Numerická integrace

Důvody pro numerickou integraci jsou:

Numerická integrace

Důvody pro numerickou integraci jsou jednak stejné jako pro numerickou derivaci:

Numerická integrace

Důvody pro numerickou integraci jsou jednak stejné jako pro numerickou derivaci:

Důvody pro numerickou derivaci

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nezatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci příliš složitá

Důvody pro numerickou integeraci

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nezatížena chybou

Numerická integrace

Důvody pro numerickou integraci jsou jednak stejné jako pro numerickou derivaci:

Důvody pro numerickou derivaci

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nezatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci příliš složitá

Důvody pro numerickou integeraci

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nezatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou

Numerická integrace

Důvody pro numerickou integraci jsou jednak stejné jako pro numerickou derivaci:

Důvody pro numerickou derivaci

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nezatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci příliš složitá

Důvody pro numerickou integeraci

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nezatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou integraci příliš složitá

Numerická integrace

Důvody pro numerickou integraci jsou jednak stejné jako pro numerickou derivaci:

Důvody pro numerickou derivaci

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nezatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci příliš složitá

Důvody pro numerickou integeraci

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nezatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou integraci příliš složitá

Ale u integrace přibývá další závažný důvod:

4) $f(x)$ nelze přímo počítat

Numerická integrace

Důvody pro numerickou integraci jsou jednak stejné jako pro numerickou derivaci:

Důvody pro numerickou derivaci

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nezatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci příliš složitá

Důvody pro numerickou integeraci

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nezatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou integraci příliš složitá

Ale u integrace přibývá další závažný důvod:

4) $f(x)$ nelze přímo počítat

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = ????????$$

Numerická integrace

Obecný postup:

Integrand $f(x)$ **nahradíme aproximací** $\varphi(x)$ **a hodnotu** $\int_a^b f(x)dx$ **nahradíme hodnotou** $\int_a^b \varphi(x)dx$

$$\int_a^b \varphi(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx$$

$$Q(f) \approx \int_a^b f(x)dx$$

$Q(f)$ - **kvadraturní formule.**

Numerická integrace

Obecný postup:

Integrand $f(x)$ **nahradíme aproximací** $\varphi(x)$ **a hodnotu** $\int_a^b f(x)dx$ **nahradíme hodnotou** $\int_a^b \varphi(x)dx$

$$\int_a^b \varphi(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx$$

$$Q(f) \approx \int_a^b f(x)dx$$

$Q(f)$ **- kvadraturní formule.**

$$Q(f) + R(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Numerická integrace

Obecný postup:

Integrand $f(x)$ **nahradíme aproximací** $\varphi(x)$ **a hodnotu** $\int_a^b f(x)dx$ **nahradíme hodnotou** $\int_a^b \varphi(x)dx$

$$\int_a^b \varphi(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx$$

$$Q(f) \approx \int_a^b f(x)dx$$

$Q(f)$ **- kvadraturní formule.**

$$Q(f) + R(f) = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow R(f) = \int_a^b f(x)dx - Q(f)$$

Numerická integrace

Obecný postup:

Integrand $f(x)$ **nahradíme aproximací** $\varphi(x)$ **a hodnotu** $\int_a^b f(x)dx$ **nahradíme hodnotou** $\int_a^b \varphi(x)dx$

$$\int_a^b \varphi(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx$$

$$Q(f) \approx \int_a^b f(x)dx$$ $Q(f)$ **- kvadraturní formule.**

$$Q(f) + R(f) = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow R(f) = \boxed{\int_a^b f(x)dx - Q(f)}$$

Numerická integrace

Obecný postup:

Integrand $f(x)$ **nahradíme aproximací** $\varphi(x)$ **a hodnotu** $\int_a^b f(x)dx$ **nahradíme hodnotou** $\int_a^b \varphi(x)dx$

$$\int_a^b \varphi(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx$$

$$Q(f) \approx \int_a^b f(x)dx$$

$Q(f)$ **- kvadraturní formule.**

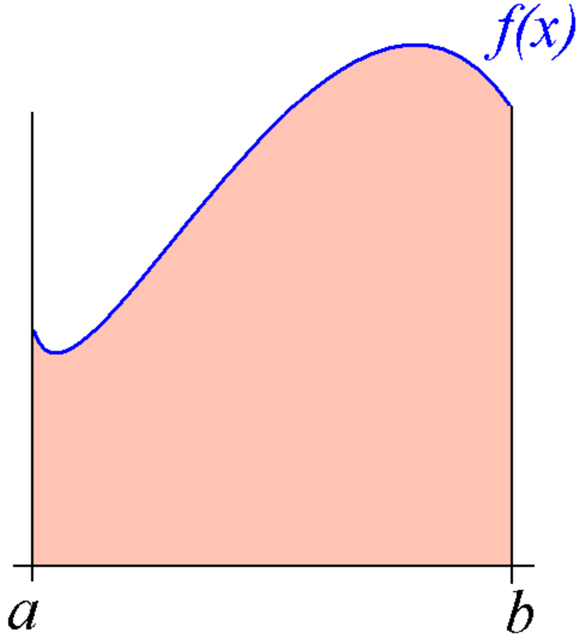
$$Q(f) + R(f) = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow R(f) = \boxed{\int_a^b f(x)dx - Q(f)}$$

diskretizační chyba

Numerická integrace

Základní kvadraturní formule

(integrace interpolačního polynomu)



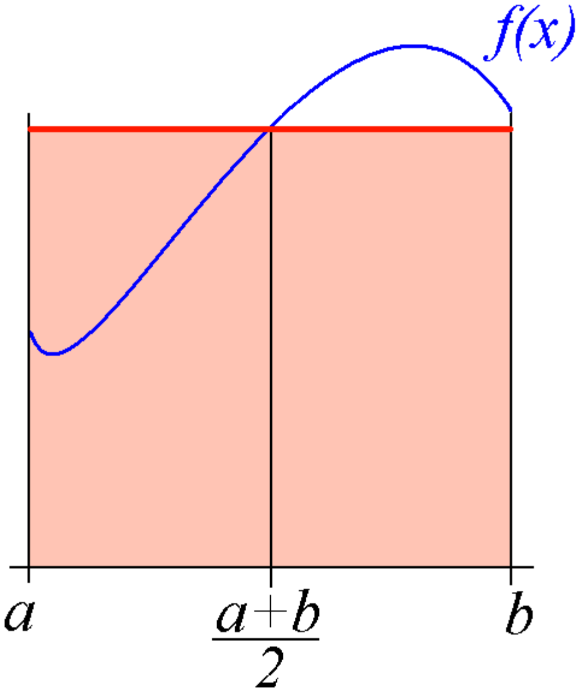
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx\,;\;\; n = 0;1;2$$

Numerická integrace

Základní kvadraturní formule

(integrace interpolačního polynomu) $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx$

$n = 0$ - obdélníková formule



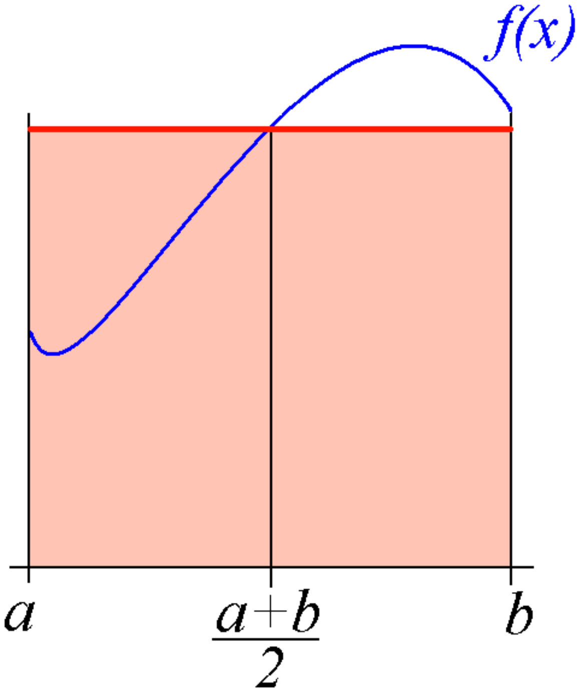
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Numerická integrace

Základní kvadraturní formule

(integrace interpolačního polynomu) $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx$

$n=0$ - obdélníková formule



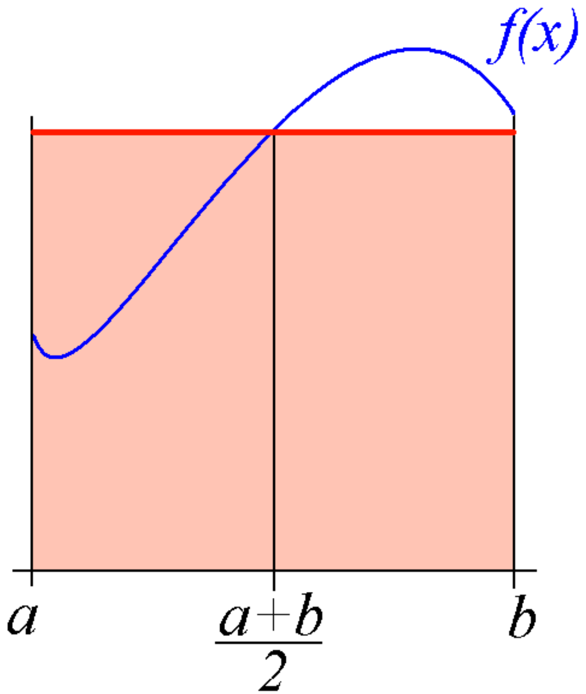
$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Numerická integrace

Základní kvadraturní formule

(integrace interpolačního polynomu) $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx$

$n = 0$ - obdélníková formule



$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

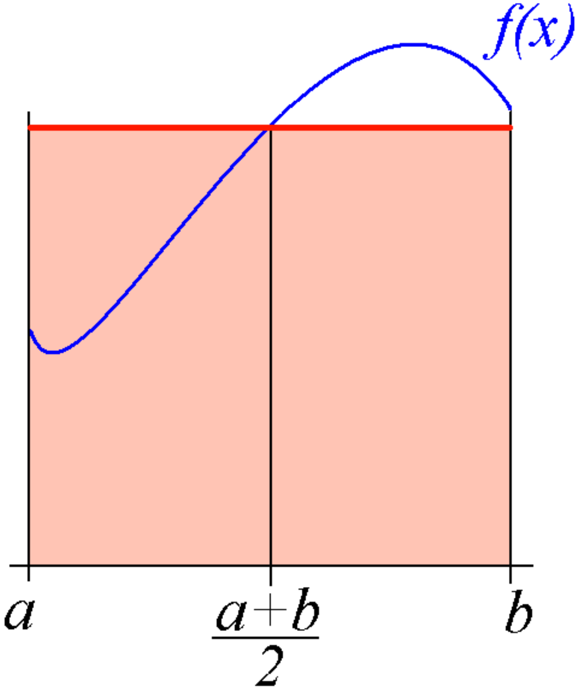
Chyba: $E_M \le \frac{1}{24} \max_{x\in\langle a;b\rangle} \left| f''(x) \right| (b-a)^3$

Numerická integrace

Základní kvadraturní formule

(integrace interpolačního polynomu) $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx$

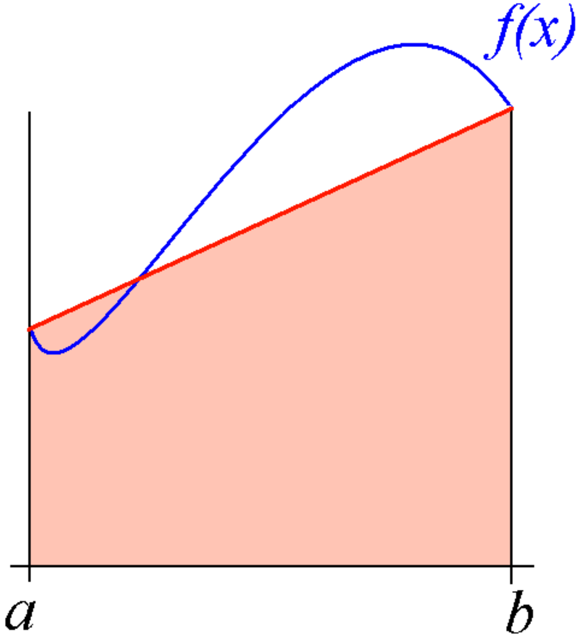
$n = 0$ - obdélníková formule



$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Chyba: $E_M \leq \frac{1}{24} \max_{x\in\langle a;b\rangle} \left| f''(x) \right| (b-a)^3$

$n = 1$ - lichoběžníková formule



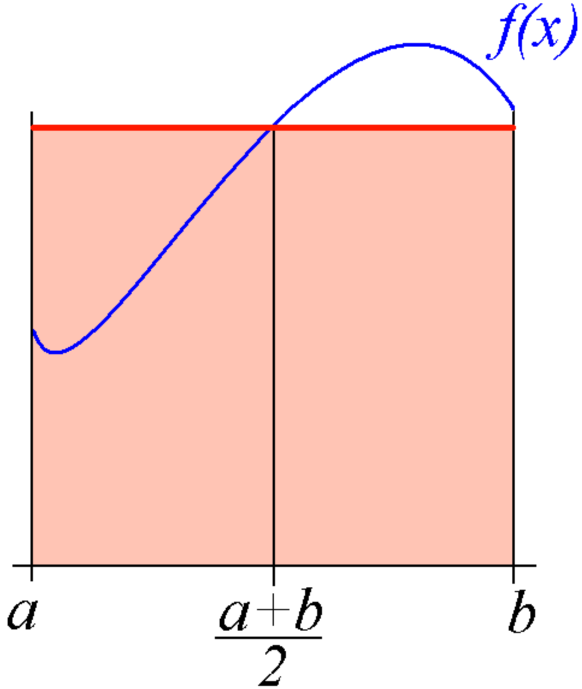
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\cdot\left[f(a) + f(b) \right]$$

Numerická integrace

Základní kvadraturní formule

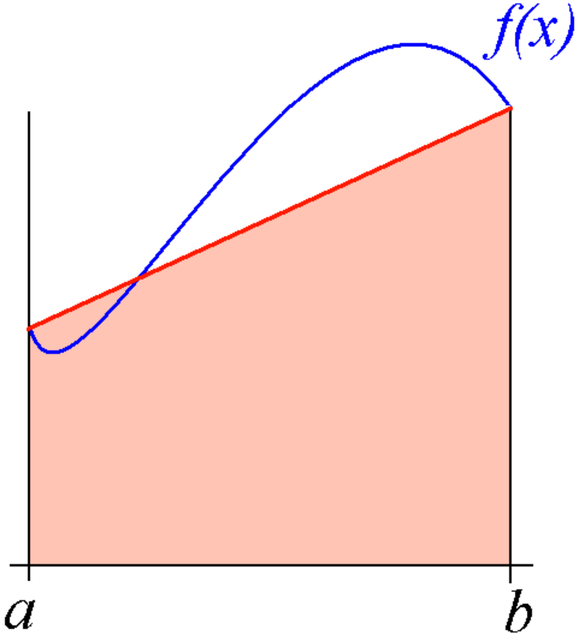
(integrace interpolačního polynomu) $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx$

$n = 0$ - obdélníková formule



$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$n = 1$ - lichoběžníková formule



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\cdot\left[f(a)+f(b)\right]$$

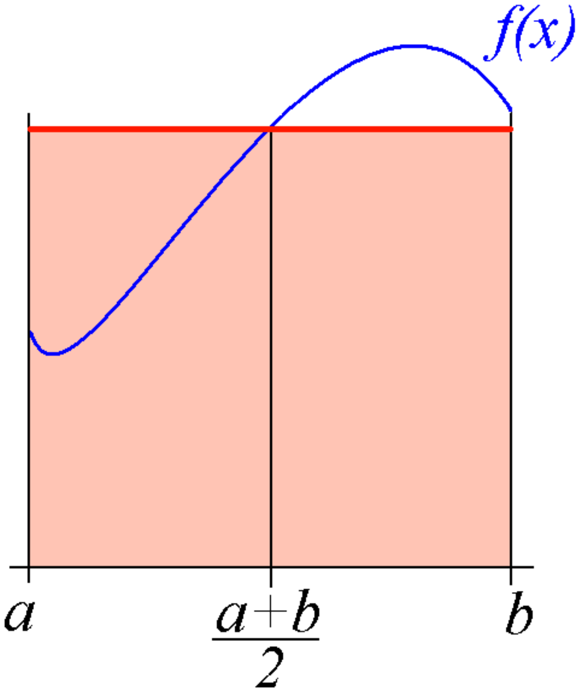
Chyba: $E_M \le \frac{1}{24}\max_{x\in\langle a;b\rangle}\left|f''(x)\right|(b-a)^3$; $E_L \le \frac{1}{12}\max_{x\in\langle a;b\rangle}\left|f''(x)\right|(b-a)^3$

Numerická integrace

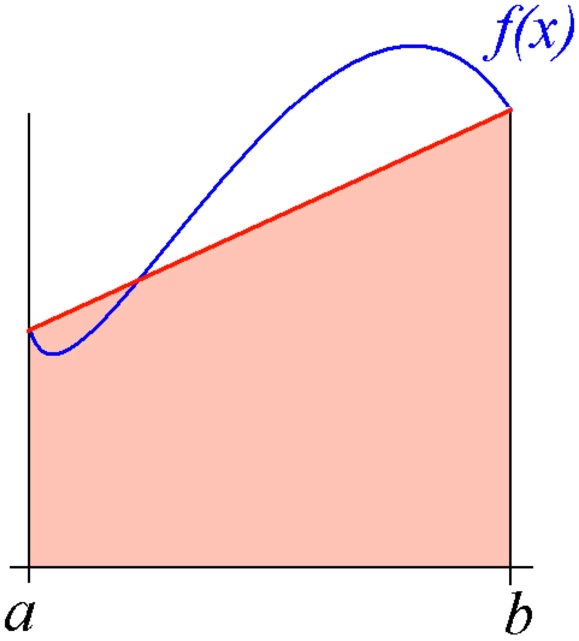
Základní kvadraturní formule

(integrace interpolačního polynomu) $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx$

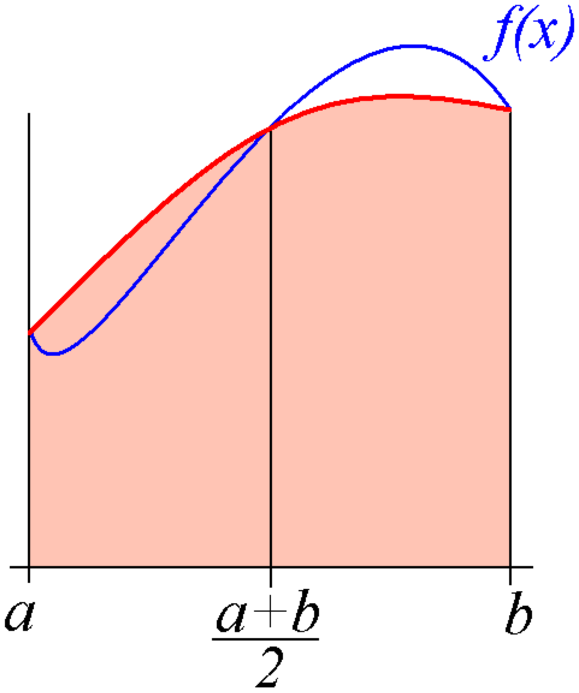
$n=0$ - obdélníková formule



$n=1$ - lichoběžníková formule



$n=2$ - Simpsonova formule



$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\cdot\left[f(a)+f(b)\right]$$

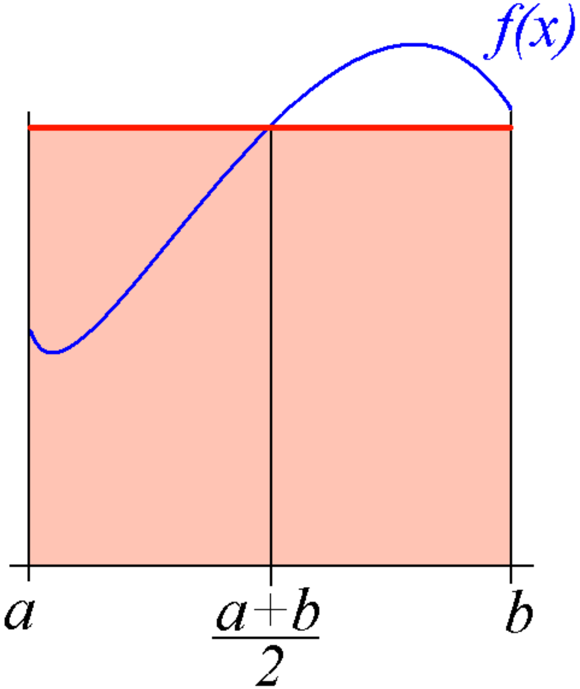
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_2(x)dx = \int_a^b f(a)\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(x-b\right)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)\left(a-b\right)} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} + f(b)\frac{\left(x-a\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{\left(b-a\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}dx =$$

Numerická integrace

Základní kvadraturní formule

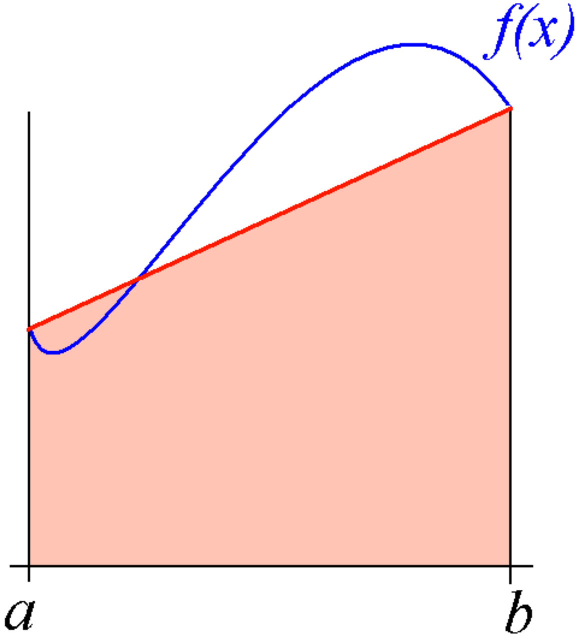
(integrace interpolačního polynomu) $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx$

$n = 0$ - obdélníková formule



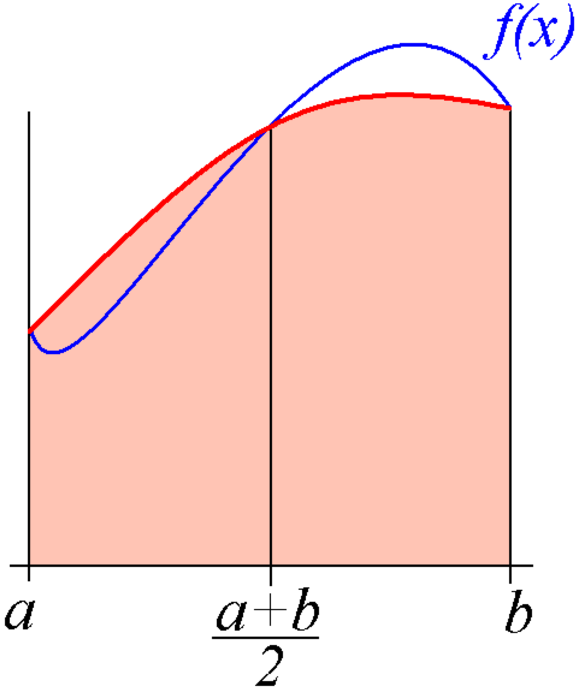
$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$n = 1$ - lichoběžníková formule



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\cdot\left[f(a)+f(b)\right]$$

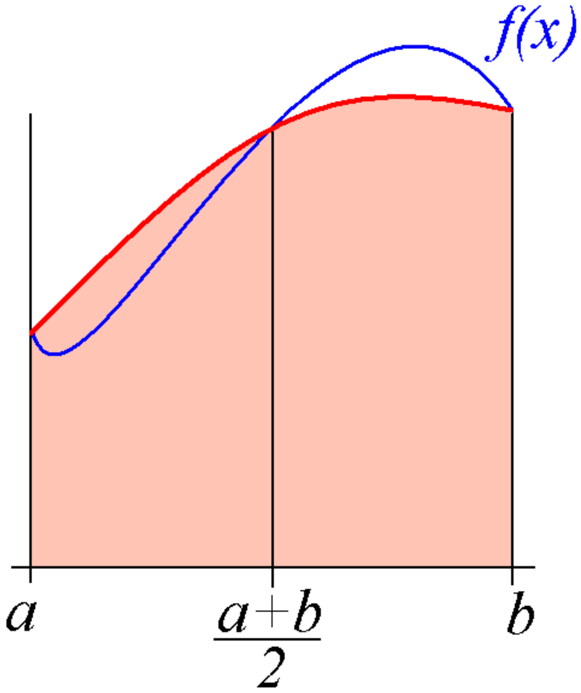
$n = 2$ - Simpsonova formule



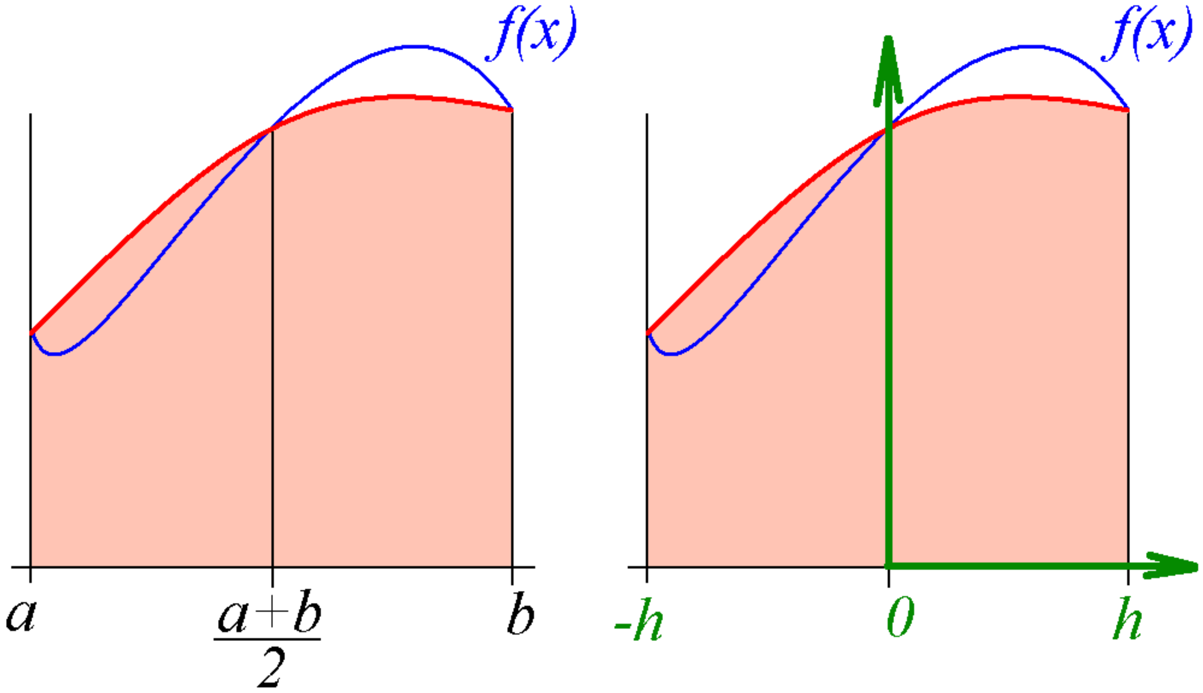
integrace Lagrangeova tvaru pracná

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_2(x)dx = \int_a^b f(a)\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} + f(b)\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}dx =$$

