B	C	D	ϕ
1	1	1	1	1
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

(e) Tabulka pravdy pro ϕ

A	B	C	D
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	0	0

3. Aritemticky zjistěte, zda se jedná o tautologii:

   (a)
   $$\phi \equiv (A \to (B \wedge C)) \to (A \to B)$$
   Řešení: Nechť $a = v(A), b = v(B), c = v(C)$. Pak $v(\phi) = 1 - v(A \to (B \wedge C)) + v(A \to (B \wedge C))v(A \to B) = 1 - (1 - a + abc) + (1 - a + abc)(1 - a + ab) = 1$

   (b) $\phi \equiv (A \Leftrightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg(A \Leftrightarrow B)$

   (c) $\phi \equiv (A \Leftrightarrow (B \vee C)) \to (\neg A \to \neg B)$

1.2 Normální tvary

4. Převeďte formuli do DNF a CNF

   (a) $((\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee (C \vee \neg B))) \wedge (\neg(A \wedge B) \vee \neg C)$
   Řešení: $(\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee (C \vee \neg B)) \wedge (\neg(A \wedge B) \vee \neg C) \equiv (\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \equiv (\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$ (CNF)
   $(\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \equiv \neg B \vee (C \wedge (\neg A \vee \neg C))) \equiv \neg B \vee (\neg A \wedge C))$ (DNF)
   $\neg B \vee (\neg A \wedge C)) \equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee C)$ (CNF)

   (b) $(A \vee B) \to (B \wedge C)$

   (c) $((A \vee C) \to (B \vee D)) \to ((A \to B) \wedge (C \to D))$

5. Převeďte formuli do úplného normálního tvaru: CDNF a CCNF (pokud to jde)

   (a) $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B) \vee \neg C)$

   (b) $\neg((A \wedge B) \vee (B \wedge C)))$

   (c) $\neg B \to ((\neg A \wedge B) \to C)$

   (d) $((A \vee C) \to (B \vee D)) \to ((A \to B) \wedge (C \to D))$

6. Najděte všechny formule v DNF a CNF o 2 proměnných logicky ekvivalentní s formulí (až na pořadí literálů a disjunkci s kontradikcí, resp. konjunkci s tautologií)

(a) $(A \to B) \to \neg A$
Řešení DNF: 1) $\neg(\neg A \vee B) \vee \neg A \equiv (A \wedge \neg B) \vee \neg A$
2) $(A \wedge \neg B) \vee \neg A \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
3) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \equiv ((A \vee \neg A) \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \equiv (\neg A \wedge B) \vee \neg B$
4) $(A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee (\neg A \wedge B) \vee \neg B \equiv \neg A \vee \neg B$ - je i v CCNF (další CNF nejsou)

(b) $(A \to B) \wedge A$

7. Převeďte obecnou formuli v DNF do CNF a naopak.

(a) pomocí distributivity
(b) pomocí duality a úplného tvaru (CDNF $\to$ CCNF)

8. Pomocí duality najděte formuli odpovídající tabulce nepravdy

A	B	C	D
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	0	1

9. Nechť formule ϕ a ψ jsou zadány následujícími tabulkami pravdy. Pomocí duality najděte tabulku pravdy pro formuli $\phi \vee \psi$ a vyjádřete tuto formuli.

A	B	C	D
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0

A	B	C	D
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	0
0	1	0	0

Řešení: Množina řádků tabulky pravdy pro $\phi \vee \psi$ je sjednocením množin řádků tabulek pravdy pro ϕ a ψ. Tedy

A	B	C	D
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	1	0	0

,

tj., $(A \wedge C) \leftrightarrow (B \to D)$

1.3 Algebraická struktura výrokových formulí

- P - množina výrokových proměnných
- $F(P)$ - množina výrokových formulí nad P

- $F(P) = F(P)/\equiv$ - množina tříd logické ekvivalence

10. Dokažte, že
    a) na $F(P)$ jsou dobře definovány operace $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
    b) $(F(P), \vee)$, je monoid s nulovým prvkem,
    c) $(F(P), \wedge)$ je polosvaz,
    d) $(\phi, \psi) \in \rho \Leftrightarrow \phi \vee \psi \equiv \psi$ definuje uspořádání ρ s nejmenším prvkem $\bot$ a největším prvkem $\top$.
    e) $F(P)$ tvoří Booleův svaz.

