

Zadání semestrální práce, DU 9a

Řešte konvekčně-difúzní úlohu (1D Burgersova rovnice s viskozitou)

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= \varepsilon u_{xx} && \text{pro } x \in (0, \ell), \ t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{pro } x \in (0, \ell), \\ u_x(x, t) &= 0 && \text{pro } x = 0, \ x = \ell, \ t \in (0, T). \end{aligned}$$

Koeficient $\varepsilon \geq 0$ reprezentuje viskozni účinky. Zvolte rovnoměrně dělení intervalu $\langle 0, \ell \rangle$, tj. pro $N > 1$ položte $h = \ell/N$ a označte $x_i = (i - \frac{1}{2})h$, $i = 1, 2, \dots, N$. Úsečka $\langle 0, \ell \rangle$ je sjednocením N buněk

$$\overline{B}_i \equiv \langle x_{i-1/2}, x_{i+1/2} \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

kde $x_{i-1/2} = x_i - \frac{1}{2}h$, $x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2}h$. Na intervalu $\langle 0, T \rangle$ zvolte dělení

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_{Q-1} < t_Q = T$$

a označme $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ délku časového kroku. Má se spočítat přibližné řešení U_i^k v buňkách B_i pro časy t_k . Pro prezentaci výsledků použijte rovnoměrné dělení $t_j^{out} = j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, M$, kde $\Delta t = T/M$. Výpočet organizujte tak, aby množina výpočetních časů $\{t_k\}_{k=0}^Q$ obsahovala množinu časů $\{t_j^{out}\}_{j=0}^M$.

Počáteční hodnoty řešení počítejte jako aproximace

$$U_i^0 \approx \frac{1}{h} \int_{B_i} u_0(x) dx \approx u_0(x_i).$$

Vlastní výpočet proveďte ve dvou krocích. Nejdříve řešte jen konvekční úlohu

$$u_t + uu_x = 0$$

metodou konečných objemů, tj. spočtete

$$U_i^* = U_i^k - \frac{\tau_k}{h} (H_{i+1/2} - H_{i-1/2}).$$

Zde $H_{i+1/2}, H_{i-1/2}$ jsou numerické toky,

$H_{i+1/2} := H(U_i^k, U_{i+1}^k)$ z buňky B_i do buňky B_{i+1} ,

$H_{i-1/2} := H(U_{i-1}^k, U_i^k)$ z buňky B_{i-1} do buňky B_i .

Použijte následující numerické toky:

Godunov: $H_G(u, v) = f(q)$, kde q určíme takto:

```

if  $u > v$  then if  $u + v > 0$  then  $q := u$  else  $q := v$ 
else if  $u \geq 0$  then  $q := u$ 
else if  $v \leq 0$  then  $q := v$  else  $q := 0$ ;
    
```

$$\begin{aligned}
\text{Lax-Friedrich:} \quad H_{LF}(u, v) &= \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) + \frac{h}{2\tau}(u - v) \\
\text{Lax-Wendroff:} \quad H_{LW}(u, v) &= f\left(\frac{1}{2}(u + v) + \frac{\tau}{2h}(f(u) - f(v))\right) \\
\text{Van-Leer:} \quad H_{VL}(u, v) &= \frac{1}{2}\left(f(u) + f(v) - \left|P\left(\frac{u + v}{2}\right)\right|(v - u)\right) \\
\text{Roe:} \quad H_R(u, v) &= \tilde{P}^+\left(\frac{u + v}{2}\right)u + \tilde{P}^-\left(\frac{u + v}{2}\right)v \\
\text{Engquist-Osher:} \quad H_{EO}(u, v) &= \tilde{P}^+(u)u + \tilde{P}^-(v)v
\end{aligned}$$

Přitom $H(u, v)$ je aproximace toku $f(w)$ z buňky, v níž je $w = u$, do sousední pravé buňky, v níž je $w = v$, pro naši úlohu je $f(w) = \frac{1}{2}w^2$. Dále $P(w) = f'(w) = w$. Protože tok $f(w) = \frac{1}{2}w^2$ není homogenní funkce řádu 1 (tj. neplatí $f(\alpha w) = \alpha f(w)$, kde α je číslo), Vijayasundaramův tok ani tok Stegera-Warminga nelze přímo použít. Můžeme však použít modifikace těchto metod, pro které bereme $\tilde{P}(w) = \frac{1}{2}w = \frac{1}{2}f'(w)$. Význam horních indexů $^+, ^-$ je tento: $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = \min(a, 0)$. Laxova-Wendrofova metoda je řádu 2, zbývající metody jsou jen řádu 1.

