

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Doplňující text k předmětu
Parciální diferenciální rovnice

JAN FRANCŮ

Verze 5. listopadu 2019

Předmluva

Tento učební text je určen pro studijní obor Matematické inženýrství. V zimním semestru druhého ročníku se v předmětu Matematická analýza 3 probírají obyčejné diferenciální rovnice. V zimním semestru třetího ročníku je zařazen předmět Parciální diferenciální rovnice. Protože látka navazuje na obyčejné diferenciální rovnice, začátek semestru je věnován stručnému opakování obyčejných diferenciálních rovnic a doplnění dalšími vybranými zajímavými partiemi z obyčejných diferenciálních rovnic.

Tento text obsahuje potřebnou látku z obyčejných diferenciálních rovnic. Jako další literaturu lze doporučit učebnici [1] a přehledy [8] a [9].

Autor

Obsah

Úvod	2
1. Rovnice prvního řádu	3
2. Rovnice vyšších řádů	17
3. Soustavy rovnic prvního řádu	29
4. Existence a jednoznačnost řešení	44
5. Okrajové úlohy	51
6. Stabilita a atraktivita řešení	57
7. Autonomní rovnice a soustavy	63
Literatura	91

Úvod

Připomeňme základní pojmy. Rovnost je výrok, má smysl o něm uvažovat, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Například $1 + 2 = 3$ je pravdivý a $2 + 3 = 6$ nepravdivý výrok s konkrétními čísly (konstantami). Jsou to individuální výroky. V matematice často individuální výroky spojujeme do hromadného tím, že konstanty nahradíme proměnnými (např. a, x, \dots) a určíme množinu, ze které za tyto proměnné dosazujeme. Hromadný výrok, který spojuje konjunkcí individuální výroky stejného typu, obsahuje tzv. výrokovou formu s proměnnými a obecný kvantifikátor „pro každé“ (symbol \forall) s množinou, ze které hodnoty proměnné vybíráme. Například výrok „ $\forall x \in \langle 0, \infty \rangle$ platí $\sqrt{x^2} = x$ “ je pravdivý, v tomto případě M je množina nezáporných čísel.

Naproti tomu rovnice, například $x^2 - 3x + 2 = 0$, není výrokem, nemá smysl uvažovat, zda je pravdivá nebo není. Rovnice se opět skládá z výrokové formy s proměnnou, kterou nazýváme neznámou, a z množiny M , ze které vybíráme hodnoty proměnné.

Rovnice v tomto smyslu je:

Úloha najít tzv. řešení (obor pravdivosti), tj. všechny hodnoty proměnné z M , pro které se výroková forma stává pravdivým výrokem.

V uvedené rovnici je řešením množina $\{1, 2\}$. Při řešení obvykle postupujeme tzv. ekvivalentními úpravami, při kterých se množina řešení nemění, až do tvaru, ze kterého lze řešení zjistit. V našem případě rovnici $x^2 - 3x + 2 = 0$ upravíme na tvar $(x - 1)(x - 2) = 0$, odkud plyne $x = 1$ nebo $x = 2$.

Rovnice rozlišujeme podle množiny M pro neznámé a typu výrokové formy – vlastní rovnice. Například pro M množinu reálných čísel \mathbb{R} rozlišujeme rovnice lineární, kvadratické, kubické, ..., iracionální s odmocninami, exponenciální, logaritmické, goniometrické, atd. Neznámá v případě soustavy lineárních (i nelineárních) rovnic má tvar vektoru (dvojičky, trojice, n -tice čísel).

V případě obyčejné diferenciální rovnice je (v obvyklém označení) neznámou funkce $y(x)$ jedné reálné proměnné x na nějakém intervalu $I = (a, b)$ reálných čísel \mathbb{R} . Výroková forma přitom obsahuje derivaci neznámé. Řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje, nazýváme řád rovnice. Například

$$y' - 2xy = x^2, \quad y'' - 3y' + 2y = e^x, \quad y''' + y' = 0$$

jsou rovnice prvního, druhého a třetího řádu.

Obecně lze obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu zapsat ve tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

kde $F(x, y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$ je funkce $n+2$ proměnných a $y^{(n)}$ je n -tá derivace funkce $y(x)$.

Připomeňme ještě, že v případě ODR se do funkce $F(x, y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$ dosazují hodnoty neznámé a jejích derivací se stejnou hodnotou nezávisle proměnné x . V opačném případě mluvíme o ODR se zpožděním nebo obecně s odkloněným argumentem, například $y'(x) = f(x, y(x - \tau(x)))$, kde $\tau(x)$ je daná funkce.

1. Rovnice prvního řádu (ODR1)

Každou obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu lze zapsat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.1)$$

DEFINICE 1.1 Řekneme, že funkce $y(x)$ je **řešením** rovnice (1.1) na intervalu I , jestliže:

- (a) funkce $y(x)$ je spojitá a má spojitou první derivaci $y'(x)$ na celém I ,
- (b) pro každé $x \in I$ je hodnota funkce $F(x, y(x), y'(x))$ definována a
- (c) pro každé $x \in I$ platí rovnost $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

POZNÁMKY 1.2

- (a) Stručně řečeno neznámá $y(x)$ musí mít všechny derivace, které se v rovnici vyskytují, funkce F musí být pro tyto hodnoty definována a konečně po dosazení hodnot do rovnice nastane rovnost. V krajním bodě intervalu (pokud intervalu náleží) vyžadujeme jednostrannou spojitost i konečnou jednostrannou limitu derivace $y'(x)$.
- (b) Protože platnost podmínky (c) vyžaduje platnost předchozích dvou podmínek, často se požadavky (a) a (b) vynechávají.
- (c) Řešení ODR se říká také *integrál* dané rovnice.
- (d) Pozor, řešení rovnice je určeno nejen předpisem $y(x)$, ale také intervalem I . Řešení považujeme za různá, i když jsou určena stejným předpisem $y(x)$, ale jsou definována na různých intervalech.
- (e) V některých případech se řešení zapisuje v implicitním tvaru $g(x, y) = 0$. Protože implicitní vyjádření nemusí být jednoznačné, vedle intervalu je nutno doplnit jednu hodnotu $y(x_0) = y_0$. Při „zkoušce“ derivaci $y'(x)$ vyjádříme pomocí Věty o implicitní funkci: pokud $g'_y(x, y) \neq 0$ potom $y'(x) = -g'_x(x, y)/g'_y(x, y)$.

Základní tvar rovnice a počáteční úloha

Z obecného tvaru (1.1) nelze přímo zjistit, zda řešení rovnice existuje, proto se často rovnice zapisuje v základním tvaru (nejsou tím však zahrnuty všechny ODR1), ve kterém je rovnice „rozřešena“ vzhledem k derivaci y' :

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \text{nebo zkráceně} \quad y' = f(x, y). \quad (1.2)$$

Protože samotná rovnice má obvykle nekonečně mnoho řešení, rovnici doplňujeme tzv. počáteční podmínkou, která určuje hodnotu y_0 řešení $y(x)$ v jednom bodě x_0 intervalu I . Rovnici s podmínkou nazýváme **počáteční úloha**, často také podle angličtiny **počáteční problém**:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \quad \forall x \in I, \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Řešením počáteční úlohy na intervalu I je tedy spojitá a spojitě diferencovatelná funkce na intervalu I , která splňuje rovnici ve všech bodech $x \in I$ a podmínku $y(x_0) = y_0$.

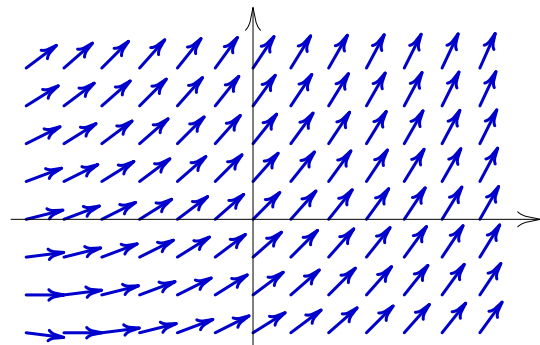
POZNÁMKA 1.3 Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu lze také zapsat ve tvaru diferenciálu $p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$. Skutečně, vydělením obou stran výrazem $q(x, y) dx$, přičemž zlomek dy/dx nahradíme y' dostaneme základní tvar

$$y'(x) = f(x, y), \quad \text{kde} \quad f(x, y) = -\frac{p(x, y)}{q(x, y)}.$$

V tomto tvaru lze však rovnici zapsat mnoha způsoby, stačí obě funkce $p(x, y)$, $q(x, y)$ vynásobit libovolnou nenulovou funkcí. Zápis se využívá v případě tzv. exaktní rovnice.

Další pojmy

- (a) Řešení rovnice $y' = f(x, y)$ lze geometricky znázornit pomocí tzv. směrového pole. V bodech (x, y) definičního oboru funkce $f(x, y)$ vykreslíme „malý“ násobek vektoru $(1, f(x, y))$ zvaný **směrový element**. Je to tečný vektor ke grafu řešení v tomto bodě. Tyto vektory tvoří **směrové pole** rovnice.

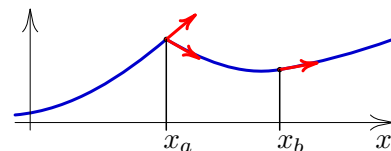


Obr. 1: Směrové pole rovnice $y' = 1 + x + y$.

- (b) Množinu řešení rovnice lze chápat jako *jednoparametrický systém křivek*, parametrem může být třeba hodnota řešení v bodě x_0 .
- (c) **Partikulárním řešením** rozumíme obvykle jedno konkrétní řešení rovnice.
- (d) **Obecné řešení** rovnice je výraz s konstantou (parametrem) c z dané množiny parametrů, který pro různá c dává obvykle všechna řešení dané rovnice.
- (e) Pokud pro řešení $y_1(x)$ na intervalu I_1 a řešení $y_2(x)$ na I_2 platí $I_1 \subset I_2$, ($I_1 \neq I_2$), přičemž $y_1(x) = y_2(x)$ pro všechna $x \in I_1$, říkáme, že řešení $y_2(x)$ je **prodloužením** nebo **rozšířením** řešení $y_1(x)$ z intervalu I_1 na I_2 a obráceně řešení $y_1(x)$ je **zúžením** řešení $y_2(x)$ na I_1 .
- (f) **Úplné řešení** (také **maximální řešení**) je řešení, které nelze prodloužit na větší interval.
- (g) **Navazování řešení.** Mají-li funkce $y_-(x)$ rovnici na intervalu (a, x_0) a funkce $y_+(x)$ na (x_0, b) stejné hodnoty a stejné jednostranné (konečné) derivace v bodě x_0 , tj. splňují-li podmínky

$$y_-(x_0) = y_+(x_0), \quad y'_-(x_0) = y'_+(x_0),$$

potom obě řešení lze spojit do jednoho řešení $y(x)$ na intervalu (a, b) . Pokud tyto jednostranné derivace jsou různé, řešení navázat není možné.



Obr. 2: V bodě x_a navázat řešení nelze, v bodě x_b je to možné.

Existence a jednoznačnost řešení

V případě rovnice zapsané ve tvaru (1.2) lze existenci a jednoznačnost řešení vyšetřovat pomocí následující jednoduché věty:

VĚTA 1.4 Uvažujme úlohu (1.3), tj. rovnici $y' = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Potom platí

- (a) Jestliže funkce $f(x, y)$ je definovaná a spojitá v okolí bodu (x_0, y_0) , potom tímto bodem prochází alespoň jedno řešení, tj. úloha (1.3) má řešení v okolí bodu x_0 .
- (b) Jestliže spojitá funkce $f(x, y)$ je navíc lipschitzovská v proměnné y , tj. splňuje Lipschitzovu podmínku v okolí U bodu (x_0, y_0) : existuje konstanta $L > 0$, že platí

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in U, \quad (1.4)$$

potom řešení úlohy (1.3) je v okolí bodu (x_0, y_0) jednoznačné.

POZNÁMKY 1.5

- (a) První tvrzení se nazývá **Peanova věta**, druhé silnější tvrzení je **Picardova věta**.
- (b) Jednoznačnost řešení v okolí bodu (x_0, y_0) znamená, že bodem prochází jediné řešení, tj. jediná křivka. Matematická formulace zní: *Pokud řešení $y_1(x)$ a $y_2(x)$ splňují $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$, potom $y_1(x) = y_2(x)$ platí i v nějakém okolí bodu x_0 .* Mimo toto okolí se řešení mohou lišit. Pokud Lipschitzova podmínka platí podél celého grafu řešení, je toto řešení jednoznačné na celém svém intervalu. Řešení se mohou „rozdělit, křížit“ jen v bodech, kde Lipschitzova podmínka není splněna.
- (c) Často se využívá skutečnosti, že Lipschitzova podmínka je splněna, pokud v okolí existuje (konečná) parciální derivace f'_y funkce $f(x, y)$. Skutečně, Věta o střední hodnotě pro diferencovatelnou funkci pro $y_1 < y_2$ říká:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y(x, \eta) \cdot (y_1 - y_2), \quad \text{kde } \eta \in (y_1, y_2).$$

Je-li tedy derivace v okolí (x_0, y_0) omezena konstantou L , podmínka (1.4) platí.

- (d) Tato lokální věta má globální důsledek. Je-li funkce $f(x, y)$ definovaná a spojitá v nějaké oblasti G , řešení lze prodlužovat, dokud „nenarazí“ na hranici oblasti G . Má-li funkce $f(x, y)$ navíc v celém G spojitou parciální derivaci podle y , řešení je ve všech bodech G také jednoznačné.
- (e) Znaménko hodnoty $f(x, y)$ v rovnici $y' = f(x, y)$ určuje chování řešení v bodě (x, y) . V okolí, kde $f(x, y)$ je kladná (záporná) je i derivace $y'(x)$ kladná (záporná) a řešení $y(x)$ je proto rostoucí (klesající).
- (f) Jestliže $f(x, y)$ nezávisí na x říkáme, že rovnice je **autonomní**. Je-li $y(x)$ řešení $y' = f(y)$ na intervalu (a, b) , potom také $y_c(x) = y(x - c)$ je řešením na $(a + c, b + c)$, tj. grafy dalších řešení dostaneme posunutím grafu řešení $y(x)$ ve směru osy x .

Několik instruktivních příkladů

PŘÍKLAD 1.6 Najděte všechna řešení rovnice $y' = 1 + y^2$.

Řešení: Funkce $f(x, y)$ je definovaná a spojitá v celé rovině \mathbb{R}^2 , řešení proto prochází každým bodem roviny. Parciální derivace $f'_y(x, y) = 2y$ je konečná v okolí každého bodu, řešení je proto v každém bodě jednoznačné, grafy různých úplných řešení (křivky v rovině) jsou proto disjunktní. Navíc funkce $f(x, y) = 1 + y^2 \geq 1$ je kladná, proto všechna řešení budou rostoucí.

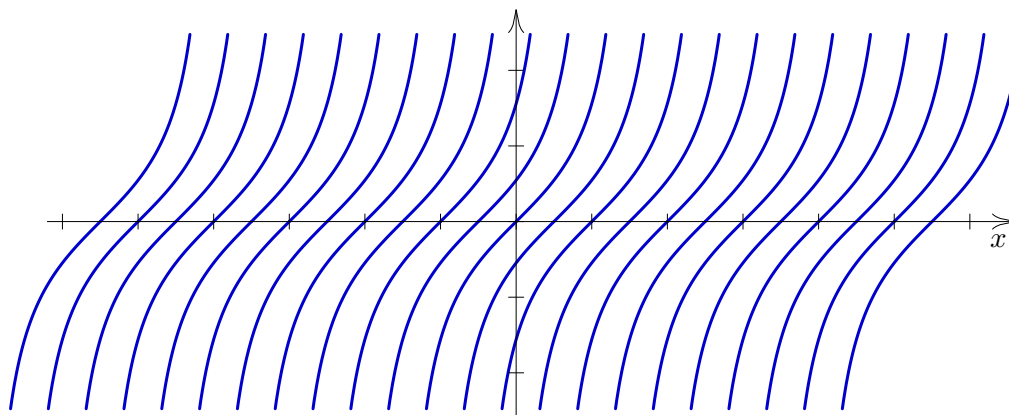
Ověřme tvrzení výpočtem řešení. Z rovnice plyne

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1,$$

odkud dostáváme $\operatorname{arctg} y = x - c$, protože $[\operatorname{arctg}(y(x))]' = y'/(1+y^2)$ a $[x-c]' = 1$. Protože $\operatorname{arctg} x$ nabývá hodnot $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, platí $x - c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, což dává obecné řešení

$$y(x) = \operatorname{tg}(x - c), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + c, \frac{\pi}{2} + c\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Řešení tvoří systém „rovnoběžných“ tangent posunutých o konstantu c ve směru osy x . \square



Obr. 3: Grafy řešení rovnice $y' = 1 + y^2$.

PŘÍKLAD 1.7 Najděte všechna řešení rovnice $y' + 2\sqrt{y} = 0$.

Fyzikální interpretace úlohy: Fyzikální úloha o vodě vytékající z válcové nádoby vede na uvedenou rovnici. Uvažujme válcovou nádobu o průřezu velikosti $S > 0$, která má kruhový otvor o průřezu $s > 0$ ve stěně válce ve výšce $y = 0$, kterým voda může vytékat. V čase x_0 je válec naplněn do výšky $y_0 > 0$. Odvoďme rovnici modelující tento jev.

Za neznámou zvolme výšku hladiny $y(x)$ v čase x . Rychlost vytékající vody $v(x)$ souvisí s rychlostí $-y'(x)$ klesající hladiny ve válci vztahem (zákon zachování objemu)

$$s \cdot v(x) = S \cdot (-y'(x)).$$

Rychlost $v(x)$ vytékající vody závisí na tlaku vody v místě výtoku: potenciální energie $y(x) \rho g$ se mění na kinetickou energii $\frac{1}{2}v^2(x)\rho$, kde ρ je hustota vody a g je gravitační zrychlení. Vydělením hustotou $\rho > 0$ dostáváme

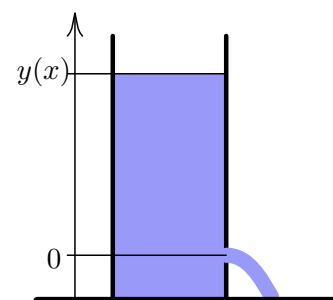
$$2y(x)g = v^2(x).$$

Odmocněním rovnosti na $v(x) = \sqrt{2y(x)g}$ pomocí předchozího vztahu dostáváme

$$y'(x) = -\frac{s}{S}v(x) = -\frac{s}{S}\sqrt{2y(x)g} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g} \cdot \sqrt{y(x)},$$

odkud snadno získáme rovnici

$$y'(x) + k\sqrt{y(x)} = 0, \quad \text{kde konstanta } k = \frac{s}{S}\sqrt{2g}.$$



Obr. 4: Nádoba, z které vytéká voda

Vhodnou volbou jednotek délky a času můžeme dosáhnout hodnoty $k = 2$. Doplněním výšky hladiny $y(x_0) = y_0$ v čase x_0 dostáváme počáteční úlohu

$$y'(x) + 2\sqrt{y(x)} = 0, \quad x > x_0, \quad y(x_0) = y_0.$$

Řešení: Ukažme nejprve rutinní řešení. Rovnici upravíme na tvar

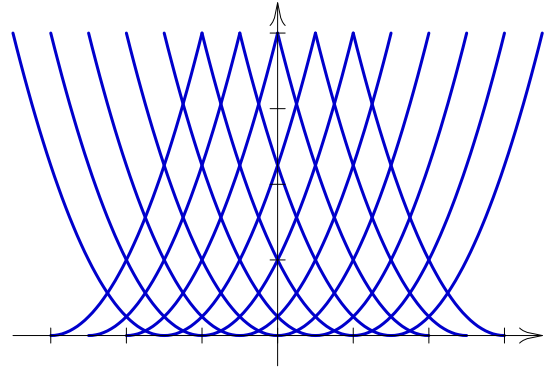
$$\frac{1}{2} [y(x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot y'(x) = -1.$$

Primitivní funkce na obou stranách pomocí vzorce $\int y^p = \frac{1}{p+1} y^{p+1} + c$ pro $p = -\frac{1}{2}$ dávají $\sqrt{y(x)} = -x + c$, odkud po umocnění dostáváme obecné řešení

$$y(x) = (x - c)^2.$$

Grafy řešení tvoří systém parabol $y = x^2$ „vodorovně“ posunutých o konstantu $c \in \mathbb{R}$.

Podívejme se na výsledek: Fyzikální význam řešení říká, že hladina nejprve klesá k nule a pak stoupá stále rychleji, což je v rozporu s praktickou zkušeností. Také řešení se kříží každém bodě (x, y) , $y > 0$, tj. řešení je dvojnásobné: v dané situaci také hladina může v rozporu se zkušeností klesat nebo růst.



Obr. 5: Rutinní řešení.