11. Nechť J je množina atomů svazu $F(P)$
    a) Popište prvky množiny J,
    b) najděte bijekci $J \rightarrow \mathcal{P}(P)$,
    c) dokažte, že $F(P) \cong \mathcal{P}(J)$ na úrovni Booleových algeber.

12. Na každé Booleově algebře $(L, \vee, \wedge, ', 1, 0)$ je definována struktura okruhu $(L, +, \cdot)$, kde $x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$ a $x \cdot y = x \wedge y$.
    a) Popište strukturu Booleova okruhu $(F(P), +, \cdot)$, uveďte co jsou operace $+, \cdot$.
    b) Dokažte, že $(F(P), \leftrightarrow, \top)$ tvoří grupu a určete její řád,
    c) Dokažte, že $(F(P), \leftrightarrow, \vee)$ tvoří okruh.
    d) Najděte izomorfismus okruhů $(F(P), \leftrightarrow, \vee) \rightarrow (F(P), +, \cdot)$.

13. Nechť X je množina, $s : P \rightarrow \mathcal{P}(X)$ je zobrazení a uvažujme pro každé $A \in P$ výrok $(A, x) = (x \in s(A))$. Nyní pro každou n-ární výrokovou spojku $\alpha(A_1, \ldots, A_n)$ definujeme

    $$\underline{\alpha}(s(A_1), \ldots, s(A_n)) = \{x \in X \mid \overline{v}(\alpha((A_1, x), \ldots, (A_n, x))) = 1\},$$

    kde $\overline{v}(-)$ je pravdivostní hodnota formule.
    Volme $P = X$ a $s(A) = \{A\}$.
    a) Dokažte, že pomocí operací $\underline{\vee}, \underline{\bot}$ vygenerujeme celou množinu $\mathcal{P}(X)$ a pro každou formuli obsahující n proměnných definuje $\underline{\alpha}$ n-ární operaci na $\mathcal{P}(X)$.
    b) Uveďte, kterým množinovým operacím odpovídá $\underline{\neg}, \underline{\wedge}, \underline{\rightarrow}, \underline{\leftrightarrow}, \underline{\mid}, \underline{\downarrow}, \underline{XOR}$?
    c) Najděte izomorfismus $\sigma : F(P) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ zachovávající všechny výrokové operace, tj. $\sigma(\alpha(A_1, \ldots, A_n)) = \underline{\alpha}(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_n))$.
    d) Pomocí izomorfismu σ^{-1} definujte operaci na $F(P)$ odpovídající množinovému rozdílu.
    e) Pomocí izomorfismu σ a (12a) najděte Booleovský okruh na množině $\mathcal{P}(X)$ a popište jeho operace.
    f) Popište okruh na $\mathcal{P}(X)$ vzniklý pomocí σ z okruhu $(F(P), \leftrightarrow, \top)$.

14. Pro každou formuli α obsahující n proměnných definujme n-ární relaci $\widehat{\alpha}$ na množinách, kde

$$\widehat{\alpha}(A_1, \dots A_n) \Leftrightarrow \underline{\alpha}(s(A_1), \dots, s(A_n)) = X.$$

a) Popište relace $\widehat{\neg}, \widehat{\vee}, \widehat{\wedge}, \widehat{\Rightarrow}, \widehat{\Leftrightarrow}, \widehat{|}, \widehat{\downarrow}, \widehat{XOR}$

b) Vyjádřete pomocí vhodné relace $\widehat{\alpha}$ disjunktnost.

c) Popište vztah relací $\widehat{\alpha}$ a $\widehat{\neg\alpha}$ pro libovolné α. Dá se pomocí $\widehat{-}$ vyjádřit opačná relace k $\widehat{\alpha}$?