Poznamenejme, že modifikovaný Vijayasundaramův tok je totožný s tokem Roeovým (Roe's flux), který je zase totožný s tokem Murmana-Colea (Murman-Cole's flux) a modifikovaný tok Stegera-Warminga je totožný s tokem Engquista-Oshera (Engquist-Osher's flux), viz [1].

Laxovo-Friedrichsovo schéma se obvykle zapisuje v nekonzervativním tvaru

$$U_i^* = \frac{1}{2}(U_{i-1}^k + U_{i+1}^k - \frac{\tau_k}{h}(f(U_{i+1}^k) - f(U_{i-1}^k))).$$

U buněk B_1 a B_N využijte Neumannovu okrajovou podmínku. To lze provést užitím fiktivních buněk B_0 resp. B_{N+1} , v nichž předepíšeme hodnoty symetrické podle okraje $x = 0$ resp. $x = \ell$. Ve fiktivních buňkách tedy položíme $U_0^k = U_1^k$, $U_{N+1}^k = U_N^k$.

V druhém kroku řešte parabolický problém

$$u_t = \varepsilon u_{xx}$$

diferenční metodou, tj. spočtete

$$U_i^{k+1} = rU_{i-1}^* + (1 - 2r)U_i^* + rU_{i+1}^*, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \text{kde } r = \varepsilon \frac{\tau_k}{h^2}.$$

U buněk sousedících s hranicí $\partial\Omega$ využijte opět Neumannovu okrajovou podmínku. I tentokrát použijte fiktivní buňky, do nich však teď vložte hodnoty spočtené v konvekčním kroku. Tedy $U_0^* = U_1^*$, $U_{N+1}^* = U_N^*$.

Řešení vykreslete pro několik reprezentativních časů. Výpočet proveďte pro různé hodnoty viskozity ε . Při výpočtu je třeba zajistit splnění podmínek stability: pro $\varepsilon = 0$ jde pouze o CFL podmínku

$$\max_i |U_i^k| \frac{\tau_k}{h} \leq 1, \quad (\text{CFL})$$

pro $\varepsilon > 0$ je třeba přidat podmínku stability pro řešení parabolické úlohy explicitní Eulerovou metodou, tj. podmínku

$$\varepsilon \frac{\tau_k}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (\text{DIFF})$$

Tato podmínka se pro velmi malou viskozitu prakticky neuplatní, pro větší ε však převáží a časový krok τ_k výrazně omezí. To by nás nemělo překvapit, vždyť právě proto se explicitní Eulerova metoda pro řešení parabolických úloh téměř nepoužívá.

Při řešení parabolického problému lze použít také implicitní Eulerovu metodu. V tom případě U_i^{k+1} dostaneme jako řešení soustavy rovnic

$$-rU_{i-1}^{k+1} + (1 + 2r)U_i^{k+1} - rU_{i+1}^{k+1} = U_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Rovnici pro $i = 1$ upravíme užitím podmínky $U_0^{k+1} = U_1^{k+1}$ a podobně v rovnici pro $i = N$ použijeme $U_{N+1}^{k+1} = U_N^{k+1}$. Výsledná soustava rovnic se symetrickou třídiagonální maticí soustavy se vyřeší snadno. Délku kroku řídíme jen podmínkou (CFL), podmínka (DIFF) se neuplatní, takže pro větší ε je výpočet výrazně rychlejší.

Pro nulovou nebo velmi malou viskozitu vykazuje Lax-Wendroffovo schéma nežádoucí zvlnění v okolí rázové vlny. To je typická vlastnost schémat vyšších řádů. Zvlnění lze zhladit zvětšením hodnoty viskozního koeficientu ε . Totéž platí pro Roeův tok, pomůže opět zvětšení viskozity nebo také zmenšení časového kroku.

Literatura

- [1] C. Hirsch: *Numerical Computation of Internal and External Flows*, John Wiley & Sons, New York, 2002.