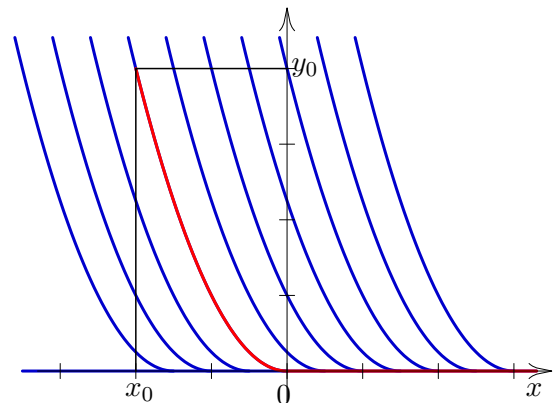
Kde jsme udělali chybu? Jaké je správné řešení? Podle existenční věty rovnice přepsaná do tvaru $y' = -2\sqrt{y}$ má pravou stranu $f(x, y) = -2\sqrt{y}$. Je to funkce definovaná a spojitá pro uzavřenou horní polorovinu $y \geq 0$. Derivace $f'_y(x, y) = -1/\sqrt{y}$ je definovaná a spojitá pouze pro $y > 0$. Pro $y > 0$ je řešení jednoznačné, pro $y = 0$ jednoznačnost není zaručena, na přímce $y = 0$ řešení nemusí být jednoznačné.

Při rutinním výpočtu jsme nejprve při dělení rovnice neznámou $\sqrt{y(x)}$ neověřili, zda $y(x) = 0$ není řešením. Tím jsme ztratili singulární řešení $y(x) = 0$. Druhou chybu jsme udělali při umocnění. V rovnici $\sqrt{y} = -x + c$ si musíme uvědomit, že levá strana je nezáporná, proto i pravá musí být nezáporná, tj. $-x + c \geq 0$. Umocnění pak dává rovnost $y(x) = (x - c)^2$ pouze pro $-x + c \geq 0$, tj. pro $x \in (-\infty, c]$. Řešením jsou proto jen levé klesající části parabol.

Protože v bodě $(c, 0)$ jsou jak hodnota $y(c)$ tak derivace $y'(c)$ řešení $y(x)$ nulové, můžeme na ni navázat nulové řešení. Všechna úplná řešení rovnice proto jsou:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}, \\ (x - c)^2, & x \in (-\infty, c], \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}.$$

V prvním případě (singulární řešení) hladina vody je stále nulová, ve druhém (obecné řešení) hladina klesá k nule, od bodu c už je nulová. \square



Obr. 6: Správné řešení popisující realitu.

PŘÍKLAD 1.8 Najděte všechna řešení rovnice $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Řešení: Pravá strana $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ je definovaná a spojitá pro $y \in \langle -1, 1 \rangle$, její

derivace $f'_y(x, y) = \frac{1}{2}(1 - y^2)^{-1/2} \cdot (-2y)$ je spojitá pouze pro $y \in (-1, 1)$. Proto řešení existuje v uzavřeném pásu $y \in \langle -1, 1 \rangle$, jednoznačnost je však pouze v otevřeném pásu $y \in (-1, 1)$, kde je $f(x, y)$ kladná, řešení je zde rostoucí.

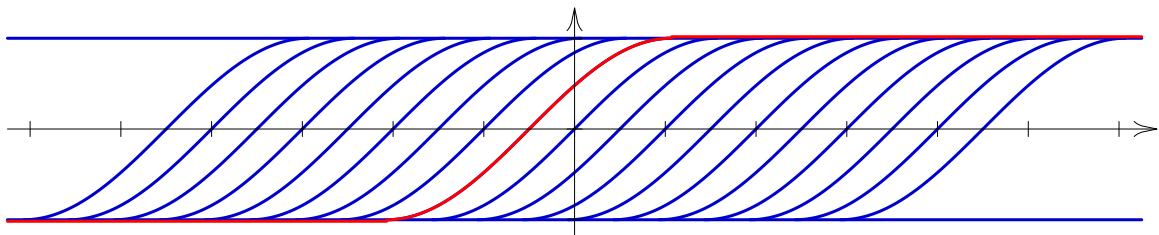
Před vydělením neznámou zjistíme, že $\sqrt{1 - y^2} = 0$ pro $y = \pm 1$. Odtud máme dvě singulární řešení $y(x) = -1$ a $y(x) = 1$. Rovnici pak upravíme na tvar $(1 - y^2)^{-1/2} \cdot y'(x) = 1$. Přejdem k primitivní funkci na obou stranách s využitím vzorce $\int 1/\sqrt{1 - y^2} dy = \arcsin(y) + c$, dostáváme vztah $\arcsin(y) = x - c$. Funkce \arcsin však nabývá pouze hodnot $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, proto rovnost platí pouze pro $x - c \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Řešením je funkce

$$y(x) = \sin(x - c), \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + c, \frac{\pi}{2} + c \right\rangle.$$

Řešení lze navázat v bodech, kde $y = \pm 1$, tj. v bodech $(-\frac{\pi}{2} + c, -1)$ a $(\frac{\pi}{2} + c, 1)$. Dostáváme tak systém úplných řešení

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}, \\ -1, & x \in \mathbb{R}, \\ \sin(x - c), & x \in \langle -\frac{\pi}{2} + c, \frac{\pi}{2} + c \rangle, \\ 1, & x \in \langle \frac{\pi}{2} + c, \infty \rangle, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}.$$

□



Obr. 7: Řešení rovnice $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

PŘÍKLAD 1.9 Najděte všechna řešení rovnice $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.

Řešení: Pravá strana rovnice $f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ je definovaná a spojitá pro všechna (x, y) , její derivace $f'_y(x, y)$ existuje a je spojitá všude kromě osy $y = 0$, mimo tuto osu je kladná. Proto každým bodem roviny prochází řešení, na ose x se řešení mohou protínat, ostatními body mimo osu x prochází jediné řešení a toto řešení je rostoucí.

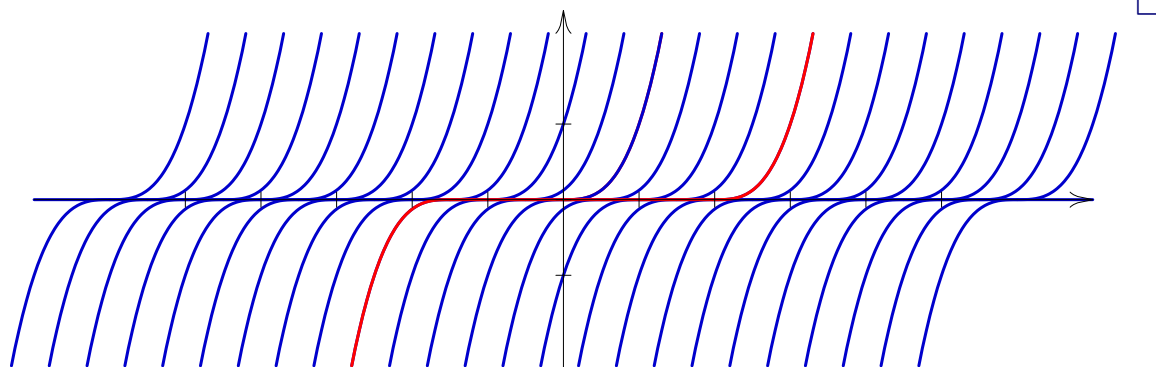
Opět $f(x, y) = 0$ pro $y = 0$, proto $y(x) = 0$ je singulární řešení. Pro $y > 0$ vydělením $f(x, y)$ dostáváme rovnici $\frac{1}{3}y^{-2/3} \cdot y' = 1$, jejíž integrací získáme $y^{1/3} = x - c$, odkud plyne $y(x) = (x - c)^3$. Protože levá strana je nezáporná, řešení platí pouze pro $x > c$. Podobně pro $y < 0$ dostáváme řešení $y(x) = (x - c)^3$ pro $x < c$. Obě obecná řešení lze navázat na řešení singulární i na sebe, proto dostáváme čtyři typy řešení:

$$y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, c), \\ (x - c)^3, & x \in \langle c, \infty \rangle, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = \begin{cases} (x - c)^3, & x \in (-\infty, c), \\ 0, & x \in \langle c, \infty \rangle, \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = \begin{cases} (x - c_1)^3, & x \in (-\infty, c_1), \\ 0, & x \in \langle c_1, c_2 \rangle, \\ (x - c_2)^3, & x \in \langle c_2, \infty \rangle. \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_1 \leq c_2.$$



Obr. 8: Řešení rovnice $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.

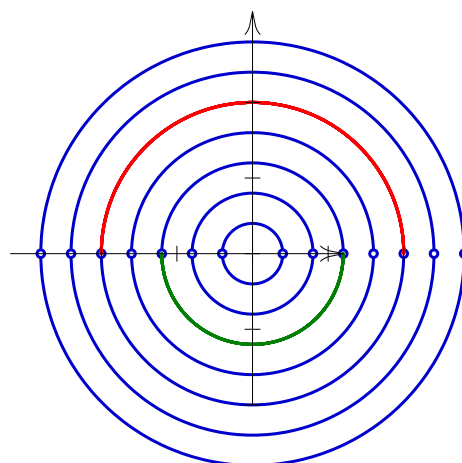
PŘÍKLAD 1.10 Najděte všechna řešení rovnice $y' = -\frac{x}{y}$.

Řešení: Pravá strana rovnice $f(x, y) = -x/y$ je definovaná a spojitá mimo body $y = 0$, tj. kromě osy x . Derivace $f'_y(x, y) = x/y^2$ je také spojitá kromě osy x . Proto každým bodem roviny kromě osy x prochází právě jedno řešení. Podle znaménka $f(x, y)$ uvnitř druhého a čtvrtého kvadrantu je řešení rostoucí a v prvním a třetím kvadrantu klesající.

Jednoduchou úpravou dostáváme rovnost $y \cdot y' + x = 0$, neboli $y dy + x dx = 0$, odkud integrací dostáváme $x^2 + y^2 = c$. Protože levá strana je nezáporná, zvolíme $c = r^2 > 0$. Úplná řešení jsou proto horní a dolní poloviny kružnice

$$y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in (-r, r), \quad r \in (0, \infty),$$

$$y(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in (-r, r), \quad r \in (0, \infty).$$



□ Obr. 9: Úplná řešení rovnice $y' = -x/y$.

Vybrané metody řešení

Připomeňme vybrané základní metody řešení rovnic prvního řádu.

A. Rovnice typu $y'(x) = f(x)$

Řešení rovnice s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ dostaneme integrací:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Ověřme, že vzorec dává řešení úlohy. Protože derivace integrálu podle horní meze dává hodnotu integrované funkce v horní mezi, derivací vzorce dostáváme $y'(x) = 0 + f(x)$. Díky $\int_{x_0}^{x_0} f(t) dt = 0$ je splněna i počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$.

B. Rovnice typu $y'(x) = f(y)$

Pokud rovnice $f(y) = 0$ má kořen y_r , dostáváme singulární řešení $y(x) = y_r$. Pro $f(y_0) \neq 0$ rovnici vydělíme $f(y)$ a integrací rovnice $y'(x)/f(y) = 1$ získáme implicitní vyjádření počáteční úlohy

$$H(y(x)) = x - x_0, \quad \text{kde } H(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{f(t)} dt.$$

V Příkladech 1.6–1.9 byly rovnice tohoto typu.

C. Rovnice se separovanými proměnnými $y'(x) = g(x)h(y)$

Oba předchozí typy rovnic byly speciálním případem této rovnice. Patří sem i lineární rovnice typu $y' = a(x)y$.

Po ověření, zda $h(y) = 0$ nemá nějaký kořen y_r , který by dal singulární řešení $y(x) = y_r$, rovnici upravíme na tvar

$$\frac{1}{h(y)} y' = g(x), \quad \text{který lze zapsat jako } \frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx.$$

Buďte $G(x) = \int g(x) dx$, $H(y) = \int 1/h(y) dy$ příslušné primitivní funkce. Potom řešení rovnice lze zapsat v implicitním tvaru

$$H(y) = G(x) + c, \tag{1.5}$$

který, pokud $H(y)$ má inverzní funkci $H^{-1}(y)$, lze upravit na tvar

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + c).$$

Řešení počáteční úlohy s podmínkou $y(x_0) = y_0$ pro $h(y_0) \neq 0$ lze potom zapsat ve tvaru

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{h(t)} dt = \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Pokud $h(y_0) = 0$, potom $y(x) = y_0$ je singulární řešení. V Příkladu 1.10 byla rovnice tohoto typu.

D. Exaktní rovnice typu $p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$

Metodu lze užít, když rovnice $y' = -p(x, y)/q(x, y)$ přepsaná do tvaru

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$$

je diferenciálem nějaké funkce $F(x, y) = 0$. Diferenciál funkce $F(x, y)$ je forma

$$dF(x, y) = F'_x(x, y) dx + F'_y(x, y) dy,$$

a tedy platí $F'_x(x, y) = p(x, y)$ a $F'_y(x, y) = q(x, y)$. Protože smíšené derivace jsou záměnné: $F''_{xy}(x, y) = F''_{yx}(x, y)$, z rovností $F''_{xy}(x, y) = p'_y(x, y)$ a $F''_{yx}(x, y) = q'_x(x, y)$ plyne tzv. **podmínka exaktnosti**

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial q}{\partial x}(x, y). \tag{1.6}$$

Pokud je tato podmínka splněna na jednoduše souvislé oblasti (tj. oblasti bez „díry“), tzv. *kmenová funkce* $F(x, y)$ existuje a lze ji spočítat z podmínky $F'_x(x, y) = p(x, y)$. Integrací dostáváme $\int p(x, y) dx = \overline{F}(x, y) + C(y)$, kde $C(y)$ je nějaká „konstanta“, tj. funkce, která nezávisí na x , ale může záviset na y .

Derivování této rovnosti podle y dává $\overline{F}'_y(x, y) + C'(y) = q(x, y)$, odkud plyne rovnice $C'(y) = q(x, y) - \overline{F}'_y(x, y)$. Podmínka exaktnosti zaručí, že pravá strana nezávisí na x . Pokud závisí, ve výpočtu je chyba, nebo rovnice není exaktní. Integrací podle y tak získáme funkci $C(y)$ a položíme $F(x, y) = \overline{F}(x, y) + C(y)$. Získáme tak implicitní vyjádření $F(x, y) = c$ řešení $y(x)$.

Při výpočtu lze také začít s integrací druhé podmínky $F(x, y) = \int q(x, y) dy$ a derivace této podmínky podle x dává rovnici, ze které opět spočítáme stejnou kmenovou funkci.

PŘÍKLAD 1.11 Řešte rovnici $(3x^2 + y) dx + (x + 3y^2) dy = 0$.

Řešení: Rovnice je zapsána ve tvaru diferenciálu, kde $p(x, y) = 3x^2 + y$, $q(x, y) = x + 3y^2$. Ověříme podmínku exaktnosti (1.6):

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial q}{\partial x}(x, y) = 1,$$

podmínka je tedy splněna. Integrace $p(x, y)$ dává

$$F(x, y) = \int (3x^2 + y) dx = x^3 + xy + C(y).$$

Podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = q(x, y)$ dává $x + C'(y) = x + 3y^2$, tedy $C'(y) = 3y^2$, odkud plyne $C(y) = y^3 - c$. Dostali jsme tak řešení v implicitním tvaru

$$x^3 + xy + y^3 = c.$$

□

POZNÁMKY 1.12

- (a) V případě separovaných proměnných $y'(x) = g(x)h(y)$ je podmínka exaktnosti rovnice $\frac{1}{h(y)} dy - g(x) dx = 0$ automaticky splněna, neboť $p'_y(x, y) = 0$, $q'_x(x, y) = 0$.
- (b) **Metoda integračního faktoru** spočívá v tom, že původní rovnici, která není exaktní, vynásobíme vhodnou funkcí tzv. *integračním faktorem* tak, abychom dostali rovnice exaktní, kterou už umíme řešit.

E. Metoda substituce

Metoda substituce neznámé $y(x)$ spočívá v převedení rovnice s neznámou $y(x)$ na rovnici s neznámou $u(x)$ určenou vztahem $y(x) = g(x, u(x))$. Potom

$$y'(x) = g'_x(x, u(x)) + g'_u(x, u(x)) \cdot u'(x)$$

a rovnice $y'(x) = f(x, y(x))$ tak přejde na rovnici

$$u'(x) = \frac{1}{g'_u(x, u(x))} (f(x, g(x, u(x))) - g'_x(x, u(x))).$$

Podobně lze substitucí nezávislé proměnné x převést rovnici s neznámou $y(x)$ na rovnici s neznámou $u(t)$. Substituce $\varphi : t \mapsto x = \varphi(t)$ převádí interval J na interval I .

Funkci inverzní k $\varphi(t)$ označme $\psi : x \mapsto t = \psi(x)$. Substituce $\varphi(t)$ a $\psi(x)$ je dvojice rostoucích nebo klesajících funkcí splňujících $\psi(\varphi(t)) = t$ pro $t \in J$ a $\varphi(\psi(x)) = x$ pro $x \in I$. Derivace druhé rovnosti dává rovnost $\varphi'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = 1$, odkud plyne rovnost $1/\psi'(x) = \varphi'(\psi(x))$, kterou budeme potřebovat.

Derivováním vztahu $y(x) = u(\psi(x))$ dostáváme $y'(x) = u'(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$. Dosazením do rovnice $y'(x) = f(x, y(x))$ dostáváme rovnici $u'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = f(x, u(\psi(x)))$. Jednoduchá úprava s využitím $\psi(x) = t$ a odvozeného vztahu $1/\psi'(\varphi(t)) = \varphi'(t)$ vede na rovnici

$$u'(t) = \varphi'(t) \cdot f(\varphi(t), u(t)), \quad t \in J.$$

Oba typy substituce lze kombinovat. Substituce ovšem má smysl, pokud výslednou rovnici už umíme řešit. Určení vhodné substituce často není jednoduché a předpokládá stejně jako hledání primitivní funkce techniku i umění.

Uveďme vhodné substituce pro několik typů pravé strany $f(x, y)$.

(a) Homogenní rovnice $y'(x) = g\left(\frac{y}{x}\right)$

V případě, kdy pravá strana $f(x, y)$ splňuje $f(tx, ty) = f(x, y) \quad \forall t$, říkáme, že rovnice je homogenní. Funkci lze zapsat ve tvaru $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ pomocí vhodné funkce g . V tomto případě je vhodnou substitucí $y(x)/x = u(x)$, tj. $y(x) = xu(x)$. Derivace $y(x) = xu(x)$ dává vztah $y'(x) = u(x) + xu'(x)$ a rovnice $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ přejde na $u(x) + xu'(x) = g(u(x))$, kterou upravíme na rovnici se separovanými proměnnými pro neznámou $u(x)$

$$u'(x) = \frac{1}{x} (g(u(x)) - u(x)).$$

PŘÍKLAD 1.13 Řešte rovnici $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

Řešení: Rovnice je homogenní, pomocí substituce $u = \frac{y}{x}$ lze pravou stranu $f(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ přepsat na $g(u) = u + \frac{1}{u}$. Protože $y'(x) = u(x) + xu'(x)$, po úpravě máme $u'(x) = \frac{1}{xu(x)}$, což je rovnice se separovanými proměnnými. Integrací rovnice $u u' = \frac{1}{x}$ dostáváme řešení $\frac{1}{2}u^2(x) = \ln|x| + c$. Zpětná substituce dává po úpravě řešení $y(x)$ v implicitním tvaru

$$y^2(x) = 2x^2(\ln|x| + c).$$

□

(b) Bernoulliho rovnice $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^r(x)$

Nechť $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité funkce, $b(x) \neq 0$, $r \neq 0$, $r \neq 1$. Potom substituce $u(x) = [y(x)]^{1-r}$ dává $u'(x) = (1-r)[y(x)]^{-r}y'(x)$ a Bernoulliho rovnice přejde na snadno řešitelnou tzv. lineární rovnici

$$u'(x) = (1-r)a(x)u(x) + (1-r)b(x).$$

Vyloučené případy pro $b(x) = 0$, $r = 0$ a $r = 1$ jsou také lineární rovnice.

(c) Rovnice typu $y'(x) = g\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

I tuto rovnici umíme řešit. Skutečně, pokud $c_1 = c_2 = 0$, je rovnice homogenní. Pokud $c_1 \neq 0$ nebo $c_2 \neq 0$ mohou nastat dva případy:

(ca) Jestliže navíc $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$, substitucí $x = u + A$, $y = v + B$, kde konstanty A, B splňují $a_1 A + b_1 B + c_1 = 0$, $a_2 A + b_2 B + c_2 = 0$, rovnice přejde na homogenní rovnici $v'(u) = g\left(\frac{a_1 u + b_1 v(u)}{a_2 u + b_2 v(u)}\right)$ pro neznámou $v(u)$.

(cb) Jestliže navíc $a_1 b_2 = a_2 b_1$, $b_1 \neq 0$ použijeme substituci $z(x) = a_1 x + b_1 y(x)$. Protože $a_2 x + b_2 y(x) = k z(x)$, $z'(x) = a_1 + b_1 y'(x)$, a rovnice přejde na tvar

$$\frac{z'(x)}{b_1} = \frac{a_1}{b_1} + g\left(\frac{z(x) + c_1}{k z(x) + c_2}\right), \quad \text{tj.} \quad z'(x) = f(z(x)),$$

což je rovnice typu B. Pokud $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$, $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$, lze analogicky použít substituci $z(x) = a_2 x + b_2 y(x)$. V případě $b_1 = b_2 = 0$ je výsledná rovnice rovnicí se separovanými proměnnými.