1.4 Hledání neznámé výrokové formule

15. Popište množinu všech formulí ϕ takových, že následující výroková formule je tautologie:

$((A \vee B) \to \phi) \to (\phi \to (\neg B \wedge A))$

Řešení: Doplníme tabulku známých hodnot

A	B	$((A$	$\vee$	$B)$	$\to$	$\phi)$	$\to$	$(\phi$	$\to$	$(\neg$	B	$\wedge$	$A)$
1	1	1	1		$v(\phi)$	$v(\phi)$	1	$v(\phi)$	$v(\neg\phi)$	0	1	0	
1	0	1					1	$-$	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	$v(\phi)$	$v(\phi)$	1	$v(\phi)$	$v(\neg\phi)$			0	0
0	0	0	0	0	1		1	$-$		1	0	0	0

V 1. a 3. případě máme $v(\phi \to \neg\phi) = 1$, tedy $v(\phi) = 0$. Protože v dalších dvou pravdivostní hodnota formule nezávisí na hodnotě $v(\phi)$, můžeme volit minimální, resp. maximální řešení doplněním 0, resp. 1. :

A	B	ϕ_{min}	ϕ_{max}
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

Tedy $\phi \in [\bot, \neg B]$.

(a) $(A \to B) \to (C \to (\neg A \to \phi))$

$[\neg A \wedge C, \top]$

(b) $\neg B \leftrightarrow (A \to \neg\phi))$

$\emptyset$

(c) $\phi \to (A \to (B \vee \phi))$

$F(A, B)$

(d) $(A \wedge \neg B \wedge (C \vee \neg\phi)) \vee (\phi \wedge (B \vee C))$

$[\neg A \wedge B, B \vee C]$

(e) $(C \to (A \vee \neg\phi)) \wedge (B \to (C \to (\phi \vee \neg A)))$

$[B \wedge \neg C, A \vee \neg C]$

(f) Soustava tautologií:
   i. $(A \to B) \to (\phi \vee C)$
   ii. $(B \wedge C) \to (A \vee \phi)$
   iii. $\phi \to (A \to (B \vee C))$

   Návod: najdeme řešení pro každou tautologii zvlášť a pak vhodnou operací na množinách řešení dostaneme výsledek.

1.5 Generování a báze spojek výrokové logiky

16. Popište systém spojek arity n vygenerovaný následujícími množinami:

(a) $\{\vee\}$, libovolné n
Řešení: Z asociativity $\vee$ hned plyne, že jediné formule jsou $\bigvee_{i \in I} A_i$.

(b) $\{\to\}$, $n = 2$
Řešení: zjevně platí: $(A \to B) \to B \cong A \vee B$, $A \to A \cong T$, $(A \to A) \to A \cong A$. Tedy máme 6 binárních spojek o proměnných A, B:

A	B	$A \to B$	$B \to A$	T	A	B	$A \vee B$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0

Vzhledem k tomu, že při ohodnocení proměnných $v(A) = 1$, $v(B) = 1$, je pravdivostní hodnota implikace rovna 1, jediné další přípustné spojky jsou

A	B	$A \wedge B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	1

Předpokládejme, že τ je minimální (vzhl. k relaci podformule) formule složená z $\to$ ekvivalentní s $A \wedge B$. Tedy $\tau = \phi \to \psi$ pro nějaké formule ϕ a ψ. Protože ale $A \wedge B$ je nepravdivé, právě když je pravdivé aspoň jedna proměnná z A a B a současně když je pravdivé ϕ a nepravdivé ψ, znamená to, že ϕ je pravdivé ve všech případech, kdy je aspoň jedna z proměnných nepravdivá. Tedy ϕ je tautologie (dle tabulky), proto ψ musí být pravdivé právě tehdy když jsou současně A a B pravdivé, tedy $\psi \equiv A \wedge B$, což je spor s minimalitou τ. Důkaz pro $A \leftrightarrow B$ vytvořte analogicky sami.

(c) $\leftrightarrow$, n libovolné
Nápověda: Využijte (12b).

