

Zadání semestrální práce, DU 9

Řešte konvektivně-difuzní úlohu (2D Burgersova rovnice s viskozitou)

$$u_t + uu_x + uu_y = \varepsilon \Delta u \quad \text{pro } (x, y) \in \Omega,$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \begin{cases} Q_1 & \text{pro } (x, y) \in \Omega_1, \\ Q_2 & \text{pro } (x, y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{na hranici } \partial\Omega.$$

Přitom $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ je obdélníková oblast, která se skládá ze dvou podoblastí Ω_1 a Ω_2 , tj. $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$. Zvolte například

$$\Omega = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle, \quad \Omega_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 0,4\}, \quad Q_1 = 10, \quad Q_2 = 1.$$

Koeficient $\varepsilon \geq 0$ reprezentuje viskozní účinky. Úlohu řešte na časovém intervalu $\langle 0, T \rangle$. Prostorovou diskretizaci proveďte na pravidelné obdélníkové síti. Zvolte $N_x > 1$, $N_y > 1$, položte $\Delta x = (b - a)/N_x$, $\Delta y = (d - c)/N_y$, označte $x_i = a + (i - \frac{1}{2})\Delta x$, $i = 1, 2, \dots, N_x$, $y_j = c + (j - \frac{1}{2})\Delta y$, $j = 1, 2, \dots, N_y$. Oblast $\overline{\Omega}$ je sjednocením obdélníkových konečných objemů (buněk)

$$\overline{\Omega}_{ij} \equiv \langle x_{i-1/2}, x_{i+1/2} \rangle \times \langle y_{j-1/2}, y_{j+1/2} \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \quad j = 1, 2, \dots, N_y,$$

kde $x_{i-1/2} = x_i - \frac{1}{2}\Delta x$, $x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2}\Delta x$, $y_{j-1/2} = y_j - \frac{1}{2}\Delta y$, $y_{j+1/2} = y_j + \frac{1}{2}\Delta y$. Na intervalu $\langle 0, T \rangle$ zvolte dělení

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_{Q-1} < t_Q = T$$

a označme $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ délku časového kroku. Má se spočítat přibližné řešení U_{ij}^k v buňkách Ω_{ij} pro časy t_k . Pro prezentaci výsledků použijte rovnoměrné dělení $t_j^{out} = j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, M$, kde $\Delta t = T/M$. Výpočet organizujte tak, aby množina výpočetních časů $\{t_k\}_{k=0}^Q$ obsahovala množinu časů $\{t_j^{out}\}_{j=0}^M$.

Počáteční hodnoty řešení počítejte jako aproximace

$$U_{ij}^0 \approx \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{ij}} u_0(x, y) dx dy.$$

Vlastní výpočet proveďte ve dvou krocích. Nejdříve řešte jen konvektivní úlohu

$$u_t + uu_x + uu_y = 0$$

metodou konečných objemů, tj. spočtete

$$U_{ij}^* = U_{ij}^k - \frac{\tau_k}{\Delta x} (H_{i+1/2,j} - H_{i-1/2,j}) - \frac{\tau_k}{\Delta y} (H_{i,j+1/2} - H_{i,j-1/2}).$$

Zde $H_{i\pm 1/2,j}$, $H_{i,j\pm 1/2}$ jsou numerické toky,

$H_{i+1/2,j} := H(U_{ij}^k, U_{i+1,j}^k)$ z buňky Ω_{ij} do buňky $\Omega_{i+1,j}$, tj. ve směru osy x ,
 $H_{i-1/2,j} := H(U_{i-1,j}^k, U_{ij}^k)$ z buňky $\Omega_{i-1,j}$ do buňky Ω_{ij} , tj. ve směru osy x ,
 $H_{i,j+1/2} := H(U_{ij}^k, U_{i,j+1}^k)$ z buňky Ω_{ij} do buňky $\Omega_{i,j+1}$, tj. ve směru osy y ,
 $H_{i,j-1/2} := H(U_{i,j-1}^k, U_{ij}^k)$ z buňky $\Omega_{i,j-1}$ do buňky Ω_{ij} , tj. ve směru osy y .

Použijte následující numerické toky:

Godunov: $H_G(u, v) = f(q)$, kde q určíme takto:
if $u > v$ **then** **if** $u + v > 0$ **then** $q := u$ **else** $q := v$
else **if** $u \geq 0$ **then** $q := u$
else if $v \leq 0$ **then** $q := v$ **else** $q := 0$;

Lax-Friedrich: $H_{LF}(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) + \frac{h}{2d\Delta t}(u - v)$

Lax-Wendroff: $H_{LW}(u, v) = f\left(\frac{1}{2}(u + v) + \frac{\Delta t}{2h}(f(u) - f(v))\right)$

Van-Leer: $H_{VL}(u, v) = \frac{1}{2}\left(f(u) + f(v) - \left|P\left(\frac{u + v}{2}\right)\right|(v - u)\right)$