Lineární rovnice (LODR1) $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$

Zvláštní postavení mezi ODR1 mají lineární rovnice. Jsou to rovnice, ve kterých pravá strana $f(x, y)$ je funkce lineární v proměnné y , tj. $f(x, y) = a(x)y + b(x)$. Funkce $a(x)$ se nazývá *koefficient* rovnice a $b(x)$ *pravá strana* rovnice. Pokud $b(x) = 0$, tj. $y' = a(x)y$, tedy $y' - a(x)y = 0$, mluvíme o **lineární rovnici bez pravé strany**. V opačném případě rovnici $y' - a(x)y = b(x)$ nazýváme **lineární rovnicí s pravou stranou**:

$$y'(x) = a(x)y(x), \quad y'(x) = a(x)y(x) + b(x). \quad (1.7)$$

Často užívaný termín **homogenní rovnice** a **nehomogenní rovnice** je méně vhodný, protože se plete s homogenní rovnicí typu $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Z věty o existenci a jednoznačnosti plyne, že lineární rovnice mají řešení v celé rovině mimo přímky nebo pásy $I \times (-\infty, \infty)$ kolmé na osu x , kde intervaly I jsou množiny, kde $a(x)$ nebo $b(x)$ nejsou definované nebo spojitě. Protože derivace $f'_y(x, y) = a(x)$ je spojitá tam, kde je spojitá $a(x)$, řešení je jednoznačné všude tam, kde existuje. Rovnice proto nemá singulární řešení, řešení vzniklé při dělení $y(x)$ už je zahrnuto v obecném řešení.

Všechna úplná řešení existují na celém intervalu, na kterém $a(x)$, $b(x)$ jsou spojitě.

Struktura množiny řešení

Uvažujme lineární rovnici $y' = a(x)y + b(x)$ a libovolná dvě její řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$. Potom $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$ je řešením příslušné rovnice bez pravé strany. Proto každé dvě řešení se liší jen o řešení rovnice bez pravé strany. Násobek řešení rovnice bez pravé strany je opět řešením stejné rovnice. Díky tomu můžeme popsat všechna řešení lineární rovnice:

VĚTA 1.14 Buď $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ lineární rovnice a předpokládejme, že koeficienty $a(x), b(x)$ jsou spojitě na intervalu I . Potom každé řešení na intervalu I lze zapsat ve tvaru

$$y(x) = y_p(x) + c u(x), \quad x \in I, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

kde $u(x)$ je nenulové řešení rovnice $y'(x) = a(x)y(x)$ a dále $y_p(x)$ je kterékoliv řešení rovnice s pravou stranou $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$.

V geometrickém smyslu řešení rovnice bez pravé strany tvoří jednorozměrný lineární podprostor v prostoru spojitých funkcí na intervalu I , řešení rovnice s pravou stranou pak „posunutý“ prostor zvaný lineární podmnožina ve stejném prostoru.

Výpočet řešení lineárních rovnic

Každé řešení lineární rovnice má tvar (1.8) obsahující konstantu c , kterou lze určit z počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$. Tato podmínka vede na rovnici $y_p(x_0) + c u(x_0) = y_0$. Pokud $u(x_0) \neq 0$, rovnice má jediné řešení c .

Výpočet obecného řešení provedeme ve dvou krocích. V prvním určíme nenulové řešení $u(x)$ lineární rovnice bez pravé strany $y'(x) = a(x)y(x)$. Tato rovnice má vždy nulové řešení $y(x) = 0$, my však hledáme řešení nenulové. Je to rovnice se separovanými proměnnými. Integrací rovnice $\frac{1}{y(x)} dy = a(x) dx$ dostáváme

$$\ln|y(x)| = A(x) + \ln|c|, \quad \text{kde} \quad A(x) = \int a(x) dx.$$

Odlogaritmování dává $|y(x)| = |c| \cdot e^{A(x)}$, protože c může být kladné i záporné, absolutní hodnoty můžeme vynechat. Zvolíme jedno nenulové řešení $y(x)$, které označíme $u(x)$.

Ve druhém kroku hledáme řešení rovnice $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ tzv. metodou variace konstanty. Řešení přitom hledáme ve tvaru $y(x) = C(x)u(x)$. Dosadíme do rovnice

$$y'(x) \equiv C'(x)u(x) + C(x)u'(x) = a(x)C(x)u(x) + b(x).$$

Protože $u(x)$ jakožto řešení rovnice bez pravé strany splňuje $C(x)u'(x) = C(x)a(x)u(x)$, rovnice se zjednoduší na $C'(x)u(x) = b(x)$, což dává rovnici pro $C'(x) = b(x)/u(x)$, odkud integrací spočítáme „konstantu“ $C(x)$

$$C(x) = \int \frac{b(x)}{u(x)} dx + k.$$

Dosazením $C(x)$ do $y(x) = C(x)u(x)$ získáme obecné řešení. Výpočet obsahuje kontrolu, pokud se člen s nederivovaným $C(x)$ na obou stranách nezruší, ve výpočtu je chyba.

Řešení rovnice s podmínkou $y(x_0) = y_0$ se dá počítat také (bez kontroly) vzorcem

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x \frac{b(t)}{u(t)} dt + y_0 \right) u(x), \quad \text{kde} \quad u(x) = \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right).$$

Ověřme počáteční podmínku. Pro $x = x_0$ je $u(x_0) = \exp(0) = 1$, a proto $y(x_0) = y_0$.

Několik instruktivních příkladů

PŘÍKLAD 1.15 Řešte rovnici $y' = y - 1$, určete všechna úplná řešení.

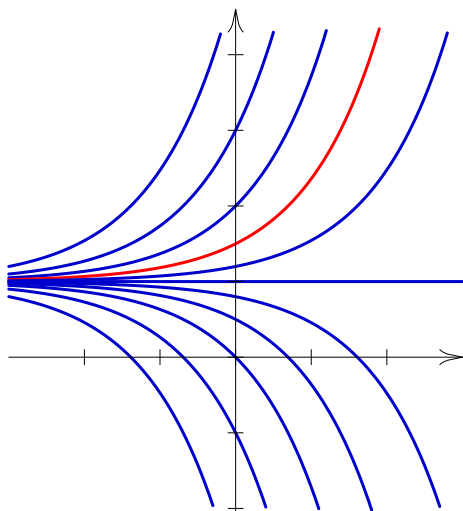
Řešení: Existence a jednoznačnost je zaručena v celé rovině. Řešení rovnice $y' = y$ dává $y(x) = ce^x$, zvolíme $u(x) = e^x$. Ve druhém kroku řešení hledáme ve tvaru $y(x) = C(x)e^x$. Dosazením do rovnice dostáváme

$$y'(x) \equiv C'(x)e^x + C(x)e^x = C(x)e^x - 1,$$

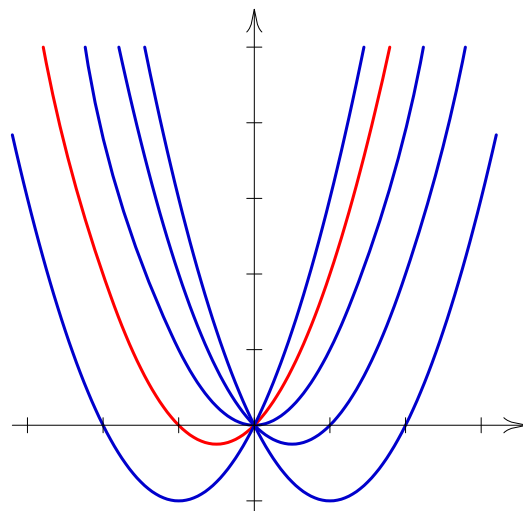
odkud plyne $C'(x)e^x = -1$. Integrace rovnice $C'(x) = -e^{-x}$ dává $C(x) = e^{-x} + k$, proto $y(x) = (e^{-x} + k)e^x$, tj. obecné řešení má tvar

$$y(x) = 1 + ke^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

□



Obr. 10: Řešení rovnice $y' = y - 1$.



Obr. 11: Řešení rovnice $xy' = y + x^2$.

PŘÍKLAD 1.16 Určete všechna úplná řešení rovnice $xy' = y + x^2$.

Řešení: Rovnici lze přepsat ve tvaru $y' = \frac{y}{x} + x$. Existence a jednoznačnost je zaručena všude mimo přímku $x = 0$. Řešení rovnice $y' = \frac{y}{x}$ dává $y(x) = cx$, zvolíme $u(x) = x$.

Ve druhém kroku řešení hledáme ve tvaru $y(x) = C(x)x$. Dosazení do rovnice dává

$$x y'(x) \equiv x(C'(x)x + C(x) \cdot 1) = C(x)x + x^2,$$

odkud $x^2 C'(x) = x^2$. Integrace rovnice $C'(x) = 1$ dává $C(x) = x + k$, tedy $y(x) = (x + k)x$, tj. obecné řešení má tvar

$$y(x) = x^2 + kx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Body $(0, y_0)$ pro $y_0 \neq 0$ neprochází žádné řešení, bodem $(0, 0)$ procházejí všechna řešení. Pro různá c řešení $y(x)$ mají v nule různé směrnice $y'(0) = k$, nelze je proto v nule navazovat. \square

Poznamenejme, že rovnice ve tvaru $y' = \frac{y}{x} + x$ nemá řešení definované pro $x = 0$, úplná řešení jsou pouze na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, jsou to tedy různá řešení. Řešení však splňují původní rovnici $xy' = y + x^2$ i v bodě $x = 0$, proto úplná řešení jsou $y(x) = x^2 + cx$ na celém intervalu $(-\infty, \infty)$.

PŘÍKLAD 1.17 Určete všechna úplná řešení rovnice $xy' = 2y + x$.

Řešení: Rovnici lze přepsat ve tvaru $y' = 2\frac{y}{x} + 1$. Existence a jednoznačnost je zaručena všude mimo přímku $x = 0$. Řešení rovnice $y' = 2\frac{y}{x}$ dává $y(x) = cx^2$, zvolíme $u(x) = x^2$.

Ve druhém kroku metodou variace konstanty hledáme řešení ve tvaru $y(x) = C(x)x^2$. Dosazení do rovnice dává

$$x y'(x) \equiv x(C'(x)x^2 + C(x)2x) = 2C(x)x^2 + x,$$

odkud plyne $C'(x)x^3 = x$. Integrace rovnice $C'(x) = x^{-2}$ dává $C(x) = -\frac{1}{x} + k$, proto $y(x) = (-\frac{1}{x} + k)x^2$, tj. obecné řešení má tvar

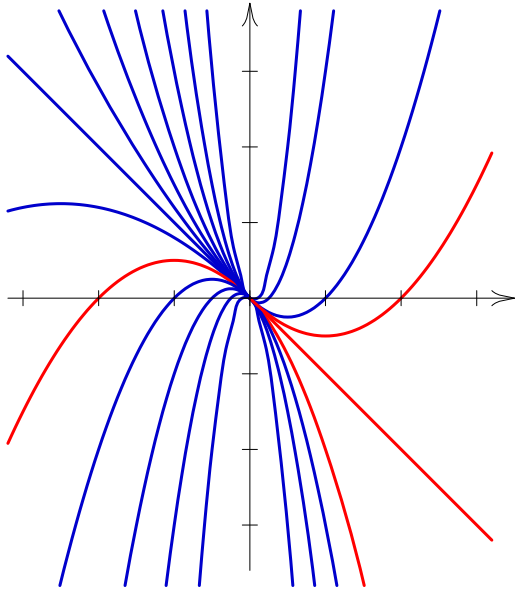
$$y(x) = -x + kx^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Body $(0, y_0)$ pro $y_0 \neq 0$ neprochází žádné řešení, bodem $(0, 0)$ procházejí všechna řešení. Pro všechna k je $y'(0) = -1$, řešení mají stejné směrnice a lze je v nule navazovat.

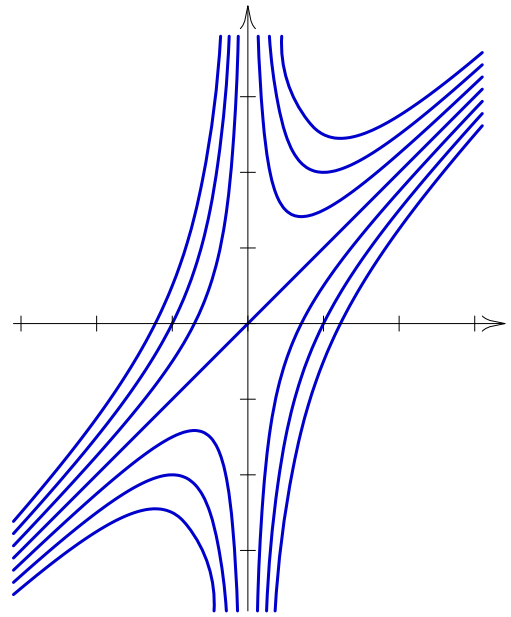
Opět rovnice ve tvaru $y' = 2\frac{y}{x} + x$ nemá řešení definované pro $x = 0$, úplná řešení jsou jen na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Řešení však splňují původní rovnici i v bodě $x = 0$, proto všechna úplná řešení jsou na celém \mathbb{R} , řešení však může jít po jedné parabole do nuly a po jiné parabole pokračovat dál, všechna úplná řešení proto jsou

$$y(x) = \begin{cases} -x + k_1 x^2 & x \in (-\infty, 0), \\ -x + k_2 x^2 & x \in (0, \infty), \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

□



Obr. 12: Řešení rovnice $xy' = 2y + x$ mohou pokračovat v $x = 0$ po libovolné parabole.



Obr. 13: Řešení rovnice $xy' + y = 2x$.

PŘÍKLAD 1.18 Určete všechna úplná řešení rovnice $xy' + y = 2x$.

Řešení: Rovnici přepíšeme na $y' = -\frac{y}{x} + 2$. Existence a jednoznačnost je zaručena opět všude mimo přímku $x = 0$. Řešení rovnice $y' = -\frac{y}{x}$ dává $y(x) = c \cdot \frac{1}{x}$, zvolíme $u(x) = \frac{1}{x}$.

Ve druhém kroku hledáme řešení ve tvaru $y(x) = C(x) \cdot \frac{1}{x}$. Dosazení do rovnice $xy' + y = 2x$ dává

$$x \left(C'(x) \frac{1}{x} - C(x) \cdot \frac{1}{x^2} \right) + C(x) \frac{1}{x} = 2x,$$

odkud $C'(x) = 2x$. Integrací dostaneme $C(x) = x^2 + c$, tedy $y(x) = (x^2 + c) \frac{1}{x}$, proto obecné řešení je

$$y(x) = x + \frac{c}{x}, \quad x \neq 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Body $(0, y_0)$ pro $y_0 \neq 0$ neprochází žádné řešení, bodem $(0, 0)$ jediné řešení $y(x) = x$. Ostatní úplná řešení $y(x) = x + \frac{c}{x}$, $c \neq 0$ jsou buď jen na $(-\infty, 0)$ nebo na $(0, \infty)$. Protože nejsou definována v nule, o navazování nelze uvažovat. □

2. Rovnice vyšších řádů (ODR_n)

Obecně lze obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu ($n = 2, 3, \dots$) zapsat ve tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0,$$

kde $y^{(k)}$ značí k -tou derivaci funkce $y(x)$ a $F(x, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ je funkcí $n+2$ proměnných závislá na y_n . O řešeních této rovnice však obecně nelze nic říci. Proto rovnici zapisujeme rozřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci, v tzv. **normálním tvaru**:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.1)$$

kde $f(x, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ je daná funkce $n+1$ proměnných. Rovnici (2.1) doplněnou n počátečními podmínkami

$$y(x_0) = \gamma_0, \quad y'(x_0) = \gamma_1, \quad y''(x_0) = \gamma_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1} \quad (2.2)$$

nazýváme **počáteční úlohou** (také **počáteční problém**) pro ODR_n.

Existenci a jednoznačnost řešení lze určit pomocí následující věty:

VĚTA 2.1 Uvažujme rovnici (2.1) s počátečními podmínkami (2.2). Potom platí:

- (a) Nechť funkce $f(x, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ je v okolí bodu $(x_0, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1})$ spojitá, potom počáteční úloha (2.1), (2.2) má v okolí x_0 alespoň jedno řešení $y(x)$.
- (b) Nechť funkce $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ splňuje Lipschitzovu podmínku v proměnných $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ v okolí bodu $(x_0, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1})$, potom řešení $y(x)$ počáteční úlohy (2.1), (2.2) je v bodě x_0 určeno jednoznačně.

POZNÁMKY 2.2

- (a) Funkce $f(x, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ splňuje Lipschitzovu podmínku v proměnné y_k , pokud pro všechna pevná $x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_{n-1}$ a libovolná ξ, η v okolí y_k platí

$$|f(x, y_0, \dots, y_{k-1}, \xi, y_{k+1}, \dots, y_{n-1}) - f(x, y_0, \dots, y_{k-1}, \eta, y_{k+1}, \dots, y_{n-1})| \leq L|\xi - \eta|.$$

- (b) Jako v případě ODR₁ jestliže funkce $f(x, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ má omezenou parciální derivaci podle proměnné y_k , potom splňuje Lipschitzovu podmínku v proměnné y_k .
- (c) Jednoznačnost řešení ODR₁ zaručila skutečnost, že grafy různých úplných řešení byly disjunktní, tj. „nekřížily“ se. V případě ODR_n ($n \geq 2$) už tato vlastnost pro grafy řešení neplatí, grafy se mohou protínat, protože k určení řešení nestačí počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$. Disjunktní jsou až „grafy“ řešení obsahující i derivace, tj. křivky v $(n+1)$ -rozměrném prostoru

$$\{(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}, x \in I\}.$$

Lineární rovnice n -tého řádu (LODR_n)

Rovnici n -tého řádu nazveme lineární, pokud funkce $f(x, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ je lineární v proměnných y_0, y_1, \dots, y_{n-1} , tj. rovnici lze zapsat ve tvaru $L(y) = b$, kde

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y. \quad (2.3)$$

Opět funkce $a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ nazýváme koeficienty a $b(x)$ pravou stranou. Podle Věty 2.1 o existenci a jednoznačnosti řešení platí, že řešení existuje a je jednoznačné pro všechna x z intervalu I , kde všechny funkce $a_k(x)$ a $b(x)$ jsou

spojité. Rovnici $L(y) = 0$ nazveme **rovnici bez pravé strany** a $L(y) = b(x)$ **rovnici s pravou stranou**.

Struktura řešení

Jako v případě LODR1 odvodíme strukturu řešení. Necht' $y(x)$ a $y^*(x)$ jsou dvě řešení rovnice $L(y) = b(x)$ na intervalu I . Potom jejich rozdíl $y(x) - y^*(x)$ je řešením rovnice bez pravé strany $L(y) = 0$. Řešení rovnice bez pravé strany splňují následující vlastnosti: nulová funkce, násobek řešení i součet dvou i více řešení splňují stejnou rovnici bez pravé strany. Protože každá kombinace n nezávislých počátečních podmínek (2.2) určuje jednoznačné řešení, množina řešení tvoří n -rozměrný podprostor v prostoru spojitých funkcí na intervalu I . Libovolná n -tice nezávislých řešení proto tvoří bázi tohoto prostoru. Výsledek shrneme ve větě:

VĚTA 2.3 Necht' koeficienty $a_k(x)$ a $b(x)$ jsou funkce spojité na intervalu I . Potom pro každé řešení $y(x)$ rovnice $L(y) = b(x)$ existují $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tak, že

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) + y_p(x), \quad (2.4)$$

kde $y_p(x)$ je libovolné (tzv. partikulární) řešení rovnice $L(y) = b(x)$ a $u_1(x), \dots, u_n(x)$ je n -tice nezávislých řešení rovnice $L(y) = 0$ bez pravé strany.

Také pro libovolné c_1, \dots, c_n vztah (2.4) určuje řešení rovnice $L(y) = b(x)$.

Kdy řešení $u_k(x)$ jsou nezávislá? K tomu je vhodný pojem **Wronského matice**:

DEFINICE 2.4 Necht' funkce $u_1(x), \dots, u_n(x)$ mají spojité derivace do řádu $n-1$. Výraz

$$W[u_1, \dots, u_n](x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x) \\ u_1''(x) & u_2''(x) & \dots & u_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

se nazývá **Wronského matice** funkcí u_1, \dots, u_n . Determinant Wronského matice $\det W[u_1, \dots, u_n]$ se nazývá **wronskián** funkcí u_1, \dots, u_n .

Wronského matice a wronskián vypovídají o nezávislosti funkcí i řešení rovnice:

VĚTA 2.5 Diferencovatelné funkce $u_1(x), \dots, u_n(x)$ jsou nezávislé na intervalu I , právě když jejich Wronského matice je regulární, nebo ekvivalentně, když jejich wronskián, tj. determinant Wronského matice je nenulový na celém I .