(d) $\{\div\}$ (XOR), $n = 1, 2, 3$

(e) $\{\vee, \wedge\}$, $n = 1, 2, 3$

(f) $\{\div, \wedge\}$, $n = 1, 2$

(g) $\{\div, \neg\}$, $n = 1, 2$

17. Převeďte formule $\neg A, A \vee B, A \wedge B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B, A \mid B, A \downarrow B, A \div B$ do systémů:

    (a) $\{\neg, \vee\}$

    (b) $\{\neg, \wedge\}$

    (c) $\{\neg, \rightarrow\}$

    (d) $\{|\}$

    (e) $\{\downarrow\}$

18. Vhodnou binární spojkou doplňte danou množinu na bázi výrokových spojek.

    (a) $\{\leftrightarrow\}$

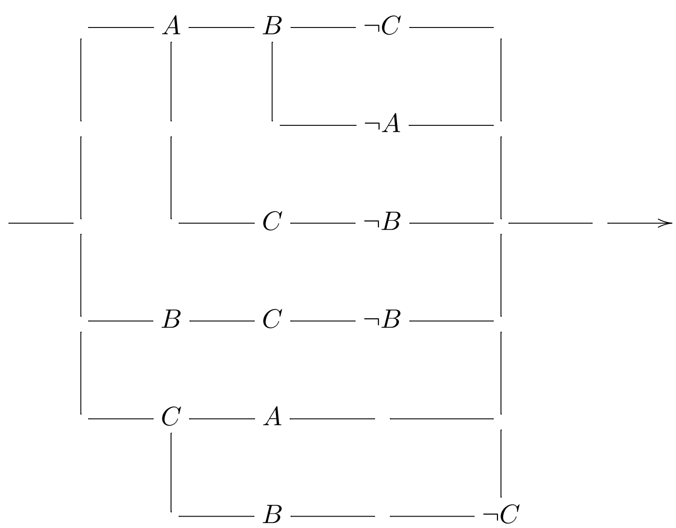
    $[\{\leftrightarrow, *\}$, kde $A * B \equiv A \wedge \neg B]$

    (b) $\{\div\}$

    $[\{\div, \rightarrow\}]$

1.6 Elektrické sítě

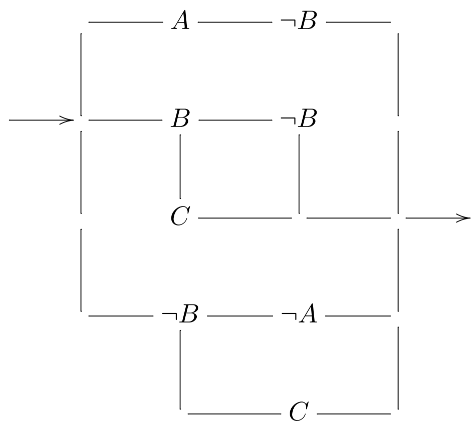
19. Rozhodněte, zda jsou dané dvě sítě ekvivalentní:



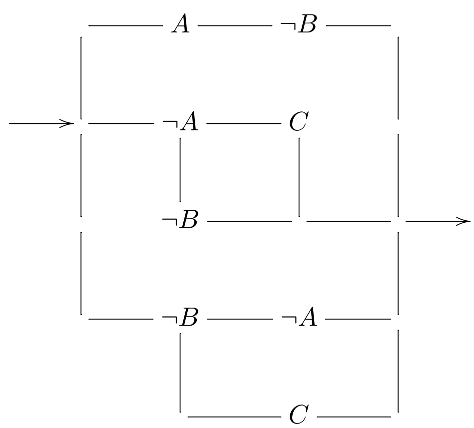
Řešení: cesty (posloupnost sepnutých vypínačů) odpovídající průchodu proudu zaznamenáme do Carnaughovy mapy:

	$A \wedge B$	$\neg A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$A \wedge \neg B$
C	1^*	1^*	0	0
$\neg C$	0	0	1^{**}	1^{**}