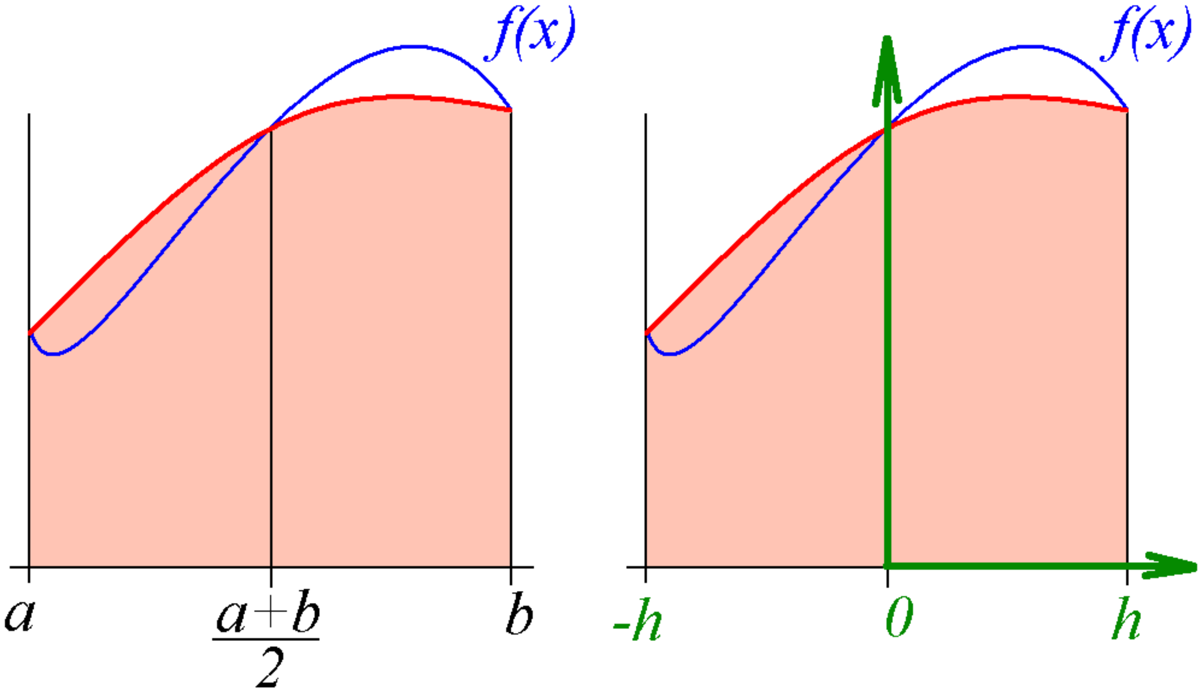
$n = 2$ - Simpsonova formule



$n = 2$ - Simpsonova formule

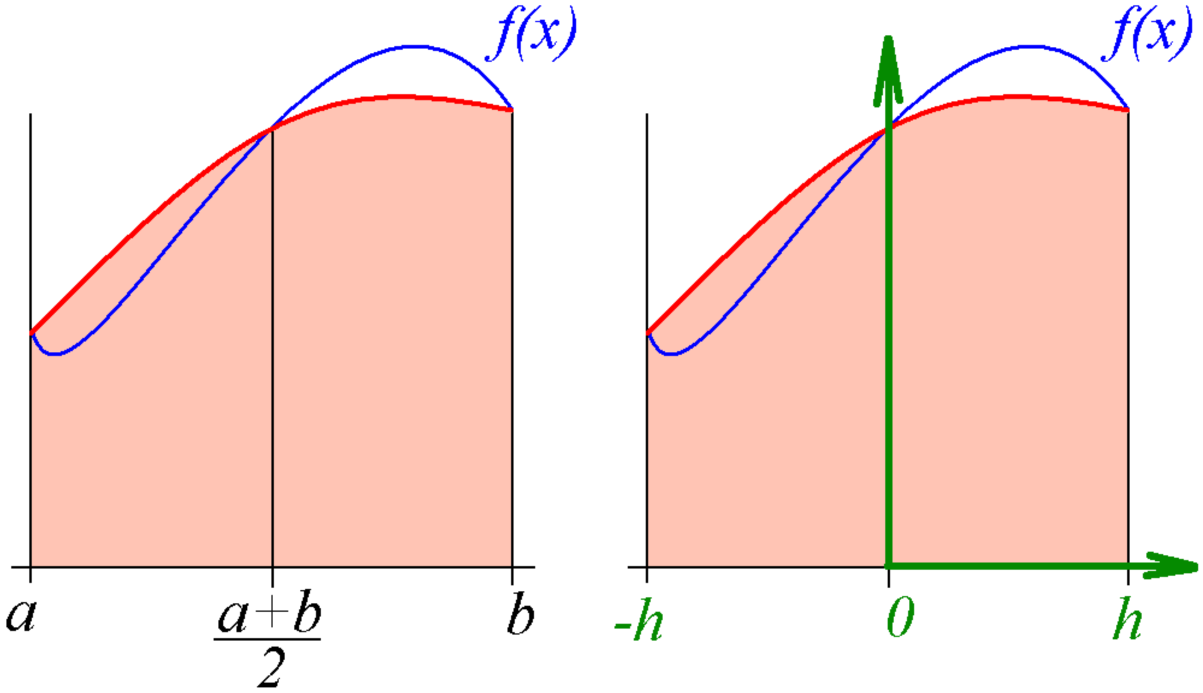


$n = 2$ - Simpsonova formule



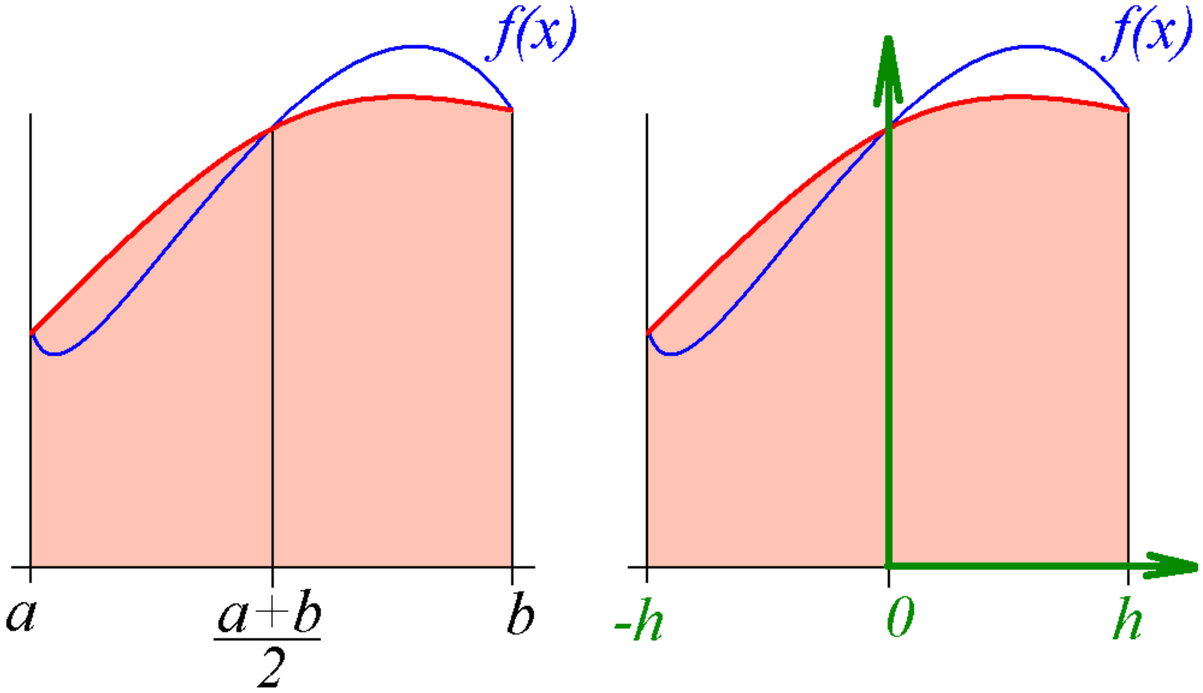
$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y dx$$

$n = 2$ - Simpsonova formule



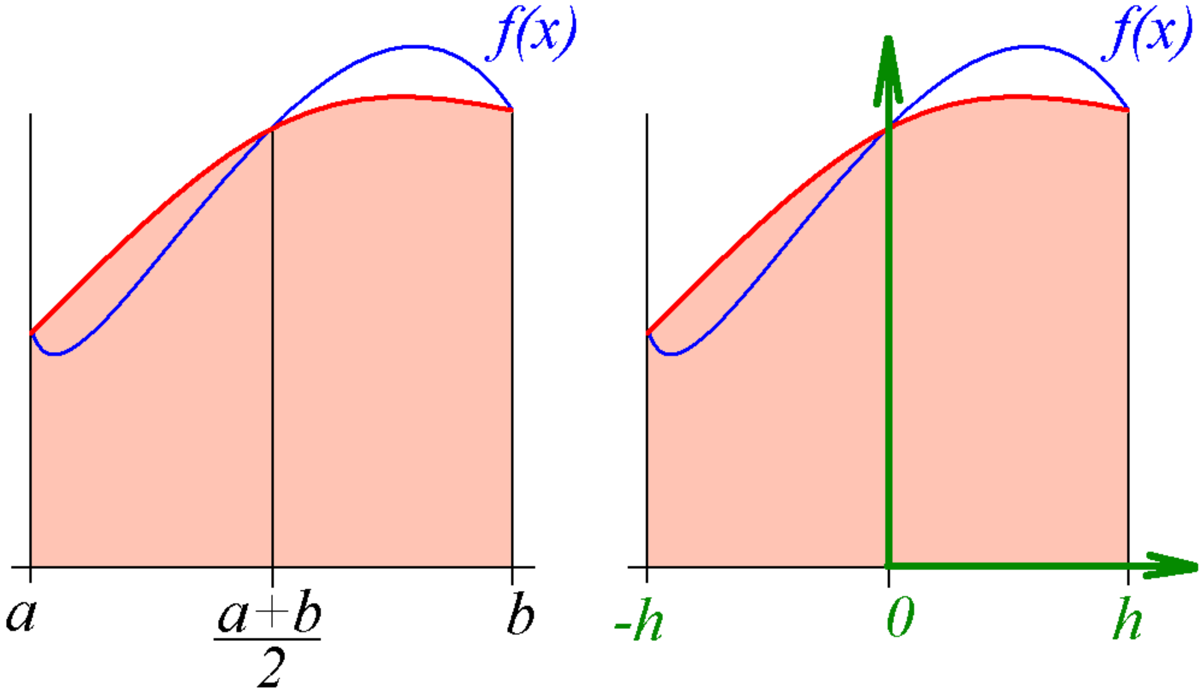
$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y dx = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right)dx$$

$n = 2$ - Simpsonova formule



$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y dx = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right) dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

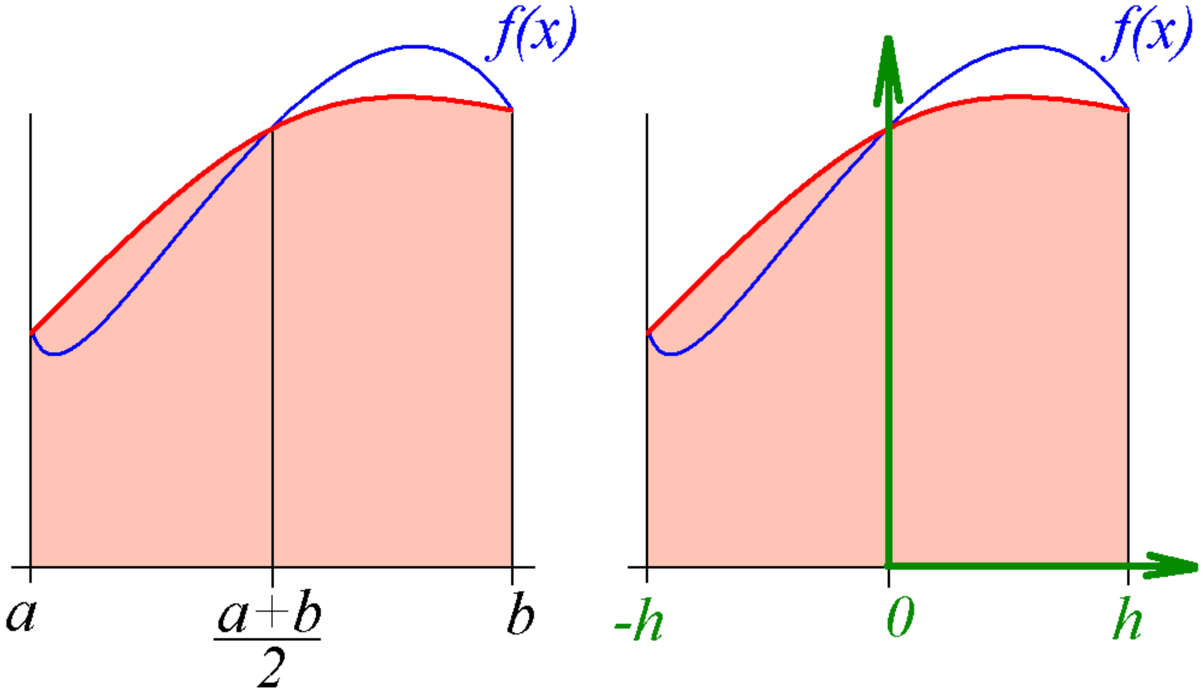
$n = 2$ - Simpsonova formule



$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y dx = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right) dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch - \left(\frac{A(-h)^3}{3} + \frac{B(-h)^2}{2} + C(-h)\right)$$

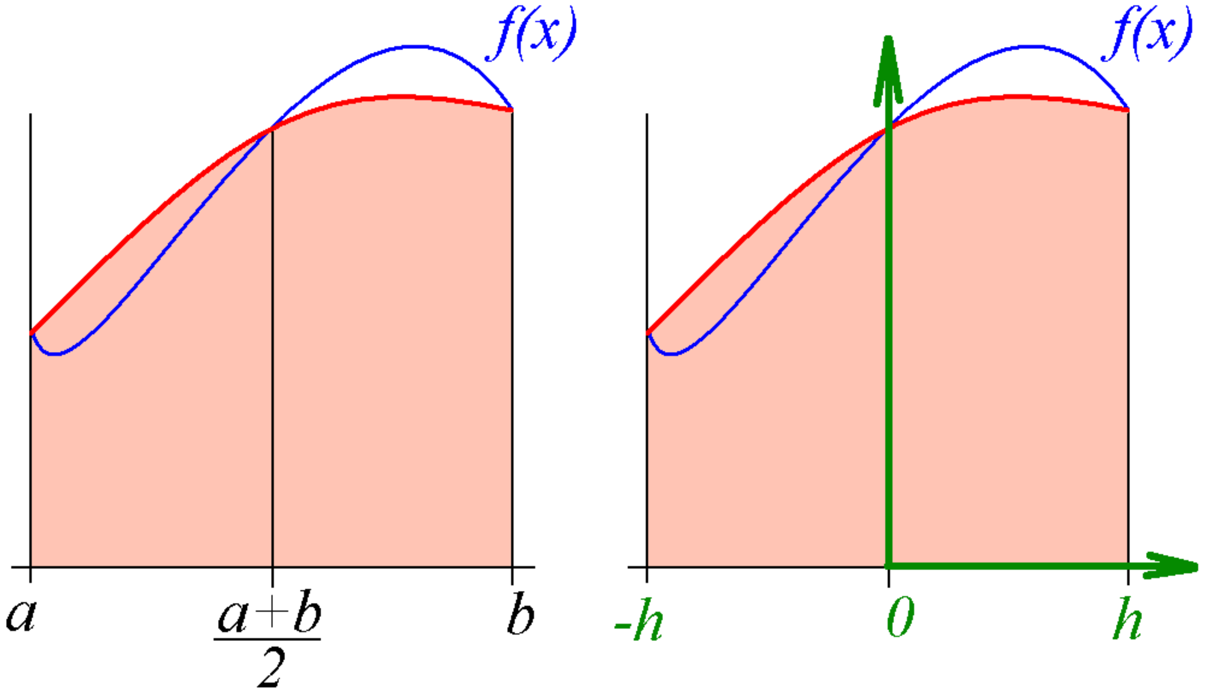
$n = 2$ - Simpsonova formule



$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y dx = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right) dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch - \left(\frac{A(-h)^3}{3} + \frac{B(-h)^2}{2} + C(-h)\right) = \boxed{\frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch}$$

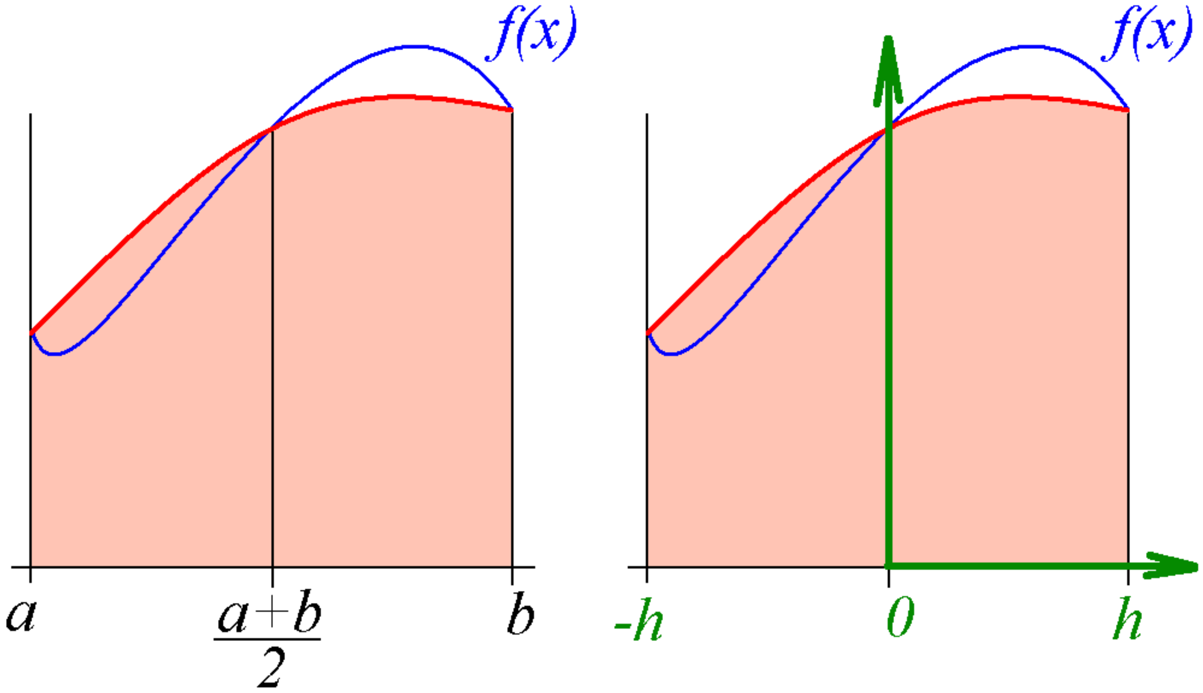
$n = 2$ - Simpsonova formule



$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y dx = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right) dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch - \left(\frac{A(-h)^3}{3} + \frac{B(-h)^2}{2} + C(-h)\right) = \boxed{\frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)}$$

$n = 2$ - Simpsonova formule

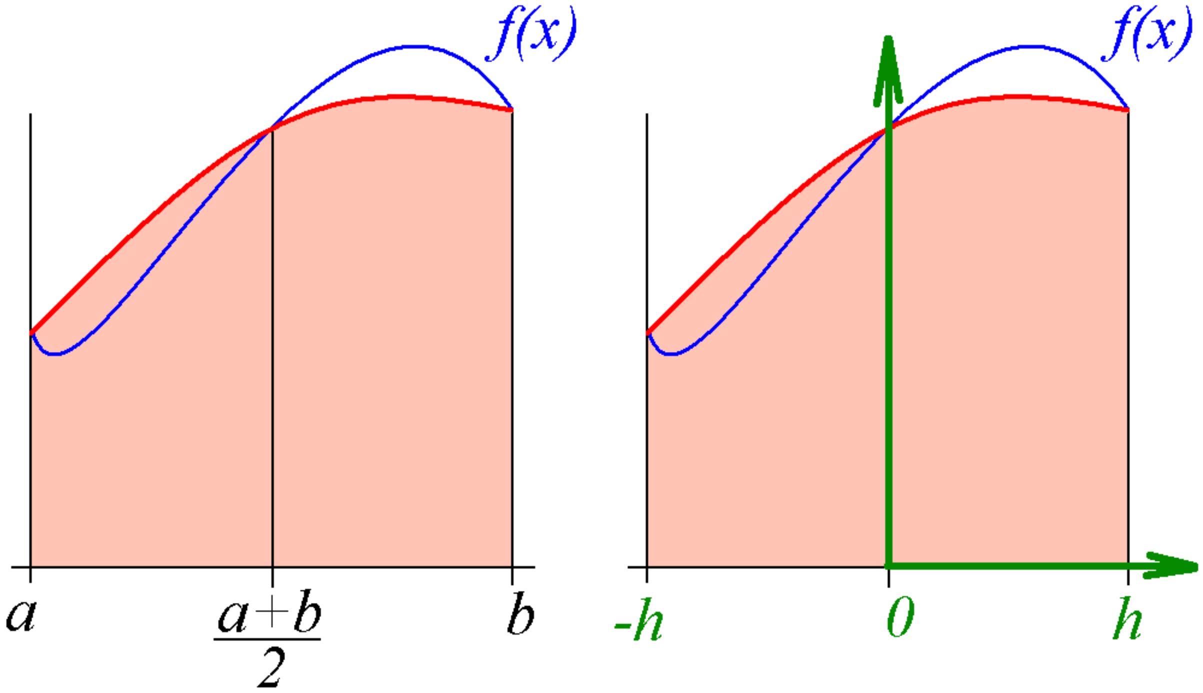


$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y\,dx = \int_{-h}^{h}\left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch - \left(\frac{A(-h)^3}{3} + \frac{B(-h)^2}{2} + C(-h)\right) = \boxed{\frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)}$$

$$\left[-h;\, f(-h)\right]: \quad f(-h) = \quad Ah^2 \quad -Bh \quad +C$$

$n = 2$ - Simpsonova formule



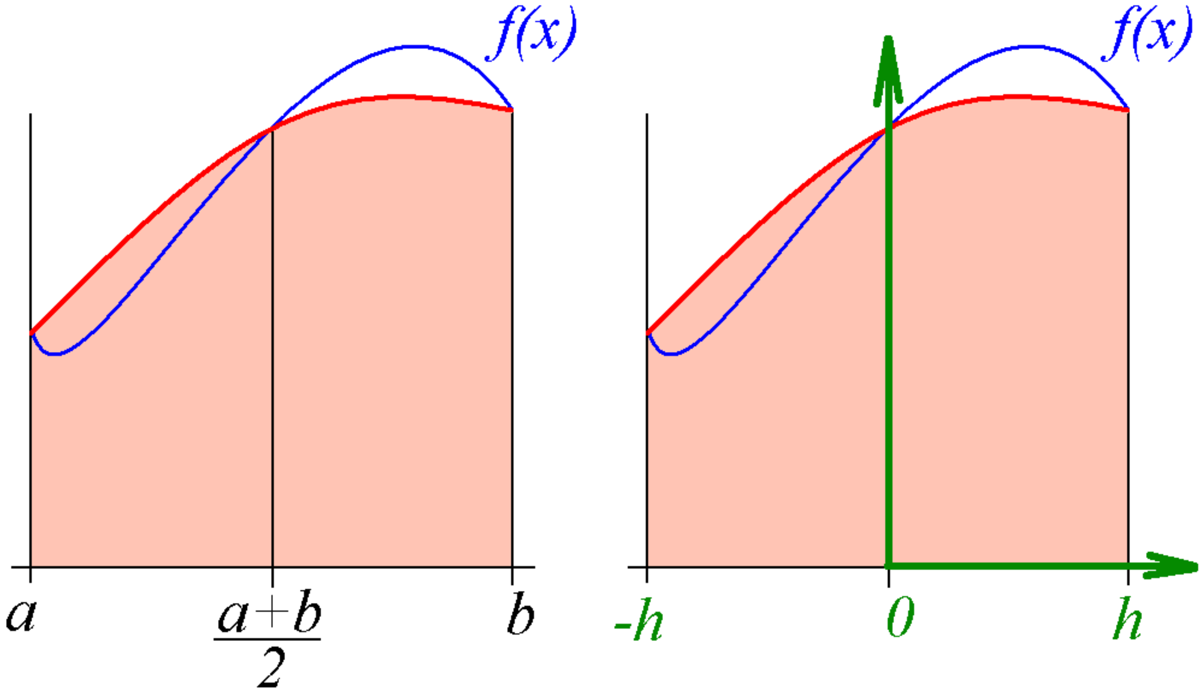
$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y\,dx = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch - \left(\frac{A(-h)^3}{3} + \frac{B(-h)^2}{2} + C(-h)\right) = \boxed{\frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)}$$

$$\left[-h; f(-h)\right]: \quad f(-h) = \quad Ah^2 \quad -Bh \quad +C$$

$$\left[0; f(0)\right]: \quad f(0) = \quad C$$

$n=2$ - Simpsonova formule

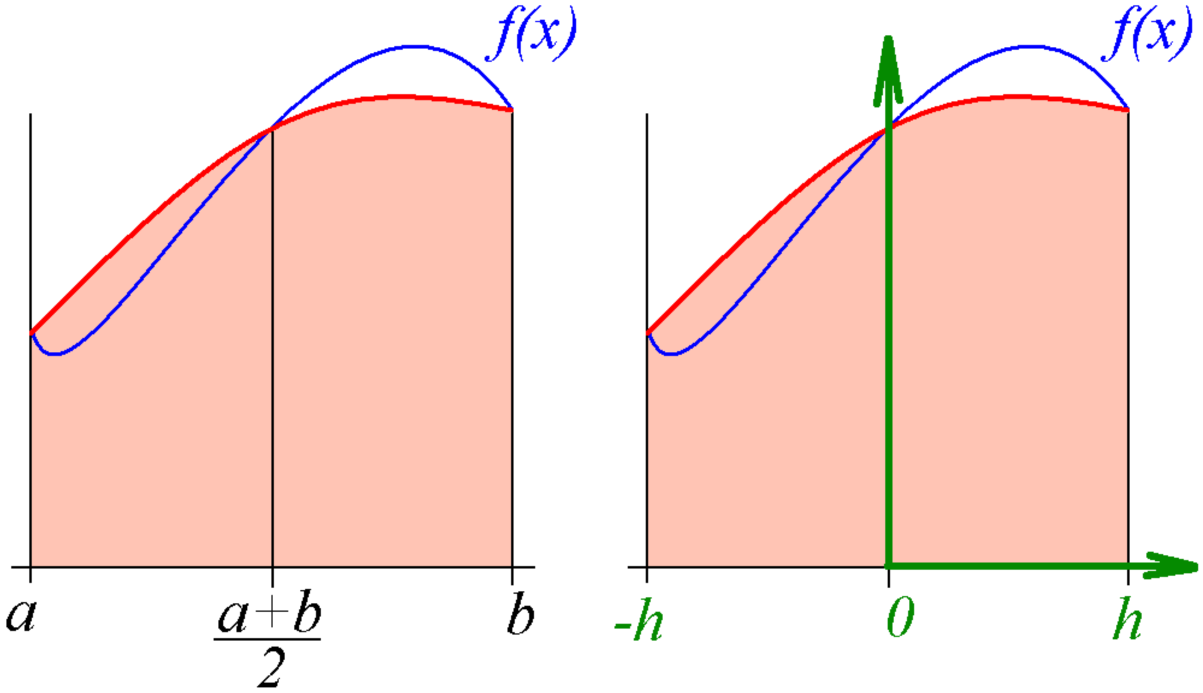


$$y=Ax^2+Bx+C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y dx = \int_{-h}^{h}\left(Ax^2+Bx+C\right)dx = \left[\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$=\frac{Ah^3}{3}+\frac{Bh^2}{2}+Ch-\left(\frac{A(-h)^3}{3}+\frac{B(-h)^2}{2}+C(-h)\right)=\boxed{\frac{2}{3}Ah^3+2Ch} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{h}{3}\left(2Ah^2+6C\right)}$$

$$\begin{aligned}
[-h; f(-h)]:&\quad f(-h) = Ah^2 - Bh + C\\
[0; f(0)]:&\quad f(0) = C\\
[h; f(h)]:&\quad f(h) = Ah^2 + Bh + C
\end{aligned}$$