Tedy řešení $u_1(x), \dots, u_n(x)$ lineární rovnice $L(y) = 0$ na intervalu I jsou nezávislá, právě když jejich Wronského matice je regulární, nebo ekvivalentně, když jejich wronskián je různý od nuly.

V tomto speciálním případě navíc platí, že je-li wronskián nenulový v jednom bodě $x_0 \in I$, je nenulový na celém intervalu I .

Řešitelnost počáteční úlohy

Nechť koeficienty $a_k(x)$ a $b(x)$ jsou spojité funkce na intervalu I a $x_0 \in I$. Potom počáteční úloha pro rovnici $L(y) = b(x)$ pro libovolné $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$ v počátečních podmínkách (2.2) v bodě x_0 má právě jedno řešení.

Skutečně, dosazení obecného řešení do jednotlivých počátečních podmínek

$$y^{(k)}(x_0) = y_p^{(k)}(x_0) + c_1 u_1^{(k)}(x_0) + \dots + c_n u_n^{(k)}(x_0) = \gamma_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

vede na soustavu lineárních rovnic pro neznámé konstanty $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccccccc} u_1(x_0) c_1 & + & u_2(x_0) c_2 & + & \dots & + & u_n(x_0) c_n & = & \gamma_0 - y_p(x_0) \\ u_1'(x_0) c_1 & + & u_2'(x_0) c_2 & + & \dots & + & u_n'(x_0) c_n & = & \gamma_1 - y_p'(x_0) \\ u_1''(x_0) c_1 & + & u_2''(x_0) c_2 & + & \dots & + & u_n''(x_0) c_n & = & \gamma_2 - y_p''(x_0) \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) c_1 & + & u_2^{(n-1)}(x_0) c_2 & + & \dots & + & u_n^{(n-1)}(x_0) c_n & = & \gamma_{n-1} - y_p^{(n-1)}(x_0). \end{array}$$

Maticí této soustavy lineárních rovnic je Wronského matice $W[u_1, \dots, u_n]$ v bodě x_0 . Podle předpokladu řešení $u_1(x), \dots, u_n(x)$ jsou nezávislá, proto Wronského matice je regulární a soustava má právě jedno řešení c_1, \dots, c_n . Počáteční úloha proto má řešení pro libovolné hodnoty počátečních podmínek γ_i i libovolné partikulární řešení $y_p(x)$.

Výpočet řešení

Obecné řešení lineární rovnice má tvar $y(x) = c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x) + y_p(x)$. Pro jeho určení potřebujeme spočítat partikulární řešení $y_p(x)$ rovnice $L(y) = b(x)$ a n -tici nezávislých řešení rovnice $L(y) = 0$ bez pravé strany.

Všechna řešení $u_k(x)$ rovnice $L(y) = 0$ dovedeme spočítat v případě lineární rovnice s konstantními koeficienty (pokud umíme určit kořeny charakteristického polynomu) a ve vybraných případech nekonstantních koeficientů, například u tzv. Eulerovy rovnice.

Partikulární řešení $y_p(x)$ lze spočítat tzv. **metodou variace konstant**. V případě rovnice s konstantními koeficienty a určitých typů pravé strany je snadnější tzv. **metoda neurčitých koeficientů**.

Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Lineární rovnice s konstantními koeficienty je rovnice s koeficienty, které nezávisí na proměnné x , tj. rovnice $L(y) = b(x)$ s levou stranou

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y,$$

kde koeficienty a_k jsou reálná čísla, pravá strana $b(x)$ však může záviset na x .

Výpočet nezávislých řešení rovnice bez pravé strany

Řešení $u(x)$ budeme hledat ve tvaru exponenciální funkce $u(x) = e^{\lambda x}$. Spočítáme derivace $u'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $u''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$, obecně $u^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$ a dosadíme do rovnice $L(y) = 0$. Každý člen rovnice obsahuje kladný činitel $e^{\lambda x}$. Vydělením rovnice členem $e^{\lambda x}$ dostáváme rovnici $P(\lambda) = 0$, kde $P(\lambda)$ je tzv. **charakteristický polynom**

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0. \quad (2.5)$$

Tedy je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ kořenem polynomu $P(\lambda)$, potom $u(x) = e^{\lambda x}$ je řešením rovnice $L(y) = 0$.

Potřebujeme však n nezávislých řešení. V ideálním případě, kdy $P(\lambda)$ má n různých reálných kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, máme n nezávislých řešení $u_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \dots, u_n(x) = e^{\lambda_n x}$.

Z teorie polynomů víme, že polynom s reálnými koeficienty a_k má kořeny reálné nebo dvojice komplexně sdružených kořenů. Kořeny mohou být přitom jednoduché nebo násobné. Součet počtu všech kořenů s jejich násobností je stupeň n charakteristického polynomu $P(\lambda)$, který je roven řádu n lineární rovnice.

Komplexně sdružené kořeny. V případě dvojice komplexně sdružených kořenů $\mu \pm i\nu$ dostáváme dvě komplexní řešení, využijeme přitom vztah $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$:

$$y_1(x) = e^{(\mu+i\nu)x} = e^{\mu x}[\cos(\nu x) + i \sin(\nu x)], \quad y_2(x) = e^{(\mu-i\nu)x} = e^{\mu x}[\cos(\nu x) - i \sin(\nu x)],$$

která jsou také komplexně sdružené funkce. Jejich kombinacemi $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ a $\frac{1}{2i}(y_1 - y_2)$ získáme dvě nezávislá reálná řešení

$$u_1(x) = e^{\mu x} \cos(\nu x), \quad u_2(x) = e^{\mu x} \sin(\nu x).$$

Násobné kořeny. Necht' $\lambda_1 = \lambda_2$ je dvojnásobný reálný kořen polynomu $P(\lambda)$. Potom $u_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ je řešením rovnice. Ověřme, že funkce $u_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$ je druhým řešením rovnice, které je nezávislé na $u_1(x)$. Spočítejme derivace funkce $x e^{\lambda x}$

$$\begin{aligned} u_2'(x) &= e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}, \\ u_2''(x) &= 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x}, \\ u_2'''(x) &= 3\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda^3 x e^{\lambda x}, \\ &\vdots \\ u_2^{(k)}(x) &= k\lambda^{k-1} e^{\lambda x} + \lambda^k x e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Dosaďme derivace do operátoru $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y$. Po sdružení členů s výrazy $e^{\lambda x}$, $x e^{\lambda x}$ dostáváme

$$L(x e^{\lambda x}) = Q(\lambda) e^{\lambda x} + P(\lambda) x e^{\lambda x},$$

kde $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ je charakteristický polynom rovnice $L(y)$,

$$Q(\lambda) = n\lambda^{n-1} + a_{n-1}(n-1)\lambda^{n-2} + \dots + a_3 3\lambda^2 + a_2 2\lambda + a_1.$$

Protože λ_1 je kořenem $P(\lambda)$, platí $P(\lambda_1) = 0$. Polynom $Q(\lambda)$ je derivací polynomu $P(\lambda)$. V případě dvojnásobného kořene λ_1 polynomu $P(\lambda)$, je λ_1 také jednoduchým kořenem $Q(\lambda)$. Tvzení lze snadno ověřit derivováním kořenového součinu

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

Pokud $\lambda_1 = \lambda_2$ je dvojnásobný kořen, derivováním $P(\lambda)$ dostaneme součet n součinů, z nichž každý obsahuje buď nulový činitel $(\lambda - \lambda_1)$ nebo nulový $(\lambda - \lambda_2)$ nebo oba.

Řešení $u_1(x)$ a $u_2(x)$ jsou nezávislá, jejich wronskián je

$$W[u_1, u_2] = u_1 u_2' - u_1' u_2 = e^{\lambda_1 x}(e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x}) - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot x e^{\lambda_1 x} = e^{2\lambda_1 x} > 0.$$

V případě trojnásobného kořene λ_1 třetí řešení je $u_3(x) = x^2 e^{\lambda_1 x}$ díky skutečnosti, že λ_1 je navíc kořenem druhé derivace $P''(\lambda)$ charakteristického polynomu $P(\lambda)$. V případě čtyřnásobného kořene λ_1 položíme navíc $u_4(x) = x^3 e^{\lambda_1 x}$, atd.

Násobné komplexně sdružené kořeny. V případě dvojnásobné dvojice komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2,3,4} = \mu \pm i\nu$ dvojici řešení $u_1(x) = e^{\mu x} \cos(\nu x)$, $u_2(x) = e^{\mu x} \sin(\nu x)$ doplníme řešeními $u_3(x) = x e^{\mu x} \cos(\nu x)$, $u_4(x) = x e^{\mu x} \sin(\nu x)$. V případě trojnásobné dvojice komplexně sdružených kořenů přidáme další dvě řešení násobená x^2 .

POZNÁMKA 2.6 Pokud určíme všechny kořeny charakteristického polynomu $P(\lambda)$, což může být problém, snadno určíme všech n nezávislých řešení lineární rovnice $L(y) = 0$.

Metoda variace konstant

Pro výpočet touto metodou potřebujeme n -tici nezávislých řešení u_1, \dots, u_n příslušné lineární rovnice $L(y) = 0$. Obecné řešení $y(x)$ rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x) \quad (2.6)$$

hledáme ve tvaru s proměnnými, tj. „variabilními“, konstantami

$$y(x) = C_1(x) u_1(x) + C_2(x) u_2(x) + \dots + C_n(x) u_n(x). \quad (2.7)$$

Dosazením do rovnice (2.6) dostaneme soustavu rovnic pro derivace $C'_1(x), \dots, C'_n(x)$:

$$W[u_1, \dots, u_n](x) \cdot \mathbf{C}'(x) = \mathbf{b}(x), \quad (2.8)$$

kde $W[u_1, \dots, u_n]$ je Wronského matice nezávislých řešení u_1, \dots, u_n , $\mathbf{C}'(x)$ je sloupcový vektor derivací $(C'_1(x), \dots, C'_n(x))^T$ a pravá strana sloupcový vektor $\mathbf{b} = (0, \dots, 0, b(x))^T$.

Odvoďme uvedený vzorec pro rovnici třetího řádu

$$y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x). \quad (2.9)$$

Řešení hledáme ve tvaru

$$y(x) = C_1(x) u_1(x) + C_2(x) u_2(x) + C_3(x) u_3(x). \quad (2.10)$$

Spočítejme derivaci poslední rovnosti (argument (x) budeme vynechávat):

$$y' = C'_1 u_1 + C'_2 u_2 + C'_3 u_3 + C_1 u'_1 + C_2 u'_2 + C_3 u'_3.$$

Položme součet členů s derivovanými „konstantami“ C_i roven nule

$$C'_1 u_1 + C'_2 u_2 + C'_3 u_3 = 0 \quad (2.11)$$

a zbývající rovnici

$$y' = C_1 u'_1 + C_2 u'_2 + C_3 u'_3 \quad (2.12)$$

opět derivujme

$$y'' = C'_1 u'_1 + C'_2 u'_2 + C'_3 u'_3 + C_1 u''_1 + C_2 u''_2 + C_3 u''_3.$$

Položme znovu součet derivovaných „konstant“ C_i roven nule

$$C'_1 u'_1 + C'_2 u'_2 + C'_3 u'_3 = 0. \quad (2.13)$$

Zbývající členy dávají rovnost

$$y'' = C_1 u_1'' + C_2 u_2'' + C_3 u_3'', \quad (2.14)$$

kterou opět derivujeme

$$y''' = C_1' u_1'' + C_2' u_2'' + C_3' u_3'' + C_1 u_1''' + C_2 u_2''' + C_3 u_3'''.$$

Do rovnice (2.9) dosadíme z rovností (2.10), (2.12), (2.14). Protože u_i je řešením rovnice $L(y) = 0$, platí

$$C_i(u_i''' + a_2 u_i'' + a_1 u_i' + a_0 u_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Tím se nám rovnice (2.9) zjednoduší na

$$C_1' u_1'' + C_2' u_2'' + C_3' u_3'' = b(x). \quad (2.15)$$

Spolu s (2.11), (2.13) dostáváme tak soustavu tří lineárních rovnic pro derivace C_i'

$$\begin{aligned} C_1' u_1 + C_2' u_2 + C_3' u_3 &= 0, \\ C_1' u_1' + C_2' u_2' + C_3' u_3' &= 0, \\ C_1' u_1'' + C_2' u_2'' + C_3' u_3'' &= b(x), \end{aligned}$$

což je soustava lineárních rovnic pro neznámé C_1', C_2', C_3' . Její matice soustavy je regulární Wronského matice řešení u_1, u_2, u_3 . Soustava proto má právě jedno řešení C_1', C_2', C_3' . Integrací získáme „konstanty“

$$C_i(x) = \int C_i'(x) dx + k_i$$

a dosazením do (2.10) získáme obecné řešení $y(x)$ se třemi konstantami k_1, k_2, k_3 .

Poznamenejme, že touto metodou lze počítat obecné řešení i rovnic $L(y) = b$ s nekonzantními koeficienty $a_k(x)$, musíme však znát nezávislá řešení u_1, \dots, u_n .

Metoda neurčitých koeficientů

Metoda vychází z myšlenky, že partikulární řešení rovnice s konstantními koeficienty je stejného typu jako pravá strana $b(x)$, což platí pro určité typy pravé strany. Řešení $y_p(x)$ hledáme ve tvaru pravé strany s neurčitými (neznámými) koeficienty, které určíme zkouškou: řešení s neznámými koeficienty dosadíme do rovnice $L(y) = b(x)$ a řešením vzniklé soustavy lineárních rovnic získáme konkrétní hodnoty těchto koeficientů. V případě, kdy $b(x)$ je „podobné“ typu řešení $u_i(x)$, tvar hledaného řešení upravíme.

Metodu lze užít jen pro případ lineární rovnice s konstantními koeficienty a pravé strany vybraných typů.

Pokud pravá strana $b(x)$ je součtem různých „typů“ funkcí $b(x) = b_1(x) + \dots + b_k(x)$, je vhodné počítat jednotlivé typy zvlášť, tj. počítat jednotlivá řešení y_i rovnice $L(y) = b_i(x)$ a potom je sečíst $y_p(x) = y_1(x) + \dots + y_k(x)$. Podle typu pravé strany $b_i(x)$ a kořenů $P(\lambda)$ volíme typ partikulárního řešení y_i , řídíme se přitom několika pravidly:

A. Exponenciální funkce $b_i(x) = c e^{\lambda_0 x}$. V případě, kdy λ_0 není kořenem charakteristického polynomu $P(\lambda)$, řešení hledáme ve tvaru $y_i(x) = A e^{\lambda_0 x}$. Pokud λ_0 je jednoduchým kořenem, funkce $y_i(x) = e^{\lambda_0 x}$ je řešením rovnice $L(y_i) = 0$ a „nepřidá“ nic na

pravou stranu. Řešení proto hledáme ve tvaru $y_i(x) = A x e^{\lambda_0 x}$. Pokud λ_0 je dvojnásobný (k -násobný) kořen $P(\lambda)$, řešení hledáme ve tvaru $A x^2 e^{\lambda_0 x}$ (ve tvaru $A x^k e^{\lambda x}$).

B. Funkce typu $\sin(\nu x)$, $\cos(\nu x)$. Pokud pravá strana $b_i(x)$ obsahuje $\sin(\nu x)$ nebo $\cos(\nu x)$, v obou případech řešení hledáme ve tvaru s oběma funkcemi

$$y_i(x) = A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x).$$

Pokud $\pm i\nu$ byly kořeny charakteristického polynomu $P(\lambda)$, uvedený typ řešení dává $L(y_i) = 0$, proto musíme přidat x : $y_i(x) = A x \cos(\nu x) + B x \sin(\nu x)$.

C. Funkce typu $e^{\mu x} \sin(\nu x)$, $e^{\mu x} \cos(\nu x)$. Tento typ pravé strany $b_i(x)$ odpovídá dvojici čísel $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$. Pokud tato čísla nejsou mezi kořeny charakteristického polynomu $P(\lambda)$, řešení $y_i(x)$ hledáme ve tvaru

$$y_i(x) = A e^{\mu x} \cos(\nu x) + B e^{\mu x} \sin(\nu x).$$

Pokud čísla $\mu \pm i\nu$ jsou k -násobnými kořeny $P(\lambda)$, řešení hledáme ve tvaru

$$y_i(x) = A x^k e^{\mu x} \cos(\nu x) + B x^k e^{\mu x} \sin(\nu x).$$

D. Předchozí typy s polynomem. V případě, kdy $b_i(x)$ je polynomem stupně k , řešení hledáme ve tvaru polynomu stejného stupně s neurčitými koeficienty:

$$y_i(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_1 x + A_0.$$

Lze ukázat, že v případě, kdy nula je k -násobným kořenem $P(\lambda)$, polynom násobíme x^k .

V případě součinu polynomu s $e^{\mu x}$ a případně s některým z výrazů $\cos(\nu x)$ nebo $\sin(\nu x)$, řešení hledáme ve stejném tvaru jako v předchozích případech, pouze daný výraz vynásobíme polynomem stejného stupně s neurčitými koeficienty.

E. Souhrnné pravidlo. Všechny předchozí typy pravé strany lze obecně popsat následovně: pro člen pravé strany

$$b_i(x) = Q_1(x) e^{\mu x} \cos(\nu x) + Q_2(x) e^{\mu x} \sin(\nu x),$$

kde Q_i jsou polynomy stupně nejvýše p , řešení hledáme ve tvaru

$$y_i(x) = R_1(x) x^k e^{\mu x} \cos(\nu x) + R_2(x) x^k e^{\mu x} \sin(\nu x),$$

kde R_1, R_2 jsou polynomy s neurčitými koeficienty stupně p a k je násobnost kořene $\mu \pm i\nu$ polynomu $P(\lambda)$. Pokud $\mu \pm i\nu$ není mezi kořeny $P(\lambda)$, položíme $k = 0$.

POZNÁMKY 2.7

- Obecný případ E zahrnuje všechny předchozí případy: V případě $\nu = 0$, $p = 0$ dostáváme případ A, $\mu = 0$, $p = 0$ případ B, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ je případ C.
- Pokud $b(x)$ obsahuje součet členů se stejným μ a ν , řešíme je současně, případ různých μ nebo ν řešíme každý zvlášť a získaná řešení sečteme.
- Pokud vám vyjde, že rovnice pro neurčité koeficienty nemá řešení, nebo že koeficient obsahuje x , ve výpočtu je chyba, nebo hledáte řešení v nesprávném tvaru.

PŘÍKLAD 2.8 Určete obecné řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 3 + e^x + 6e^{-x}$.

Řešení: Charakteristický polynom rovnice $P(\lambda) \equiv \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ má dva jednoduché reálné kořeny $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, příslušná řešení jsou $u_1(x) = e^x, u_2(x) = e^{2x}$.

Výpočet partikulárního řešení provedeme nejprve metodou variace konstant, potom metodou neurčitých koeficientů.

Metoda variace konstant

Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$. Podle (2.8) derivace koeficientů splňují soustavu lineárních rovnic $W[u_1, u_2]\mathbf{C}'(x) = \mathbf{b}(x)$:

$$\begin{aligned} e^x C_1' + e^{2x} C_2' &= 0 \\ e^x C_1' + 2e^{2x} C_2' &= 2x^2 - 3 + e^x + 6e^{-x}, \end{aligned}$$

která dává $C_1'(x) = -(2x^2 - 3)e^{-x} - 1 - 6e^{-2x}$, $C_2'(x) = (2x^2 - 3)e^{-2x} + e^{-x} + 6e^{-3x}$. Integrací metodou „per partes“ dostáváme

$$C_1(x) = (2x^2 + 4x + 1)e^{-x} - x + 3e^{-2x} + k_1, \quad C_2(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-2x} - e^{-x} - 2e^{-3x} + k_2.$$

Dosazením do $y(x) = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x)$ po úpravě získáme obecné řešení

$$y(x) = (k_1 - 1)e^x + k_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 2 - x e^x + e^{-x}.$$

□

Metoda neurčitých koeficientů

Pravou stranu $b(x) = 2x^2 - 3 + e^x + 6e^{-x}$ rozložíme na tři části: $b_1(x) = 2x^2 - 3$, $b_2(x) = e^x$, $b_3(x) = 6e^{-x}$.

Pravá strana $b_1(x)$ je polynom druhého stupně se členem $e^0 = 1, \lambda = 0$ — není kořenem $P(\lambda)$. Řešení proto hledáme ve tvaru polynomu druhého stupně s neurčitými koeficienty $y_1(x) = Ax^2 + Bx + C$. Dosazení y_1 do rovnice $y'' - 3y' + 2y = b_1(x)$ dává

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2Ax^2 + (-6A + 2B)x + (2A - 3B + 2C) = 2x^2 - 3,$$

odkud máme $A = 1, B = 3, C = 2$, tedy $y_1(x) = x^2 + 3x + 2$.

Pravá strana $b_2(x) = e^x$ je funkce odpovídající $\lambda = 1$, která je kořenem $P(\lambda)$, řešení hledáme v tvaru $y_2(x) = A x e^x$. Dosazení y_2 do rovnice $y'' - 3y' + 2y = b_2(x)$ dává

$$A(2e^x + x e^x) - 3A(e^x + x e^x) + 2A x e^x = (2A - 3A)e^x + (A - 3A + 2A)x e^x = -A e^x = e^x,$$

odkud plyne $A = -1$, a proto $y_2(x) = -x e^x$.