20. Minimalizujte síť:



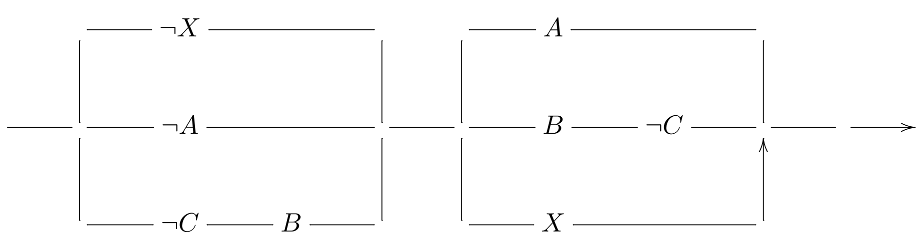
21. Najděte negaci sítě:



22. Najděte minimální ekvivalentní síť X, pokud existuje, tak aby síť S, která ji obsahuje, byla triviální (tj. tautologická):

(a)

$S =$



Řešení:
Síť převedeme na formuli a upravíme do DNF

$$
\begin{aligned}
\phi &\equiv (\neg X \vee \neg A \vee (\neg C \wedge C))) \wedge (A \vee (B \wedge \neg C) \vee X) \\
&\equiv (\neg X \wedge A) \vee (B \wedge \neg C) \vee (X \wedge \neg A)
\end{aligned}
$$

(To se dá provést pomocí Carnaughovy mapy.) Následně vyřešíme problém tautologie protuto formuli s neznámou X. Můžeme využít DNF, což umožní snazší orientaci ve pravdivostních hodnotách:

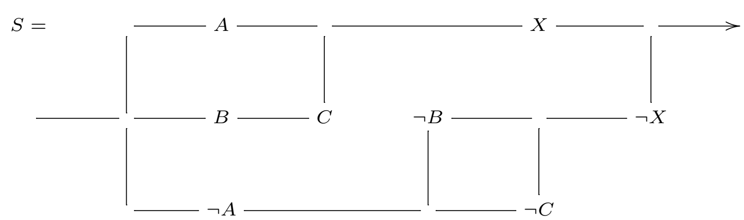
A	B	C	$\vee$	$\wedge$	$(A$	$\neg X)$	$\wedge$	$(B$	$\neg C)$	$\wedge$	$(\neg A$	$X)$	X
1	1	1	$\neg X$	$\neg X$	1	$\neg X$	0	1	0	0	0		0
1	1	0	1	$\neg X$	1	$\neg X$	1	1	1	0	0		–
1	0	1	$\neg X$	$\neg X$	1	$\neg X$	0		0	0	0		0
1	0	0	$\neg X$	$\neg X$	1	$\neg X$	0	0		0	0		0
0	1	1	X				0		0	X	1	X	1
0	1	0	1				1	1	1	X	1	X	–
0	0	1	X				0		0	X	1	X	1
0	0	0	X				0	0		X	1	X	1

Výsledná množina formulí se přepíše zpátky do Carnaughovy mapy.

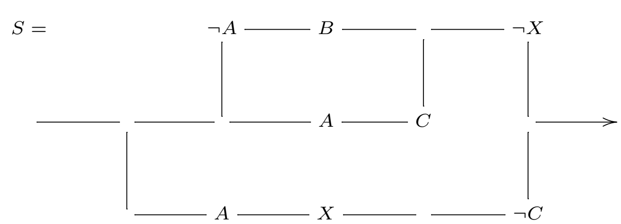
	$A \wedge B$	$\neg A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$A \wedge \neg B$
C	0	0	1^*	1^*
$\neg C$	0	–	$-^*$	1^*

Položky – doplníme tak, aby vzniklá formule měla minimální tvar, tj. aby vzniklo co nejméně přípustnách obdélníků. Řešení (označeno $*$) dává formuli $\neg A$. Tedy $-\neg A \rightarrow$ je hledaná minimální síť.