$n = 2$ - Simpsonova formule

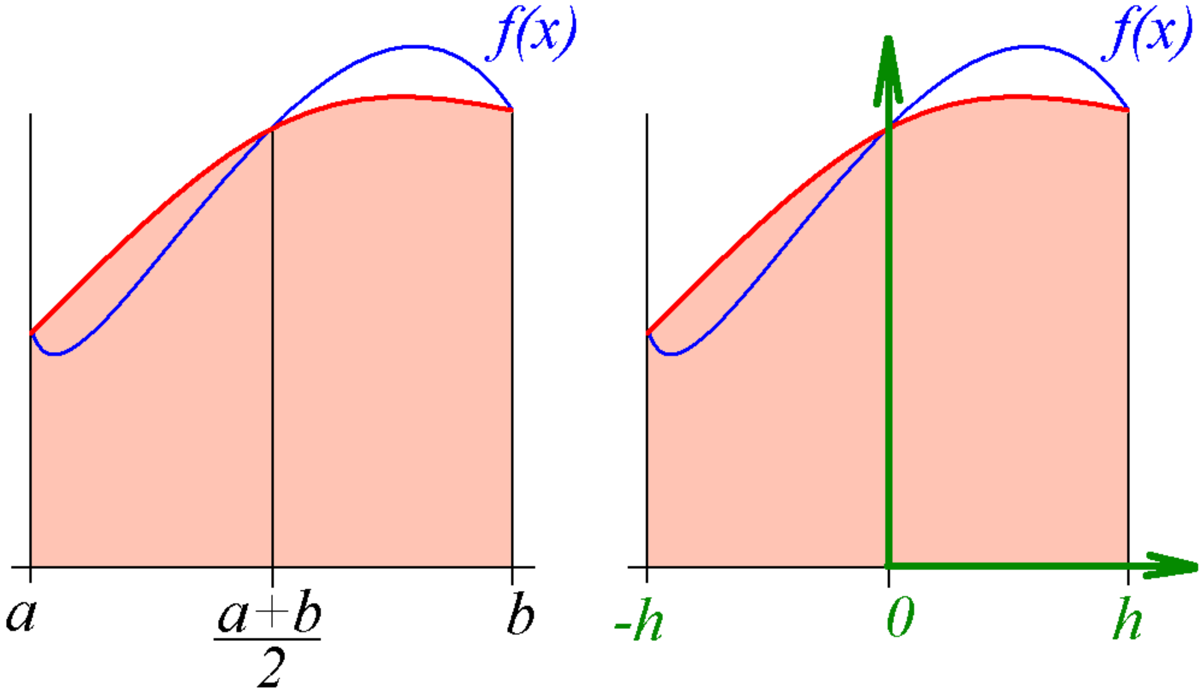


$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y\,dx = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch - \left(\frac{A(-h)^3}{3} + \frac{B(-h)^2}{2} + C(-h)\right) = \boxed{\frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)}$$

$$\begin{array}{llcccc}
\left[-h; f(-h)\right]: & f(-h) = & Ah^2 & -Bh & +C & \\
\left[0; f(0)\right]: & f(0) = & & & C & /\cdot 4 \\
\left[h; f(h)\right]: & f(h) = & Ah^2 & +Bh & +C &
\end{array}$$

$n = 2$ - Simpsonova formule



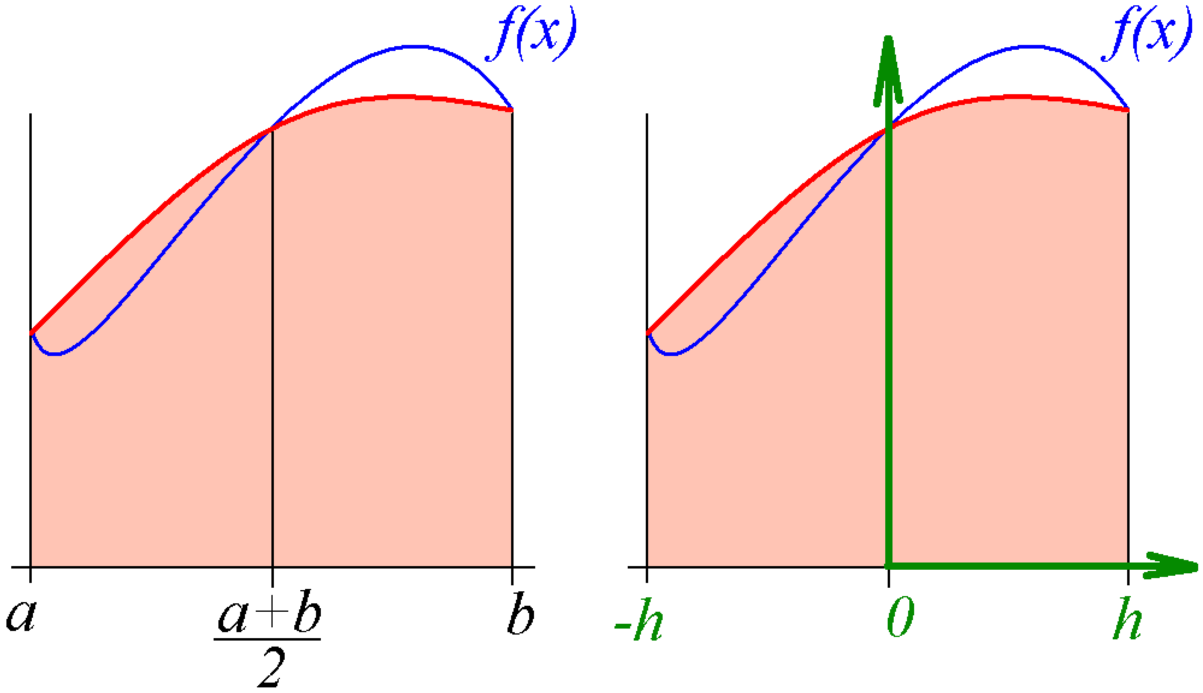
$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y dx = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch - \left(\frac{A(-h)^3}{3} + \frac{B(-h)^2}{2} + C(-h)\right) = \boxed{\frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)}$$

$$\begin{aligned}
&[-h; f(-h)]: \quad f(-h) = \quad Ah^2 \quad -Bh \quad +C \\
&[0; f(0)]: \quad f(0) = \quad C \,/\cdot 4 \\
&[h; f(h)]: \quad f(h) = \quad Ah^2 \quad +Bh \quad +C
\end{aligned}$$

$+$

$n=2$ - Simpsonova formule



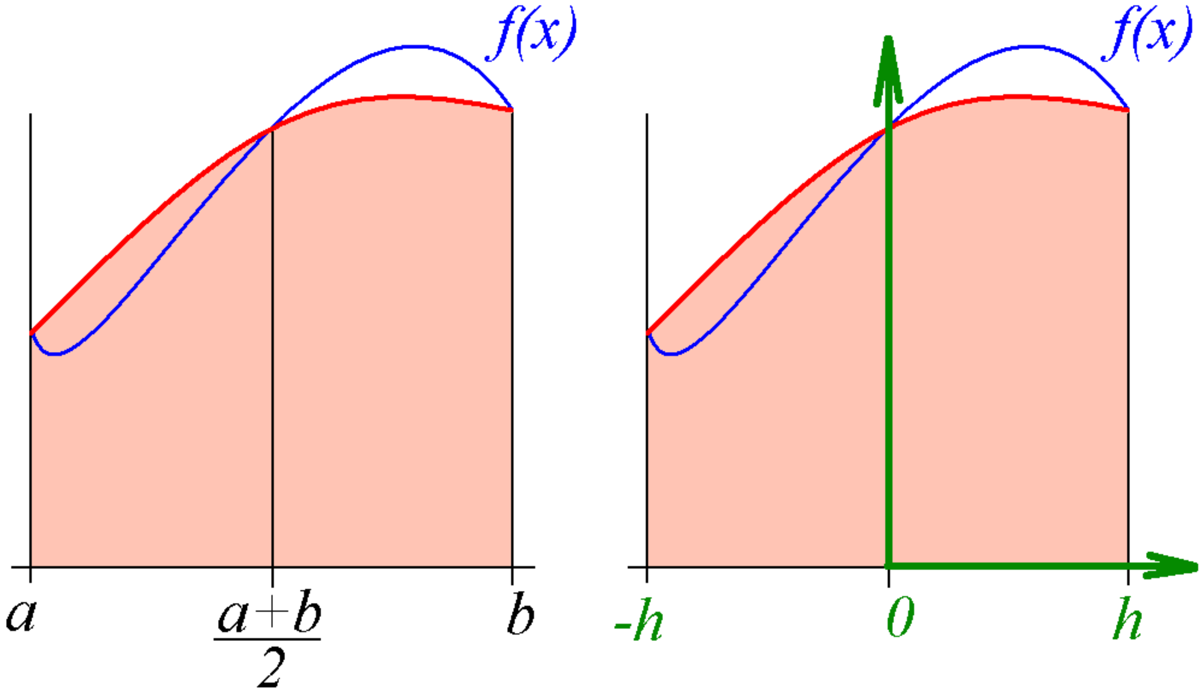
$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y\,dx = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch - \left(\frac{A(-h)^3}{3} + \frac{B(-h)^2}{2} + C(-h)\right) = \boxed{\frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)}$$

$$\begin{aligned}
&\left[-h; f(-h)\right]: \quad f(-h) = && Ah^2 && -Bh && +C \\
&\left[0; f(0)\right]: \quad f(0) = && && && C \,/\cdot 4 \\
&\left[h; f(h)\right]: \quad f(h) = && Ah^2 && +Bh && +C
\end{aligned}$$

$$f(-h) + 4f(0) + f(h) = 2Ah^2 + 6C$$

$n = 2$ - Simpsonova formule



$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y\,dx = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

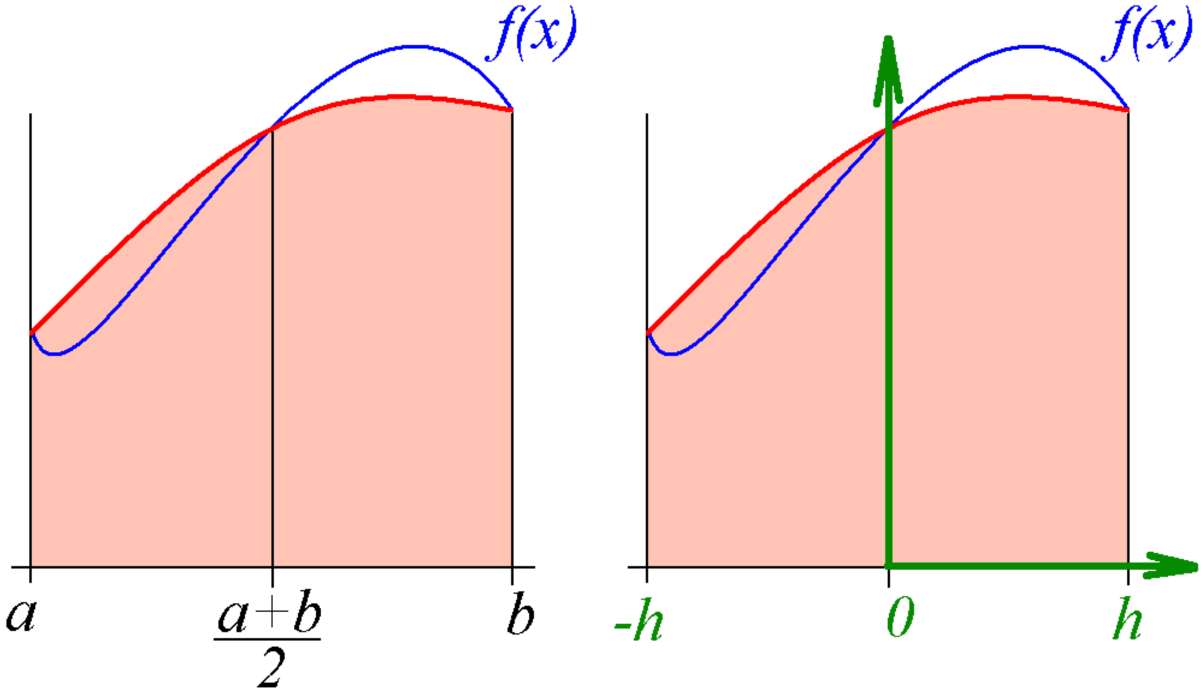
$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch - \left(\frac{A(-h)^3}{3} + \frac{B(-h)^2}{2} + C(-h)\right) = \boxed{\frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)}$$

$$\begin{array}{lrl} [-h;\, f(-h)]: & f(-h) = & Ah^2 \quad -Bh \quad +C \; / :3 \\ [0;\, f(0)]: & f(0) = & \qquad\qquad\qquad\quad C \; / \cdot \tfrac{4}{3} \\ [h;\, f(h)]: & f(h) = & Ah^2 \quad +Bh \quad +C \; / :3 \\ \hline \end{array}$$

$$f(-h) + 4f(0) + f(h) = 2Ah^2 + 6C$$

$$f(-h) + 4f(0) + f(h) = 2Ah^2 + 6C$$

$n = 2$ - Simpsonova formule



$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y dx = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right) dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

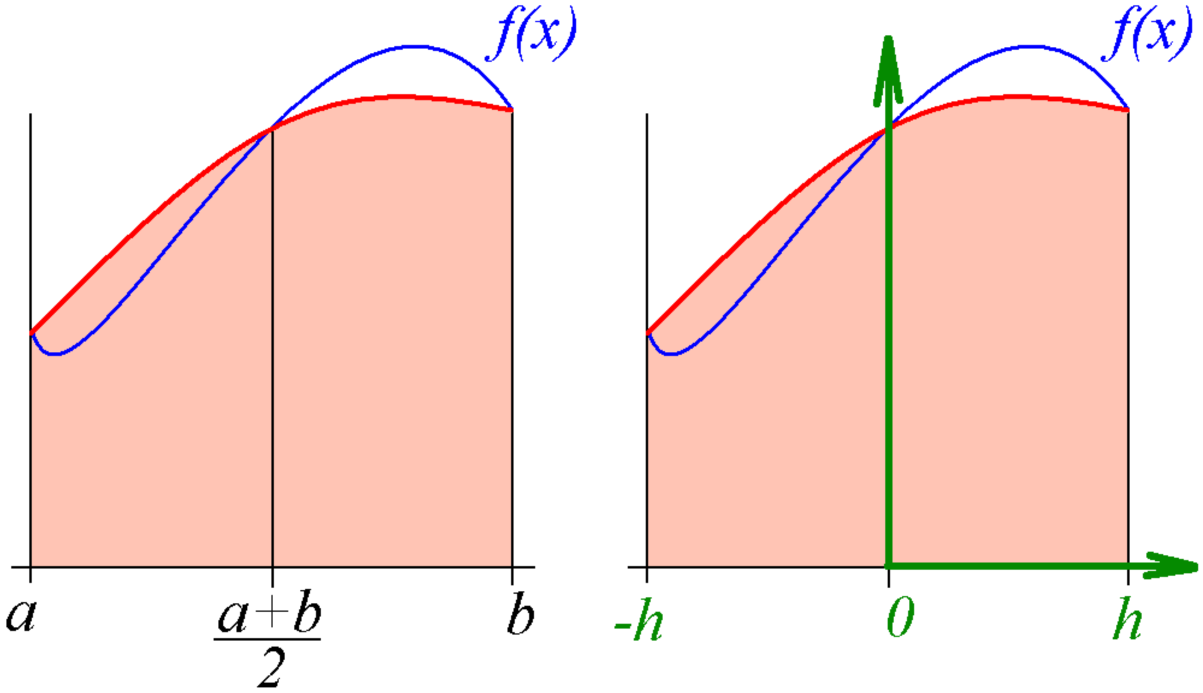
$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch - \left(\frac{A(-h)^3}{3} + \frac{B(-h)^2}{2} + C(-h)\right) = \boxed{\frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)}$$

$$\begin{array}{lrl} [-h; f(-h)]: & f(-h) = & Ah^2 \quad -Bh \quad +C \; / : 3 \\ [0; f(0)]: & f(0) = & \qquad\qquad\qquad\quad C \; / \cdot \tfrac{4}{3} \\ [h; f(h)]: & f(h) = & Ah^2 \quad +Bh \quad +C \; / : 3 \\ \hline \end{array}$$

$$f(-h) + 4f(0) + f(h) = 2Ah^2 + 6C$$

$$f(-h) + 4f(0) + f(h) = 2Ah^2 + 6C$$

$n=2$ - Simpsonova formule



$$y = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_{-h}^{h} y\,dx = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2+Bx+C\right)dx = \left[\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right]_{-h}^{h} =$$

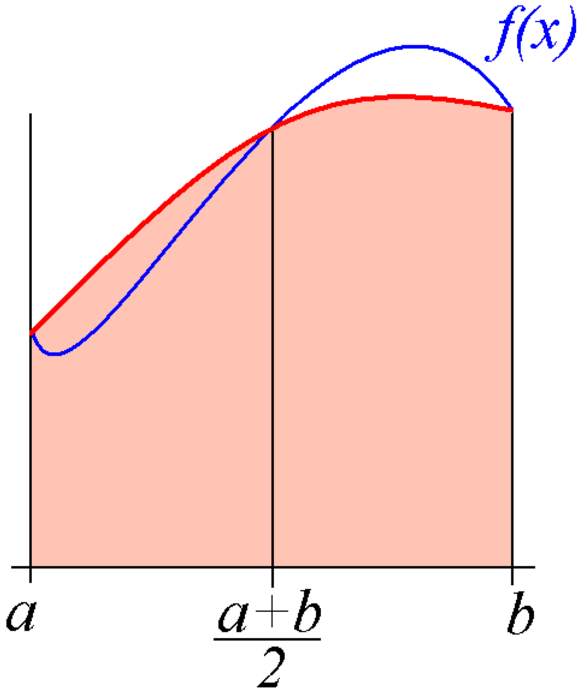
$$= \frac{Ah^3}{3}+\frac{Bh^2}{2}+Ch-\left(\frac{A(-h)^3}{3}+\frac{B(-h)^2}{2}+C(-h)\right) = \boxed{\frac{2}{3}Ah^3+2Ch} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \boxed{\frac{h}{3}\left(2Ah^2+6C\right)}$$

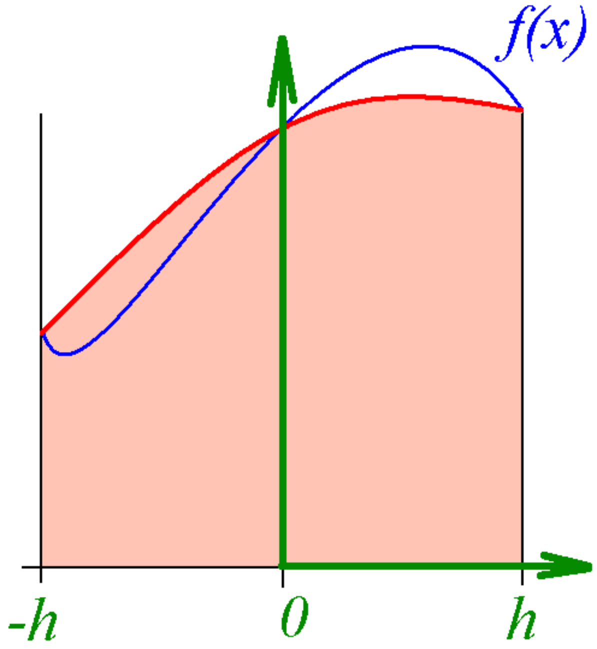
$$\begin{aligned}
\left[-h; f(-h)\right]: &\quad f(-h) = Ah^2 - Bh + C \;/:3 \\
\left[0; f(0)\right]: &\quad f(0) = C \;/\cdot \tfrac{4}{3} \\
\left[h; f(h)\right]: &\quad f(h) = Ah^2 + Bh + C \;/:3 \\
\hline
& f(-h)+4f(0)+f(h) = 2Ah^2+6C
\end{aligned}$$

$$f(-h)+4f(0)+f(h) = 2Ah^2+6C$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(-h)+4f(0)+f(h)\right)}$$

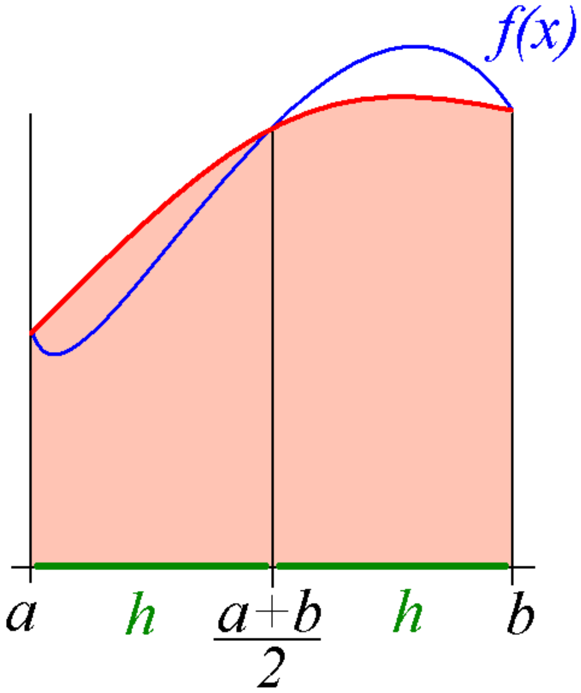
$n = 2$ - Simpsonova formule

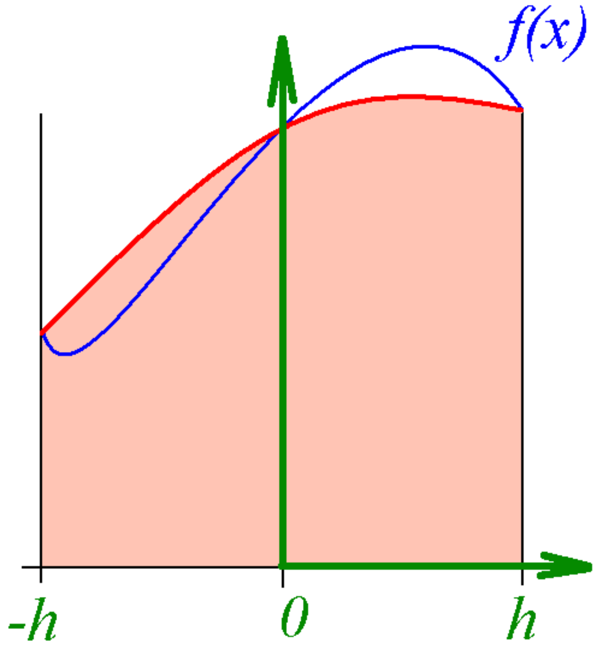




$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(-h) + 4f(0) + f(h) \right)$$

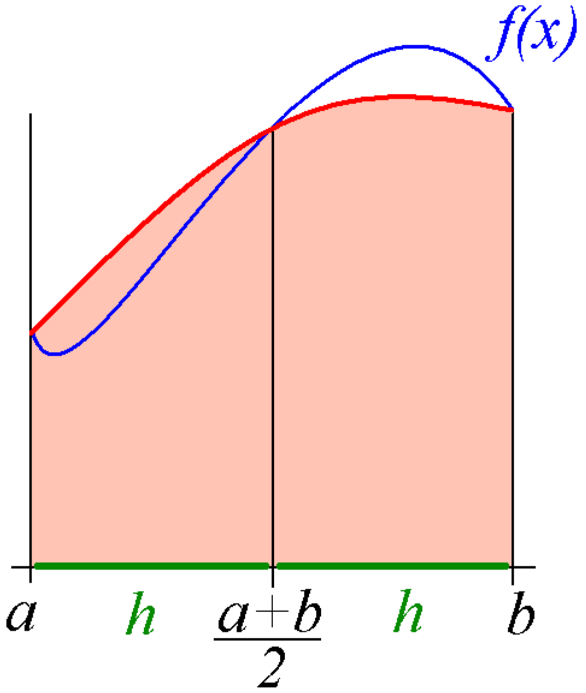
$n = 2$ - Simpsonova formule

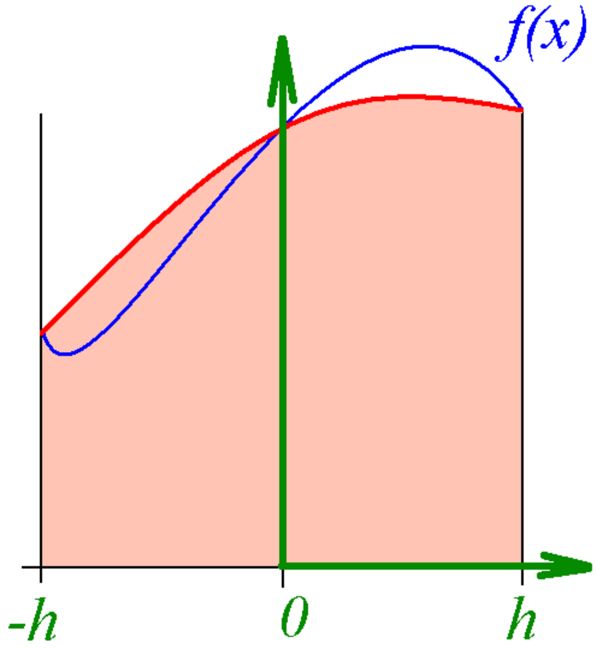




$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(-h) + 4f(0) + f(h)\right)$$

$n = 2$ - Simpsonova formule

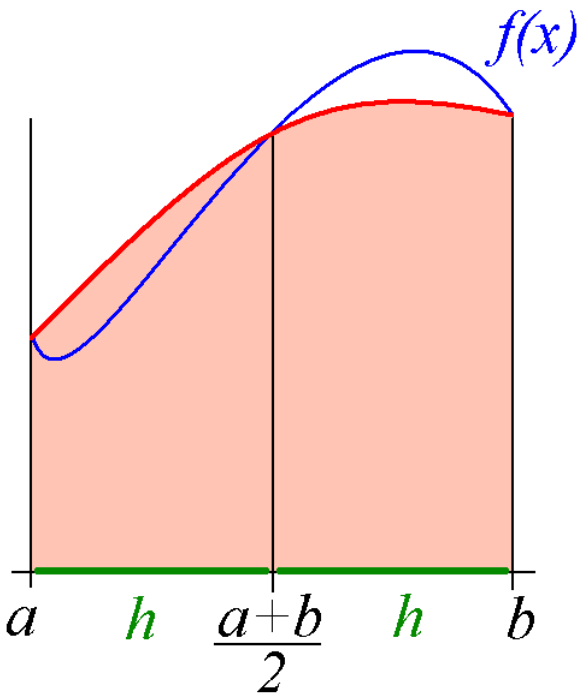


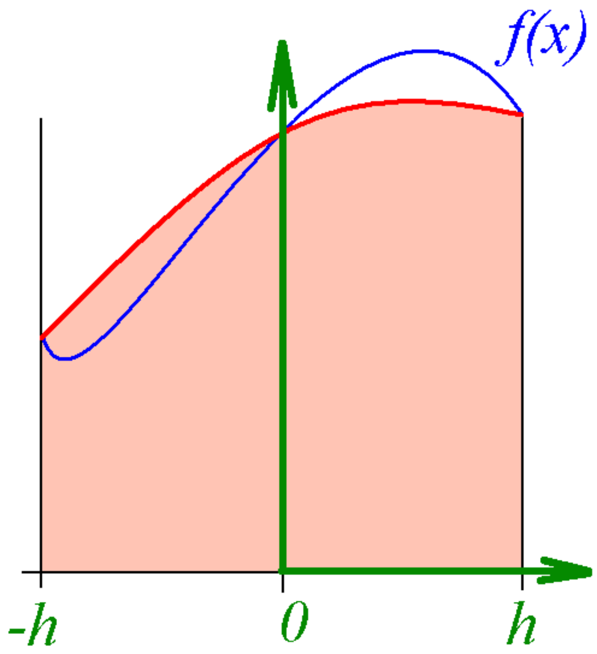


$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\big(f(-h) + 4f(0) + f(h)\big)}$$

$n = 2$ - Simpsonova formule





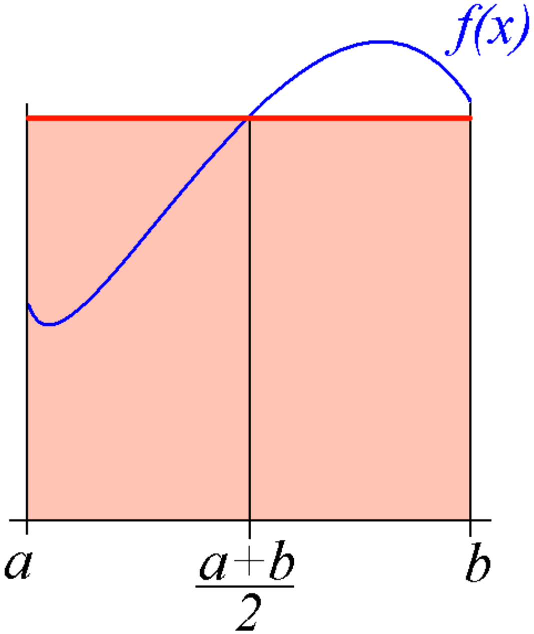
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

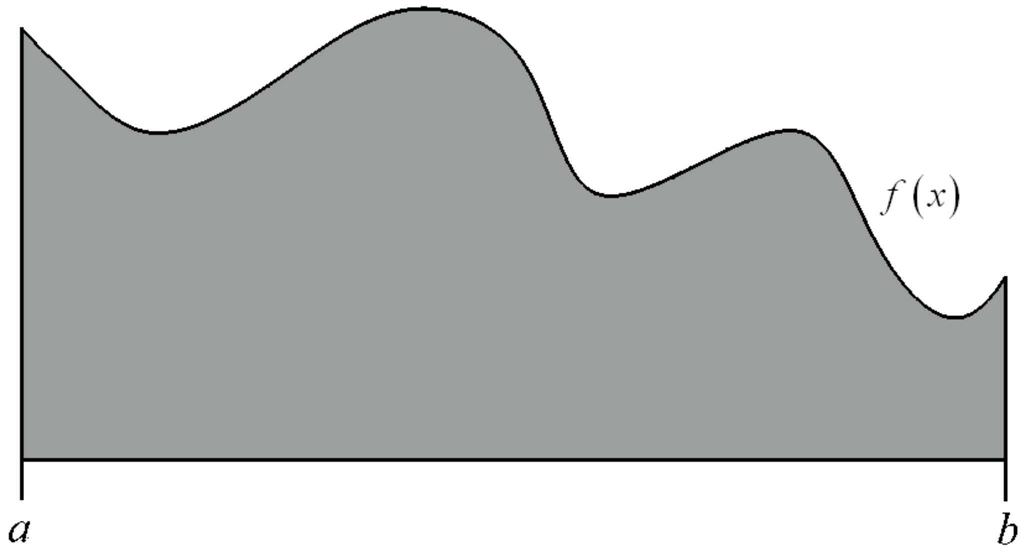
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(-h) + 4f(0) + f(h)\right)}$$