Konečně pravá strana $b_3(x) = 6e^{-x}$ je funkce odpovídající $\lambda = -1$, která není kořenem $P(\lambda)$, řešení hledáme v tvaru $y_3(x) = A e^{-x}$. Dosazení do $y'' - 3y' + 2y = b_3(x)$ dává

$$A e^{-x} + 3A e^{-x} + 2A e^{-x} = 6A e^{-x} = 6e^{-x},$$

odkud plyne $A = 1$, a tedy $y_3(x) = e^{-x}$.

Obecné řešení rovnice je proto $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 2 - x e^x + e^{-x}$.

□

Obě metody vedou ke stejnému výsledku: konstantě $k_1 - 1 \in \mathbb{R}$ v metodě variace konstant odpovídá konstanta c_1 v metodě neurčitých koeficientů. Metoda variace konstant je však bývá obvykle značně pracnější. Proto je vhodnější užít metodu neurčitých koeficientů, pokud je možné ji použít.

PŘÍKLAD 2.9 Určete obecné řešení rovnice $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$.

Řešení: Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$ má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 3$, řešení rovnice bez pravé strany jsou $u_1(x) = e^{3x}$, $u_2(x) = x e^{3x}$.

Partikulární řešení určíme metodou neurčitých koeficientů. Pravá strana $b(x) = 2e^{3x}$ odpovídá $\lambda = 3$, což je dvojnásobný kořen. Partikulární řešení proto budeme hledat ve tvaru $y_p(x) = A x^2 e^{3x}$. Dosazením do zadané rovnice dostáváme $L(y_p) = 2A e^{3x} = 2e^{3x}$, odkud plyne $A = 1$. Dostáváme tak obecné řešení

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + x^2 e^{3x}.$$

□

PŘÍKLAD 2.10 Určete obecné řešení rovnice $y'' + 4y = 8e^{2x} + 3 \cos x + 4 \sin(2x)$.

Řešení: Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$ má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, řešení rovnice bez pravé strany jsou $u_1(x) = \cos(2x)$, $u_2(x) = \sin(2x)$.

Pravou stranu rozložíme na tři části a řešíme metodou neurčitých koeficientů.

Pro $b_1(x) = 8e^{2x}$, $\lambda = 2$ není kořenem $P(\lambda)$, proto řešení hledáme ve stejném tvaru $y_1(x) = A e^{2x}$. Dosazením do rovnice $y'' + 4y = b_1(x)$ vyjde $A = 1$, tj. $y_1(x) = e^{2x}$.

Pro $b_2(x) = 3 \cos x$, $\lambda = \pm i$ není kořenem $P(\lambda)$. Řešení proto hledáme ve tvaru $y_2(x) = A \cos x + B \sin x$. Dosazením do rovnice $y'' + 4y = b_2(x)$ dostáváme $A = 1$, $B = 0$, tj. $y_2(x) = \cos x$.

Funkci $b_3(x) = 4 \sin(2x)$ odpovídá $\lambda = \pm 2i$, což jsou jednoduché kořeny $P(\lambda)$. Řešení proto budeme hledat ve tvaru $y_3(x) = A x \cos(2x) + B x \sin(2x)$. Dosazením do rovnice $y'' + 4y = b_3(x)$ získáme $A = -1$, $B = 0$, tj. $y_3(x) = -x \cos(2x)$. Řešení rovnice tedy je

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + e^{2x} + \cos x - x \cos(2x).$$

□

PŘÍKLAD 2.11 Určete obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} + 8 \cos x + 2e^{2x} \sin x$.

Řešení: Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, řešení jsou proto $u_1(x) = e^{2x} \cos x$, $u_2(x) = e^{2x} \sin x$.

Partikulární řešení hledáme metodou neurčitých koeficientů. Pravou stranu rozložíme do tří částí.

Pro $b_1(x) = e^{2x}$, $\lambda = 2$ není kořenem $P(\lambda)$ a řešení hledáme ve tvaru $y_1(x) = A e^{2x}$. Dosazením y_1 do rovnice $y'' - 4y' + 5y = b_1(x)$ vyjde $A = 1$, tj. $y_1(x) = e^{2x}$.

Pro $b_2(x) = 8 \cos x$, $\lambda = \pm i$ není kořenem $P(\lambda)$. Řešení proto hledáme ve tvaru $y_2(x) = A \cos x + B \sin x$. Dosazením y_2 do $y'' - 4y' + 5y = b_2(x)$ dává $A = 1$, $B = -1$ tj. $y_2(x) = \cos x - \sin x$.

V případě $b_3(x) = 2e^{2x} \sin x$, $\lambda = 2 \pm i$ jsou jednoduché kořeny $P(\lambda)$. Řešení proto musíme hledat ve tvaru $y_3(x) = A x e^{2x} \cos x + B x e^{2x} \sin x$. Dosazením y_3 do rovnice $y'' - 4y' + 5y = b_3(x)$ po delším výpočtu získáme $A = -1$, $B = 0$, tedy $y_3(x) = -x e^{2x} \cos x$. Obecné řešení rovnice je proto

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos(2x) + c_2 e^{2x} \sin(2x) + e^{2x} + \cos x - \sin x - x e^{2x} \cos x.$$

□

Eulerova rovnice

Uvedeme ještě typ lineárních rovnic s nekonzstantními koeficienty, který dovedeme řešit. Je to Eulerova rovnice, ve které koeficientem u k -té derivace $y^{(k)}$ je násobek x^k :

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = b(x).$$

PŘÍKLAD 2.12 Určete řešení lineární Eulerovy rovnice druhého řádu bez pravé strany

$$x^2 y'' - 6x y' + 6y = 0.$$

Řešení: V tomto případě řešení hledáme ve tvaru mocniny $y(x) = x^\lambda$. Spočítejme derivace:

$$y(x) = x^\lambda, \quad y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1) x^{\lambda-2}.$$

Dosazením do rovnice dostáváme

$$x^2 \lambda(\lambda-1) x^{\lambda-2} - 6x \lambda x^{\lambda-1} + 6x^\lambda = 0.$$

Po vydělení x^λ dostáváme kvadratickou rovnici pro exponent λ

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$

která má dva kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 6$. Tyto kořeny dávají dvě řešení $u_1(x) = x^1 = x$, $u_2(x) = x^6$. Obecné řešení rovnice proto je

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^6, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tímto způsobem lze rovnici vyřešit v případě, kdy charakteristická rovnice má dva různé reálné kořeny λ_i . □

Eulerova rovnice n -tého řádu

Označme

$$L(y) = x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y \quad (2.16)$$

a hledejme řešení rovnice $L(y) = 0$ ve tvaru $u(x) = x^\lambda$. Spočítejme derivace

$$u'(x) = \lambda x^{\lambda-1}, \quad u''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}, \quad \dots, \quad u^{(k)}(x) = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-k+1)x^{\lambda-k}$$

a dosadíme je do rovnice. Dostáváme rovnici $P(\lambda)x^\lambda = 0$, kde

$$P(\lambda) = \lambda \dots (\lambda-n+1) + a_{n-1} \lambda \dots (\lambda-n+2) + \dots + a_2 \lambda(\lambda-1) + a_1 \lambda + a_0 \quad (2.17)$$

je **charakteristický polynom** stupně n . Zřejmě pro nezáporný kořen λ polynomu $P(\lambda)$ je $u(x) = x^\lambda$ řešením rovnice $L(y) = 0$ na celém \mathbb{R} . Pro záporný kořen λ je rovnice splněna pouze na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Pokud tedy $P(\lambda)$ má jen jednoduché reálné kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, rovnice $L(y) = 0$ má obecné řešení

$$y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2} + \dots + c_n x^{\lambda_n}.$$

Řešení Eulerovy rovnice substitucí

Abychom dostali všechna řešení i v případech, kdy charakteristický polynom má násobné nebo komplexně sdružené kořeny, využijeme skutečnosti, že transformací $x = e^t$ Eulerova rovnice přejde na rovnici s konstantními koeficienty.

Uvažujme rovnici

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = b(x). \quad (2.18)$$

Pro $x > 0$ použijeme substituci $x = e^t$. Inverzní zobrazení je $t = \ln x$, při kterém se $x \in (0, \infty)$ zobrazí na $t \in (-\infty, \infty)$. Neznámou $y(x)$ převedeme na $z(t) = y(e^t)$. Spočítejme derivace $y(x) = z(\ln x)$, po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} x y'(x) &= z'(\ln x), \\ x^2 y''(x) &= z''(\ln x) - z'(\ln x), \\ x^3 y^{(3)}(x) &= z^{(3)}(\ln x) - 3 z''(\ln x) + 2 z'(\ln x), \\ x^4 y^{(4)}(x) &= z^{(4)}(\ln x) - 6 z^{(3)}(\ln x) + 11 z''(\ln x) - 6 z'(\ln x), \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

Do Eulerovy rovnice (2.18) dosadíme spočítané derivace. Dostáváme tak rovnici s konstantními koeficienty pro neznámou $z(t)$ a novými konstantními koeficienty b_i

$$z^{(n)}(t) + b_{n-1} z^{(n-1)}(t) + \dots + b_2 z''(t) + b_1 z'(t) + b_0 z(t) = b(e^t), \quad (2.19)$$

přičemž lze ukázat, že charakteristický polynom této rovnice je stejný jako charakteristický polynom $P(\lambda)$ daný vztahem (2.17). Polynom stupně n má n kořenů počítáno s násobností. Kořeny charakteristického polynomu λ_i pak dávají řešení rovnice bez pravé strany

- (a) je-li λ_i reálný kořen, je řešením $e^{\lambda_i t}$, v proměnné x pak $u_i(x) = \exp(\lambda_i \ln|x|) = x^{\lambda_i}$,
- (b) je-li λ_i dvojnásobný kořen, druhým řešením je $t e^{\lambda_i t}$, kterému odpovídá $\ln|x| x^{\lambda_i}$,
- (c) jsou-li $\mu \pm i\nu$ komplexně sdružené kořeny, potom řešení $e^{\mu t} \cos(\nu t)$, $e^{\mu t} \sin(\nu t)$ dávají dvojici řešení $x^\mu \cos(\nu \ln|x|)$, $x^\mu \sin(\nu \ln|x|)$.

Pro výpočet partikulárního řešení lze využít metodu neurčitých koeficientů pro transformovanou rovnici pro $z(t)$ v proměnné t , přičemž t nahradíme $\ln|x|$, nebo použijeme metodu variace konstant aplikovanou přímo na rovnici v x .

Eulerova rovnice druhého řádu

Uveďme výsledky substituce pro rovnici druhého řádu

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0.$$

Príslušný charakteristický polynom je

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b = 0.$$

Mohou nastat 3 případy:

- (a) Polynom má dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2 . Potom

$$y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$$

je obecným řešením rovnice na celém \mathbb{R} , pokud kořeny λ_1 i λ_2 jsou nezáporné. V případě záporného λ_i jde o řešení pouze na intervalech $(-\infty, 0)$, nebo $(0, \infty)$.

(b) Polynom má dvojnásobný reálný kořen λ_0 , potom

$$y(x) = c_1 x^{\lambda_0} + c_2 x^{\lambda_0} \ln|x|$$

je obecné řešení na intervalech $(-\infty, 0)$, nebo $(0, \infty)$.

(c) Polynom má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = \mu \pm \mathbf{i} \nu$, potom

$$y(x) = c_1 x^{\mu} \cos(\nu \ln|x|) + c_2 x^{\mu} \sin(\nu \ln|x|)$$

je obecné řešení na intervalech $(-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$.

3. Soustavy rovnic prvního řádu (SODR1)

Soustavu m diferenciálních rovnic prvního řádu pro sloupcový vektor n neznámých funkcí $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$ lze obecně napsat po složkách nebo vektorově:

$$\begin{aligned} F_1(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) &= 0, \\ \vdots & \\ F_m(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) &= 0, \end{aligned} \quad \mathbf{F}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0,$$

kde $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_m) : G \subset \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ je daná vektorová funkce. O této soustavě však obecně nelze nic říci.

Vhodnější je tzv. **normální tvar** soustavy $m = n$ diferenciálních rovnic prvního řádu opět pro vektor n neznámých funkcí $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$ na intervalu I , kterou zapisujeme ve tvaru, ve kterém derivace neznámých tvoří levé strany rovnic. Soustavu doplníme stejným počtem počátečních podmínek:

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), & y_1(x_0) &= \gamma_1, \\ \vdots & & \vdots & \\ y'_n &= f_n(x, y_1, \dots, y_n), & y_n(x_0) &= \gamma_n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Tuto soustavu můžeme zapsat také ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\gamma}, \quad (3.2)$$

přičemž v rovnicích $\mathbf{f} \equiv (f_1, \dots, f_n)^T : G \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vystupuje vektorová funkce $n+1$ proměnných a v podmínkách jsou daná reálná $x_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, přičemž $\boldsymbol{\gamma} \equiv (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$.

Soustava rovnic s podmínkami zapsaná ve tvaru (3.1) nebo (3.2) tvoří tzv. počáteční (Cauchyovu) úlohu, pro kterou už lze vyslovit tvrzení o existenci a jednoznačnosti:

VĚTA 3.1 (CAUCHYOVA ÚLOHA - EXISTENCE A JEDNOZNAČNOST)

- (a) Nechť v okolí bodu $(x_0, \boldsymbol{\gamma}) \in I \times \mathbb{R}^n$ jsou funkce f_i spojitě, potom v okolí x_0 existuje řešení počáteční úlohy (3.1).
- (b) Nechť navíc v okolí bodu $(x_0, \boldsymbol{\gamma})$ jsou funkce f_i lispchitzovské v proměnných y_1, \dots, y_n , potom v okolí x_0 řešení $\mathbf{y}(x)$ počáteční úlohy (3.1) je jednoznačné.

Vztah ODRn a SODR1

Jaký je vztah mezi ODR n -tého řádu a soustavou ODR prvního řádu?

VĚTA 3.2 Každou obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu na intervalu I lze převést na soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu na stejném intervalu.

Tvrzení dokážeme tím, že danou ODRn převedeme na SODR1. Uvažujme obyčejnou diferenciální rovnici na intervalu I v normálním tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Za nové neznámé $\mathbf{y}(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ soustavy rovnic prvního řádu vezmeme nultou až $(n-1)$ derivaci neznámé funkce y v rovnici n -tého řádu takto:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Vztah mezi jednotlivými derivacemi dává prvních $n-1$ rovnic

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad y_3' = y_4, \quad \dots, \quad y_{n-1}' = y_n, \quad (3.3)$$

poslední rovnici dostaneme tím, že jednotlivé derivace $y^{(k)}$ nahradíme neznámou y_{k+1} :

$$y_n' = f(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n).$$

Tím jsme získali soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

V případě rovnice zapsané v obecném tvaru $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, $n-1$ rovnic (3.3) doplníme rovnicí $F(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, y_n') = 0$.

Počáteční podmínky ODRn

$$y(x_0) = \gamma_0, \quad y'(x_0) = \gamma_1, \quad y''(x_0) = \gamma_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1},$$

přítom přejdou na počáteční podmínky soustavy n obyčejných diferenciálních rovnic:

$$y_1(x_0) = \gamma_0, \quad y_2(x_0) = \gamma_1, \quad y_3(x_0) = \gamma_2, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = \gamma_{n-1}.$$

Většina metod numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic vyššího řádu využívá toto převedení rovnice na soustavu rovnic prvního řádu. Převod soustavy n rovnic prvního řádu na jednu rovnici řádu n obecně není možný. Jen soustavu lineárních rovnic s konstantními koeficienty je možné převést na rovnici n -tého řádu, jak si ukážeme v dalším.

Soustava lineárních rovnic prvního řádu (SLODR1)

Soustavu rovnic (3.2) nazveme lineární, pokud jednotlivé funkce $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ jsou lineární v proměnných y_1, \dots, y_n . Soustavu tak zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n + b_1, \\ y_2' &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n + b_2, \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n + b_n, \end{aligned} \quad (3.4)$$

kde $a_{ij}(x)$ jsou funkce zvané *koeficienty*, $b_i(x)$ *pravé strany* soustavy rovnic. Soustavu rovnic na intervalu I doplníme počátečními podmínkami v bodě $x_0 \in I$:

$$y_1(x_0) = \gamma_1, \quad y_2(x_0) = \gamma_2, \quad \dots \quad y_n(x_0) = \gamma_n. \quad (3.5)$$

Soustavu s počátečními podmínkami přehledně zapisujeme v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}(x_0) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Označíme-li matici koeficientů \mathbf{A} , vektor neznámých \mathbf{y} a vektor pravých stran $\boldsymbol{\gamma}$, soustavu lineárních rovnic prvního řádu lze přehledně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\gamma}. \quad (3.7)$$

Protože $f_i(x, y_1, \dots, y_n) = a_{i1}(x)y_1 + \dots + a_{in}(x)y_n + b_i(x)$ a parciální derivace $\partial f_i / \partial y_j(x)$ jsou $a_{ij}(x)$, věta o existenci a jednoznačnosti řešení pro soustavu lineárních rovnic dává:

VĚTA 3.3 Nechť $a_{ij}(x), b_i(x)$ jsou funkce spojité na intervalu I . Potom soustava lineárních rovnic (3.4) s podmínkami (3.5) má právě jedno řešení $\mathbf{y}(x)$ na celém I .

Struktura řešení

Podobně jako v případě rovnice n -tého řádu snadno zjistíme, že rozdíl dvou libovolných řešení rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ je řešením rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Také řešení rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ jsou uzavřená vzhledem k operacím sčítání a násobení konstantou. Protože pro každé počáteční podmínky $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, speciálními volbami $\boldsymbol{\gamma}_1 = (1, 0, \dots, 0, 0)^T, \dots, \boldsymbol{\gamma}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$ získáme n nezávislých řešení $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. Obecné řešení pak lze zapsat ve tvaru:

VĚTA 3.4 Nechť $a_{ij}(x), b_i(x)$ jsou funkce spojité na intervalu I .

Obecné řešení soustavy lineárních rovnic (3.4) lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{u}_1(x) + c_2 \mathbf{u}_2(x) + \dots + c_n \mathbf{u}_n(x) + \mathbf{y}_p(x), \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

kde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ je n nezávislých řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, $\mathbf{y}_p(x)$ je libovolné řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$. Řešení $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{in})^T, i = 1, \dots, n$ tvoří matici funkcí

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

zvanou **fundamentální řešení**. Matice funkcí \mathbf{U} je regulární pro všechna $x \in I$. Obecné řešení tak lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{U}(x) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{y}_p(x), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T.$$

Grafem řešení $\mathbf{y}(x)$ na intervalu I je křivka $K = \{(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}, x \in I\}$ v prostoru $I \times \mathbb{R}^n$ spojitých vektorových funkcí na intervalu I .

Množina řešení rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ tak tvoří **lineární podprostor** prostoru spojitých vektorových funkcí na intervalu I a množina řešení soustavy rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ je **lineární podmnožina** („posunutý“ podprostor) ve stejném prostoru funkcí.

Soustava lineárních rovnic s konstantními koeficienty

Pro určení řešení soustavy lineárních rovnic potřebujeme spočítat fundamentální řešení \mathbf{U} , tj. n nezávislých řešení $\mathbf{u}_1(x), \dots, \mathbf{u}_n(x)$ rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ a tzv. partikulární řešení $\mathbf{y}_p(x)$ splňující rovnici $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$.

Soustavu n rovnic s konstantními koeficienty s neznámými funkcemi y_1, \dots, y_n lze převést na jednu rovnici n -tého řádu s jednou neznámou funkcí eliminováním ostatních proměnných.

Vhodnější bývá řešit soustavu lineárních rovnic přímo. Fundamentální řešení \mathbf{U} , tj. n -tici nezávislých řešení $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, lze spočítat Eulerovou metodou vlastních čísel a vlastních vektorů. Partikulární řešení \mathbf{y}_p možno potom dopočítat metodou

variance konstant a pro některé typy pravé strany metodou neurčitých koeficientů.

Řešení počáteční úlohy získáme tak, že obecné řešení s n konstantami c_1, \dots, c_n dosadíme do počátečních podmínek $y_i(x_0) = \gamma_i$. Dostaneme soustavu lineárních rovnic $\mathbf{u}_1(x_0)c_1 + \dots + \mathbf{u}_n(x_0)c_n = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{y}_p(x_0)$ pro konstanty c_i . Matice soustavy je fundamentální řešení \mathbf{U} v bodě x_0 , což je matice regulární, proto soustava má právě jedno řešení. Počáteční úloha má tak právě jedno řešení pro každé γ_i .

Eliminační metoda

Podstatou této metody je převedení soustavy rovnic na jedinou rovnici nejvýše n -tého řádu postupným vylučováním jednotlivých neznámých funkcí. Po vyřešení této rovnice nutno dopočítat ostatní neznámé funkce. Ukažme si to na příkladu dvou rovnic. Metodu lze použít i pro více rovnic, výpočet je však složitější. V některých případech, kdy neznámé v rovnicích jsou „oddělené“, například $y'_1 = a_{11}y_1 + b_1(x)$, $y'_2 = a_{22}y_2 + b_2(x)$, soustavu nelze převést na rovnici druhého řádu, obě rovnice prvního řádu však lze řešit odděleně.