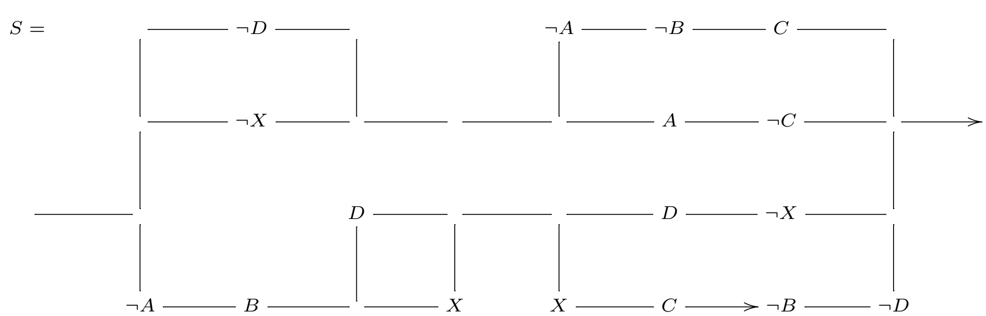
(b)



(c)



(d)



1.7 Důkazový systém

23. Na základě formálního důkazového systému dokažte následující tvrzení (s užitím znalosti uvedených tvrzení):

    a) $A \to B \vdash C \to (A \to B)$

    b) $\neg B, A \to (A \to B) \vdash \neg A$; (známe $\alpha : A \vdash A$, $\beta : \neg\neg A \vdash A$, $\gamma : A \vdash \neg\neg A$)
    Návod:0)předpoklady, 1) A2, 2) MP (0,1), 3) α, 4) MP (2,3), 5) předpoklad $\neg\neg A$, 6) β, 7) MP (5,6), 8) MP (7,4), 9) γ, 10) MP (8,9), 11) VD, 12) A3 13) MP (13,12), 14) MP (0,13)

    c) $A \to (B \to C), \neg B \to \neg A \vdash A \to C$
    Stručný návod: použijte předpoklady, axiomy A2, A3 a několikrát pravidlo odloučení.

2 Predikátová logika

2.1 Sémantika

24. Mějme jazyk L s jedním binárním predikátovým symbolem a formule $\phi \equiv \exists x p(x,x)$
    $\chi \equiv p(x,y) \Rightarrow \exists z p(z,x)$
    $\psi \equiv \exists x \exists y p(x,y)$
    a nechť $T = \{\phi, \chi\}$. Uvažujme realizaci $\mathcal{M}$ s univerzem $\mathbb{Z}$, kde

    $$(a,b) \in p_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \mathrm{nsd}(a,b) = 1$$

    a ohodnocení proměnných e, kde $e(x) = 2$,$e(y) = 1$,$e(z) = 4$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí:

    (a) $\mathcal{M} \models \phi$,

    (b) $\mathcal{M} \models \chi[e]$,

    (c) $\mathcal{M} \models \neg\psi$,

    (d) $\models \phi$,

    (e) $T \models \psi$.

25. Uvažujme jazyk L s rovností, binárním predikátovým symbolem p, nulárním funkčním symbolem e a binárním funkčním symbolem f.
    Nechť $\mathcal{M}$ je taková realizace jazyka L na univerzu $\mathbb{Z}$ všech celých čísel, kde

    $$p_{\mathcal{M}}(m,n) \Leftrightarrow \text{existuje celé číslo } k, \text{ kde } km = n,$$

    $$e_{\mathcal{M}} = 0,$$

    $$f_{\mathcal{M}}(m,n) = m - n.$$

    Doplňte následující tabulku ($\checkmark$ = pravda, $\times$ = nepravda).

α	$\mathcal{M} \models \alpha$	$\mathcal{M} \models \neg\alpha$
$p(x,y) \to f(x,y) = f(y,x)$		
$p(e,x) \to p(y, f(x,y))$		
$\exists x \forall y (p(x,y) \to \neg p(y,x))$		
$p(x,e) \vee p(y, f(x,y))$		

26. Uvažujme realizaci $\mathcal{R}$ jazyka s jedním binárním predikátovým symbolem p, rovností a binárním funkčním symbolem f s univerzem $\mathbb{R}$, kde $p_{\mathcal{R}}(a,b) \Leftrightarrow a \leq b$ a $f_{\mathcal{R}}(a,b) = a + b$.

