

## Příklady z Matematiky 2

### 1. Určete definiční obor funkce $f(x, y)$ a načrtněte ho v rovině

a)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x} + \ln(2 - x - y)$

b)  $f(x, y) = \sqrt{(x + y - 1)(1 - x^2 - y^2)}$

c)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$

d)  $f(x, y) = \sqrt{\ln(5 - x^2 - 4y^2)}$

**Řešení:** **a)**  $Df = \{[x, y] \mid (x - 2)^2 + y^2 \geq 4 \wedge 2 > x + y\}$ , **b)**  $Df = \{[x, y] \mid (x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 1 \leq x + y) \vee (x^2 + y^2 \geq 1 \wedge 1 \geq x + y)\}$ , **c)**  $Df = \{[x, y] \mid x \geq \frac{y^2}{4} \wedge 1 > x^2 + y^2\} - [0, 0]$ , **d)**  $Df = \{[x, y] \mid 1 \geq \frac{x^2}{4} + y^2\}$

### 2. Limita a spojitost funkce

a) Vypočítejte limitu  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,-1,2)} \frac{z \cos(x+y)}{xz^2+2y}$

b) Vypočítejte limitu  $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-3)} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$

c) Ukažte, že následující limita neexistuje  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

d) Určete množinu  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  na níž je funkce  $f$  spojitá, kde

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}, & [x, y] \neq [0, 0] \\ 4, & [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

**Řešení:** **a)** 1, **b)**  $\frac{9}{2}$ , **c)** subs.  $y = kx$ , **d)**  $M = \{[x, y] \mid x^2 + y^2 \leq 4\} - \{[0, 0]\}$ .

### 3. Parciální a směrové derivace, gradient

a) Určete všechny parciální derivace prvního řádu funkce  $f(x, y, z) = \sqrt{x} \cos(2x - y^2 + 3z)$

b) Dokažte, že pro funkci  $f(x, y) = \ln \frac{x}{1+y}$  platí  $f_{xy} = f_{yx}$ .

c) Spočítejte směrovou derivaci funkce  $f$  ve směru vektoru  $u = (1, 1)$  v bodě  $A = [0, \pi]$ ,  $f(x, y) = \cos(x + y)\sqrt{x^2 + y^2}$

d) Určete jaký úhel spolu svírají gradienty funkcí  $f$  a  $g$  v bodě  $A[0, 1]$

$$f(x, y) = \sqrt{y - x} \sin x, \quad g(x, y) = (y - 2x) e^{y-1}.$$

**Řešení:** **a)**  $f_x = \frac{\cos(2x-y^2+3z)}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \sin(2x-y^2+3z)$ ,  $f_y = 2y\sqrt{x} \sin(2x-y^2+3z)$ ,  $f_z = -3\sqrt{x} \sin(2x-y^2+3z)$ , **b)**  $f_{xy} = 0 = f_{yx}$ , **c)**  $f_{\vec{u}}(A) = -1$ , **d)**  $\alpha = 45^\circ$ .

### 4. Diferenciál a tečná rovina

a) Určete první diferenciál funkce  $f(x, y, z) = x \sin(x^2 + 2y - 3z)$  v bodě  $A[1, 1, 1]$ .

b) Určete druhý diferenciál funkce  $f(x, y) = \frac{y}{x}$  v bodě  $A[1, 1]$  pro  $\vec{h} = (0.1, -0.3)$ .

c) Pomocí 1. diferenciálu určete přibližnou hodnotu výrazu  $\ln \frac{0.99}{1.02}$

d) Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce  $f(x, y) = x^2y - y^2\sqrt{x}$  v bodě  $A[1, 2, ?]$ .

**Řešení:** **a)**  $2dx + 2dy - 3dz$ , **b)** 0.08, **c)** -0.03, **d)**  $2x - 3y - z + 2 = 0$

### 5. Taylorův polynom

a) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce  $f(x, y, z) = \cos(x - y) + xyz^2$  v bodě  $A[0, 0, 1]$ .

b) Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  v bodě  $A[1, 1]$

c) Pomocí příslušného Taylorova polynom 2. stupně určete přibližnou hodnotu výrazu  $\arctan \frac{0.2}{0.99}$

**Řešení:** **a)**  $T_2(x, y, z) = 1 - \frac{x^2}{2} + 2xy - \frac{y^2}{2}$ , **b)**  $T_3(x, y) = 1 + x - y - (x-1)(y-1) + (y-1)^2 + (x-1)(y-1)^2 - (y-1)^3$ , **c)** 0.202.

## 6. Extrémy funkce více proměnných

- a) Nalezněte lokální extrémy funkce  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$
- b) Nalezněte lokální extrémy funkce  $f(x, y, z) = x^3 - 2x^2 + y^2 - 2xy + xz - yz + 3z + 2$ .
- c) Nalezněte vázané extrémy funkce  $f(x, y) = xyz$  splňující podmínku  $x + y + z = 3$
- d) Nalezněte globální extrémy funkce  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$  na množině  $\Omega = \triangle ABC$ , kde  $A = [-1, 0]$ ,  $B = [1, 2]$ ,  $C = [3, 0]$
- e) Nalezněte globální extrémy funkce  $f(x, y) = 3xy$  na množině  $\Omega = \{[x, y] \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2\}$ .

**Řešení:** **a)** lok. minimum = -1 v bodě  $[1, 0]$ , **b)** sedlo v bodech  $[0, 3, 6]$ ,  $[2, 5, 6]$ , **c)** vázané maximum = 1 v bodě  $[1, 1, 1]$ , **d)** glob. minimum = -1 v bodě  $[1, 1]$ , glob. maximum = 6 v bodě  $[3, 0]$ , **e)** glob. minimum = -3 v bodě  $[-1, 1]$ , glob. minimum = 3 v bodě  $[1, 1]$ .

## 7. Vícerozměrné integrály

- a)  $\iint_{\Omega} (x - y) dx dy$  kde  $\Omega = \{[x, y] \mid x \leq y, 2 \geq y, x \geq 0\}$
- b)  $\iint_{\Omega} x dx dy$  kde hranice  $\Omega$  je tvořena křivkami  $x + y = 4$ ,  $y = 6 - x^2$
- c)  $\iint_{\Omega} y dx dy$  kde  $\Omega = \{[x, y] \mid y \geq |x|, x^2 + y^2 \leq 4\}$  (trans. do polárních souř.)
- d)  $\iint_{\Omega} (y - 1) dx dy$  kde  $\Omega = \{[x, y] \mid y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq -x, x^2 + y^2 \leq 1\}$  (trans. do polárních souř.)
- e)  $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , kde  $\Omega = \{[x, y, z] \mid z \leq 1, z \geq x^2 + y^2\}$  (trans. do cylindr. souř.)
- f)  $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , kde  $\Omega = \{[x, y, z] \mid 0 \leq z \leq 3, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2x\}$  (trans. do cylindr. souř.)
- g)  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , kde  $\Omega = \{[x, y, z] \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0, x \geq 0\}$  (trans. do sfér. souř.)
- h) Určete objem tělesa  $\Omega$  (tj.  $\iiint_{\Omega} 1 dx dy dz$ ), kde  $\Omega = \{[x, y, z] \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$  (trans. do sfér. souř.)

**Řešení:** **a)**  $-\frac{4}{3}$ , **b)**  $\frac{9}{4}$ , **c)**  $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ , **d)**  $-\frac{7}{24}\pi - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ , **e)**  $\frac{4}{15}\pi$ , **f)** 8, **g)**  $\frac{81}{8}\pi$ , **h)**  $\frac{7}{3}\pi(2 - \sqrt{2})$