PŘÍKLAD 3.5 Určete obecné řešení soustavy

$$y'_1(x) = 2y_1(x) + 3y_2(x) - 5e^{3x}, \quad (1)$$

$$y'_2(x) = y_1(x) + 4y_2(x) - 3e^{3x}. \quad (2)$$

a řešení splňující počáteční podmínky $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = -1$.

Řešení: Za funkci, kterou budeme eliminovat, zvolíme funkci $y_2(x)$. Z rovnic na pravé straně vyloučíme y_2 : od rovnice (1) násobené 4 odečteme rovnici (2) násobenou 3, dostaneme tak rovnici $4y'_1 - 3y'_2 = 5y_1 - 11e^{3x}$. Odtud vyjádříme y'_2 :

$$y'_2 = \frac{1}{3}(4y'_1 - 5y_1 + 11e^{3x}). \quad (3.9)$$

První rovnici zderivujeme $y''_1 = 2y'_1 + 3y'_2 - 15e^{3x}$, z rovnosti (3.9) dosadíme za y'_2 a neznámé dáme na levou stranu

$$y''_1 - 6y'_1 + 5y_1 = -4e^{3x}. \quad (3.10)$$

Dostali jsme rovnici druhého řádu pro neznámou y_1 . Její charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$ má dva reálné kořeny 1, 5, které dávají řešení $u_1(x) = e^x$, $u_2(x) = e^{5x}$. Pravé straně $b(x) = -4e^{3x}$ odpovídá $\lambda = 3$, což není kořen $P(\lambda)$. Partikulární řešení proto hledáme metodou neurčitých koeficientů ve tvaru $y_p(x) = Ae^{3x}$.

Dosazení do rovnice (3.10) dává $9Ae^{3x} - 18Ae^{3x} + 5Ae^{3x} = -4Ae^{3x} = -4e^{3x}$, odkud plyne $A = 1$. Dostali jsme první složku řešení

$$y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + e^{3x}.$$

Zbývá dopočítat druhou složku řešení $y_2(x)$. Z rovnice (1) plyne $y_2 = \frac{1}{3}(y'_1 - 2y_1 + 5e^{3x})$. Dosazením za y_1 dostáváme

$$y_2(x) = \frac{1}{3}[c_1 e^x + 5c_2 e^{5x} + 3e^{3x} - 2c_1 e^x - 2c_2 e^{5x} - 2e^{3x} + 5e^{3x}] = -\frac{1}{3}c_1 e^x + c_2 e^{5x} + 2e^{3x}.$$

Obecné řešení $\mathbf{y}(x)$ můžeme zapsat také ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{y}(x) \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Obecné řešení dosadíme do počátečních podmínek. Soustava rovnic $c_1 + c_2 + 1 = 2$, $-\frac{1}{3}c_1 + c_2 + 2 = -1$ dává $c_1 = 3$, $c_2 = -2$, a tím i řešení počáteční úlohy

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^x - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x}, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} y_1(x) &= 3e^{3x} - 2e^{5x} + e^{3x}, \\ y_2(x) &= -e^{3x} - 2e^{5x} + 2e^{3x}. \end{aligned} \quad \square$$

Druhou možností je eliminovat neznámou $y_1(x)$. Kombinace rovnic $1 \cdot (1) - 2 \cdot (2)$ dává $y_1' - 2y_2' = -5y_2 + e^{3x}$, odkud plyne $y_1' = 2y_2' - 5y_2 + e^{3x}$. Do druhé zderivované rovnice $y_2'' = y_1' + 4y_2' - 9e^{3x}$ dosadíme za y_1' a po úpravě dostáváme rovnici druhého řádu

$$y_2'' - 6y_2' + 5y_2 = -8e^{3x},$$

se stejným charakteristickým polynomem $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$. Obvyklým způsobem určíme řešení $y_2(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + 2e^{3x}$. Druhou neznámou $y_1(x)$ dopočítáme z rovnice (2): $y_1(x) = y_2'(x) - 4y_2(x) + 3e^{3x} = -3c_1 e^x + c_2 e^{5x} + e^{3x}$. Dostali jsme stejný výsledek

$$\mathbf{y}(x) \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (x) = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x},$$

jen s jinou konstantou c_1 , stejné řešení dostaneme, zvolíme-li $-\frac{1}{3}c_1$ místo c_1 .

Dosazením do počátečních podmínek dostáváme soustavu rovnic $-3c_1 + c_2 + 1 = 2$, $c_1 + c_2 + 2 = -1$, jejíž řešení $c_1 = -1$, $c_2 = -2$ dává stejné řešení počáteční úlohy. \square

POZNÁMKA 3.6 Pro zjednodušení označení se často neznámé funkce označují $y(x), z(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= a_{11}y(x) + a_{12}z(x) + b_1(x), \\ z'(x) &= a_{21}y(x) + a_{22}z(x) + b_2(x). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Eulerova metoda výpočtu fundamentálního řešení

Zapišme soustavu rovnic bez pravé strany v maticovém tvaru: $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ a řešení rovnice hledejme ve tvaru $\mathbf{y}(x) = \mathbf{v}e^{\lambda x}$, kde \mathbf{v} je sloupcový vektor konstant. Derivaci $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{v}\lambda e^{\lambda x}$ dosadíme do rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Dostáváme

$$\mathbf{v}\lambda e^{\lambda x} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\lambda x}.$$

Protože $e^{\lambda x} \neq 0$, dostáváme rovnici $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, tj. $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, kde \mathbf{E} je jednotková matice. Je to soustava lineárních rovnic bez pravé strany, která má vždy nulové řešení. Pokud matice soustavy je regulární, je to jediné řešení. Je-li matice soustavy singulární, existuje nenulové řešení vektor \mathbf{v} a vektorová funkce $\mathbf{u}(x) = \mathbf{v}e^{\lambda x}$ je řešením soustavy diferenciálních rovnic.

Hledáme proto čísla λ , pro která existuje nenulové řešení \mathbf{v} soustavy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, což je tzv. **úloha o vlastních číslech matice**. Čísla λ_i , pro která existuje nenulový vektor řešení, se nazývají **vlastní čísla** a příslušné nenulové \mathbf{v}_i **vlastní vektory**.

Nenulové řešení soustavy rovnic existuje, pokud příslušná matice soustavy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ je singulární, tj. její determinant $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ je nulový. Výraz $P(\lambda) = (-1)^n \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ je polynom stupně n v proměnné λ , tzv. **charakteristický polynom**. Pokud polynom $P(\lambda)$ má n různých, tj. jednoduchých kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ s příslušnými nenulovými vlastními vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, potom funkce

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 x}, \quad \dots, \quad \mathbf{u}_n(x) = \mathbf{v}_n e^{\lambda_n x}$$

jsou nezávislé a tvoří fundamentální řešení \mathbf{U} soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

Soustava dvou rovnic

Budeme řešit soustavu dvou lineárních rovnic s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned}y_1'(x) &= a_{11} y_1(x) + a_{12} y_2(x) + b_1(x), \\y_2'(x) &= a_{21} y_1(x) + a_{22} y_2(x) + b_2(x).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Výpočet fundamentálního řešení \mathbf{U} provedeme ve třech krocích:

(1) Určíme polynom $P(\lambda) = (-1)^n \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$. V případě $n = 2$ je polynom $P(\lambda)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Označíme-li součet prvků na hlavní diagonále tzv. **stopu** (trace) matice $\text{Tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$, charakteristický polynom v případě $n = 2$ má tvar

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}).$$

(2) Určíme kořeny $P(\lambda)$. Zde mohou nastat tři různé situace:

(2A) **Dva různé reálné kořeny** λ_1, λ_2 . Pro reálný kořen λ_1 hledáme nenulové řešení soustavy lineárních rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Napišeme si matici soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Pokud jsme správně počítali, zjistíme, že řádky jsou závislé a jeden z nich můžeme vynechat. Zbývající řádek (a, b) přepíšeme na rovnici pro $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2)^T$. Rovnice $a v_1 + b v_2 = 0$ má nekonečně mnoho řešení, která se navzájem liší jen násobkem. Zvolíme jedno nenulové řešení — dle možnosti s malými celými čísly. Získáme tím vlastní vektor \mathbf{v}_1 . Stejným způsobem určíme vektor \mathbf{v}_2 jako řešení soustavy $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Druhý a třetí případ komplexně sdružených a násobných kořenů probereme později.

(3) Napišeme řešení $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x}$, $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 x}$, případně obecné řešení soustavy.

PŘÍKLAD 3.7 Určete fundamentální řešení soustavy z příkladu 3.5 Eulerovou metodou

$$\begin{aligned}y_1'(x) &= 2 y_1(x) + 3 y_2(x), \\y_2'(x) &= y_1(x) + 4 y_2(x).\end{aligned}$$

Řešení: Matice soustavy je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Spočítáme její charakteristický polynom. Stopa matice je $\text{Tr}(\mathbf{A}) = 2 + 4 = 6$, determinant $\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$, proto polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$, jeho dva kořeny jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 5$.

Pro jednotlivá λ určíme příslušné vlastní vektory, závislý řádek vypustíme:

$$\lambda_1 = 1 : \quad \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příslušná rovnice pro vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2)$ je $1 v_1 + 3 v_2 = 0$. Zvolíme řešení $v_1 = 3$, $v_2 = -1$, což dává $\mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^x$. Dále pro druhý kořen

$$\lambda_2 = 5 : \quad \mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příslušná rovnice pro vlastní vektor \mathbf{v}_2 je $v_1 - v_2 = 0$. Zvolíme řešení $v_1 = 1, v_2 = 1$, což dává $\mathbf{u}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}$.

Napišeme fundamentální řešení a obecné řešení soustavy

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 3e^x & 1e^{5x} \\ -1e^x & 1e^{5x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}. \quad \square$$

(2B) Komplexně sdružené kořeny. Podobně jako v případě rovnice vyššího řádu spočítáme dvojici komplexně sdružených řešení $\mathbf{y}_1(x)$, $\mathbf{y}_2(x)$ a jejich kombinacemi získáme reálné fundamentální řešení $\mathbf{u}_1(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_1(x) + \mathbf{y}_2(x))$, $\mathbf{u}_2(x) = \frac{1}{2i}(\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_2(x))$.

PŘÍKLAD 3.8 Eulerovou metodou určete fundamentální řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) - 2y_2(x), \\ y_2'(x) &= 5y_1(x) + 3y_2(x). \end{aligned}$$

Řešení: Matice soustavy je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Spočítáme její charakteristický polynom. Stopa matice je $\text{Tr}(\mathbf{A}) = 1 + 3 = 4$, determinant $\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 13$, proto polynom je $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$. Protože diskriminant $D = 16 - 52 = -36$, polynom má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$.

Určíme vlastní vektor příslušný kořenu $\lambda_1 = 2 + 3i$. Ukáže se, že druhý řádek vynásobený $1 + 3i$ je (-5) -násobek prvního řádku a můžeme ho vynechat:

$$\lambda = 2 + 3i : \quad \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 - 3i & -2 \\ 5 & 1 - 3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 - 3i & -2 \\ 5 + 15i & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 + 3i & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příslušná rovnice pro vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2)$ je $(1 + 3i)v_1 + 2v_2 = 0$. Zvolíme řešení $v_1 = 2, v_2 = -1 - 3i$, což dává

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - 3i \end{pmatrix} e^{(2+3i)x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - 3i \end{pmatrix} e^{2x} (\cos(3x) + i \sin(3x)).$$

Komplexně sdružený kořen $\lambda_2 = 2 - 3i$ dává ihned komplexně sdružené řešení

$$\mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + 3i \end{pmatrix} e^{(2-3i)x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + 3i \end{pmatrix} e^{2x} (\cos(3x) - i \sin(3x)).$$

Abychom získali nezávislá reálná řešení, provedeme kombinace $\mathbf{u}_1(x) = \frac{1}{2}[\mathbf{y}_1(x) + \mathbf{y}_2(x)]$, $\mathbf{u}_2(x) = \frac{1}{2i}[\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_2(x)]$, což je vlastně reálná a imaginární část řešení $\mathbf{y}_1(x)$:

$$\mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \cos(3x) \\ -\cos(3x) + 3 \sin(3x) \end{pmatrix} e^{2x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \begin{pmatrix} 2 \sin(3x) \\ -\sin(3x) - 3 \cos(3x) \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Obecné řešení soustavy je tedy

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \cos(3x) \\ -\cos(3x) + 3 \sin(3x) \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \sin(3x) \\ -\sin(3x) - 3 \cos(3x) \end{pmatrix} e^{2x}.$$

(2C) Dvojnásobný reálný kořen $\lambda_1 = \lambda_2$. Opět si napíšeme matici $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$. Její hodnost může být nula nebo jedna. V prvním případě je to nulová matice. Příslušná soustava má dvě nezávislá řešení, dva nezávislé vlastní vektory, například $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, které dávají dvě nezávislá řešení

$$\mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda x}.$$

Ve druhém případě má matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ hodnotu jedna, proto rovnici $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ splňuje jen jeden nezávislý vektor \mathbf{v} , který dává první řešení $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v} e^{\lambda x}$.

Druhé řešení hledáme ve tvaru $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v} x e^{\lambda x} + \mathbf{w} e^{\lambda x}$. Spočítáme derivaci \mathbf{u}_2 a dosadíme do rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$:

$$\mathbf{v} e^{\lambda x} + \mathbf{v} \lambda x e^{\lambda x} + \mathbf{w} \lambda e^{\lambda x} = \mathbf{A} \mathbf{v} x e^{\lambda x} + \mathbf{A} \mathbf{w} e^{\lambda x}.$$

Porovnáním vektorů u členů $x e^{\lambda x}$, $e^{\lambda x}$ dostáváme dvě vektorové rovnice $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \lambda \mathbf{w} = \mathbf{A} \mathbf{w}$, které prepíšeme ve tvaru

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}.$$

Vektor \mathbf{v} splňuje první rovnici. Druhá rovnice má pravou stranu \mathbf{v} . Jejím řešením je vektor \mathbf{w} , který není určen jednoznačně, můžeme k němu přidat libovolný násobek vektoru \mathbf{v} .

Fundamentální řešení v tomto případě jsou funkce

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v} e^{\lambda x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v} x e^{\lambda x} + \mathbf{w} e^{\lambda x},$$

kde \mathbf{v} je nenulové řešení soustavy lineárních rovnic $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, \mathbf{w} libovolné řešení soustavy lineárních rovnic $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

PŘÍKLAD 3.9 Eulerovou metodou určete obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) - 2y_2(x), \\ y_2'(x) &= 2y_1(x) + 5y_2(x). \end{aligned}$$

Řešení: Matice soustavy je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Spočítáme její charakteristický polynom. Stopa matice je $\text{Tr}(\mathbf{A}) = 1 + 5 = 6$, determinant $\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 9$, proto polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$ má dvojnásobný kořen 3.

Napišeme si matici soustavy $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \mathbf{0}$ pro $\lambda = 3$ a určíme nenulový vektor \mathbf{v} :

$$\lambda = 3 : \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

z rovnice $1v_1 + 1v_2 = 0$ zvolíme například $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vektor \mathbf{w} je určen soustavou $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Napišeme si příslušnou rozšířenou matici soustavy

$$\lambda = 3 : \quad \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

odkud z rovnice $w_1 + w_2 = -\frac{1}{2}$ zvolíme například $\mathbf{w} = (-\frac{1}{2}, 0)^T$. Získali jsme fundamentální řešení

$$\mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x e^{3x} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{3x} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ -x \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Obecné řešení soustavy je tedy

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3x} + c_2 \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ -x \end{pmatrix} e^{3x}, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} y_1(x) &= (c_1 + c_2(x - \frac{1}{2}))e^{3x}, \\ y_2(x) &= (-c_1 - c_2 x)e^{3x}. \end{aligned} \quad \square$$

Soustava tří a více rovnic

Uvažujme opět soustavu n -lineárních diferenciálních rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Řešení hledáme ve tvaru $\mathbf{y}(x) = \mathbf{v}e^{\lambda x}$, kde \mathbf{v} je sloupcový vektor konstant. Dosazením řešení do rovnice dostáváme opět soustavu lineárních rovnic, kterou přepíšeme do tvaru $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = 0$.

Soustava má nenulové řešení, pokud matice soustavy je singulární, tj. λ je kořenem charakteristického polynomu $P(\lambda) = (-1)^n \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$.

Charakteristický polynom

Jaký vypadá charakteristický polynom ve vyšší dimenzi? V případě $n = 3$ dostaneme

$$P(\lambda) = - \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \text{Tr}(\mathbf{A}) \lambda^2 + I_2(\mathbf{A}) \lambda - \det(\mathbf{A}),$$

kde $\text{Tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ je stopa matice a $\det(\mathbf{A})$ determinant matice \mathbf{A} . Výraz $I_2(\mathbf{A})$ je tzv. **druhý invariant** matice \mathbf{A} , je to součet hlavních subdeterminantů řádu 2,

$$I_2(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Hlavní subdeterminanty jsou ty subdeterminanty, které jsou symetrické vzhledem ke hlavní diagonále. Podle této definice stopa matice je součet prvních hlavních subdeterminantů řádu jedna, tedy $\text{Tr}(\mathbf{A}) = I_1(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Také determinant matice je jediný subdeterminant řádu tři, tj. $\det(\mathbf{A}) = I_3(\mathbf{A})$. Můžeme proto psát

$$P(\lambda) = \lambda^3 - I_1(\mathbf{A}) \lambda^2 + I_2(\mathbf{A}) \lambda - I_3(\mathbf{A}).$$

Součet hlavních subdeterminantů řádu k matice \mathbf{A} , $k = 1, 2, \dots, n$ se nazývá **k -tý invariant** matice \mathbf{A} , označme ho symbolem $I_k(\mathbf{A})$. Pomocí tohoto označení můžeme charakteristický polynom $P(\lambda) = (-1)^4 \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ matice čtvrtého řádu zapsat ve tvaru

$$P(\lambda) = \lambda^4 - I_1(\mathbf{A}) \lambda^3 + I_2(\mathbf{A}) \lambda^2 - I_3(\mathbf{A}) \lambda + I_4(\mathbf{A})$$

a obecně charakteristický polynom $P(\lambda) = (-1)^n \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ matice řádu n

$$P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k I_k \lambda^{n-k} = \lambda^n - I_1(\mathbf{A}) \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} I_{n-1}(\mathbf{A}) \lambda + (-1)^n I_n(\mathbf{A}).$$

Eulerova metoda — jednoduché reálné kořeny

V tomto případě postupujeme jako u soustavy dvou rovnic: pro jednotlivé kořeny λ_i napíšeme příslušné matice soustav lineárních rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{v}_i = 0$, po řádkových úpravách zvolíme nenulové vektory \mathbf{v}_i a napíšeme řešení $\mathbf{u}_i(x)$.

PŘÍKLAD 3.10 Eulerovou metodou určete obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 3y_1(x) - y_2(x) + y_3(x), \\ y_2'(x) &= y_1(x) + y_2(x) + y_3(x), \\ y_3'(x) &= 4y_1(x) - y_2(x) + 4y_3(x). \end{aligned}$$

Řešení: Matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Spočítejme charakteristický polynom. Stopa $\text{Tr}(\mathbf{A}) = 3 + 1 + 4 = 8$, druhý invariant

$$I_2(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 8 + 5 = 17,$$

determinant matice \mathbf{A} podle Sarrusova pravidla $\det(\mathbf{A}) = 12 - 1 - 4 - 4 + 3 + 4 = 10$. Získali jsme charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10$. Obecně není snadné najít kořeny polynomu třetího a vyšších stupňů, v tomto případě si všimneme, že součet koeficientů $1 - 8 + 17 - 10 = 0$, proto $\lambda_1 = 1$ je jedním z kořenů. Dělením polynomů

$$(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

získáme kvadratický polynom, jehož kořeny $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ snadno dopočítáme vzorcem. Polynom $P(\lambda)$ má proto tři jednoduché kořeny $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$.

Pro jednotlivá λ_i napíšeme matici soustavy $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})$, řádkovými úpravami ji upravíme a určíme vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\mathbf{r}_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

odkud z rovnic $v_1 - v_2 = 0, v_1 + v_3 = 0$ plyne $v_2 = v_1, v_3 = -v_1$, zvolíme-li $v_1 = 1$, máme $\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1)^T$. Stejným způsobem určíme vektor \mathbf{v}_2 :

$$\lambda_2 = 2 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\mathbf{r}_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\mathbf{r}_3} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

odkud z rovnic $-2v_1 - v_2 = 0, 3v_1 + v_3 = 0$ plyne $v_2 = -2v_1, v_3 = -3v_1$, zvolíme-li $v_1 = 1$, máme $\mathbf{v}_2 = (1, -2, -3)^T$. Dále pro

$$\lambda_3 = 5 : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+\mathbf{r}_3} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 1/2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

odkud z rovnic $v_1 - v_2 = 0, 3v_1 - v_3 = 0$ plyne $v_2 = v_1, v_3 = 3v_1$, zvolíme-li $v_1 = 1$, máme $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 3)^T$. Obecné řešení soustavy je

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5x}.$$

Eulerova metoda — komplexně sdružené kořeny

Postup je stejný jako v případě dvou rovnic. Dvojice komplexně sdružených kořenů $\mu \pm i\nu$ určuje dvojici komplexně sdružených vektorů $\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}$ a tím také dvojici komplexně sdružených řešení $\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{v} e^{\mu x} (\cos(\nu x) + i \sin(\nu x)), \mathbf{y}_2(x) = \bar{\mathbf{v}} e^{\mu x} (\cos(\nu x) - i \sin(\nu x))$.