Vijayasundaram: $H_V(u, v) = \tilde{P}^+\left(\frac{u + v}{2}\right)u + \tilde{P}^-\left(\frac{u + v}{2}\right)v$

Steger-Warming: $H_{SW}(u, v) = \tilde{P}^+(u)u + \tilde{P}^-(v)v$

Přitom $H(u, v)$ je aproximace jednorozměrného toku $f(w)$ z buňky, v níž je $w = u$, do sousední buňky, v níž je $w = v$, pro naši úlohu je $f(w) = \frac{1}{2}w^2$. Za h volíme Δx nebo Δy podle toho, zda jde o tok ve směru osy x nebo y . V Laxově-Friedrichově toku je d dimenze, tedy v našem případě $d = 2$. Dále $P(w) = f'(w) = w$. Protože tok $f(w) = \frac{1}{2}w^2$ není homogenní funkce řádu 1 (tj. neplatí $f(\alpha w) = \alpha f(w)$, kde α je číslo), Vijayasundaramův tok ani tok Stegera-Warminga nelze přímo použít. Můžeme však použít modifikace těchto metod, pro které bereme $\tilde{P}(w) = \frac{1}{2}w = \frac{1}{2}f'(w)$. Význam horních indexů $^+, ^-$ je tento: $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = \min(a, 0)$. Laxova-Wendrofova metoda je řádu 2, zbývající metody jsou jen řádu 1.

Laxovo-Friedrichsovo schéma se obvykle zapisuje v nekonzervativním tvaru

$$\begin{aligned}
 U_{ij}^* = & \frac{1}{4}(U_{i-1,j}^k + U_{i+1,j}^k + U_{i,j-1}^k + U_{i,j+1}^k) - \\
 & - \frac{\tau_k}{\Delta x}(f(U_{i+1,j}^k) - f(U_{i-1,j}^k)) - \frac{\tau_k}{\Delta y}(f(U_{i,j+1}^k) - f(U_{i,j-1}^k)).
 \end{aligned}$$

U buněk sousedících s hranicí $\partial\Omega$ využijte Neumannovu okrajovou podmínku. To lze provést užitím fiktivních buněk, pomocí kterých obklopíme oblast Ω a v nichž jsou hodnoty symetrické podle okraje. Tedy ve fiktivních buňkách Ω_{0j} položíme $U_{0j}^k = U_{1j}^k$, $j = 1, 2, \dots, N_y$, v buňkách Ω_{i0} položíme $U_{i0}^k = U_{i1}^k$, $i = 1, 2, \dots, N_x$, na zbývajících dvou stranách postupujeme podobně.

V druhém kroku řešte parabolický problém

$$u_t = \varepsilon \Delta u$$

diferenční metodou, tj. spočtete

$$U_{ij}^{k+1} = U_{ij}^* + \varepsilon \frac{\tau_k}{(\Delta x)^2} (U_{i-1,j}^* - 2U_{ij}^* + U_{i+1,j}^*) + \varepsilon \frac{\tau_k}{(\Delta y)^2} (U_{i,j-1}^* - 2U_{ij}^* + U_{i,j+1}^*).$$

U buněk sousedících s hranicí $\partial\Omega$ využijte opět Neumannovu okrajovou podmínku. I tentokrát použijte fiktivní buňky, do nich však teď vložte hodnoty spočtené v konvektivním kroku. Tedy například $U_{0j}^* = U_{1j}^*$, $j = 1, 2, \dots, N_y$, $U_{i0}^* = U_{i1}^*$, $i = 1, 2, \dots, N_x$, podobně na zbývajících dvou stranách.

Řešení vykreslete pro několik reprezentativních časů. Výpočet proveďte pro různé hodnoty viskozity ε . Při výpočtu je třeba zajistit splnění podmínek stability: pro $\varepsilon = 0$ jde pouze o CFL podmínku

$$\max_{ij} |U_{ij}^k| \frac{\tau_k}{h} \leq C_{CFL} \leq \frac{1}{2},$$

kde $h = \max(\Delta x, \Delta y)$, pro $\varepsilon > 0$ je třeba přidat podmínku stability pro řešení parabolické úlohy explicitní Eulerovou metodou, tj. podmínku

$$\varepsilon \frac{\tau_k}{h^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Tato podmínka se pro velmi malou viskozitu prakticky neuplatní, pro větší ε však převáží a časový krok τ_k výrazně omezí. To by nás nemělo překvapit, vždyť právě proto se explicitní Eulerova metoda pro řešení parabolických úloh téměř nepoužívá.

Pro nulovou nebo velmi malou viskozitu vykazuje Lax-Wendroffovo schéma nežádoucí zvlnění v okolí rázové vlny. To je typická vlastnost schémat vyšších řádů. Zvlnění lze zhladit zvětšením hodnoty viskozního koeficientu ε . Totéž platí také pro modifikovaný Vijayasundaramův tok, pomůže opět zvětšení viskozity, protože však jde o metodu řádu 1, Vijayasundaramův tok nelze pro řešení Burgersovy rovnice doporučit.