    a) Rozhodněte, zda $\mathcal{R} \models T_U$ a $\mathcal{R} \models T_{AG}$, kde T_U, resp T_{AG} jsou teorie uspořádání, resp. komutativních grup.

    b) Najděte formuli ϕ, která bude při ohodnocení proměnných $e(x) = a, e(y) = b, e(z) = c$ znamenat, že existuje trojúhelník o stranách a, b, c.

    c) Rozhodněte, zda

       i) $T_U \cup T_{AG} \vdash \phi$

       ii) $T_U \cup T_{AG} \cup \{\phi\} \vdash p(a, f(a,b))$

       iii) $T_U \cup T_{AG} \cup \{\phi\} \vdash p(f(a,b), b)$

       $T_U \cup T_{AG} \cup \{\phi\} \vdash$

27. V jazyce s jedním bunárním funkčním symbolem f a rovností uvažujeme realizaci $\mathcal{M}$ s univerzem $\mathbb{Z}$, kde $f_{\mathcal{M}}(a,b) = a + b$. Najděte formuli vyjadřující vlastnost $a < b$ pro $a, b \in \mathbb{Z}$.

2.2 Formule predikátové logiky

2.3 Důkazový systém

28. Sestrojte důkaz věty $\phi(x,y) \vdash \phi(y,x)$.
    Návod: Předpoklad: $\phi(x,y)$. Následuje 2x pravidlo zobecnění, axiom substituce, pravidlo odloučení, axiom substituce, pravidlo odloučení, pravidlo zobecnění, axiom substituce, pravidlo odloučení.

29. Dokažte formuli

$$\varphi \equiv \forall x \forall y p(x,y) \to \forall x (p(x,x) \to \forall y p(x,y))$$

    dle následujícího návodu:
    1. Vezměte vhodnou formuli jako předpoklad, potom užijte
    2. axiom substituce,
    3. pravidlo odloučení,
    4. axiom A1,
    5. pravidlo odloučení,
    6. pravidlo zobecnění,
    7. větu o dedukci.

30. Dokažte formuli $\eta = \forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x \phi \to \forall x \psi)$, Stručný návod: použijte AS, MG, opakovaně MP a VD.

31. $\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\exists \phi \to \exists \psi)$ s použitím tautologie $\tau = (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ a věty η výše. Návod: 0) předpoklad, 1) AS, 2) MP, 3) τ, 4) MP, 5) MG, 6) η, 7) MP, 8) τ, 9) MP, 10) zjednodušení ($\neg \forall x \neg \cong \exists x$), 11) VD.

2.4 Prenexní tvary

32. Převeďte formuli do prenexního tvaru:

$$\forall y \forall x \phi(x, y) \Rightarrow \forall x \neg(\exists z \psi(z) \wedge \phi(y, x))$$

33. Převeďte do prenexního tvaru formuli $\exists y(\forall x q(x, y) \to \forall x p(x)) \to (\exists z \exists y p(y) \to \forall y \forall x q(y, x))$.

34. Pomocí v prenexního tvaru rozhodněte, zda jsou dané formule logicky ekvivalentní.

    a) $\alpha \equiv \forall x(\exists u p(u, y) \to \exists y \exists z(\forall x q(y, z) \to \exists v p(v, z)))$, $\beta \equiv \forall x(p(x, y) \to \exists y \forall x(\forall x q(x, z) \to \exists z p(y, z)))$.

    b) $\alpha \equiv \exists x(\exists u p(u, y) \to \forall y \exists u(\forall y q(y, z) \to p(x, u)))$, $\beta \equiv \forall x(p(x, y) \to \exists y \forall x(\forall x q(x, z) \to \exists z p(y, z)))$.

    c) $\alpha \equiv (\forall x)(\forall y(p(y, z) \to \forall z q(y, z, x)) \to \exists z(\exists u q(y, u, x) \to \exists z \exists x q(y, x, z)))$,
    $\beta \equiv \exists x \forall y(p(y, z) \to \forall z q(y, z, x))) \to \forall x \exists y(\exists u q(y, u, x) \to \exists x \exists z q(y, x, z))$