Obvyklé kombinace dávají reálnou a imaginární část: dvě reálná nezávislá řešení $\mathbf{u}_1(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_1(x) + \mathbf{y}_2(x)) \equiv \mathbf{Re}(\mathbf{y}_1(x)), \mathbf{u}_2(x) = \frac{1}{2i}(\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_2(x)) \equiv \mathbf{Im}(\mathbf{y}_1(x)).$

Eulerova metoda — násobné kořeny

V případě **dvojnásobného** reálného kořene λ_0 dvou rovnic jsme viděli, že tvar řešení závisí na hodnotě matice $\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}$. Lze dokázat, že pro soustavu n rovnic v případě hodnoty $h(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) = n - 2$ také existují dva nezávislé vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vyhovující soustavě $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, které dávají dvě řešení $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_0 x}$, $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_0 x}$.

V případě $h(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) = n - 1$ existuje pouze jeden nenulový vektor \mathbf{v} splňující $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, který dává řešení $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v} e^{\lambda_0 x}$. Stejně jako v případě dvou rovnic, druhým řešením je funkce $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v} x e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w} e^{\lambda_0 x}$, kde \mathbf{w} je libovolný vektor splňující $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$. O vektorech \mathbf{v}, \mathbf{w} říkáme, že tvoří tzv. **řetězec**.

Trojnásobný kořen λ_0 přináší situaci složitější. Hodnota matice $h(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})$ může být $n - 3, n - 2, n - 1$. V případě $h(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) = n - 3$ najdeme tři nezávislé vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, které dávají tři nezávislá řešení $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_0 x}$, $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_0 x}$, $\mathbf{u}_3(x) = \mathbf{v}_3 e^{\lambda_0 x}$.

Pokud $h(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) = n - 2$, rovnice $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ má nekonečně mnoho řešení \mathbf{v} , které tvoří dvojrozměrný prostor. Vyberme dva nezávislé vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, které tvoří bázi tohoto prostoru a mohou dávat dvě nezávislá řešení. Třetí řešení najdeme pomocí dvou vektorů tvořící řetězec \mathbf{v}, \mathbf{w} . Protože \mathbf{v} může být libovolná kombinace $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, budeme hledat c_1, c_2 , alespoň jedno nenulové, pro které soustava

$$(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{w} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2$$

má řešení \mathbf{w} . Těchto řešení je nekonečně mnoho, označme jedno z nich \mathbf{w}_1 a položme $\mathbf{v}_1 = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2$ pro nalezená c_1, c_2 . Konečně zvolme \mathbf{v}_2 jako libovolnou jinou kombinaci $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ nezávislou na \mathbf{v}_1 . Dostáváme tak trojici nezávislých řešení

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_0 x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_0 x}, \quad \mathbf{u}_3(x) = \mathbf{v}_1 x e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w}_1 e^{\lambda_0 x}.$$

Konečně v případě $h(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) = n - 1$ rovnice $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ má jen jedno nezávislé řešení \mathbf{v} . K němu najdeme další dva vektory \mathbf{w}, \mathbf{w} takové, že $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}$ tvoří řetězec, tj. splňují

$$(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}, \quad (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{w}. \quad (3.13)$$

Vedle $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v} e^{\lambda_0 x}$ je řešením $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v} x e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w} e^{\lambda_0 x}$ jako v případě dvojnásobného kořene. Ukažme, že třetím řešením je $\mathbf{u}_3(x) = \mathbf{v} \frac{1}{2} x^2 e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w} x e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w} e^{\lambda_0 x}$. Spočítejme derivaci řešení \mathbf{u}_3 a dosadíme do rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$:

$$\mathbf{v} \left(x e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 \frac{x^2}{2} e^{\lambda_0 x} \right) + \mathbf{w} (e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x}) + \mathbf{w} \lambda_0 e^{\lambda_0 x} = \mathbf{A} \left(\mathbf{v} \frac{x^2}{2} e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w} x e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w} e^{\lambda_0 x} \right).$$

Porovnáním koeficientů členů $\frac{1}{2} x^2 e^{\lambda_0 x}$ dostáváme $\lambda_0 \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v}$, koeficienty výrazu $x e^{\lambda_0 x}$ dávají $\mathbf{v} + \lambda_0 \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{w}$ a zbývající koeficienty $e^{\lambda_0 x}$ mají splňovat $\mathbf{w} + \lambda_0 \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{w}$. Všechny tři rovnosti platí díky tomu, že $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}$ splňují rovnice (3.11). Trojici nezávislých řešení tak tvoří funkce

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v} e^{\lambda_0 x}, \quad \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v} x e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w} e^{\lambda_0 x}, \quad \mathbf{u}_3(x) = \mathbf{v} \frac{1}{2} x^2 e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w} x e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w} e^{\lambda_0 x},$$

kde vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}$ tvoří řetězec, tj. splňují rovnice (3.11).

V případě **čtyřnásobného kořene** charakteristického polynomu $P(\lambda)$ je situace ještě rozmanitější. Hodnota matice $\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}$ může nabývat hodnoty od $n - 4$ po $n - 1$.

V prvním případě $h(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) = n - 4$ máme čtyři nezávislé vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4$ a tím čtyři nezávislá řešení $\mathbf{u}_i(x) = \mathbf{v}_i e^{\lambda_0 x}$.

Pokud $h(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) = n - 3$, dostaneme jen tři nezávislé vektory určené bází $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Musíme najít jeden řetězec $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1$ pro vhodnou kombinaci $\mathbf{v}_1 = \sum_i c_i \mathbf{e}_i$. Další nezávislé kombinace \mathbf{e}_i dávají $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ a tím čtveřici nezávislých řešení.

V případě $h(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) = n - 2$ máme jen dva nezávislé vektory určené bází $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Nyní mohou existovat dva řetězce $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1$ a $\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2$ nebo jeden řetězec délky tři $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1$ a zbývající vektor \mathbf{v}_2 . V obou případech dostaneme celkem čtyři nezávislá řešení.

V posledním případě $h(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) = n - 1$ existuje řetězec vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}$ délky čtyři, který dá čtveřici řešení $\mathbf{u}_1(x), \mathbf{u}_2(x), \mathbf{u}_3(x)$, čtvrté řešení je

$$\mathbf{u}_4(x) = \mathbf{v} \frac{x^3}{6} e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w} \frac{x^2}{2} e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w} x e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w} e^{\lambda_0 x}.$$

Metoda variace konstant

Uvažujme soustavu lineárních rovnic s konstantními koeficienty $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{b}$, kde obecně $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x)$. Známe-li fundamentální řešení, tj. n -tici nezávislých řešení $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$, můžeme obecné řešení \mathbf{y} spočítat metodou variace konstant. Řešení hledáme ve tvaru

$$\mathbf{y}(x) = C_1(x) \mathbf{u}_1(x) + \dots + C_n(x) \mathbf{u}_n(x). \quad (3.14)$$

Spočítejme derivaci \mathbf{y} a dosadíme do rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} C'_1(x) \mathbf{u}_1(x) + \dots + C'_n(x) \mathbf{u}_n(x) + C_1(x) \mathbf{u}'_1(x) + \dots + C_n(x) \mathbf{u}'_n(x) = \\ = \mathbf{A} C_1(x) \mathbf{u}_1(x) + \dots + \mathbf{A} C_n(x) \mathbf{u}_n(x) + \mathbf{b}(x). \end{aligned}$$

Protože \mathbf{u}_i jsou řešením rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$, platí $\mathbf{u}'_i = \mathbf{A} \mathbf{u}_i$ a rovnost se zjednoduší na

$$C'_1(x) \mathbf{u}_1(x) + \dots + C'_n(x) \mathbf{u}_n(x) = \mathbf{b}(x). \quad (3.15)$$

Je to soustava lineárních rovnic pro neznámé funkce $C'_1(x), \dots, C'_n(x)$. Matice soustavy je tvořená sloupcovými vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, což je regulární matice zvaná fundamentální řešení \mathbf{U} . Soustava rovnic má proto právě jedno řešení $C'_1(x), \dots, C'_n(x)$. Integrací

$$C_i(x) = \int C'_i(x) dx + k_i$$

získáme funkce $C_i(x)$ s konstantami k_i . Dosazení do (3.14) dává obecné řešení $\mathbf{y}(x)$.

Poznamenejme, že metodou variace konstant lze řešit i soustavy rovnic s nekonstantními koeficienty $a_{ij}(x)$ a libovolnou pravou stranu $\mathbf{b}(x)$, musíme však znát příslušná řešení $\mathbf{u}_1(x), \dots, \mathbf{u}_n(x)$ a umět spočítat vzniklé primitivní funkce.

Spočítejme metodou variace konstant řešení z příkladu 3.5.

PŘÍKLAD 3.11 Určete obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y'_1(x) &= 2y_1(x) + 3y_2(x) - 5e^{3x}, \\ y'_2(x) &= y_1(x) + 4y_2(x) - 3e^{3x}. \end{aligned}$$

Řešení: Z příkladu 3.7 už máme fundamentální řešení, tj. dvojici řešení $\mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^x$, $\mathbf{u}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}$. Obecné řešení hledáme ve tvaru

$$\mathbf{y}(x) = C_1(x) \mathbf{u}_1(x) + C_2(x) \mathbf{u}_2(x) = C_1(x) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x},$$

přičemž funkce $C_1(x), C_2(x)$ splňují soustavu $C_1'(x) \mathbf{u}_1(x) + C_2'(x) \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{b}(x)$, tj.

$$C_1'(x) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} = - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Úpravou rozšířené matice soustavy dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3e^x & e^{5x} & -5e^{3x} \\ -e^x & e^{5x} & -3e^{3x} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4e^x & 0 & -2e^{3x} \\ -e^x & e^{5x} & -3e^{3x} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} e^x & 0 & -\frac{1}{2}e^{3x} \\ 0 & e^{5x} & -\frac{7}{2}e^{3x} \end{array} \right),$$

odkud máme $C_1'(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$, $C_2'(x) = -\frac{7}{2}e^{-2x}$. Integrací dostáváme $C_1(x) = -\frac{1}{4}e^{2x} + k_1$, $C_2(x) = \frac{7}{4}e^{-2x} + k_2$. Obecné řešení je proto

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= \left(-\frac{1}{4}e^{2x} + k_1 \right) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + \left(\frac{7}{4}e^{-2x} + k_2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} = \\ &= k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x}. \end{aligned}$$

Metoda neurčitých koeficientů

Metoda vychází z předpokladu, že pro pravou stranu $\mathbf{b}(x)$ bude partikulární řešení stejného typu jen s neurčitými koeficienty, které se určí zkouškou.

(1) V nejjednodušším případě, kdy $\mathbf{b}(x) = \mathbf{d}e^{\lambda_0 x}$, přičemž $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ není mezi kořeny $P(\lambda)$, řešení hledáme ve tvaru $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{v}_p e^{\lambda_0 x}$, kde \mathbf{v}_p je vektor neurčitých koeficientů.

Protože $\mathbf{y}_p'(x) = \mathbf{v}_p \lambda_0 e^{\lambda_0 x} = \lambda_0 \mathbf{y}_p(x)$, po dosazení $\mathbf{y}_p(x)$ do rovnice $\mathbf{y}_p'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}_p(x) + \mathbf{b}(x)$ přepsané do tvaru $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{y}_p(x) = -\mathbf{b}(x)$ dostáváme soustavu lineárních rovnic pro neznámý vektor \mathbf{v}_p . Její rozšířená matice soustavy po vydělení $e^{\lambda_0 x}$ je $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E} | -\mathbf{d})$, v případě dvou rovnic a neurčitého vektoru $\mathbf{v}_p = (A, B)^T$ tedy dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} - \lambda_0 & a_{12} & -d_1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_0 & -d_2 \end{array} \right), \quad (3.16)$$

odkud řádkovými úpravami snadno určíme konstanty A, B .

PŘÍKLAD 3.12 Určete obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 2y_1(x) + 3y_2(x) - 5e^{3x}, \\ y_2'(x) &= y_1(x) + 4y_2(x) - 3e^{3x}. \end{aligned}$$

Řešení: Z Příkladu 3.7 už máme řešení rovnice bez pravé strany, $\mathbf{u}_1(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^x$, $\mathbf{u}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}$. Příslušný charakteristický polynom má kořeny $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$. Pravá strana je $\mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} e^{3x}$, což odpovídá $\lambda = 3$, který není mezi kořeny $P(\lambda)$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $\mathbf{y}_p(x) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{3x}$. Z rozšířené matice soustavy (3.16) řádkovými úpravami určíme konstanty A, B :

$$\lambda = 3, \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right),$$

odkud plyne $A = 1, B = 2$, což dává obecné řešení

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x}.$$

□

(2) Nechtě opět λ_0 není kořenem $P(\lambda)$. V případě pravé strany typu $\mathbf{b}(x) = \mathbf{d}(x) e^{\lambda_0 x}$, kde $\mathbf{d}(x)$ je vektor polynomů, partikulární řešení hledáme s vektorem neurčitých polynomů. Například v případě dvou rovnic pro $\mathbf{b}(x) = (x^2 + 2x, 2x + 1)^T e^{\lambda_0 x}$ partikulární řešení hledáme ve tvaru $\mathbf{y}_p(x) = (A_1 x^2 + B_1 x + C_1, A_2 x^2 + B_2 x + C_2)^T e^{\lambda_0 x}$, dosadíme do řešení soustavy rovnic a určíme neznámé koeficienty polynomů.

(3) Podobně v případech pravé strany $\mathbf{b}(x) = \mathbf{d}_1(x) e^{\mu x} \cos(\nu x) + \mathbf{d}_2(x) e^{\mu x} \sin(\nu x)$, kdy příslušné $\mu \pm \nu i$ nejsou kořeny $P(\lambda)$, řešení hledáme ve stejném tvaru

$$\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{v}_1 e^{\mu x} \cos(\nu x) + \mathbf{v}_2 e^{\mu x} \sin(\nu x)$$

s neurčitými vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Analogický postup lze použít v případě, kdy $\mathbf{b}(x) = \mathbf{d}(x) e^{\lambda_0 x}$, kde $\mathbf{d}(x)$ je vektor polynomů.

(4) Podívejme se nyní na složitější případ, kdy $\mathbf{b}(x) = \mathbf{d} e^{\lambda_0 x}$ a přitom λ_0 je jednoduchým kořenem polynomu $P(\lambda)$. Ukážeme, že mohou nastat dva případy: buď partikulární řešení najdeme ve tvaru $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{v} e^{\lambda_0 x}$ nebo budeme muset přidat x .

Uvažujme opět soustavu $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{d} e^{\lambda_0 x}$, přičemž $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ je jednoduchým kořenem $P(\lambda)$ a \mathbf{v}_0 je řešením $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) \mathbf{v}_0 = 0$. Zkusme nejprve hledat řešení ve stejném tvaru $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{v} e^{\lambda_0 x}$ jako v případě, kdy λ_0 nebylo kořenem $P(\lambda)$, např. (3.16). Dostáváme opět soustavu rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) \mathbf{y}_p(x) = -\mathbf{b}(x)$ s rozšířenou maticí soustavy $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E} | -\mathbf{d})$. V tomto případě však matice soustavy $\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}$ je singulární. Pokud náhodou rozšířená matice má stejnou hodnotu, existuje vektor \mathbf{v}_p a tím i řešení $\mathbf{y}_p(x)$.

Většinou však soustava $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) \mathbf{y}_p(x) = -\mathbf{b}(x)$ nemá řešení. Potom řešení musíme hledat ve tvaru $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{v}_p x e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w}_p e^{\lambda_0 x}$ s neurčitými vektory $\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p$. Spočítejme derivaci $\mathbf{y}'_p(x)$ a dosadíme do vektorové rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$

$$\mathbf{v}_p e^{\lambda_0 x} + \mathbf{v}_p \lambda_0 x e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w}_p \lambda_0 e^{\lambda_0 x} = \mathbf{A}(\mathbf{v}_p x e^{\lambda_0 x} + \mathbf{w}_p e^{\lambda_0 x}) + \mathbf{d} e^{\lambda_0 x}.$$

Porovnání koeficientů výrazů $x e^{\lambda_0 x}, e^{\lambda_0 x}$ vede na vektorové rovnice

$$(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) \mathbf{v}_p = 0, \quad (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) \mathbf{w}_p = \mathbf{v}_p - \mathbf{d}. \quad (3.17)$$

Obě mají singulární matici soustavy. Z první rovnice plyne, že \mathbf{v}_p je libovolný násobek vlastního vektoru \mathbf{v}_0 , tj. $\mathbf{v}_p = k \mathbf{v}_0$. Druhá rovnice má řešení \mathbf{w}_p pro takový násobek \mathbf{v}_0 , aby rozšířená matice soustavy $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E} | \mathbf{v} - \mathbf{d})$ byla také singulární. Potom existuje také vektor \mathbf{w} , zvolíme jeden a dostáváme hledané partikulární řešení.

PŘÍKLAD 3.13 Určete obecné řešení soustavy

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{y}(x) + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} e^x$$

v případě pravé strany (a) $d_1 = 1, d_2 = 1$, (b) $d_1 = 9, d_2 = 1$.

Řešení: Uvedená soustava má stejnou levou stranu jako v Příkladě 3.12, má však jinou pravou stranu $\mathbf{b}(x) = \mathbf{d} e^x$, které odpovídá $\lambda_0 = 1$, což je kořen $P(\lambda)$.

V případě (a) řešení hledáme ve tvaru $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{v} e^x$, kde $\mathbf{v} = (A, B)^T$. Příslušná rozšířená matice (3.16) soustavy rovnic má singulární matici soustavy

$$\lambda_0 = 1, \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

ale v tomto případě má nekonečně mnoho řešení, rovnici $A + 3B = -1$ vyhovuje například $A = 2, B = -1$, což dává obecné řešení

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^x.$$

V případě (b) zkusme také hledat řešení ve tvaru $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{v} e^x$, kde $\mathbf{v} = (A, B)^T$. Příslušná rozšířená matice (3.16) soustavy rovnic má opět singulární matici soustavy, tentokrát však řešení soustavy neexistuje:

$$\lambda_0 = 1, \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -9 \\ 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 8 \end{array} \right).$$

Proto musíme partikulární řešení hledat ve tvaru $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{v} x e^x + \mathbf{w} e^x$ s neurčitými vektory $\mathbf{v} = (A, B)^T$, $\mathbf{w} = (C, D)^T$. Podle první rovnice v (3.17) vektor \mathbf{v} je násobkem vlastního vektoru $\mathbf{v}_0 = (3, -1)^T$, tj. $A = 3k, B = -k$. Napišme rozšířenou matici druhé rovnice v (3.17) pro neurčitý vektor $\mathbf{w} = (C, D)^T$

$$\lambda_0 = 1, \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3k - 9 \\ 1 & 3 & -k - 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3k - 9 \\ 0 & 0 & -4k + 8 \end{array} \right).$$

Soustava má řešení, pokud $4k - 8 = 0$, neboli $k = 2$. Potom vektor $\mathbf{w} = (C, D)^T$ má splňovat rovnici $C + 3D = -3$, jedním z řešení je $C = 0, D = -1$, tj. $\mathbf{w} = (0, -1)^T$. Spočítali jsme obecné řešení soustavy

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + \begin{pmatrix} 6x \\ -2x - 1 \end{pmatrix} e^x. \quad \square$$

(5) Také v ostatních případech, kdy $\mathbf{b}(x) = \mathbf{d}_1(x) e^{\mu x} \cos(\nu x)$, $\mathbf{d}_2(x) e^{\mu x} \sin(\nu x)$ a navíc $\lambda = \mu \pm \nu$ jsou kořeny $P(\lambda)$, případně jsou vícenásobné kořeny $P(\lambda)$ řešení hledáme analogicky jako v případě LODRn, tj. řešení hledáme ve stejném tvaru jako $\mathbf{b}(x)$ s neurčitými vektorovými funkcemi, v případě k -násobných kořenů většinou nutno přidat x^k .

4. Existence a jednoznačnost řešení

V předchozích kapitolách jsme uvedli a využívali věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic, aniž bychom se zabývali jejich důkazem. Tento nedostatek nyní napravíme.

Jedná se o dva typy vět. První typ zaručuje pouze existenci řešení, tato věta se nazývá Peanova, druhý silnější typ zaručuje nejen existenci ale i jednoznačnost řešení počáteční úlohy, věta se nazývá Picardova. Moderní důkaz této věty je založen na Banachově principu kontrakce – Větě o pevném bodu kontraktivního zobrazení.