Chyba: $E_S \leq \frac{1}{90} \max_{x \in \langle a;b \rangle} \left| f^{(4)}(x) \right| \cdot \left(\frac{b-a}{2} \right)^5$

Složené formule

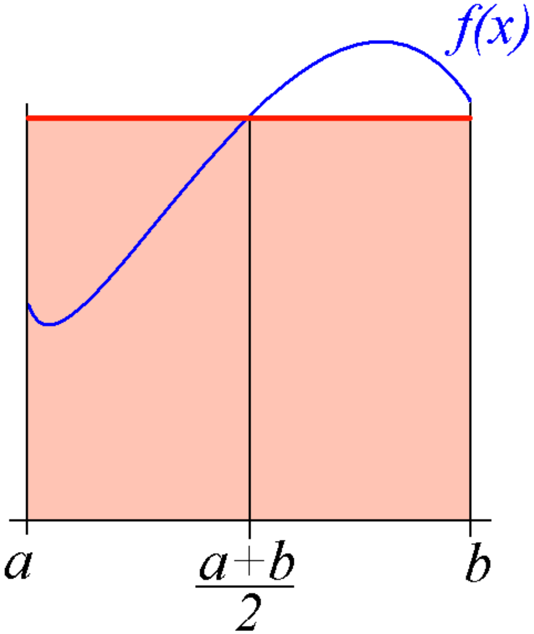
Obdélníková:

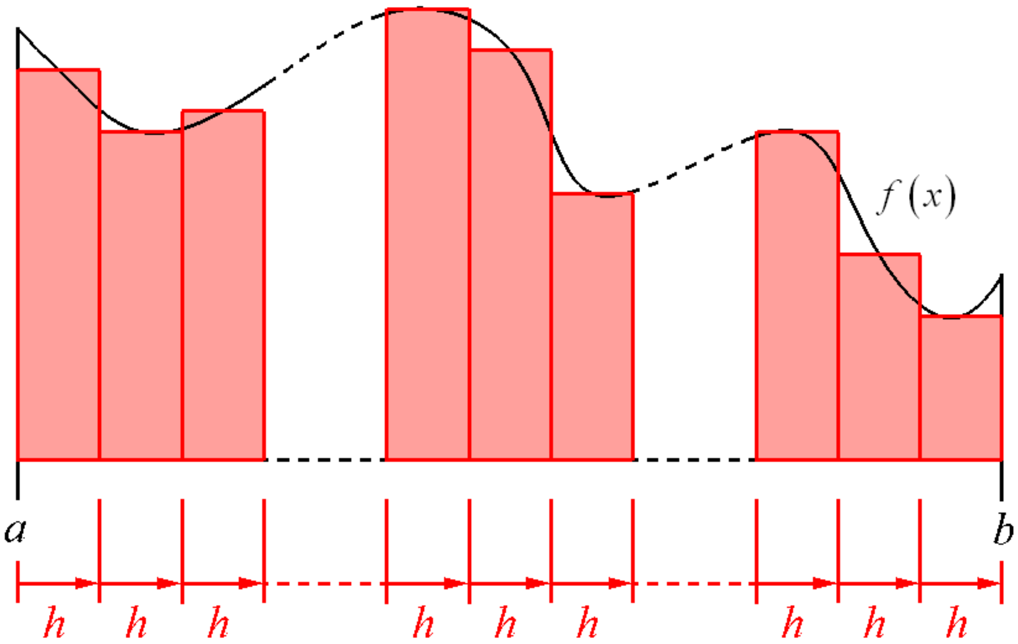




Složené formule

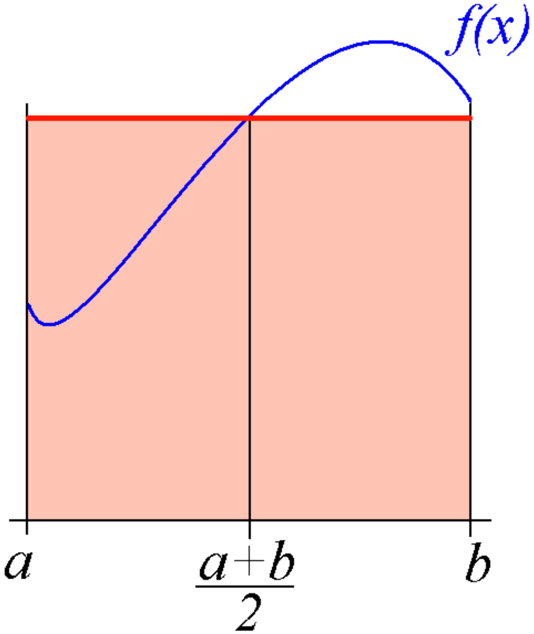
Obdélníková:

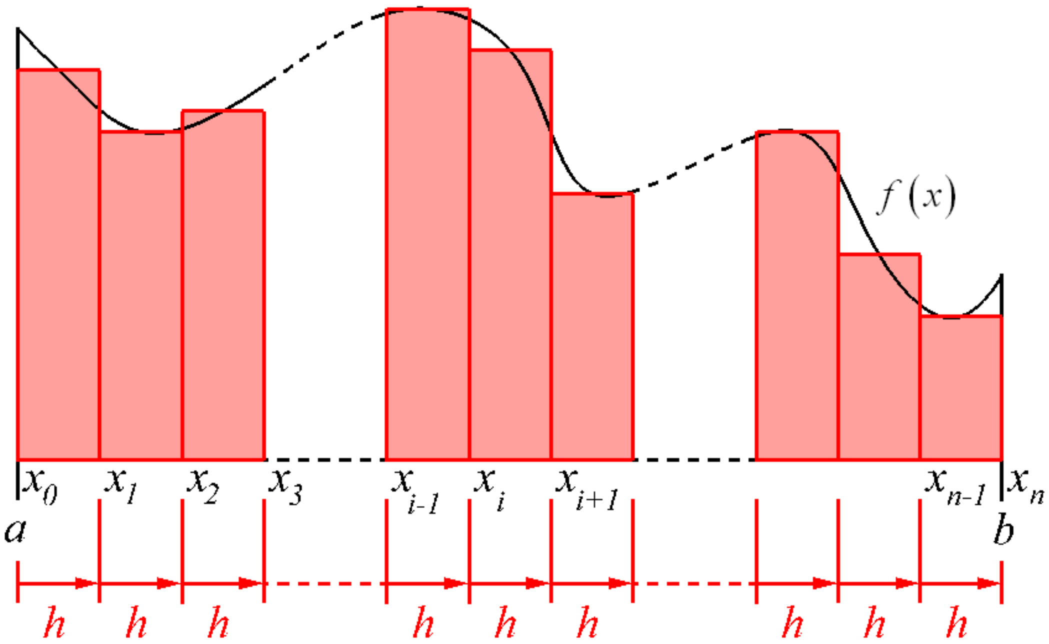




Složené formule

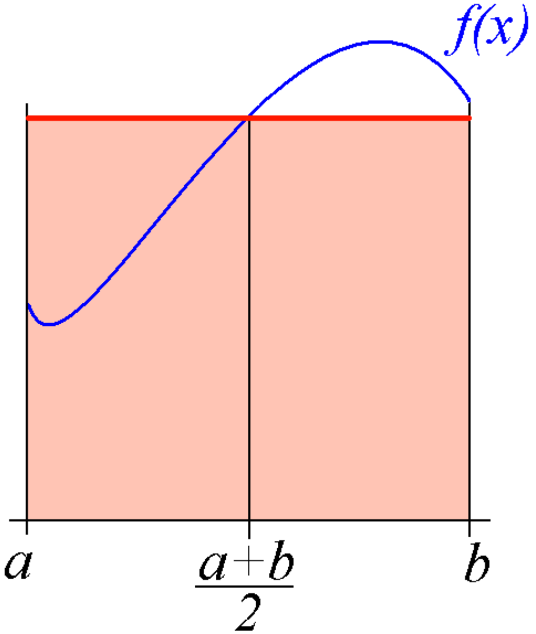
Obdélníková:

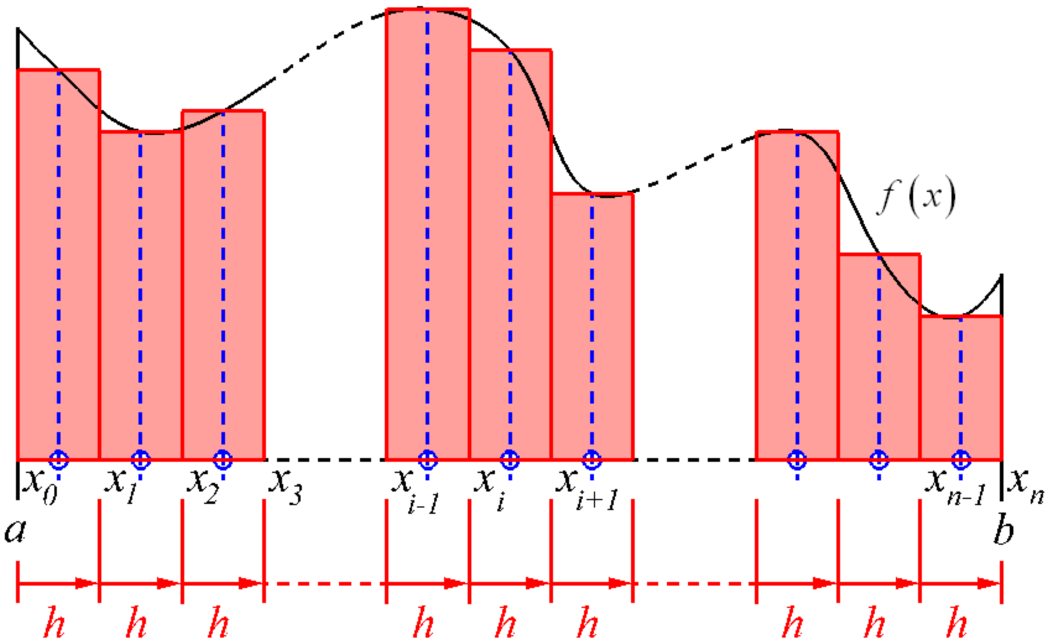




Složené formule

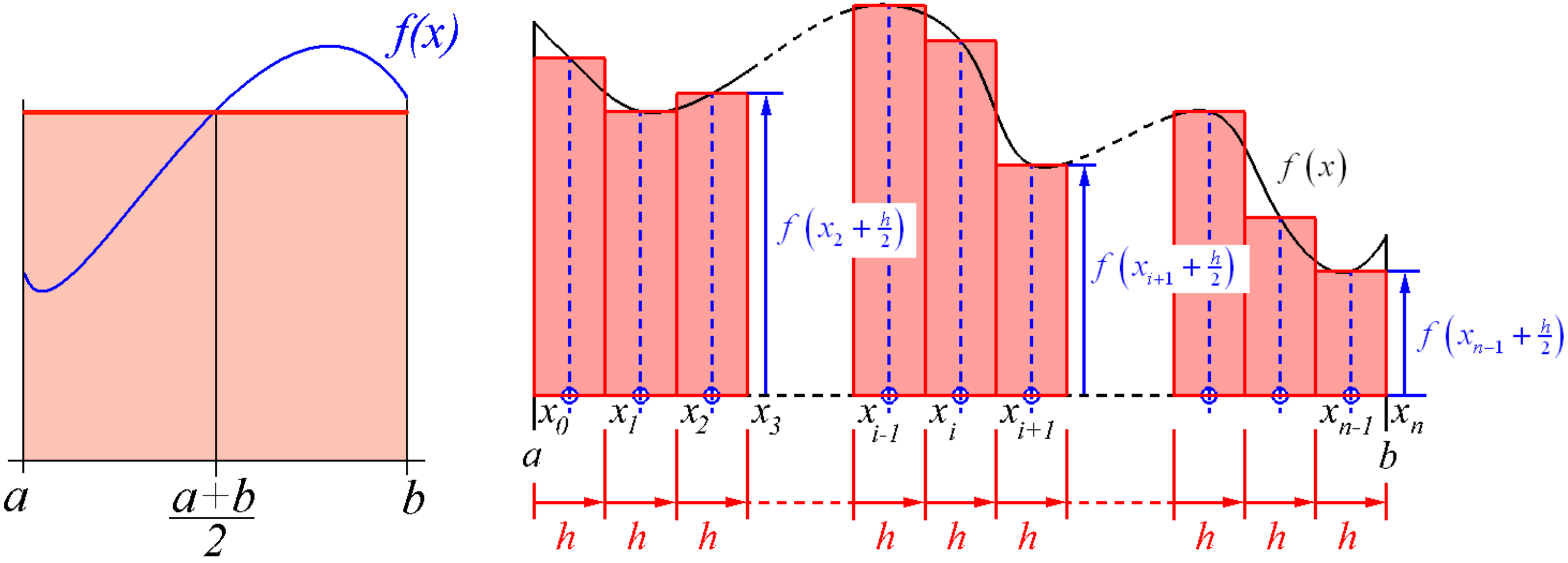
Obdélníková:





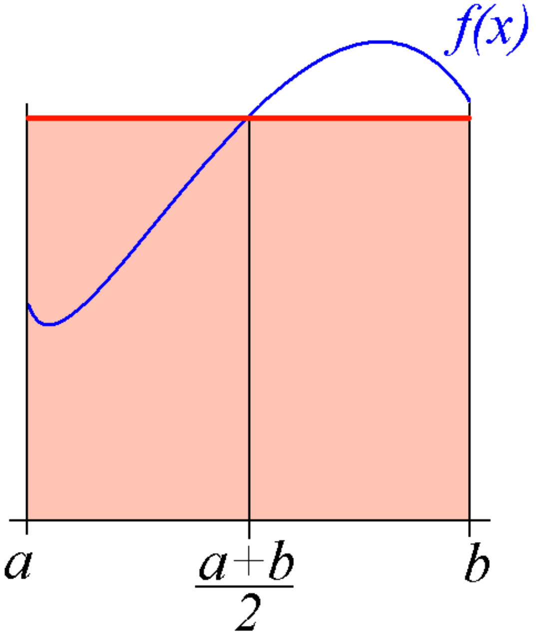
Složené formule

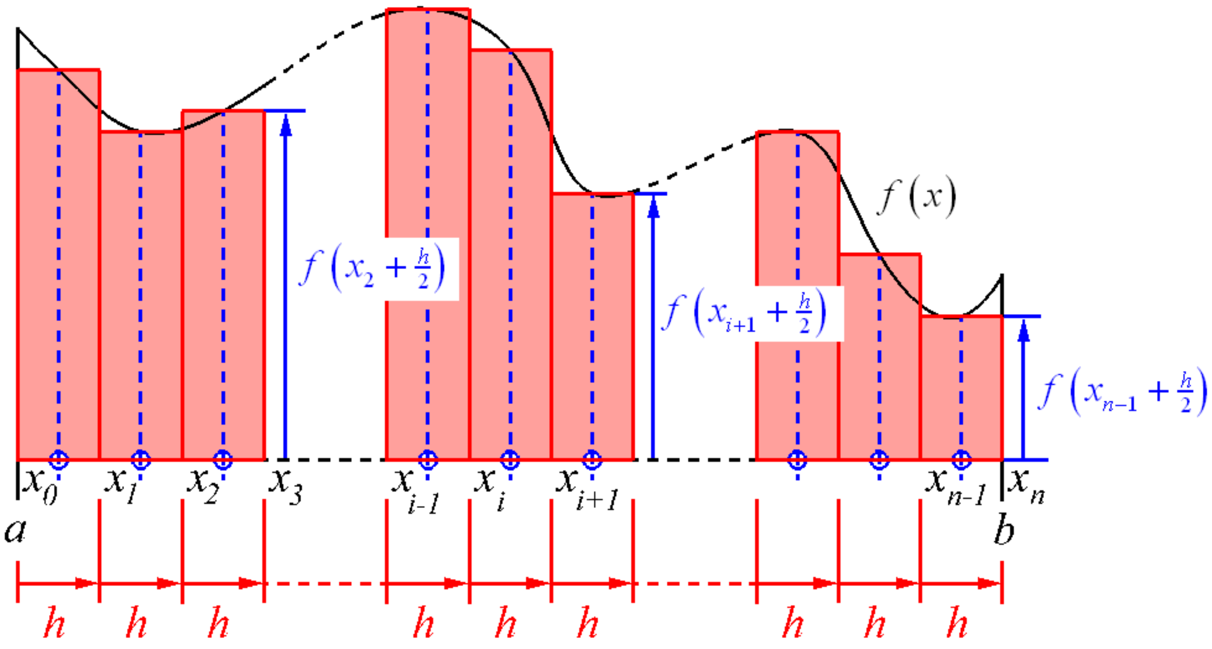
Obdélníková:



Složené formule

Obdélníková:

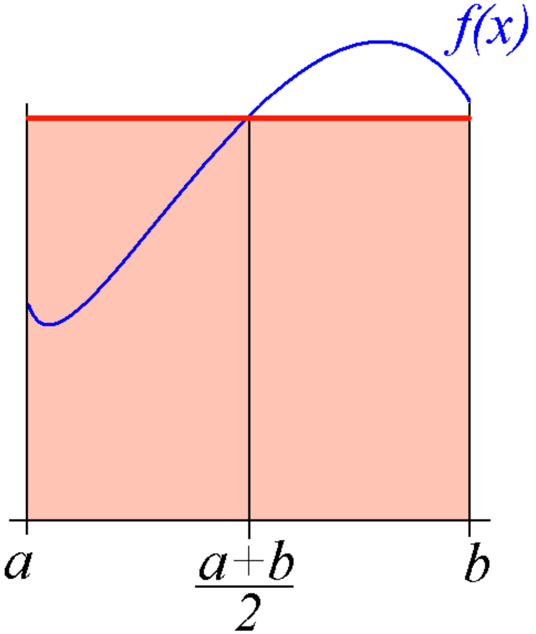


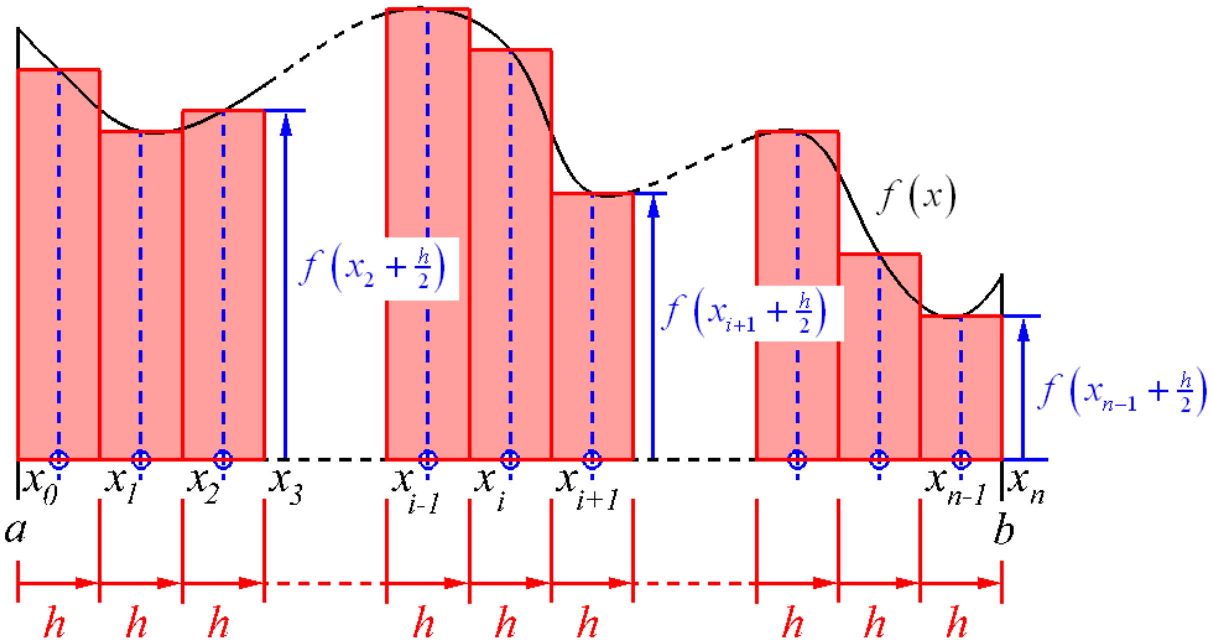


$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

Složené formule

Obdélníková:



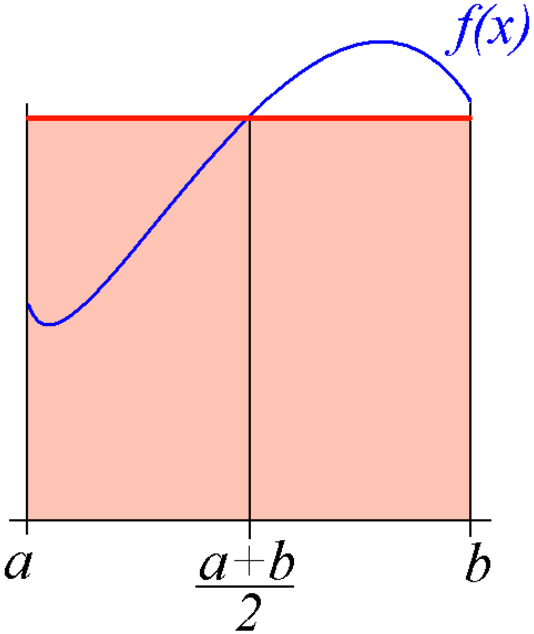


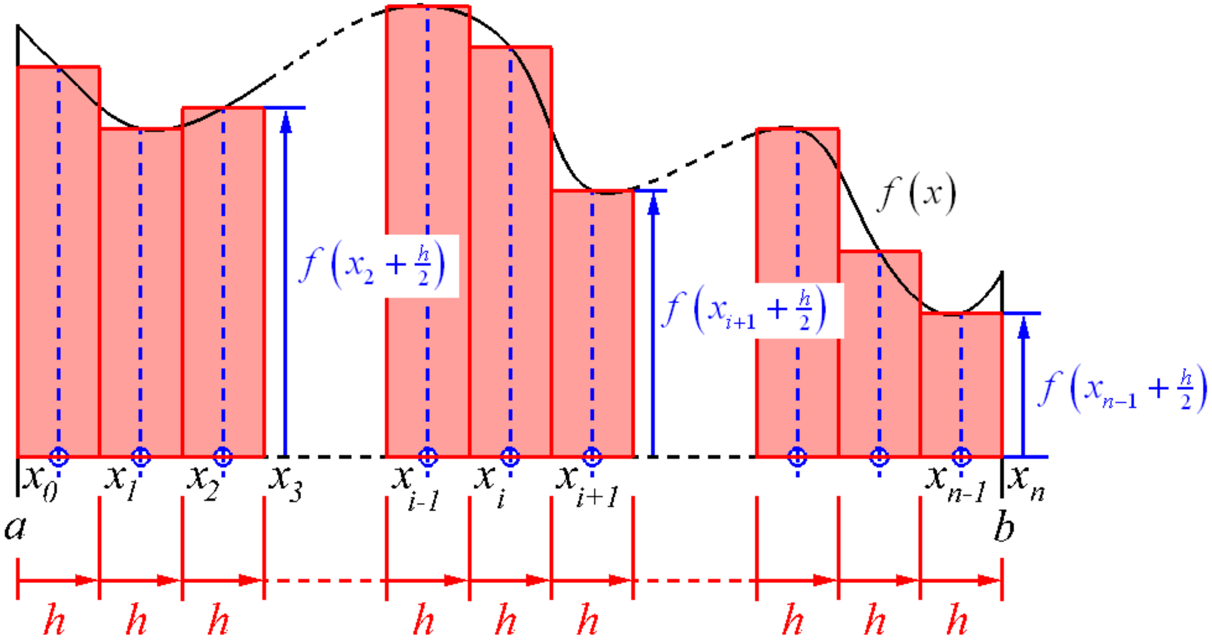
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \cdots + h \cdot f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \cdots + h \cdot f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)$$

Složené formule

Obdélníková:





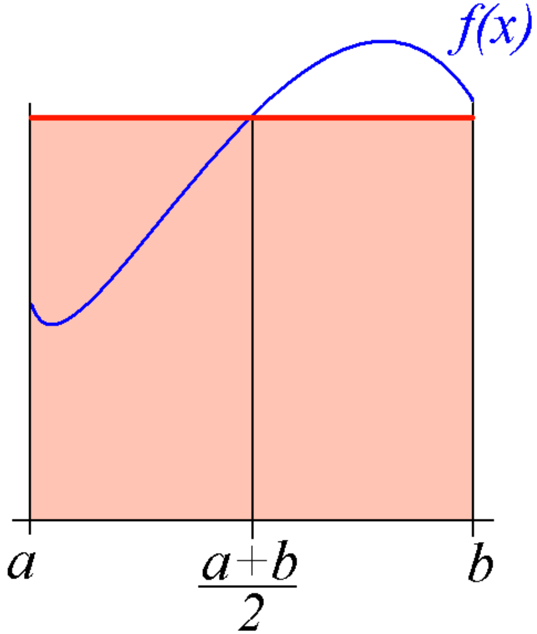
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

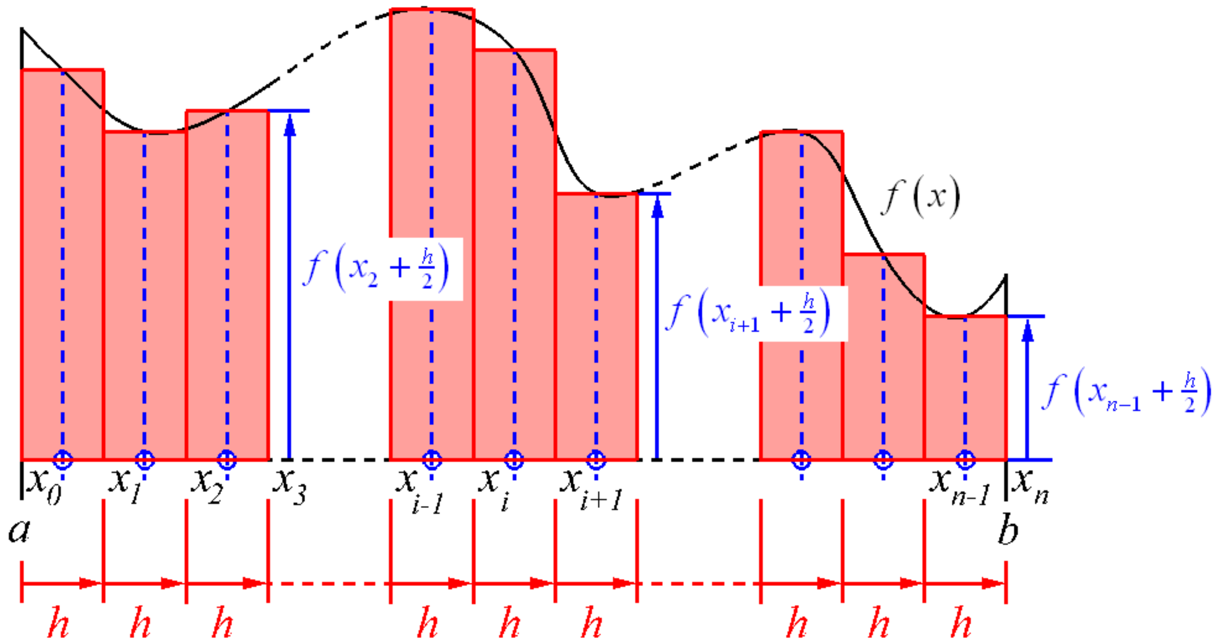
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \cdots + h \cdot f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \cdots + h \cdot f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right]}$$

Složené formule

Obdélníková:

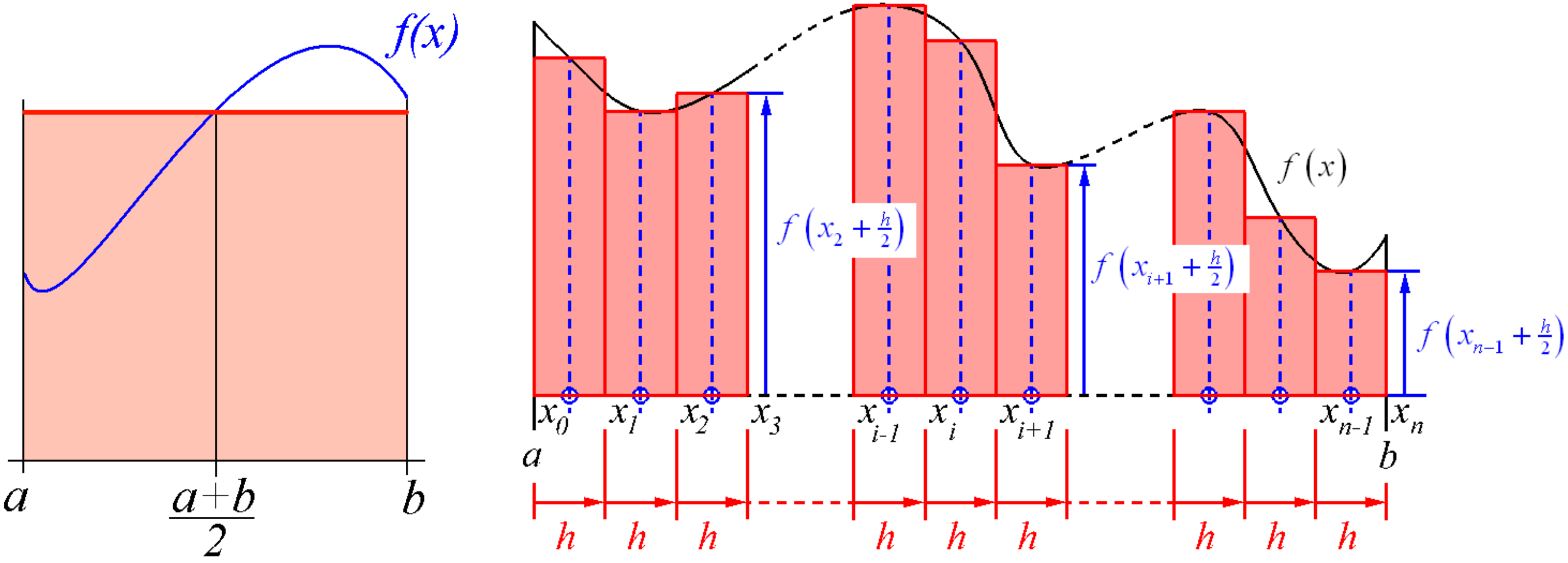




$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right) \right]$$

Složené formule

Obdélníková:



$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h\cdot\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\cdots+f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)+\cdots+f\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)\right]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\cdots+f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)+\cdots+f\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)\right]}$$

Složené formule

Obdélníková:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right]}$$

Chyba: **prostá** **složená:**

$$E_O \leq \frac{1}{24} \max_{x \in \langle a;b \rangle} |f''(x)| \cdot (b-a)^3$$

Složené formule

Obdélníková:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right]}$$

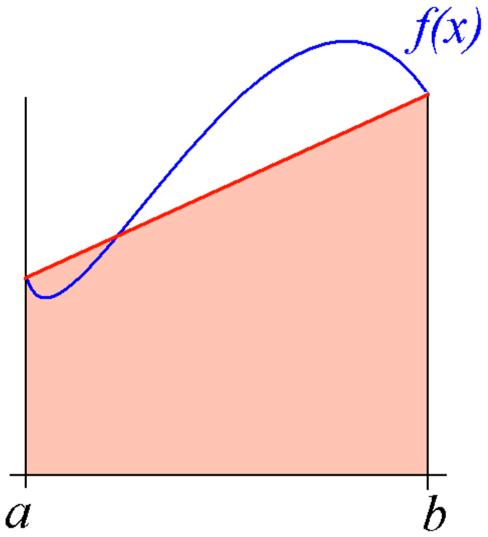
$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right]}$$

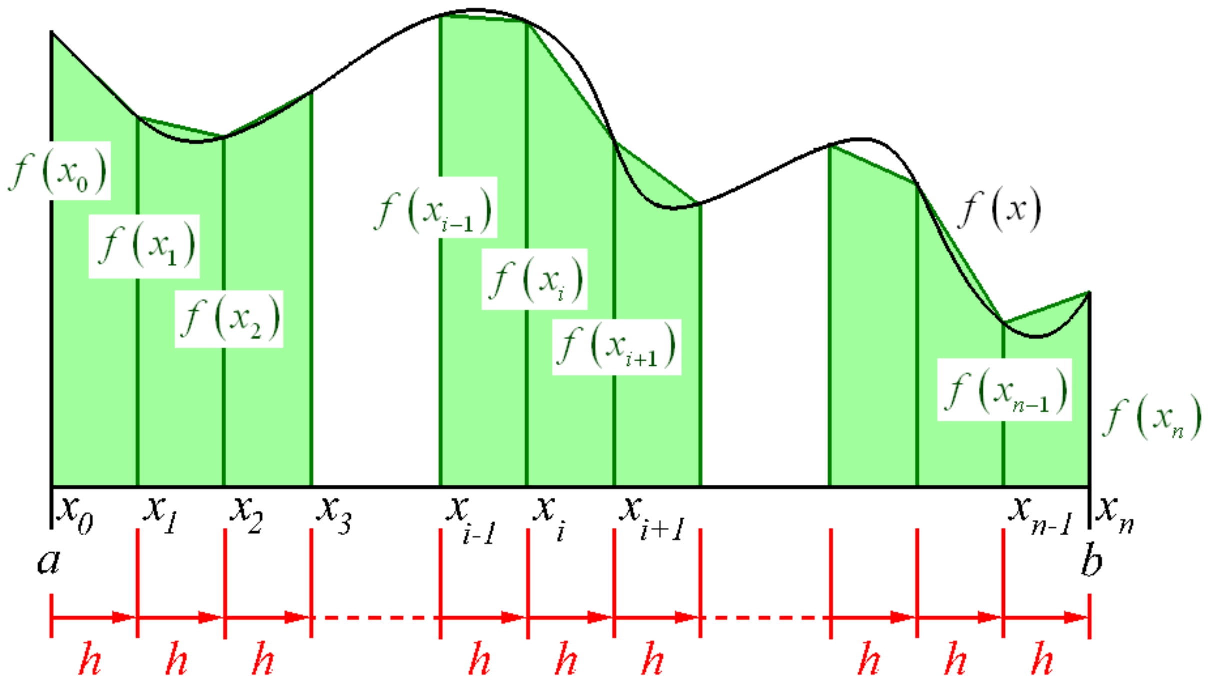
Chyba: **prostá** **složená:**

$$E_O \leq \frac{1}{24} \max_{x\in\langle a;b\rangle} \left|f''^{(x)}\right| \cdot (b-a)^3 \qquad E_O \leq \frac{1}{24} \max_{x\in\langle a;b\rangle} |f''(x)| \cdot (b-a)^3$$

Složené formule

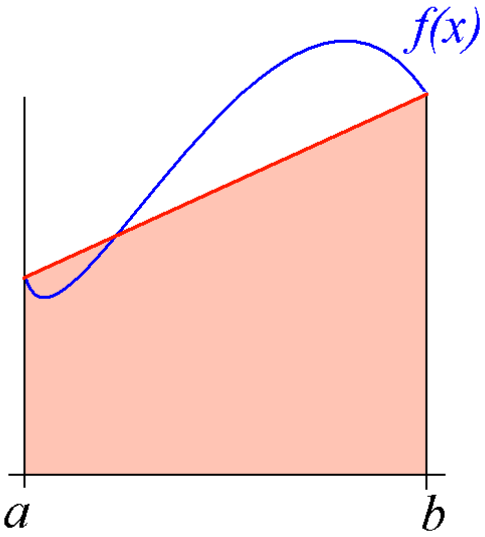
Lichoběžníková

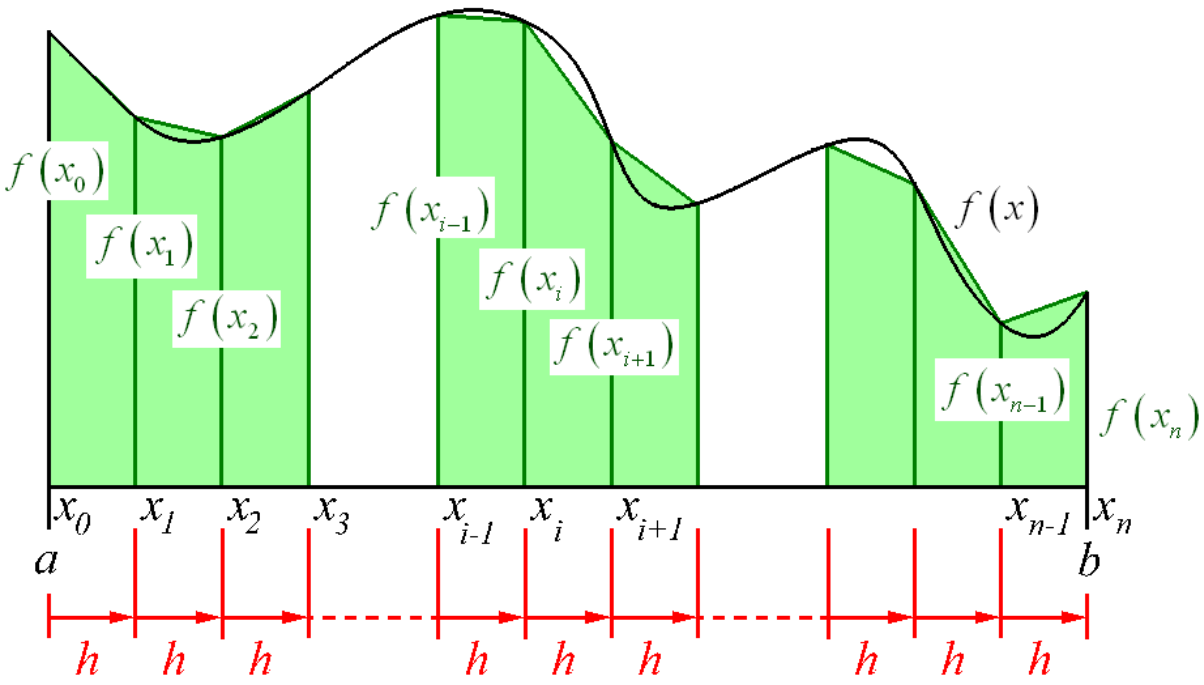




Složené formule

Lichoběžníková

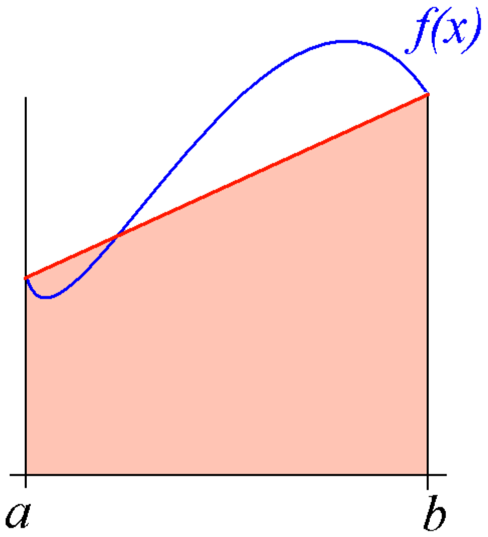


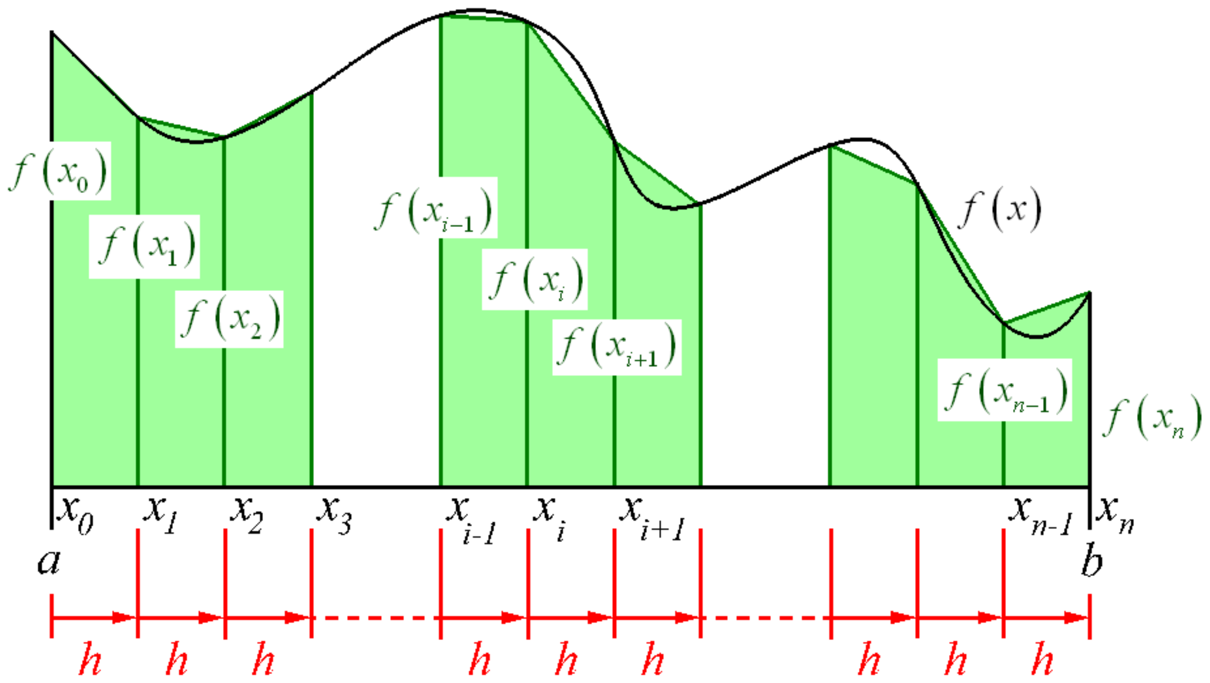


$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

Složené formule

Lichoběžníková



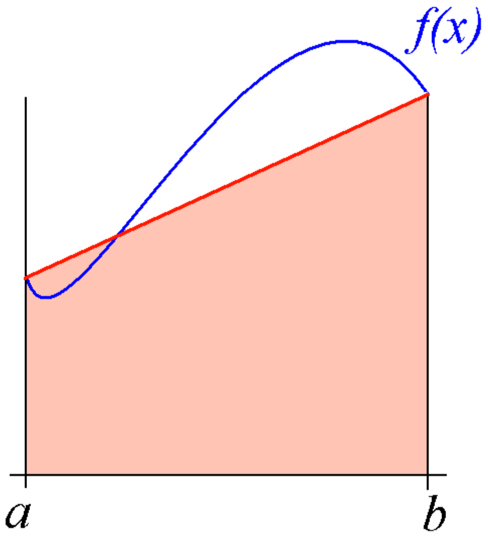


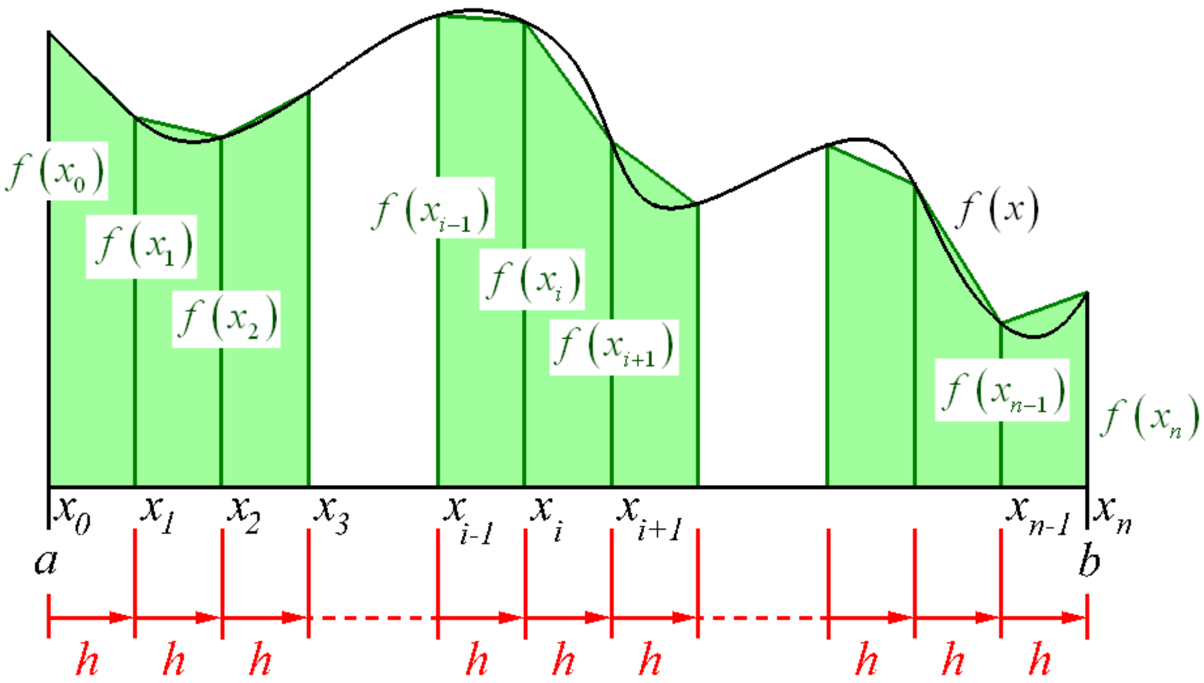
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\cdot[f(x_0)+f(x_1)] + \frac{h}{2}\cdot[f(x_1)+f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}\cdot[f(x_{i-1})+f(x_i)] + \cdots + \frac{h}{2}\cdot[f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Složené formule

Lichoběžníková





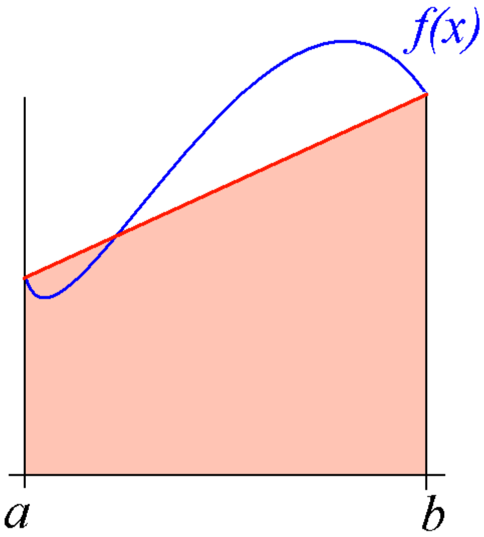
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

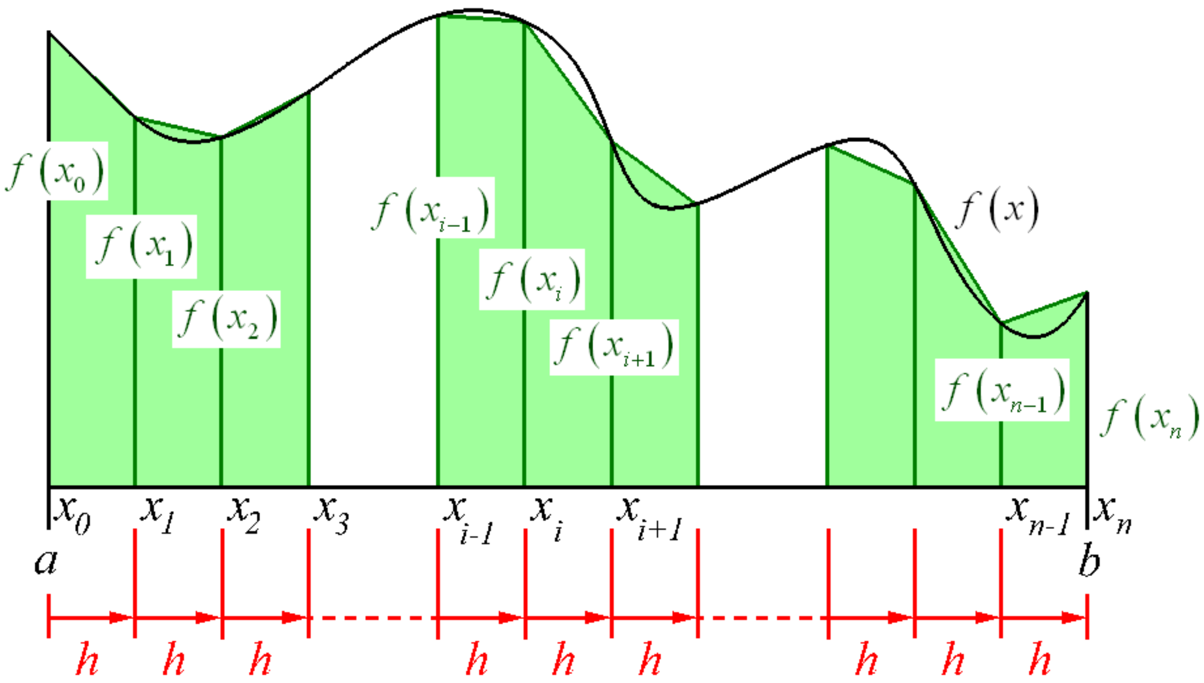
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\cdot[f(x_0)+f(x_1)] + \frac{h}{2}\cdot[f(x_1)+f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}\cdot[f(x_{i-1})+f(x_i)] + \cdots + \frac{h}{2}\cdot[f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\cdot[\, f(x_0) + 2\cdot f(x_1) + \cdots + 2\cdot f(x_i) + \cdots + 2\cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)\,]$$

Složené formule

Lichoběžníková

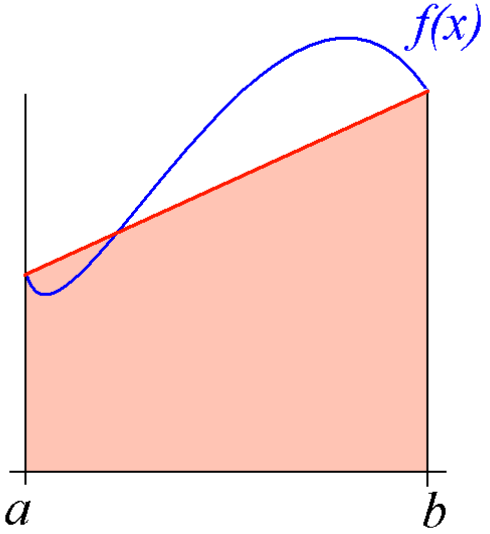


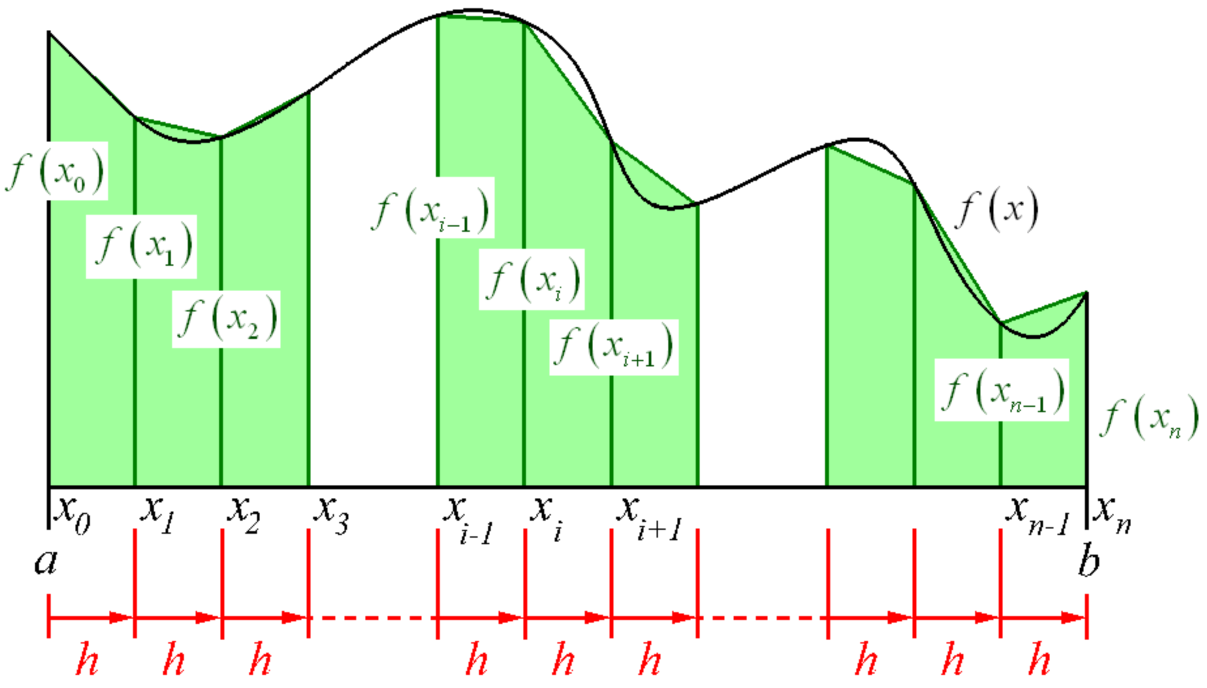


$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\cdot\left[\, f(x_0) + 2\cdot f(x_1) + \cdots + 2\cdot f(x_i) + \cdots + 2\cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)\,\right]}$$

Složené formule

Lichoběžníková



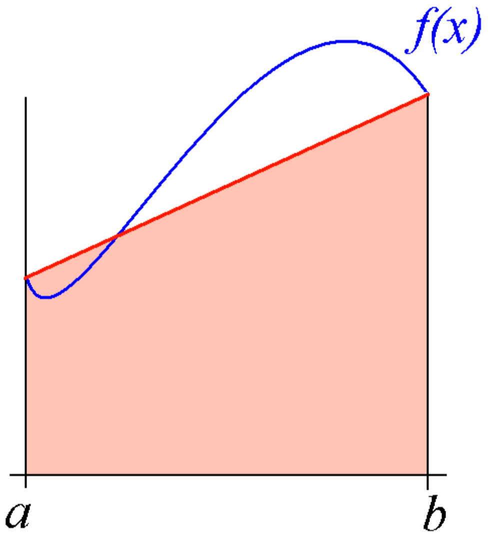


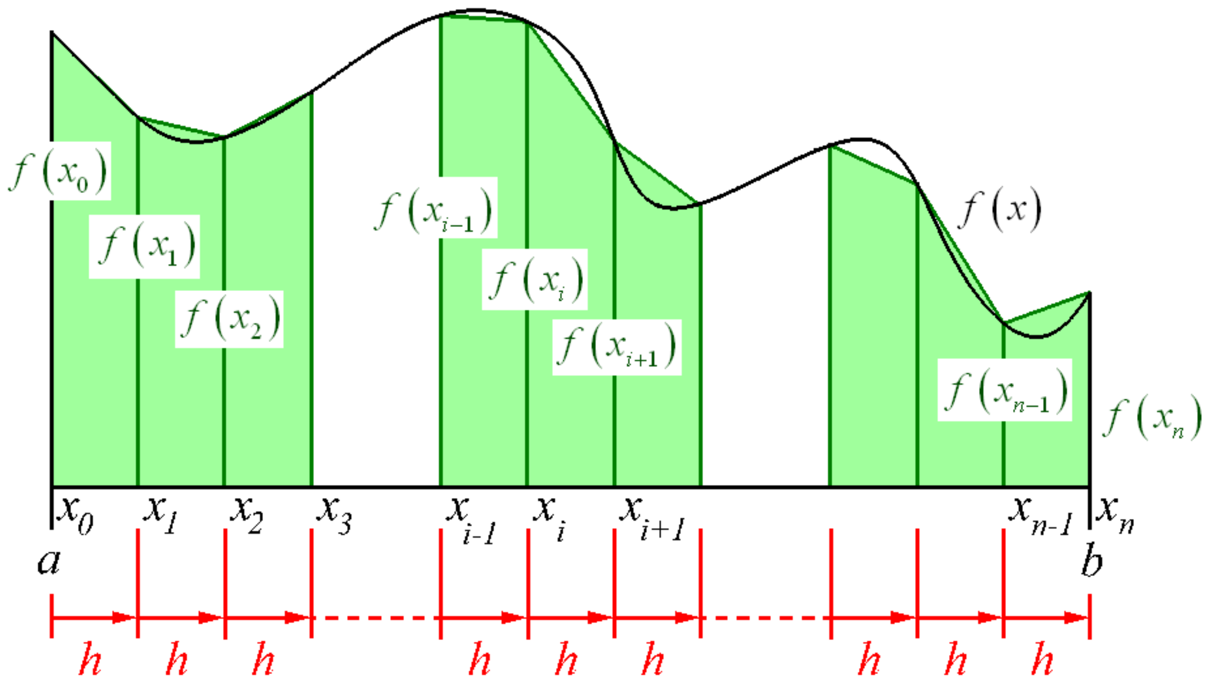
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + \cdots + 2 \cdot f(x_i) + \cdots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_i) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right]$$

