Vzorový příklad na regresní přímku

Měřením průhybu nosníku Y [mm] v závislosti na zatížení X [t] jsme získali hodnoty:

x	0	1	2	3	4
y	0,9	1,9	5,2	6,1	9,1

Pro regresní funkci y = beta1 + beta2*x :

(1) vypočtěte bodové odhady regresních koeficientů a funkční hodnoty y(3),

(2) určete intervalový odhad regresního koeficientu beta2 se spolehlivostí 0,95,

(3) testujte hypotézu H : beta1 = 0 na hladině významnosti 0,05,

(4) vypočtěte intervalový odhad střední hodnoty y(3) se spolehlivostí 0,95,

(5) určete koeficient korelace a nakreslete graf regresní funkce.

Řešení:

Vypočtený výsledek řešení je barevně označen:

Rámeček označuje matici a interval.

Z důvodu zdrojového výpočtu v Excelu jsou indexy aj. zapsány řádkově.

i	x	y	x^2	x*y	y^2
1	0	0,9	0	0	0,81
2	1	1,9	1	1,9	3,61
3	2	5,2	4	10,4	27,04
4	3	6,1	9	18,3	37,21
5	4	9,1	16	36,4	82,81
suma	10	23,2	30	67	151,48

Pomocné výpočty:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

G =

5	10
10	30

g =

23,2
67

det **G** = 50

Výsledek (1):

Bodové odhady:

$$b_2 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\det \mathbf{G}}$$

b2 =	2,06
x prum =	2
y prum =	4,64

$$b_1 = \bar{y} - b_2\bar{x}$$

b1 = 0,52

b =

0,52
2,06

y =	0,52 + 2,06x
Odhad y(3) =	6,70

Další pomocné výpočty:

$$S^*_{\min} = \sum (y_i - b_1 - b_2 x_i)^2 = \sum y_i^2 - b_1 \sum y_i - b_2 \sum x_i y_i$$

$$s^2 = \frac{S^*_{\min}}{n-2}$$

Smin =	1,396
s^2 =	0,465333333
s =	0,682153453

$$g^{11} = \frac{\sum x_i^2}{\det \mathbf{G}} \qquad g^{22} = \frac{n}{\det \mathbf{G}} \qquad g^{12} = g^{21} = -\frac{\sum x_i}{\det \mathbf{G}}$$

inv **G** =

0,6	-0,2
-0,2	0,1

k = n - m = 3 t(0,975;3) = 3,182 z tabulky **T2**

Výsledek (2):

$$\left\langle b_j - t_{1-\alpha/2} s\sqrt{g^{jj}} ; b_j + t_{1-\alpha/2} s\sqrt{g^{jj}} \right\rangle$$

Int. odhad: beta2 ∈

1,37359	2,74641

Výsledek (3):

$$t = \frac{b_j - \beta_{j0}}{s\sqrt{g^{jj}}}$$

$$\overline{W}_\alpha = \left\langle -t_{1-\alpha/2}; t_{1-\alpha/2} \right\rangle$$

Test H : beta1 = 0 t = 0,984114513 $\Rightarrow$ hypotézu nezamítáme

Výsledek (4):

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m} b_j f_j(\mathbf{x}) - t_{1-\alpha/2} s\sqrt{g^*}; \sum_{j=1}^{m} b_j f_j(\mathbf{x}) + t_{1-\alpha/2} s\sqrt{g^*} \right\rangle$$

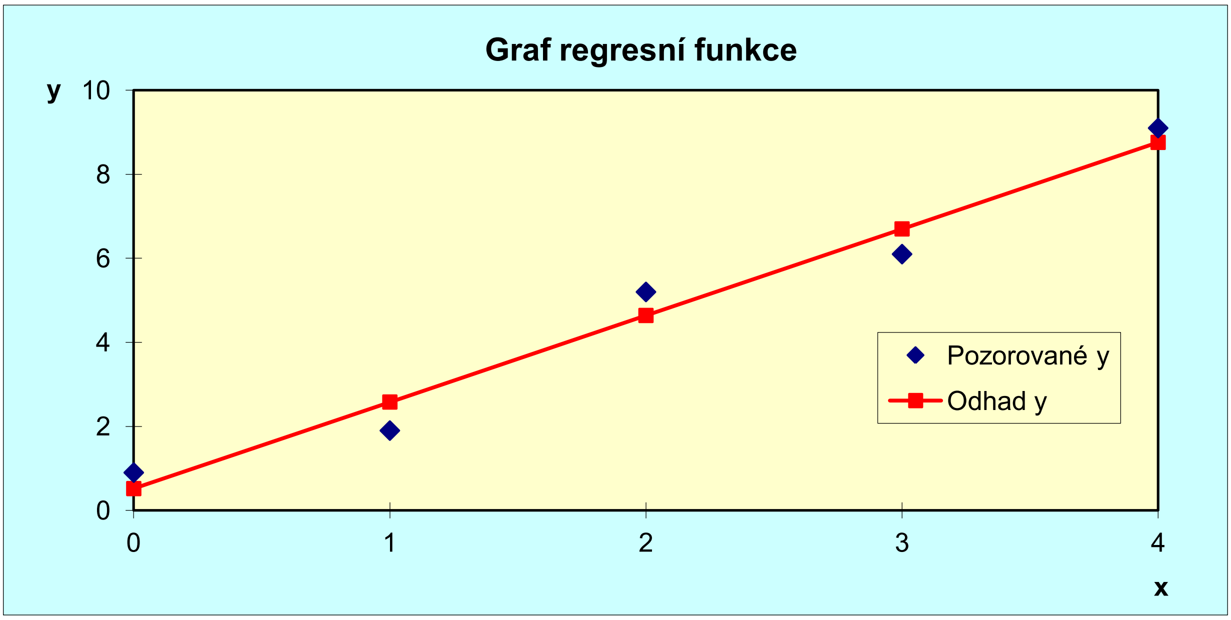
$$g^* = \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2} = \frac{1}{n} + \frac{n(x-\bar{x})^2}{\det \mathbf{G}}$$

Int. odhad: y(3) $\in$ 5,511 7,889

Výsledek (5):

$$r(x,y)$$

Koeficient korelace: r = 0,983947



Závěr: Získaná regresní funkce velmi dobře vystihuje závislost.