Složené formule

Lichoběžníková





$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n}\cdot\left[\, f(x_0) + 2\cdot f(x_1) + \cdots + 2\cdot f(x_i) + \cdots + 2\cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)\,\right]$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_i) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

Složené formule

Lichoběžníková

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \cdot [\, f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + \cdots + 2 \cdot f(x_i) + \cdots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n) \,]$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_i) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right]$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n} \cdot [\, f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + \cdots + 2 \cdot f(x_i) + \cdots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n) \,]$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_i) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right]$$

Složené formule

Lichoběžníková

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \cdot [\, f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + \cdots + 2 \cdot f(x_i) + \cdots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n) \,]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_i) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n} \cdot [\, f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + \cdots + 2 \cdot f(x_i) + \cdots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n) \,]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_i) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right]}$$

Chyba: **prostá**

$$E_L \leq \frac{1}{12} \max_{x \in \langle a;b \rangle} \left| f''(x) \right| \cdot (b-a)^3$$

Složené formule

Lichoběžníková

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\cdot\left[\, f(x_0) + 2\cdot f(x_1) + \cdots + 2\cdot f(x_i) + \cdots + 2\cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)\,\right]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h\cdot\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_i) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n}\cdot\left[\, f(x_0) + 2\cdot f(x_1) + \cdots + 2\cdot f(x_i) + \cdots + 2\cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)\,\right]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_i) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]}$$

Chyba: **prostá** **složená:**

$$E_L \le \frac{1}{12}\max_{x\in\langle a;b\rangle}\left|f''(x)\right|\cdot(b-a)^3$$

$$E_L \le \frac{1}{12}\max_{x\in\langle a;b\rangle}\left|f''(x)\right|\cdot(b-a)^3$$

Složené formule

Lichoběžníková

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \cdot [\, f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + \cdots + 2 \cdot f(x_i) + \cdots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)\,]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_i) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n} \cdot [\, f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + \cdots + 2 \cdot f(x_i) + \cdots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)\,]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_i) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right]}$$

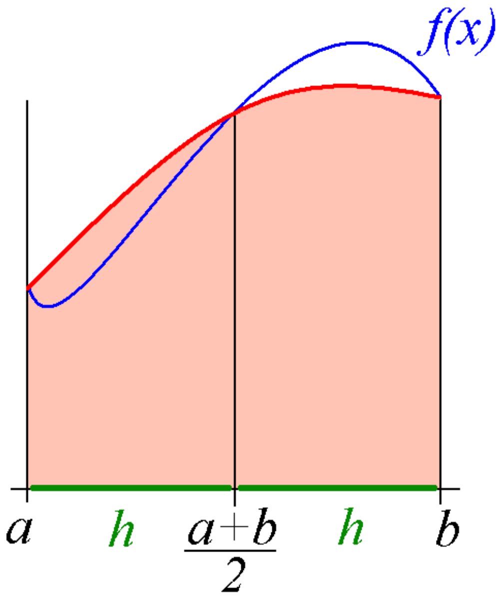
Chyba: **prostá** **složená:**

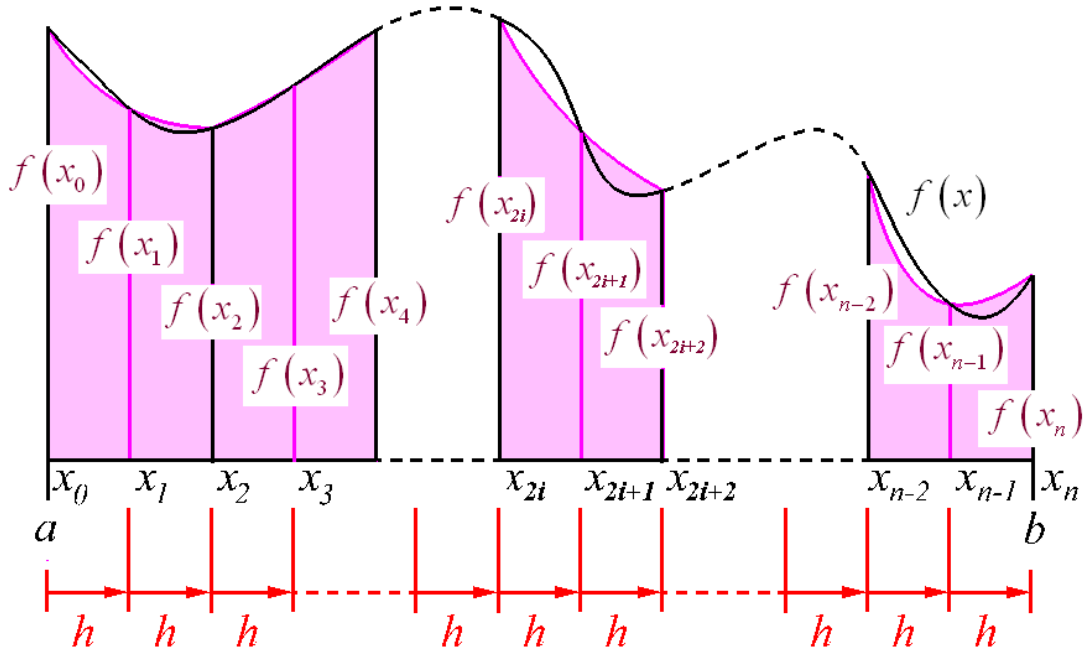
$$E_L \leq \frac{1}{12} \max_{x \in \langle a;b \rangle} \left| f''(x) \right| \cdot (b-a)^3$$

$$E_L \leq \frac{1}{12} \max_{x \in \langle a;b \rangle} |f''(x)| \cdot (b-a) \cdot h^2$$

Složené formule

Simpsonova





$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{h}{3}\cdot[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] + \frac{h}{3}\cdot[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)] + \cdots + \frac{h}{3}\cdot[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\cdot[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]}$$

Složené formule

Simpsonova

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]}$$

Složené formule

Simpsonova

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3} \cdot [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{3n} \cdot [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]}$$

Složené formule

Simpsonova

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{3n}\cdot\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]}$$

Chyba: **prostá**

$$E_S \le \frac{1}{90}\max_{x\in\langle a;b\rangle}\left|f^{(4)}(x)\right|\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$

Složené formule

Simpsonova

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\cdot[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{3n}\cdot[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]}$$

Chyba: **prostá** **složená:**

$$E_S \le \frac{1}{90}\max_{x\in\langle a;b\rangle}\left|f^{(4)}(x)\right|\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \qquad E_S \le \frac{1}{90}\max_{x\in\langle a;b\rangle}\left|f^{(4)}(x)\right|\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$

Složené formule

Simpsonova

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3} \cdot [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]}$$

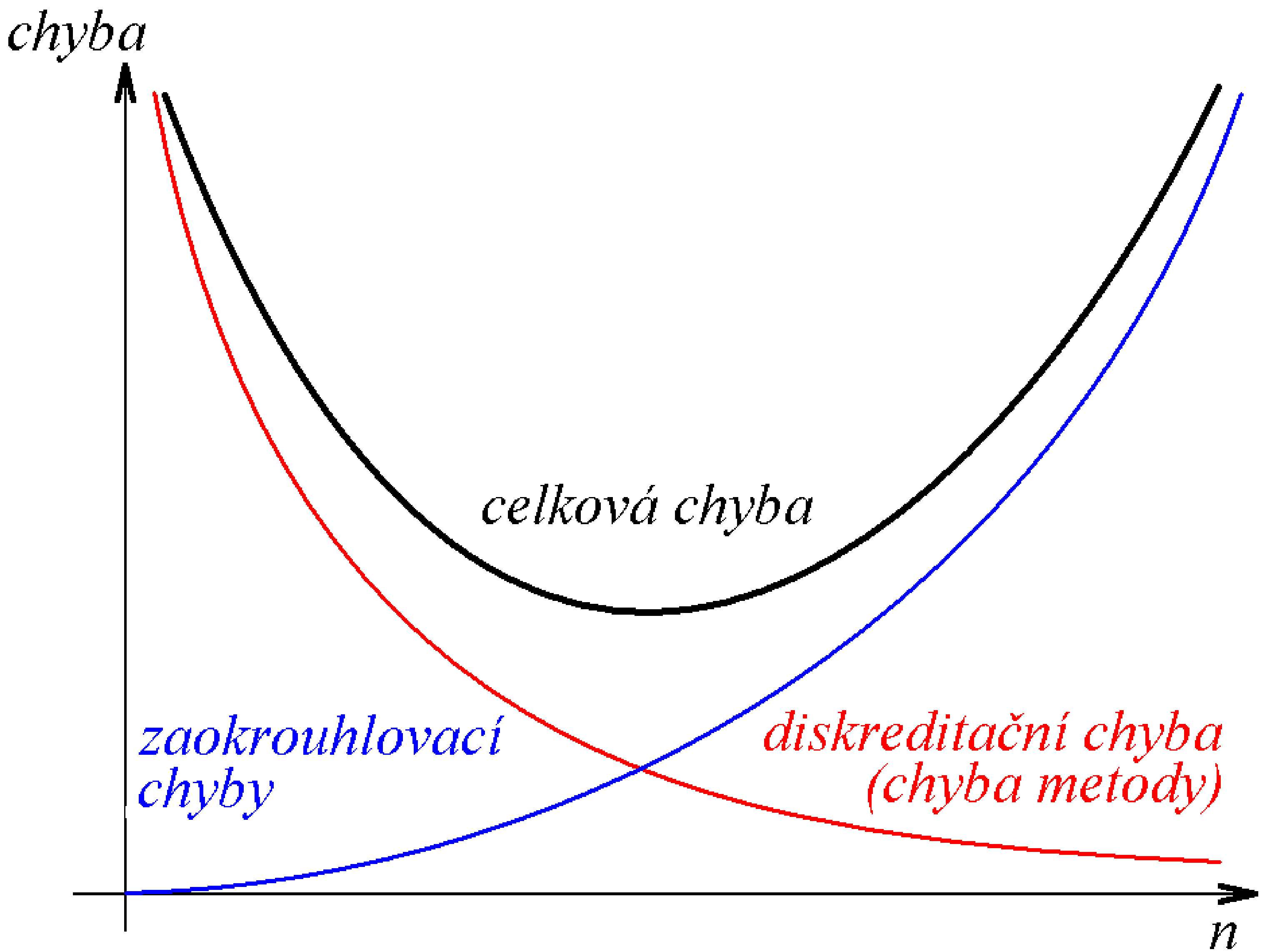
$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{3n} \cdot [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]}$$

Chyba: **prostá** **složená:**

$$E_S \le \frac{1}{90} \max_{x\in\langle a;b\rangle} \left|f^{(4)}(x)\right| \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$

$$E_S \le \frac{1}{90} \max_{x\in\langle a;b\rangle} \left|f^{(4)}(x)\right| \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot h^4$$

Celková chyba složených formulí:



Stupeň přesnosti (řád) kvadraturní formule

Stupeň přesnosti (řád) kvadraturní formule = stupeň polynomu, který daná formule integruje přesně.

Stupeň přesnosti (řád) kvadraturní formule = stupeň polynomu, který daná formule integruje přesně.

Platí:

Kvadraturní formule získaná integrací Lagrangeova interpolačního polynomu stupně n má stupeň přesnosti **alespoň** n.

Stupeň přesnosti (řád) kvadraturní formule = stupeň polynomu, který daná formule integruje přesně.

Platí:

Kvadraturní formule získaná integrací Lagrangeova interpolačního polynomu stupně n má stupeň přesnosti **alespoň** n.

Např:

Lichoběžníková formule : stupeň 1, přesnost 1 - integruje přesně přímku

Stupeň přesnosti (řád) kvadraturní formule = stupeň polynomu, který daná formule integruje přesně.

Platí:

Kvadraturní formule získaná integrací Lagrangeova interpolačního polynomu stupně n má stupeň přesnosti **alespoň** n.

Např:

Lichoběžníková formule	: stupeň 1, přesnost 1	- integruje přesně přímku
Simpsonova formule	: stupeň 2, přesnost 2	- integruje přesně parabolu

Stupeň přesnosti (řád) kvadraturní formule = stupeň polynomu, který daná formule integruje přesně.

Platí:

Kvadraturní formule získaná integrací Lagrangeova interpolačního polynomu stupně n má stupeň přesnosti **alespoň** n.

Např:

Obdélníková formule	: stupeň 0, přesnost 1	- integruje přesně přímku
Lichoběžníková formule	: stupeň 1, přesnost 1	- integruje přesně přímku
Simpsonova formule	: stupeň 2, přesnost 2	- integruje přesně parabolu

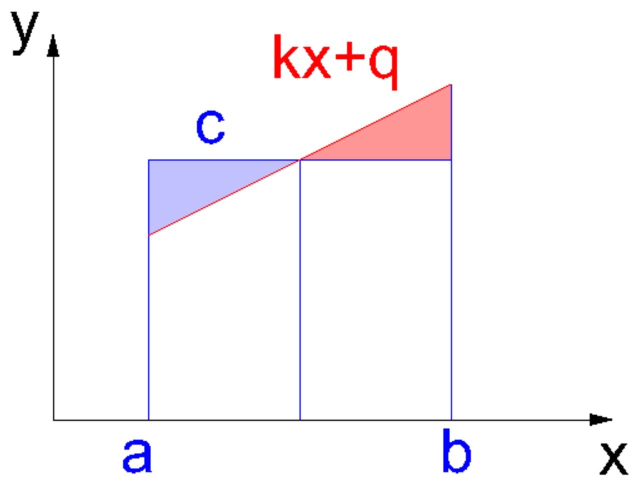
Stupeň přesnosti (řád) kvadraturní formule = stupeň polynomu, který daná formule integruje přesně.

Platí:

Kvadraturní formule získaná integrací Lagrangeova interpolačního polynomu stupně n má stupeň přesnosti **alespoň** n.

Např:

Obdélníková formule	: stupeň 0, přesnost 1	- integruje přesně přímku
Lichoběžníková formule	: stupeň 1, přesnost 1	- integruje přesně přímku
Simpsonova formule	: stupeň 2, přesnost 2	- integruje přesně parabolu



Obsahy vybarvených trojúhelníků se rovnají ⇒

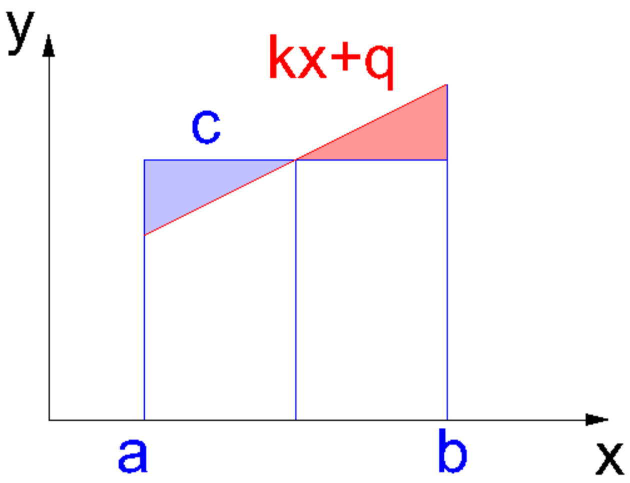
Stupeň přesnosti (řád) kvadraturní formule = stupeň polynomu, který daná formule integruje přesně.

Platí:

Kvadraturní formule získaná integrací Lagrangeova interpolačního polynomu stupně n má stupeň přesnosti **alespoň** n.

Např:

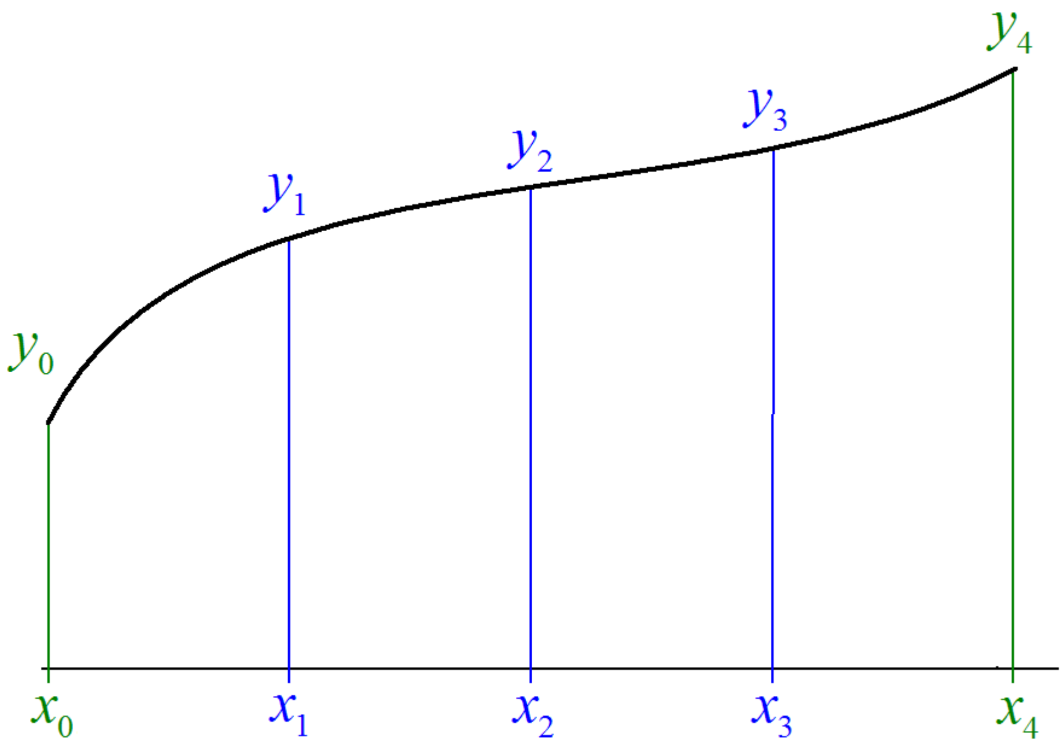
Obdélníková formule	: stupeň 0, přesnost 1	- integruje přesně přímku
Lichoběžníková formule	: stupeň 1, přesnost 1	- integruje přesně přímku
Simpsonova formule	: stupeň 2, přesnost 2	- integruje přesně parabolu



Obsahy vybarvených trojúhelníků se rovnají ⇒

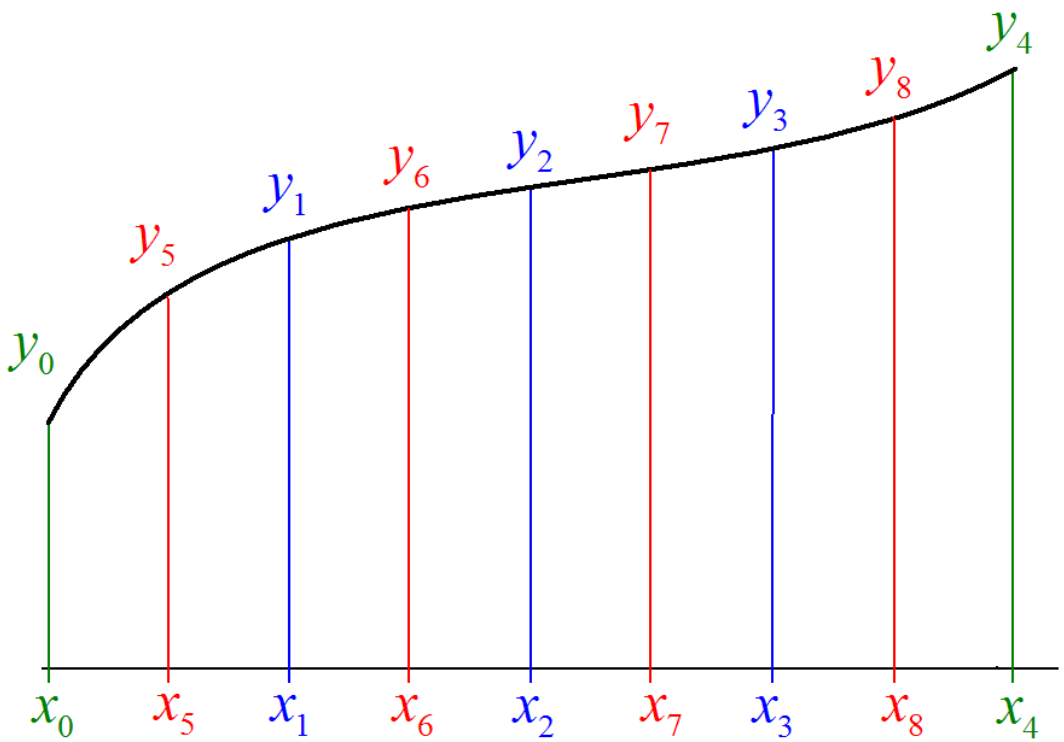
$$\int_a^b c\mathrm{dx} = \int_a^b (kx + q)\mathrm{dx}$$

Metoda polovičního kroku: Vychází z lichoběžníkové metody



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h \cdot \left[\frac{1}{2}\left(y_0 + y_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right]$$

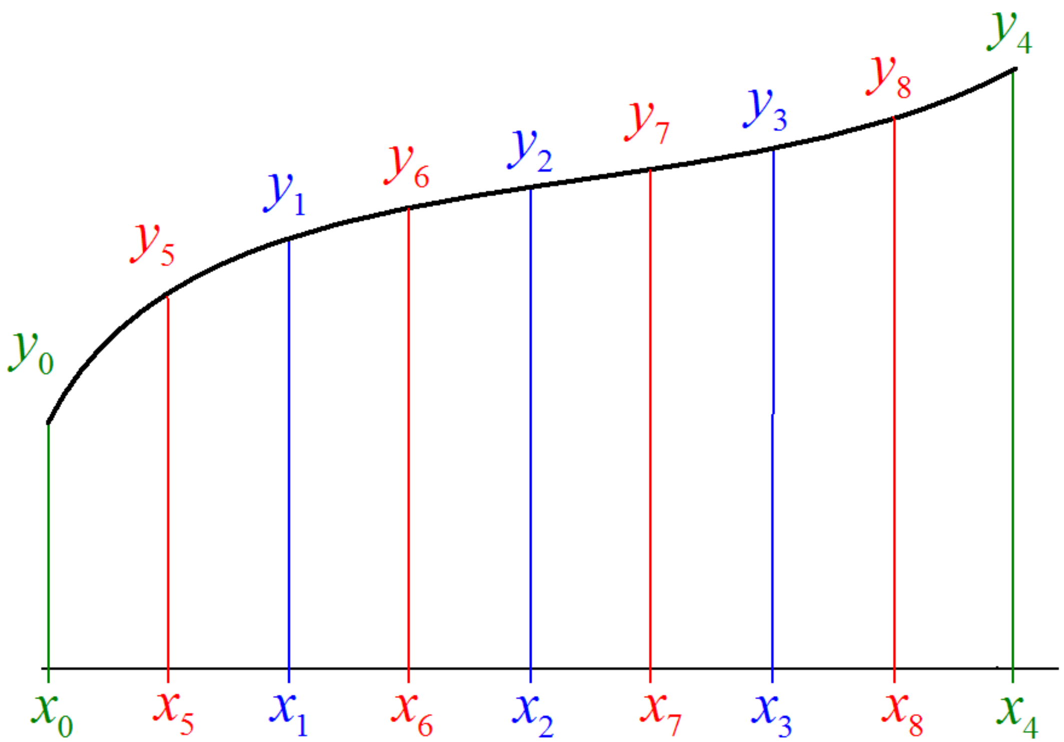
Metoda polovičního kroku: Vychází z lichoběžníkové metody



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h \cdot \left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \sum_{i=n+1}^{2n} y_i\right]$$

Metoda polovičního kroku: Vychází z lichoběžníkové metody



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h \cdot \left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right]$$

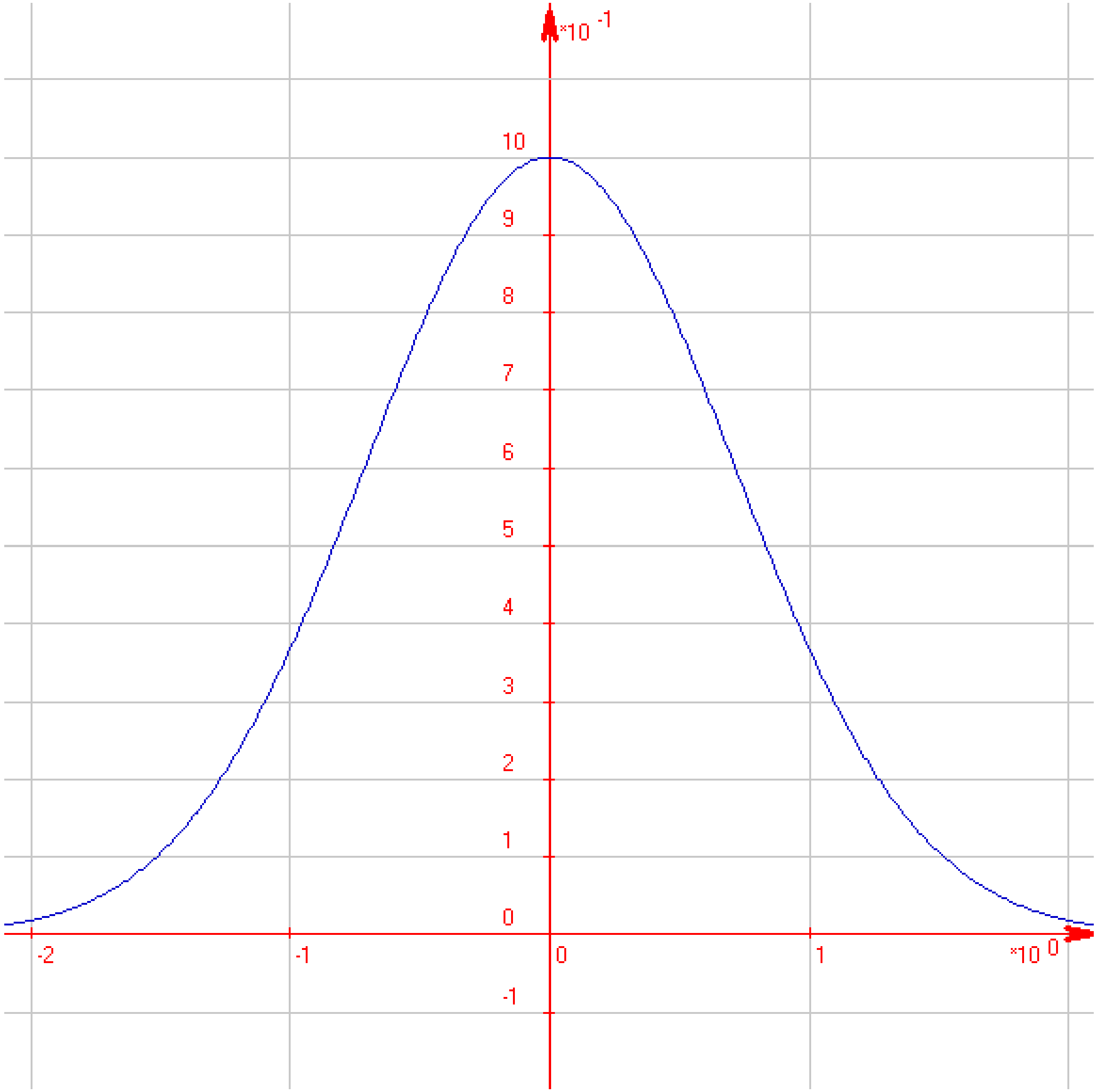
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \right]$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{4} \cdot \left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \sum_{i=n+1}^{2n} y_i + \sum_{i=2n+1}^{4n} y_i \right]$$

Metoda polovičního kroku:

Hezký příklad:

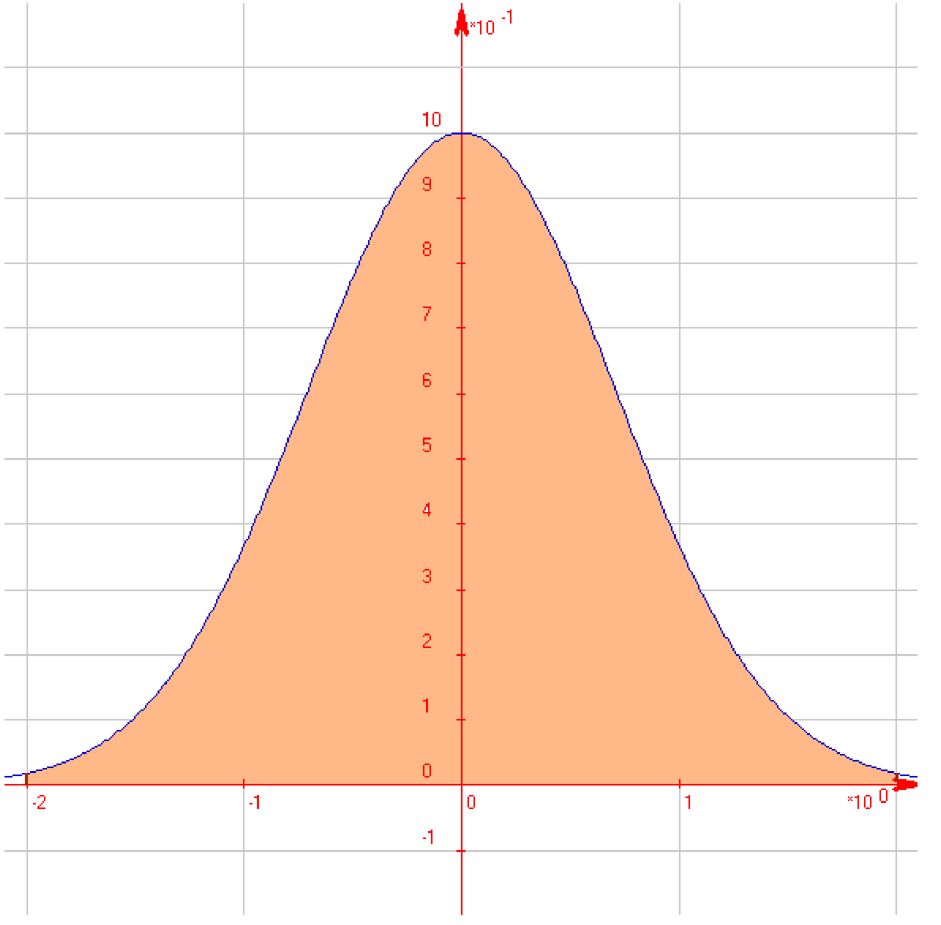
$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$$



Metoda polovičního kroku:

Hezký příklad:

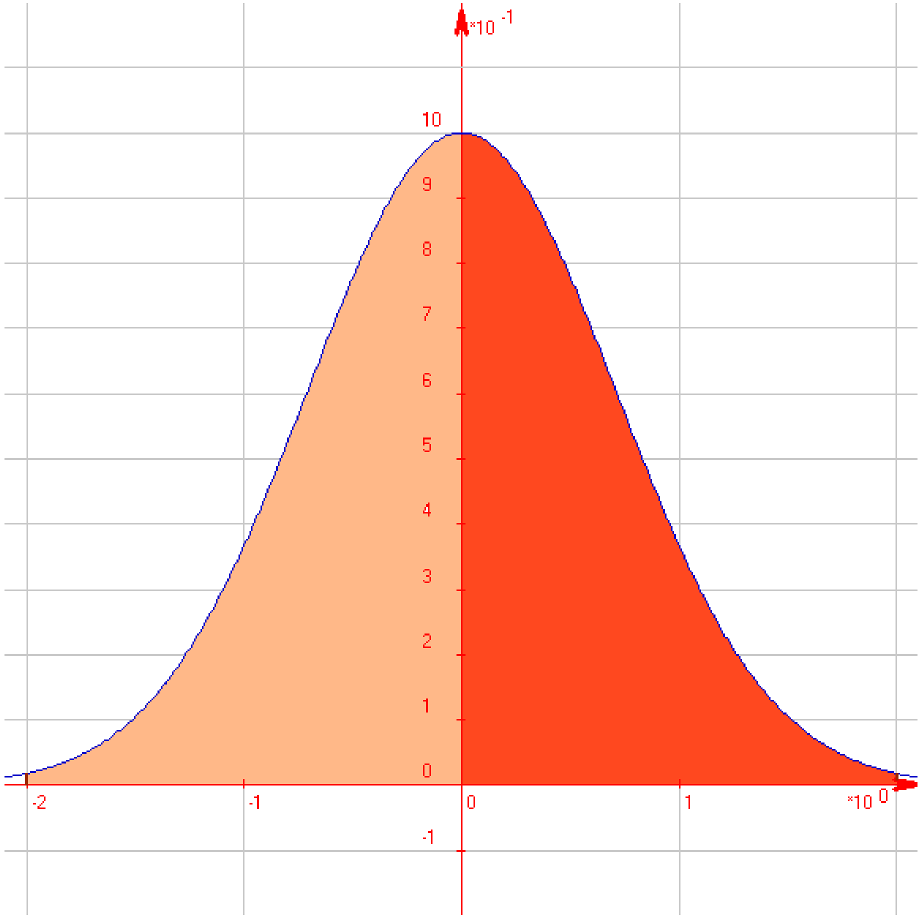
$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$$



Metoda polovičního kroku:

Hezký příklad:

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

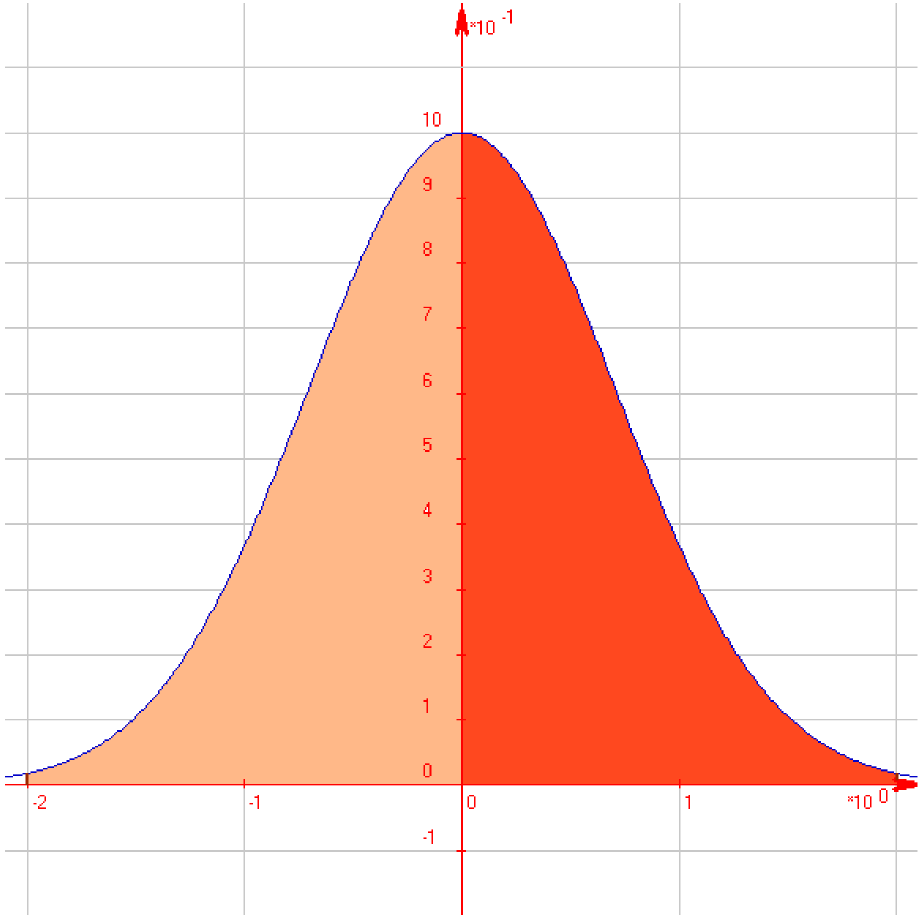


Metoda polovičního kroku:

Hezký příklad:

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h \cdot \left[\tfrac{1}{2}\left(y_0 + y_4\right) + \left(y_1 + y_2 + y_3\right) \right] =$$



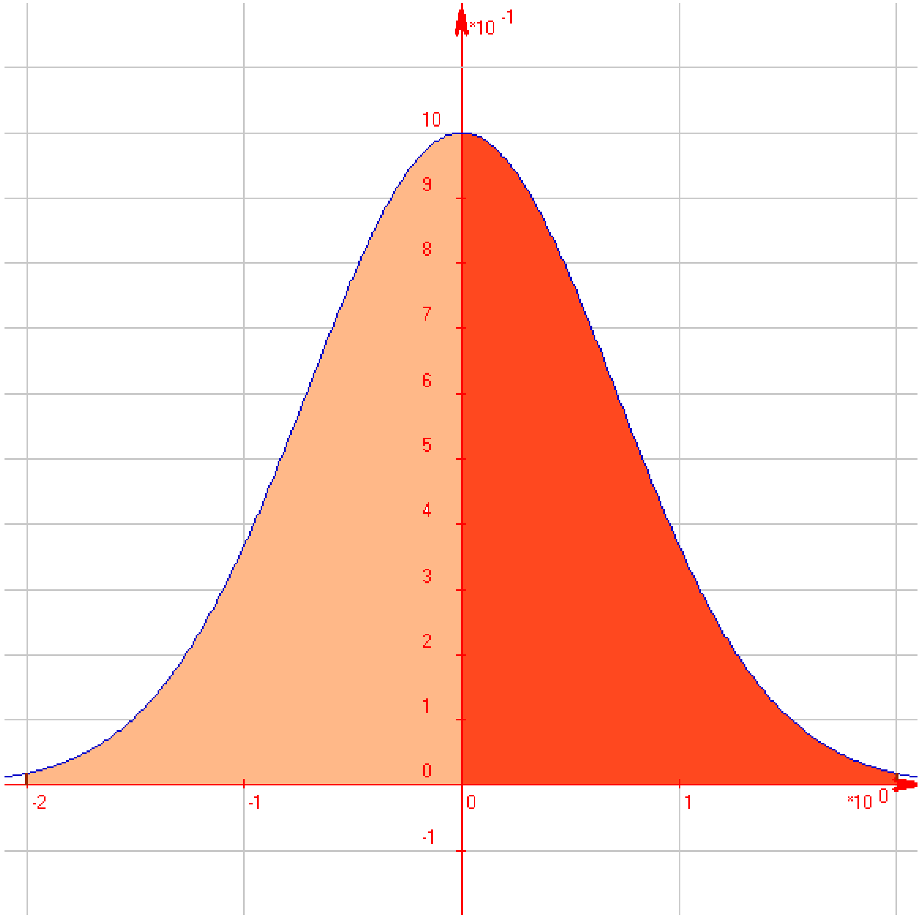
Metoda polovičního kroku:

Hezký příklad:

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h \cdot \left[\tfrac{1}{2}\left(y_0 + y_4\right) + \left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right] =$$

$$= 0.5 \cdot \left[\tfrac{1}{2} \cdot \left(e^{-0^2} + e^{-2^2}\right) + \left(e^{-0.5^2} + e^{-1^2} + e^{-1.5^2}\right)\right] =$$



Metoda polovičního kroku:

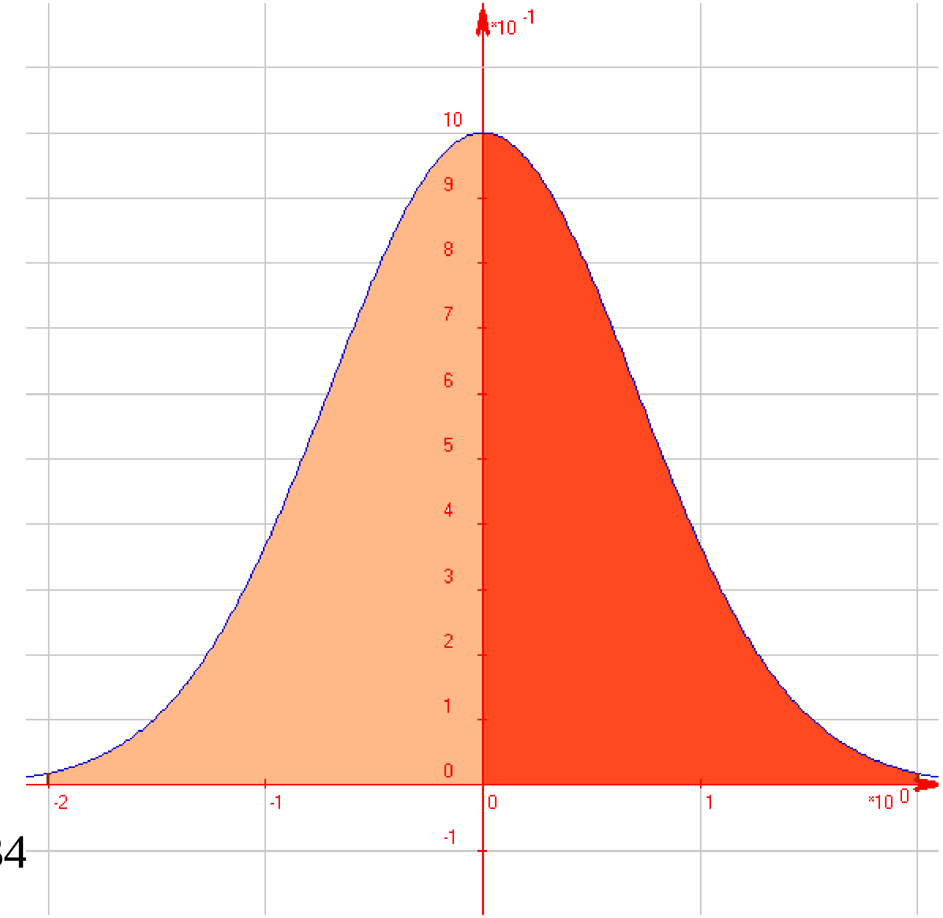
Hezký příklad:

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(y_0+y_4\right)+\left(y_1+y_2+y_3\right)\right]=$$

$$=0.5\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{-0^2}+e^{-2^2}\right)+\left(e^{-0.5^2}+e^{-1^2}+e^{-1.5^2}\right)\right]=$$

$$=0.5\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot 1{,}018315639+1{,}252079449\right]=0{,}880618634$$



Metoda polovičního kroku:

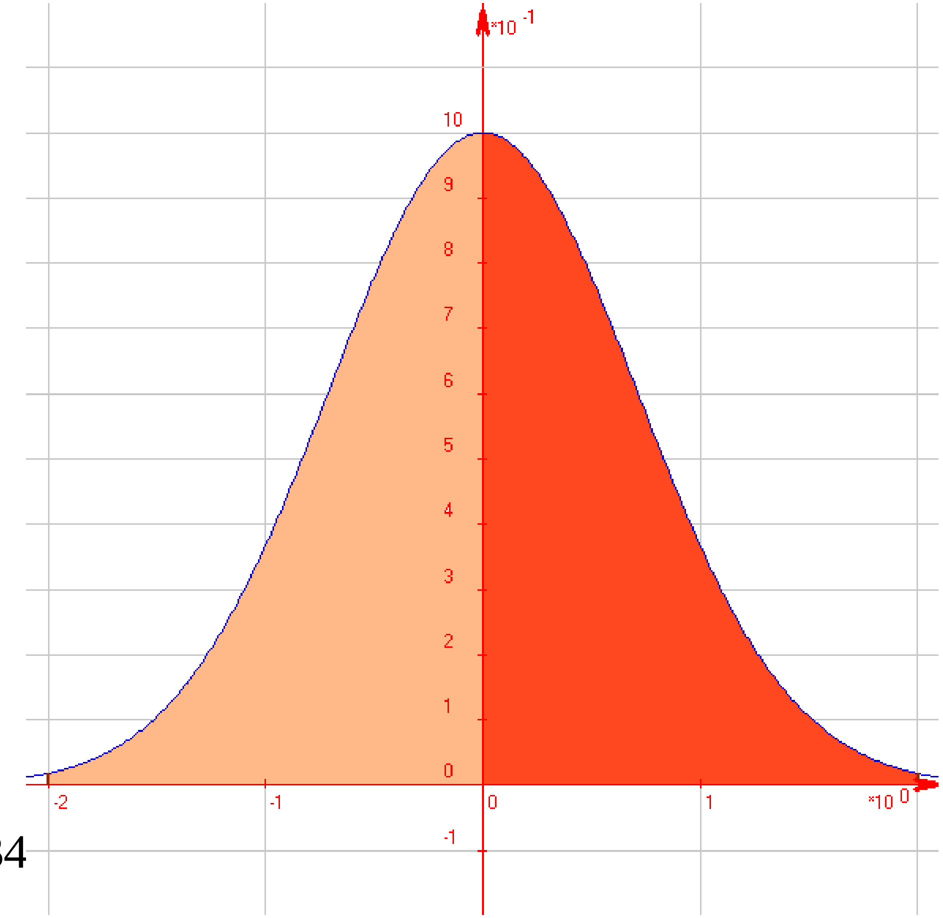
Hezký příklad:

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(y_0+y_4\right)+\left(y_1+y_2+y_3\right)\right]=$$

$$=0.5\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{-0^2}+e^{-2^2}\right)+\left(e^{-0.5^2}+e^{-1^2}+e^{-1.5^2}\right)\right]=$$

$$=0.5\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot 1{,}018315639+1{,}252079449\right]=0{,}880618634$$



$$=0.25\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(e^{-0^2}+e^{-2^2}\right)+\left(e^{-0.5^2}+e^{-1^2}+e^{-1.5^2}\right)+\left(e^{-0.25^2}+e^{-0.75^2}+e^{-1.25^2}+e^{-1.75^2}\right)\right]=$$

Metoda polovičního kroku:

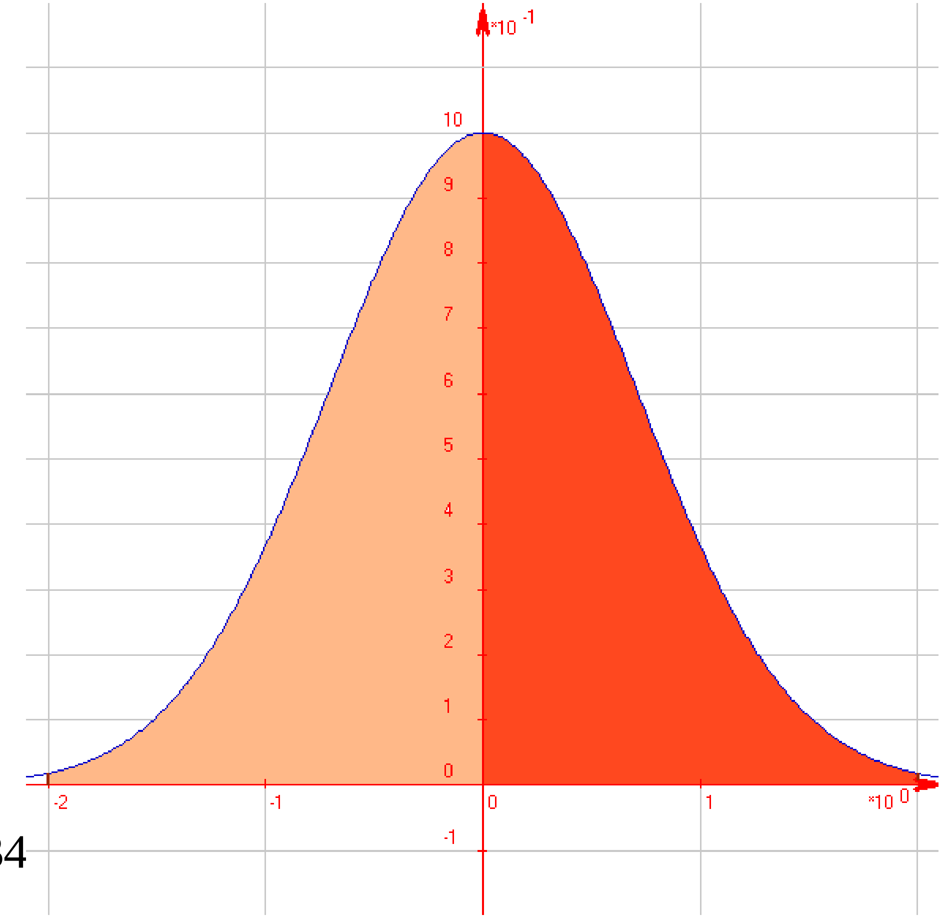
Hezký příklad:

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(y_0+y_4\right)+\left(y_1+y_2+y_3\right)\right]=$$

$$=0.5\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{-0^2}+e^{-2^2}\right)+\left(e^{-0.5^2}+e^{-1^2}+e^{-1.5^2}\right)\right]=$$

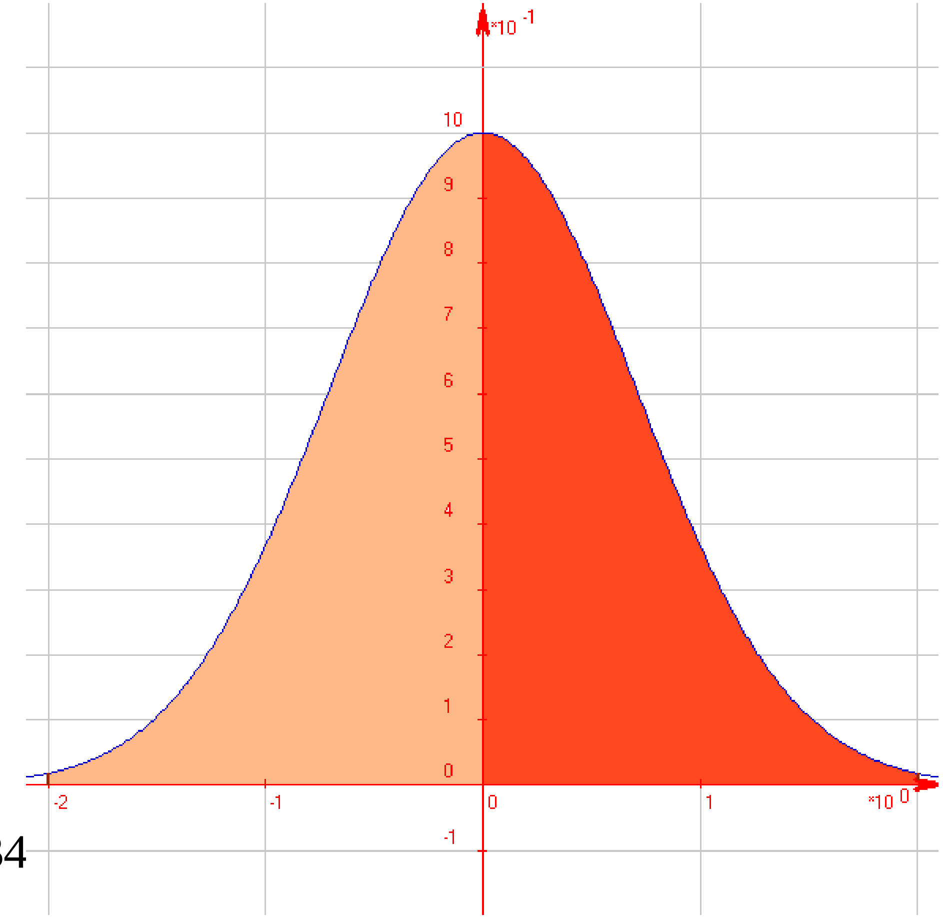
$$=0.5\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot 1{,}018315639+1{,}252079449\right]=0{,}880618634$$



$$=0.25\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(e^{-0^2}+e^{-2^2}\right)+\left(e^{-0.5^2}+e^{-1^2}+e^{-1.5^2}\right)+\left(e^{-0.25^2}+e^{-0.75^2}+e^{-1.25^2}+e^{-1.75^2}\right)\right]=$$

$$=0.25\cdot\left[\tfrac{1}{2}1{,}018315639+1{,}252079449+1{,}765577897\right]=0{,}881703791$$

Metoda polovičního kroku:



Hezký příklad:

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(y_0+y_4\right)+\left(y_1+y_2+y_3\right)\right]=$$

$$=0.5\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{-0^2}+e^{-2^2}\right)+\left(e^{-0.5^2}+e^{-1^2}+e^{-1.5^2}\right)\right]=$$

$$=0.5\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot 1{,}018315639+1{,}252079449\right]=0{,}880618634$$

$$=0.25\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(e^{-0^2}+e^{-2^2}\right)+\left(e^{-0.5^2}+e^{-1^2}+e^{-1.5^2}\right)+\left(e^{-0.25^2}+e^{-0.75^2}+e^{-1.25^2}+e^{-1.75^2}\right)\right]=$$

$$=0.25\cdot\left[\tfrac{1}{2}1{,}018315639+1{,}252079449+1{,}765577897\right]=0{,}881703791$$

Odhad chyby:

$$\boxed{E_{2n}(f)=\frac{1}{2^{p+1}-1}\left|Q_{2n}(f)-Q_n(f)\right|}$$

Metoda polovičního kroku:

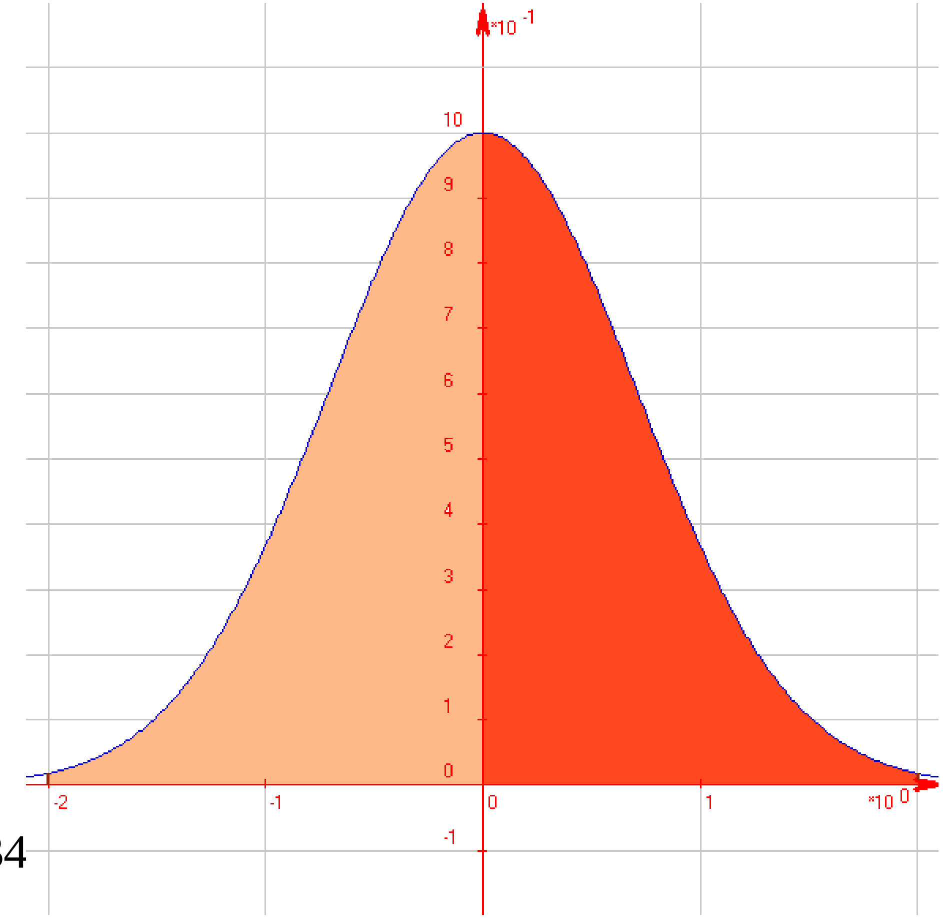
Hezký příklad:

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(y_0+y_4\right)+\left(y_1+y_2+y_3\right)\right]=$$

$$=0.5\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{-0^2}+e^{-2^2}\right)+\left(e^{-0.5^2}+e^{-1^2}+e^{-1.5^2}\right)\right]=$$

$$=0.5\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot 1{,}018315639+1{,}252079449\right]=0{,}880618634$$



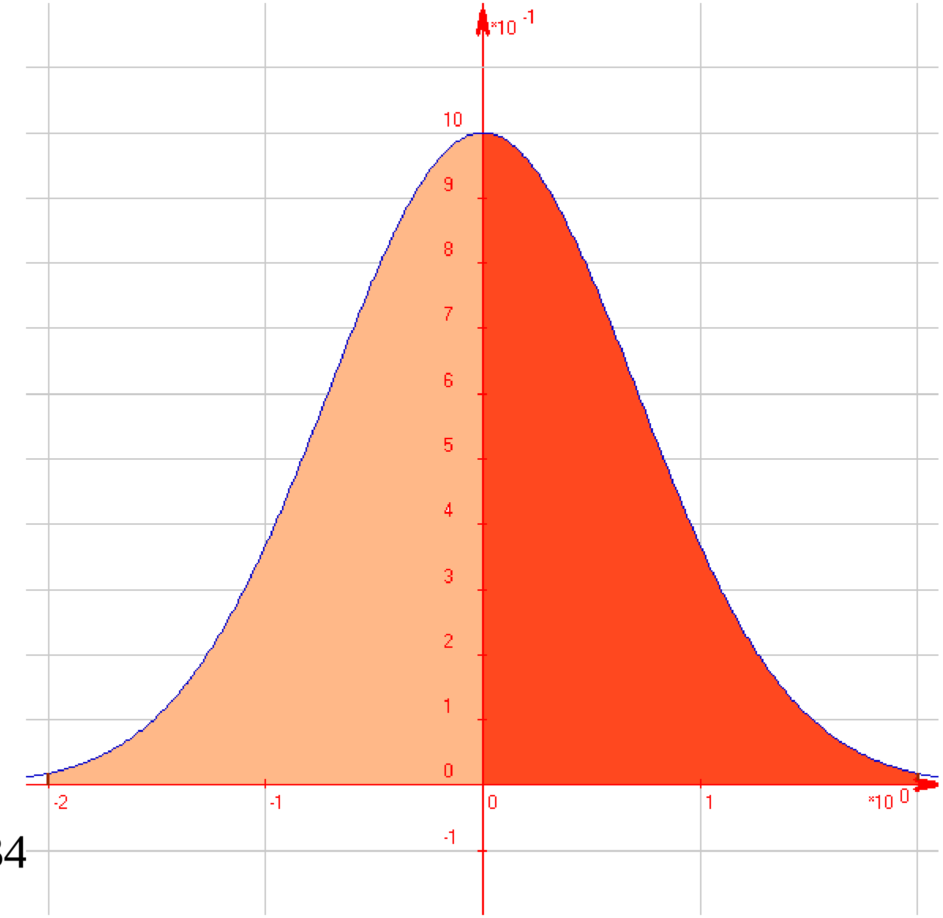
$$=0.25\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(e^{-0^2}+e^{-2^2}\right)+\left(e^{-0.5^2}+e^{-1^2}+e^{-1.5^2}\right)+\left(e^{-0.25^2}+e^{-0.75^2}+e^{-1.25^2}+e^{-1.75^2}\right)\right]=$$

$$=0.25\cdot\left[\tfrac{1}{2}1{,}018315639+1{,}252079449+1{,}765577897\right]=0{,}881703791$$

Odhad chyby:

$$\boxed{E_{2n}(f)=\frac{1}{2^{p+1}-1}\left|Q_{2n}(f)-Q_n(f)\right|}\quad E_{2n}(f)=\frac{1}{2^{1+1}-1}\left|0{,}881703791-0{,}880618634\right|\approx 0{,}00036$$

Metoda polovičního kroku:



Hezký příklad:

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0{,}88208139$$

$$\approx h\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(y_0+y_4\right)+\left(y_1+y_2+y_3\right)\right]=$$

$$=0.5\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{-0^2}+e^{-2^2}\right)+\left(e^{-0.5^2}+e^{-1^2}+e^{-1.5^2}\right)\right]=$$

$$=0.5\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot 1{,}018315639+1{,}252079449\right]=0{,}880618634$$

$$=0.25\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(e^{-0^2}+e^{-2^2}\right)+\left(e^{-0.5^2}+e^{-1^2}+e^{-1.5^2}\right)+\left(e^{-0.25^2}+e^{-0.75^2}+e^{-1.25^2}+e^{-1.75^2}\right)\right]=$$

$$=0.25\cdot\left[\tfrac{1}{2}1{,}018315639+1{,}252079449+1{,}765577897\right]=0{,}881703791$$

Odhad chyby:

$$\boxed{E_{2n}(f)=\frac{1}{2^{p+1}-1}\left|Q_{2n}(f)-Q_n(f)\right|}\quad E_{2n}(f)=\frac{1}{2^{1+1}-1}\left|0{,}881703791-0{,}880618634\right|\approx 0{,}00036$$

Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,\mathrm{d}x =$$

Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h \cdot \left[y_0 + y_4 + \tfrac{1}{2}\left(y_1 + y_2 + y_3 \right) \right] =$$

Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h \cdot \left[y_0 + y_4 + \tfrac{1}{2}\left(y_1 + y_2 + y_3 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right) \right] = 1$$

Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h \cdot \left[y_0 + y_4 + \tfrac{1}{2}\left(y_1 + y_2 + y_3 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right) \right] = 1$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{3}{4}\right) \right] = 1$$

Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h \cdot \left[y_0 + y_4 + \tfrac{1}{2}\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{3}{4}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \ [\ \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{3}{4}\right) +$$

Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h \cdot \left[y_0 + y_4 + \tfrac{1}{2}\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{3}{4}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{3}{4}\right) + \right.$$

$$\left. \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{8}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{3}{8}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{5}{8}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{7}{8}\right) \right] = 1$$

Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h \cdot \left[y_0 + y_4 + \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}) \right] = 1$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{1}{4}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{3}{4}) \right] = 1$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{1}{4}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{3}{4}) + \right.$$
$$\left. \cos(64\pi \cdot \tfrac{1}{8}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{3}{8}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{5}{8}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{7}{8}) \right] = 1$$

Integrál je roven přesně jedné 😊

Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\approx h\cdot\left[y_0 + y_4 + \tfrac{1}{2}\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 1) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 1) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{3}{4}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\Big[\ \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 1) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{3}{4}\right) +$$
$$\cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{8}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{3}{8}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{5}{8}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{7}{8}\right)\ \Big] = 1$$

Integrál je roven přesně jedné 😊 Opravdu??

Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,dx = \frac{1}{64\pi}\left[\sin(64\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{64\pi}\left[\sin(64\pi) - \sin 0\right] = 0$$

$$\approx h \cdot \left[y_0 + y_4 + \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{1}{2})\right] = 1$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{1}{4}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{3}{4})\right] = 1$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \Big[\ \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{1}{4}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{3}{4}) +$$
$$\cos(64\pi \cdot \tfrac{1}{8}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{3}{8}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{5}{8}) + \cos(64\pi \cdot \tfrac{7}{8})\ \Big] = 1$$

Integrál je roven přesně jedné 😊 Opravdu?? ☹

Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{64\pi}\left[\sin(64\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{64\pi}\left[\sin(64\pi) - \sin 0\right] = 0$$

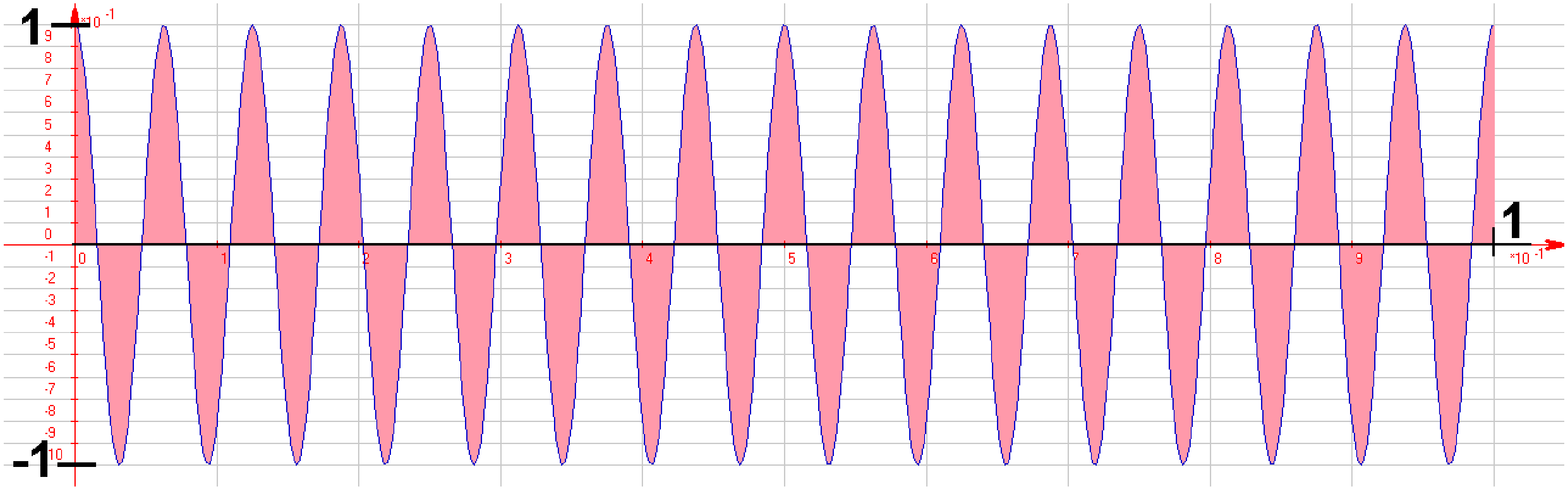
$$\approx h\cdot\left[y_0 + y_4 + \tfrac{1}{2}\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 1) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 1) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{3}{4}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\ [\ \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 1) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{3}{4}\right) +$$

$$\cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{8}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{3}{8}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{5}{8}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{7}{8}\right)\ ]\ =\ 1$$



Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

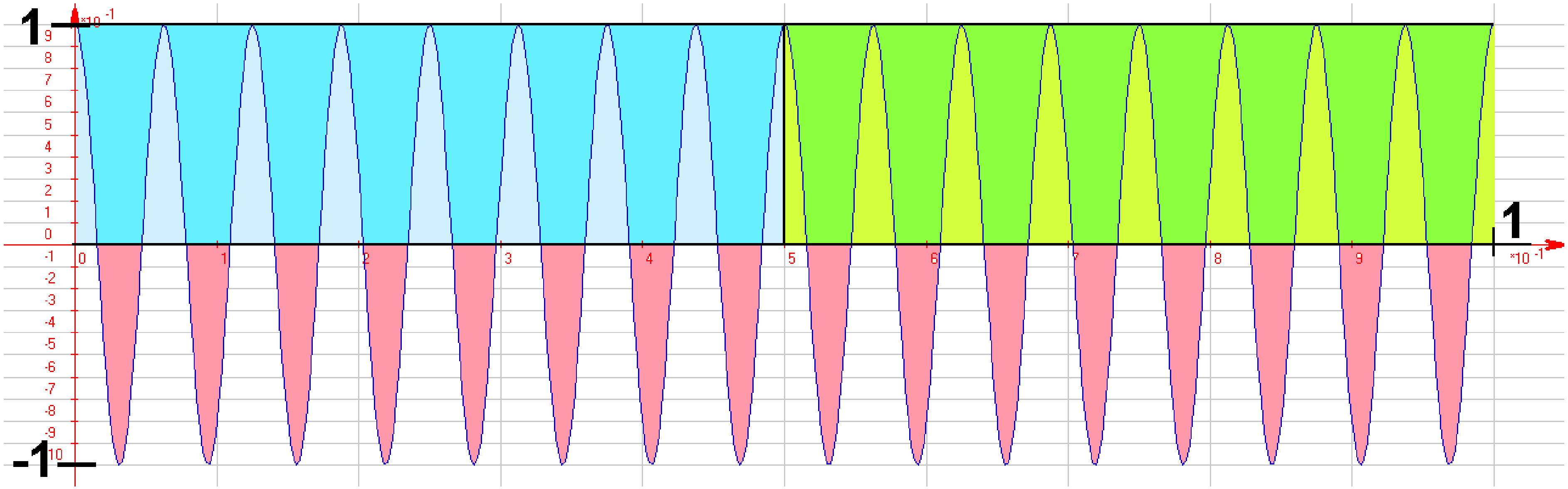
$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{64\pi}\left[\sin(64\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{64\pi}\left[\sin(64\pi) - \sin 0\right] = 0$$

$$\approx h\cdot\left[y_0 + y_4 + \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 1) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 1) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{3}{4}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\ [\ \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 1) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{3}{4}\right) +$$
$$\cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{8}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{3}{8}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{5}{8}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{7}{8}\right)\ ]\ =\ 1$$



Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,dx = \frac{1}{64\pi}\left[\sin(64\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{64\pi}\left[\sin(64\pi) - \sin 0\right] = 0$$

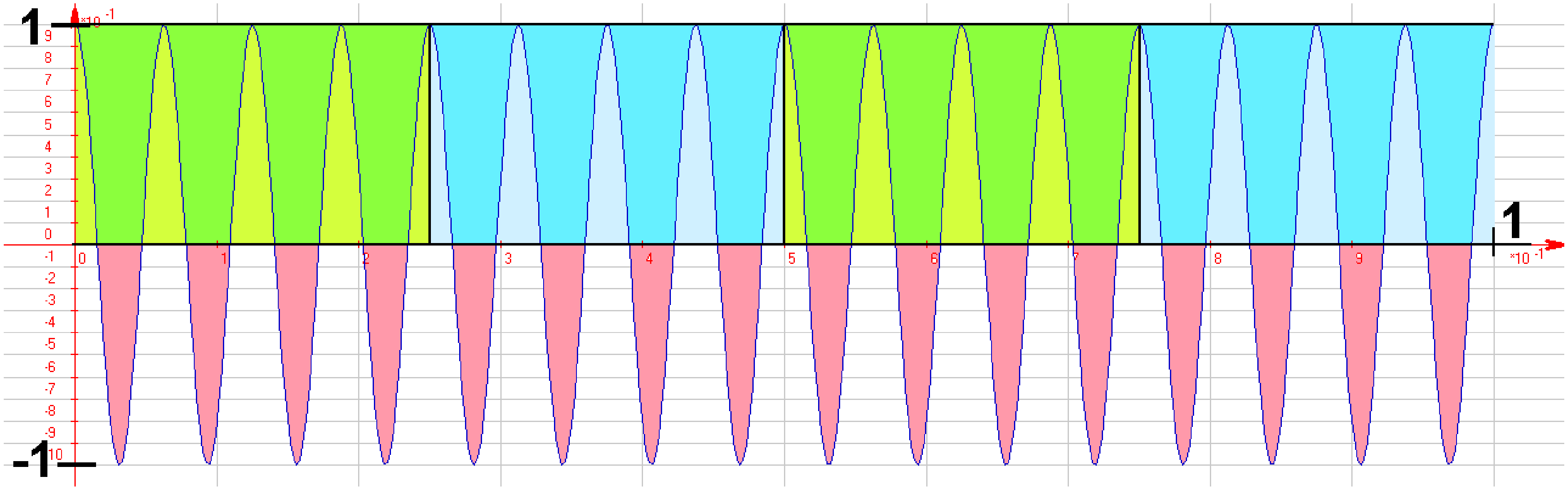
$$\approx h \cdot \left[y_0 + y_4 + \tfrac{1}{2}\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{3}{4}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi \cdot 1) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{3}{4}\right) + \right.$$

$$\left. \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{1}{8}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{3}{8}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{5}{8}\right) + \cos\left(64\pi \cdot \tfrac{7}{8}\right) \right] = 1$$



Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{64\pi}\left[\sin(64\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{64\pi}\left[\sin(64\pi) - \sin 0\right] = 0$$

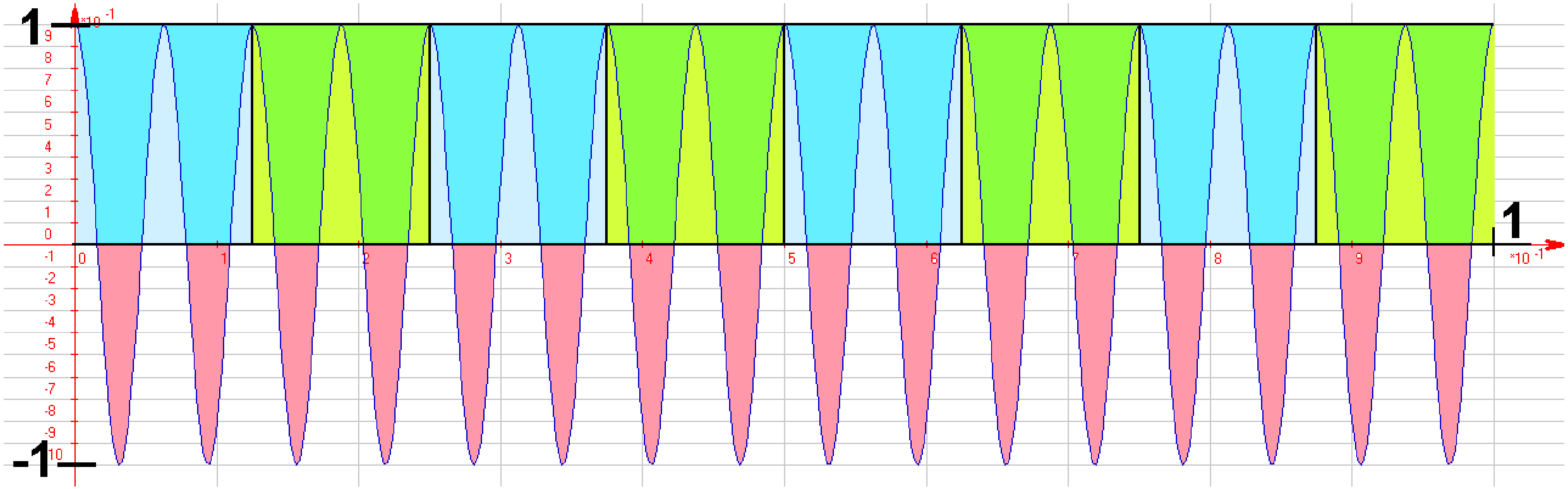
$$\approx h\cdot\left[y_0 + y_4 + \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 1) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 1) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{3}{4}\right)\right] = 1$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\ [\ \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 0) + \frac{1}{2}\cos(64\pi\cdot 1) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{3}{4}\right) +$$

$$\cos\left(64\pi\cdot\tfrac{1}{8}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{3}{8}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{5}{8}\right) + \cos\left(64\pi\cdot\tfrac{7}{8}\right)\ ]\ =\ 1$$



Metoda polovičního kroku - záludný příklad:

$$\int_0^1 \cos(64\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{64\pi}\left[\sin(64\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{64\pi}\left[\sin(64\pi) - \sin 0\right] = 0$$

Chyba integrace (složená lichoběžníková formule)

$$E_L \leq \frac{1}{12} \max_{x\in\langle a;b\rangle} \left|f''(x)\right| \cdot (b-a) \cdot h^2 = \frac{1}{12} \max_{x\in\langle 0;1\rangle} |(64\pi)^2(-\sin 64\,\pi x)| \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{(64\pi)^2}{32^2} = \frac{32^2\pi^2}{12}$$

Rombergova integrace:

$$\begin{array}{ccc|c}
T_{00} & & & \\
T_{10} & T_{11} & & \\
T_{20} & T_{21} & T_{22} & \\
\hline
T_{m0} & T_{m1} & T_{m2} & T_{mm}
\end{array}$$

Rombergova integrace:

$$
\begin{array}{ccc|c}
T_{00} & & & \\
T_{10} & T_{11} & & \\
T_{20} & T_{21} & T_{22} & \\
\hline
T_{m0} & T_{m1} & T_{m2} & T_{mm}
\end{array}
$$

T_{j0} - přibližné hodnoty integrálu získané lichoběžníkovou metodou pro 2^j dělicích bodů

Rombergova integrace:

$$\begin{array}{cccc} T_{00} & & & \\ T_{10} & T_{11} & & \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & \\ \hline T_{m0} & T_{m1} & T_{m2} & T_{mm} \end{array}$$

T_{j0} - přibližné hodnoty integrálu získané lichoběžníkovou metodou pro 2^j dělicích bodů

$$T_{j,k} = \frac{4^k T_{j,k-1} - T_{j-1,k-1}}{4^k - 1}$$

Rombergova integrace:

$$\begin{array}{ccc|c} T_{00} & & & \\ T_{10} & T_{11} & & \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & \\ \hline T_{m0} & T_{m1} & T_{m2} & T_{mm} \end{array}$$

T_{j0} - přibližné hodnoty integrálu získané lichoběžníkovou metodou pro 2^j dělicích bodů

$$T_{j,k} = \frac{4^k T_{j,k-1} - T_{j-1,k-1}}{4^k - 1}$$

Příklad: $\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x$

Rombergova integrace:

$$
\begin{array}{ccc:c}
T_{00} & & & \\
T_{10} & T_{11} & & \\
T_{20} & T_{21} & T_{22} & \\
\hdashline
T_{m0} & T_{m1} & T_{m2} & T_{mm}
\end{array}
$$

T_{j0} - přibližné hodnoty integrálu získané lichoběžníkovou metodou pro 2^j dělicích bodů

$$T_{j,k} = \frac{4^k T_{j,k-1} - T_{j-1,k-1}}{4^k - 1}$$

Příklad: $\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$

T_{00} : $2^0 = 1$; $n = 1$; $\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{2}(\sin 0 + \sin \pi) = 0$

Rombergova integrace:

$$\begin{array}{cccc:c} T_{00} & & & & \\ T_{10} & T_{11} & & & \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & & \\ \hdashline T_{m0} & T_{m1} & T_{m2} & & T_{mm} \end{array}$$

T_{j0} - přibližné hodnoty integrálu získané lichoběžníkovou metodou pro 2^j dělicích bodů

$$T_{j,k} = \frac{4^k T_{j,k-1} - T_{j-1,k-1}}{4^k - 1}$$

Příklad: $\int\limits_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$

$$T_{0;0}: \quad 2^0 = 1; \quad n = 1; \quad \int\limits_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{2}(\sin 0 + \sin \pi) = 0$$

$$T_{1;0}: \quad 2^1 = 2; \quad n = 2; \quad \int\limits_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{4}\left(\sin 0 + 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + \sin \pi\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}570\,796\,327$$

Rombergova integrace:

$$\begin{array}{llll:l} T_{00} & & & & \\ T_{10} & T_{11} & & & \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & & \\ \hdashline T_{m0} & T_{m1} & T_{m2} & & T_{mm} \end{array}$$

T_{j0} - přibližné hodnoty integrálu získané lichoběžníkovou metodou pro 2^j dělicích bodů

$$T_{j,k} = \frac{4^k T_{j,k-1} - T_{j-1,k-1}}{4^k - 1}$$

Příklad: $\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$

$$T_{0;0}: \quad 2^0 = 1; \quad n = 1; \quad \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{2}(\sin 0 + \sin \pi) = 0$$

$$T_{1;0}: \quad 2^1 = 2; \quad n = 2; \quad \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{4}\left(\sin 0 + 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + \sin \pi\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}570\ 796\ 327$$

$$T_{2;0}: \quad 2^2 = 4; \quad n = 4; \quad \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{8}\left(\sin 0 + 2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} + 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \sin\frac{3\pi}{4} + \sin \pi\right) \approx 1{,}896\ 118\ 898$$

Rombergova integrace:

$$\begin{array}{ccc|c} T_{00} & & & \\ T_{10} & T_{11} & & \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & \\ \hline T_{m0} & T_{m1} & T_{m2} & T_{mm} \end{array}$$

T_{j0} - přibližné hodnoty integrálu získané lichoběžníkovou metodou pro 2^j dělicích bodů

$$T_{1,1} = \frac{4^1 T_{1,0} - T_{0,0}}{4^1 - 1}$$

Příklad: $\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$

$$T_{0;0}: \quad 2^0 = 1; \quad n = 1; \quad \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{2}(\sin 0 + \sin \pi) = 0$$

$$T_{1;0}: \quad 2^1 = 2; \quad n = 2; \quad \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{4}\left(\sin 0 + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}570\,796\,327$$

$$T_{2;0}: \quad 2^2 = 4; \quad n = 4; \quad \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{8}\left(\sin 0 + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \pi\right) \approx 1{,}896\,118\,898$$

$$T_{1,1} = \frac{4^1 T_{1,0} - T_{0,0}}{4^1 - 1}$$

Rombergova integrace:

$$\begin{array}{ccc:c} T_{00} & & & \\ T_{10} & T_{11} & & \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & \\ \hdashline T_{m0} & T_{m1} & T_{m2} & T_{mm} \end{array}$$

T_{j0} - přibližné hodnoty integrálu získané lichoběžníkovou metodou pro 2^j dělicích bodů

$$T_{1,1} = \frac{4^1 T_{1,0} - T_{0,0}}{4^1 - 1}$$

Příklad: $\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$

$$T_{0;0}: \quad 2^0 = 1; \quad n = 1; \quad \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{2}(\sin 0 + \sin \pi) = 0$$

$$T_{1;0}: \quad 2^1 = 2; \quad n = 2; \quad \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{4}\left(\sin 0 + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}570\ 796\ 327$$

$$T_{2;0}: \quad 2^2 = 4; \quad n = 4; \quad \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{8}\left(\sin 0 + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \pi\right) \approx 1{,}896\ 118\ 898$$

$$T_{1,1} = \frac{4^1 T_{1,0} - T_{0,0}}{4^1 - 1} = \frac{4 \cdot 1{,}570\ 796\ 327 - 0}{4 - 1} \approx 2{,}094\ 395\ 102$$

Rombergova integrace:

$$\begin{array}{lll:l} T_{00} & & & \\ T_{10} & T_{11} & & \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & \\ \hdashline T_{m0} & T_{m1} & T_{m2} & T_{mm} \end{array}$$

T_{j0} - přibližné hodnoty integrálu získané lichoběžníkovou metodou pro 2^j dělicích bodů

$$T_{2,1} = \frac{4^2 T_{2,0} - T_{1,0}}{4^2 - 1}$$

Příklad: $\int\limits_0^\pi \sin x \mathrm{d}x$

$$T_{0;0}: \quad 2^0 = 1; \quad n = 1; \quad \int\limits_0^\pi \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{2}(\sin 0 + \sin \pi) = 0$$

$$T_{1;0}: \quad 2^1 = 2; \quad n = 2; \quad \int\limits_0^\pi \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{4}\left(\sin 0 + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}570\ 796\ 327$$

$$T_{2;0}: \quad 2^2 = 4; \quad n = 4; \quad \int\limits_0^\pi \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{8}\left(\sin 0 + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \pi\right) \approx 1{,}896\ 118\ 898$$

$$T_{1,1} = \frac{4^1 T_{1,0} - T_{0,0}}{4^1 - 1} = \frac{4 \cdot 1{,}570\ 796\ 327 - 0}{4 - 1} \approx 2{,}094\ 395\ 102$$

$$T_{2,1} = \frac{4^2 T_{2,0} - T_{1,0}}{4^2 - 1} = \frac{4^2 \cdot 1{,}896\ 118\ 898 - 1{,}570\ 796\ 327}{4^2 - 1} \approx 1{,}917\ 807\ 069$$

Rombergova integrace:

$$\begin{array}{cccc:c} T_{00} & & & & \\ T_{10} & T_{11} & & & \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & & \\ \hdashline T_{m0} & T_{m1} & T_{m2} & & T_{mm} \end{array}$$

T_{j0} - přibližné hodnoty integrálu získané lichoběžníkovou metodou pro 2^j dělicích bodů

$$T_{2,2} = \frac{4^2 T_{2,1} - T_{1,1}}{4^2 - 1}$$

Příklad: $\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$

$$T_{0;0}: \quad 2^0 = 1; \quad n = 1; \quad \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{2}(\sin 0 + \sin \pi) = 0$$

$$T_{1;0}: \quad 2^1 = 2; \quad n = 2; \quad \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{4}\left(\sin 0 + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}570\ 796\ 327$$

$$T_{2;0}: \quad 2^2 = 4; \quad n = 4; \quad \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{8}\left(\sin 0 + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \pi\right) \approx 1{,}896\ 118\ 898$$

$$T_{1,1} = \frac{4^1 T_{1,0} - T_{0,0}}{4^1 - 1} = \frac{4 \cdot 1{,}570\ 796\ 327 - 0}{4 - 1} \approx 2{,}094\ 395\ 102$$

$$T_{2,1} = \frac{4^2 T_{2,0} - T_{1,0}}{4^2 - 1} = \frac{4^2 \cdot 1{,}896\ 118\ 898 - 1{,}570\ 796\ 327}{4^2 - 1} \approx 1{,}917\ 807\ 069$$

$$T_{2,2} = \frac{4^2 T_{2,1} - T_{1,1}}{4^2 - 1} = \frac{4^2 \cdot 1{,}917\ 807\ 069 - 2{,}094\ 395\ 102}{4^2 - 1} \approx 1{,}906\ 034\ 533$$

Kód Matlab:

```
clc                % Numericka integrace
format long
f=inline('sin(x)./x');  %tato funkce není integrovatelná elementárními metodami
n=200;
a=1;b=3;
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;
y=f(x+h/2);
Obdelnik=h*sum(y(1:n))
y=f(x);
Lichobeznik=h/2*(y(1)+2*sum(y(2:n))+y(n+1))
Simpson=h/3*(y(1)+4*sum(y(2:2:n))+2*sum(y(3:2:n-1))+y(n+1))
PocetKroku=10;      % Polovicni krok
T=zeros(PocetKroku,PocetKroku);
h=b-a;
x=a:h:b;
T(1,1)=h/2*(f(a)+f(b));
n=1;
for i=2:PocetKroku
    n=2*n;
    h=(b-a)/n;
    x=a:h:b;
    y=f(x);
    T(i,1)=h/2*(y(1)+2*sum(y(2:n-1))+y(n));
end;
PolKrok=T(PocetKroku,1)
```

```
for j=2:PocetKroku    % Romberger
 for k=2:j
     T(j,k)=(4^k*T(j,k-1)-T(j-1,k-1))/(4^k-1);
 end;
end
Romberger=T(PocetKroku,PocetKroku)
```