Ačkoliv případ rovnice prvního řádu je zahrnut v existenční větě pro rovnici vyššího řádu a také ve větě pro soustavu rovnic prvního řádu, pro jednoduchost začneme důkazem věty pro rovnici prvního řádu. Důkazy nebo jejich náznaky lze najít např. v [4], str. 95, 99. Banachovu větu lze najít také v [5].

Rovnice prvního řádu

Bud' G oblast v rovině \mathbb{R}^2 a (x_0, y_0) bod v oblasti G . Uvažujme počáteční úlohu pro rovnici prvního řádu

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (4.1)$$

kde $f(x, y)$ je daná funkce definovaná v oblasti G .

Připomeňme, že (tzv. klasickým) řešením úlohy (4.1) rozumíme funkci $y(x)$ definovanou na otevřeném intervalu $I = (a, b)$ obsahujícím bod x_0 , která má spojitou derivaci na I , tj. $y \in C^1(I)$, a která ve všech bodech intervalu I splňuje rovnost $y'(x) = f(x, y(x))$.

Existenci a jednoznačnost řešení úlohy lze vyšetřovat pomocí následujících dvou vět:

VĚTA 4.1 (PEANOVA VĚTA) Nechť funkce $f(x, y)$ definovaná v $G \subset \mathbb{R}^2$ je spojitá v okolí bodu $(x_0, y_0) \in G$. Potom úloha (4.1) má řešení $y(x)$ v okolí bodu x_0 .

Druhá věta je silnější, zaručuje navíc i jednoznačnost řešení:

VĚTA 4.2 (PICARDOVA VĚTA) Nechť funkce $f(x, y)$ definovaná na G je spojitá a navíc lipschitzovská v proměnné y v okolí bodu (x_0, y_0) .

Potom existuje okolí I bodu x_0 , na kterém existuje právě jedno řešení úlohy (4.1).

Důkazy obou vět spočívají v konstrukci posloupnosti přibližných řešení $y_n(x)$. O této posloupnosti (případně podposloupnosti) se dokáže, že konverguje a že její limita je řešením zkoumané úlohy.

Důkaz druhé věty provedeme pomocí známé věty z teorie metrických prostorů:

VĚTA 4.3 (BANACHOVA VĚTA O PEVNÉM BODU KONTRAKTIVNÍHO ZOBRAZENÍ)

Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor a \mathcal{T} zobrazení z P do P , které je kontraktivní, tj. splňuje Lipschitzovu podmínku s konstantou $c < 1$:

$$\rho(\mathcal{T}(y_1), \mathcal{T}(y_2)) \leq c \rho(y_1, y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in P.$$

Potom zobrazení \mathcal{T} má pevný bod, tj. existuje $y^* \in P$ takové, že $\mathcal{T}(y^*) = y^*$.

Navíc, pro každé $y_0 \in P$ posloupnost $\{y_n\}$ definovaná $y_{n+1} = \mathcal{T}(y_n)$ konverguje k y^* .

Důkaz Picardovy věty 4.2. Viz také [4] str. 95 a další prameny.

Důkaz spočívá ve volbě vhodného metrického prostoru P s metrikou ρ , zobrazení $\mathcal{T} : P \rightarrow P$ a ověření předpokladů uvedené Banachovy věty.

Nejprve úlohu přeformulujeme. Funkce $y(x)$ je řešením úlohy (4.1), právě když

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (4.2)$$

Skutečně, pro spojitou funkci $f(x, y)$ je uvedená primitivní funkce $y(x)$ spojitá a diferencovatelná. Derivací vztahu (4.2) podle proměnné x , která se v integrálu vyskytuje pouze v horní mezi, dostáváme $y'(x) = f(x, y(x))$. Navíc pro $x = x_0$ je integrál roven nule a počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$ je splněna.

Pravou stranu rovnosti (4.2) využijeme ke konstrukci zobrazení $\mathcal{T} : y \mapsto \mathcal{T}(y)$, kde

$$\mathcal{T}(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (4.3)$$

Z (4.2) plyne, že funkce y^* je řešením úlohy (4.1), právě když y^* je pevným bodem zobrazení \mathcal{T} , tj. platí $y^* = \mathcal{T}(y^*)$.

Existence jednoznačného pevného bodu zobrazení \mathcal{T} dokážeme pomocí výše uvedené Banachovy věty. Zvolíme metrický prostor P , metriku ρ a najdeme parametr $\delta > 0$, pro které zobrazení \mathcal{T} dané (4.3): (a) zobrazuje prostor P do P a (b) je kontraktivní.

Nechť $Q = \langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle$ je omezené obdélníkové okolí bodu (x_0, y_0) , které je celé obsaženo v G , definičním oboru funkce $f(x, y)$.

Předpokládáme, že funkce $f(x, y)$ je spojitá na kompaktní (tj. uzavřené a omezené) množině $Q \subset G$, proto je omezená na Q nějakou konstantou $M > 0$, tj. platí $|f(x, y)| \leq M$ pro $(x, y) \in Q$. Předpokládáme také, že funkce $f(x, y)$ je na množině Q lipschitzovská v proměnné y s nějakou konstantou $L > 0$.

Za metrický prostor (P, ρ) , ve kterém budeme hledat řešení, zvolíme prostor spojitých funkcí $y(x)$ na intervalu $I_\delta = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ s hodnotami v intervalu $\langle y_0 - b, y_0 + b \rangle$:

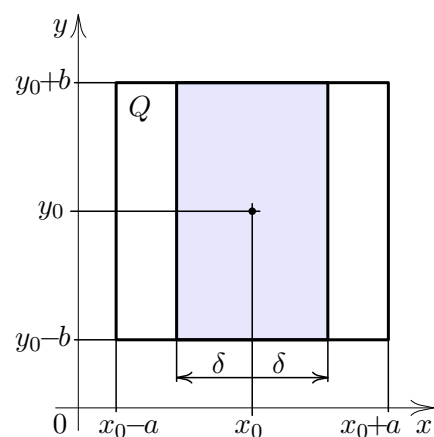
$$P = \{y : x \in I_\delta \rightarrow \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle\},$$

přičemž hodnotu parametru $\delta \in (0, a)$ určíme později. Na prostoru P uvažujeme obvyklou maximovou metriku

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{x \in I_\delta} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

Podle známého výsledku funkcionální analýzy metrický prostor (P, ρ) spojitých funkcí s maximovou metrikou je úplný.

(a) Protože funkce $f(x, y)$ je spojitá, pro spojitě $y(x)$ je složená funkce $f(x, y(x))$ také spojitá a její integrál existuje. Hodnota $\mathcal{T}(y)(x)$ je proto funkce spojitá na celém intervalu



Obr. 14: Metrický prostor P funkcí na okolí bodu (x_0, y_0) .

I_δ pro každé $\delta \leq a$. Nutno ještě zajistit, aby hodnoty funkce $\mathcal{T}(y)(x)$ ležely v intervalu $\langle y_0 - b, y_0 + b \rangle$. Protože absolutní hodnoty funkce $f(x, y)$ jsou omezené konstantou M , rozdíl $|\mathcal{T}(y)(x) - y_0|$ můžeme odhadnout jak pro $x < x_0$ tak pro $x > x_0$:

$$|\mathcal{T}(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y(t))| dt \right| \leq |x - x_0| M \leq \delta M.$$

Pokud $\delta \leq b/M$ potom pro $x \in I_\delta$ platí $|(\mathcal{T}(y))(x) - y_0| \leq b$, a tedy zobrazení \mathcal{T} zobrazuje metrický prostor P do sebe.

(b) Zobrazení \mathcal{T} je kontraktivní, pokud platí $\rho(\mathcal{T}(y_1), \mathcal{T}(y_2)) \leq c \rho(y_1, y_2)$ pro nějaké $0 < c < 1$ a všechna y_1, y_2 . Využijeme předpokladu, že funkce $f(x, y)$ je lipschitzovská v proměnné y na obdélníku Q , tj. že existuje konstanta $L > 0$ taková, že

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in Q. \quad (4.4)$$

Pro libovolné funkce $y_1(x), y_2(x) \in P$, $x \in I_\delta$ ($x \leq x_0$ nebo $x \geq x_0$) potom platí

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(y_1)(x) - \mathcal{T}(y_2)(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \right| \leq |x - x_0| \cdot L \cdot \max_{x \in I_\delta} |y_1(x) - y_2(x)|. \end{aligned}$$

Jestliže zvolíme $\delta \leq c/L$, potom pro každé $y_1, y_2 \in P$ platí

$$\max_{x \in I_\delta} |(\mathcal{T}(y_1))(x) - (\mathcal{T}(y_2))(x)| \leq c \cdot \max_{x \in I_\delta} |y_1(x) - y_2(x)|,$$

což je podmínka kontraktivnosti zobrazení \mathcal{T} .

Ukázali jsme, že pro $\delta = \min \{a, b/M, c/L\}$ zobrazení \mathcal{T} v úplném metrickém prostoru (P, ρ) splňuje předpoklady Banachovy věty 4.3, a proto má pevný bod $y^* = \mathcal{T}(y^*)$, který je hledaným řešením počáteční úlohy (4.1). \square

Připomeňme ještě konstrukci přibližných řešení y_n , která je součástí důkazu Banachovy věty, tuto konstrukci lze využít k výpočtu řešení.

Za počáteční aproximaci $y_0(x)$ zvolíme konstantní funkci rovnu stejně označené hodnotě počáteční podmínky y_0 . Další hodnoty získáme iteracemi

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathcal{T}(y_0), \\ y_2 &= \mathcal{T}(y_1) = \mathcal{T}(\mathcal{T}(y_0)) \equiv \mathcal{T}^2(y_0), \\ y_3 &= \mathcal{T}(y_2) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^2(y_0)) \equiv \mathcal{T}^3(y_0), \\ &\vdots \\ y_{n+1} &= \mathcal{T}(y_n) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^n(y_0)) \equiv \mathcal{T}^{n+1}(y_0). \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Konvergence takto sestrojené posloupnosti $\{y_n\}$ a skutečnost, že limita y^* je pevným bodem, je zahrnuta v důkazu Banachovy věty.

POZNÁMKY 4.4

- (a) Pokud funkce $f(x, y)$ má omezenou parciální derivaci podle y v konvexním okolí, potom funkce $f(x, y)$ je lipschitzovská v y . Skutečně, podle věty o střední hodnotě

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y_1 - y_2)$$

pro nějaké ξ z intervalu (y_1, y_2) nebo (y_2, y_1) . Proto se často podmínka lipschitzovskosti v proměnné y nahrazuje silnějším předpokladem spojitosti parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle y , protože z ní už plyne omezenost této parciální derivace a tím i lipschitzovskost funkce $f(x, y)$ v proměnné y . Z věty plyne existence řešení jen v nějakém okolí bodu (x_0, y_0) , proto stačí pouze lokální lipschitzovskost.

- (b) Věta dokazuje existenci řešení pouze v intervalu I . Pokud v krajním bodě intervalu jsou předpoklady opět splněny, existuje řešení i v tomto bodě. Díky jednoznačnosti obě řešení můžeme navázat. Pokud jsou předpoklady splněny v každém bodě oblasti G , lze řešení protahovat na maximální interval, dokud graf řešení zůstává v G .

Důkaz Peanovy věty je založen na následujícím tvrzení, viz např. [8], str. 610:

VĚTA 4.5 ARZELÀOVA-ASCOLIHO VĚTA

Nechť $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na omezeném intervalu I , které jsou:

- (a) **stejně omezené**, tj. existuje $M > 0$, že pro každé $x \in I$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|y_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

- (b) **stejně spojité**, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každé $x_1, x_2 \in I$, $n \in \mathbb{N}$

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \implies \quad |y_n(x_1) - y_n(x_2)| < \varepsilon.$$

Potom posloupnost $\{y_n(x)\}$ obsahuje podposloupnost $\{y_{n'}(x)\}$, která konverguje stejnoměrně na celém intervalu I k nějaké spojitě funkci $y^*(x)$.

POZNÁMKY 4.6 Pojem stejné omezenosti i stejné spojitosti má smysl jenom pro posloupnost funkcí. Předpoklad, že funkce jsou stejně omezené znamená, že všechny funkce jsou omezeny stejnou konstantou $M > 0$ nezávislou na n .

V definici stejné spojitosti (také zvané rovnomocné spojitosti) se pro každé $\varepsilon > 0$ vyžaduje $\delta > 0$ univerzální pro všechny funkce $y_n(x)$, tj. konstanta δ závisí pouze na ε a nezávisí na žádné z veličin n, x_1, x_2 . Při stejnoměrné spojitosti může být δ pro každou funkci $y_n(x)$ jiné a v (obyčejné) spojitosti se δ může měnit i s proměnnou x_1 .

Idea důkazu Peanovy věty.

Sestrojíme posloupnost přibližných řešení $y_n(x)$ počáteční úlohy (4.1) na intervalu $I = \langle x_0, x_0 + a \rangle$. Dokážeme, že tato posloupnost splňuje předpoklady Arzelàovy-Ascoliho věty. Podle této věty posloupnost $\{y_n(x)\}$ obsahuje podposloupnost $\{y_{n'}(x)\} \subset \{y_n(x)\}$, která konverguje stejnoměrně na intervalu I k nějaké funkci $y^*(x)$. Ukážeme, že tato limita $y^*(x)$ je řešením úlohy (4.1).

Podobně jako v předchozím důkazu využijeme skutečnosti, že funkce $y(x)$ je řešení počáteční úlohy (4.1) jestliže platí

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (4.6)$$

Tento vztah je implicitní, obsahuje neznámou $y(x)$ na obou stranách, nelze ho proto využít pro definici řešení $y(x)$. Pro $\delta \in (0, a)$ zavedeme funkci $y^\delta(x)$ se „zpožděním“ δ , tj.

$$y^\delta(x) = \begin{cases} y_0 & \text{pro } x \in \langle x_0, x_0 + \delta \rangle, \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-\delta} f(t, y^\delta(t)) dt & \text{pro } x \in (x_0 + \delta, a). \end{cases} \quad (4.7)$$

Funkce $y^\delta(x)$ je definovaná na celém intervalu $\langle x_0, x_0 + a \rangle$. Skutečně, pro $x \in \langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ platí $y^\delta(x) = y_0$. Při výpočtu funkce $y^\delta(x)$ v bodech $x > x_0 + \delta$ funkci $f(t, y^\delta(t))$ integrujeme od x_0 jen po $x - \delta$, tj. na intervalu, kde už je $y^\delta(x)$ určena.

Posloupnost $\{y_n(x)\}$ přibližných řešení získáme tím, že ve vztahu (4.7) volíme posloupnost zmenšujících se zpoždění $\delta = 1/n$:

$$y_n(x) \equiv y^{\frac{1}{n}}(x) = \begin{cases} y_0 & \text{pro } x \in \langle x_0, x_0 + \frac{1}{n} \rangle, \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-1/n} f(t, y_n(t)) dt & \text{pro } x > x_0 + \frac{1}{n}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Potřeba ověřit, že předpoklady Arzelàovy-Ascoliho věty jsou splněny. Pro $x < x_0 + \frac{1}{n}$ je $y_n(x)$ konstantní. Protože funkce $f(x, y)$ je spojitá, v okolí (x_0, y_0) je omezená, tj. $|f(x, y)| \leq M$ a pro $x > x_0 + \frac{1}{n}$ platí

$$|y_n(x)| \leq |y_0| + \left| \int_{x_0}^{x-1/n} f(t, y_n(t)) dt \right| \leq |y_0| + (x - x_0)M \leq |y_0| + aM.$$

Tento odhad dává, že funkce $y_n(x)$ jsou stejně omezené na intervalu $\langle x_0, x_0 + a \rangle$.

Ověřme ještě, že funkce jsou stejně spojité. Pro $x_1 > x_0 + \frac{1}{n}$, $x_2 > x_0 + \frac{1}{n}$ platí odhad

$$|y_n(x_2) - y_n(x_1)| = \left| \int_{x_1-1/n}^{x_2-1/n} f(t, y_n(t)) dt \right| \leq M|x_2 - x_1|,$$

z kterého plyne stejná spojitost funkcí $y_n(y)$, stačí pro $\varepsilon > 0$ položit $\delta = \varepsilon/M$. Odhad platí i v případě, kdy x_1 nebo x_2 je menší než $x_0 + \frac{1}{n}$.

Podle Arzelàovy-Ascoliho věty tedy existuje vybraná podposloupnost $\{y_{n'}(x)\}$, která stejnoměrně konverguje ke spojitě funkci $y^*(x)$. Konečně protože funkce $y_n(x)$ jsou stejně spojitě, pro jejich limitu $y^*(x)$ z (4.8) plyne (4.6), $y^*(x)$ je tedy řešením.

Analogickým postupem lze dokázat existenci řešení i v levém okolí bodu x_0 . □

POZNÁMKA 4.7 Poznamenejme, že ve tvrzení Arzelàovy-Ascoliho věty není jednoznačnost limity $y^*(x)$ vybrané podposloupnosti $\{y_{n'}(x)\}$. Různé podposloupnosti $\{y_{n'}(x)\}$ mohou konvergovat k různým limitám, a proto řešení $y^*(x)$ není určeno jednoznačně.

Soustava rovnic prvního řádu (SODR1)

Počáteční úlohu pro soustavu (obecně nelineárních) rovnic prvního řádu lze pomocí vektorové symboliky zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\gamma}, \quad (4.9)$$

kde $\mathbf{f} \equiv (f_1, \dots, f_n) : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Řešením soustavy na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je potom vektorová funkce $\mathbf{y} \equiv (y_1, \dots, y_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ taková, že každé $y_i \in C^1(I)$ a rovnosti v (4.9) platí pro všechna $x \in I$.

Tato úloha je formulována podobně jako úloha (4.1). O její řešitelnosti platí věty analogické větám Peanově a Picardově:

VĚTA 4.8 (O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ)

Nechť každá složka $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ vektorové funkce $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ je spojitá v okolí bodu $(x_0, \boldsymbol{\gamma})$. Potom existuje řešení úlohy (4.9) v okolí x_0 .

Nechť každá složka $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ vektorové funkce $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ je navíc i lipschitzovská v proměnných y_1, \dots, y_n v okolí $(x_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Potom řešení $\mathbf{y}(x)$ úlohy (4.9) je určeno jednoznačně.

Důkaz věty Picardovy (i Peanovy) lze snadno zobecnit pro případ soustavy rovnic. Vektorová funkce $\mathbf{y}(x) \equiv (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$ je řešením úlohy (4.9), právě když pro všechna $x \in I$ platí rovnost $\mathbf{y}(x) = \boldsymbol{\gamma} + \int_{x_0}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt$, tj.

$$y_i(x) = \gamma_i + \int_{x_0}^x f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.10)$$

Opět využijeme Banachovu větu o pevném bodu kontraktivního zobrazení.

Bud' okolí $Q = \langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \times \langle \gamma_1 - b, \gamma_1 + b \rangle \times \dots \times \langle \gamma_n - b, \gamma_n + b \rangle$ bodu $(x_0, \boldsymbol{\gamma})$ obsaženo v definičním oboru $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ funkcí $f_i(x, \mathbf{y})$.

Za metrický prostor \mathbf{P} vezmeme prostor vektorových funkcí spojitých na intervalu $I_\delta = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ a ležících v Q :

$$\mathbf{P} = \{ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \mid y_i \in C(I_\delta), |y_i(x) - \gamma_i| \leq b \text{ pro } i = 1, \dots, n \},$$

přičemž hodnotu $\delta \in (0, a)$ určíme později. Na tomto prostoru definujeme metriku

$$\rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \max_i \max_x |y_i(x) - z_i(x)|.$$

Zvolený metrický prostor je v dané metrice úplný. Dále postupujeme analogicky:

- (a) pomocí (4.10) definujeme operátor \mathcal{T} , jehož pevný bod je řešením (4.9),
- (b) ukážeme, že pro malá δ operátor zobrazuje metrický prostor \mathbf{P} do sebe
- (c) a pro malá δ zobrazení \mathcal{T} je kontraktivní.

Potom z Banachovy věty už plyne existence jediného pevného bodu a tím i existence a jednoznačnost řešení naší úlohy. Také důkaz Peanovy věty z rovnice prvního řádu lze rozšířit na soustavu rovnic prvního řádu.

Rovnice vyššího řádu (ODR_n)

Počáteční úlohu pro rovnici n -tého řádu zapisujeme ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad y^{(k)}(x_0) = \gamma_k \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.11)$$

Připomeňme, že funkce $y(x)$ je řešením úlohy (4.11) na intervalu I , jestliže $y \in C^n(I)$, jsou splněny podmínky $y^{(k)}(x_0) = \gamma_k$ pro $k = 0, 1, \dots, n-1$ a rovnost $y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ platí na celém intervalu I .

O existenci a jednoznačnosti řešení této úlohy vypovídá následující věta:

VĚTA 4.9 (O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ)

Nechť funkce $f(x, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ je spojitá v okolí bodu $(x_0, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$.

Potom existuje řešení úlohy (4.11) v okolí bodu x_0 .

Dále nechť $f(x, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ je navíc lipschitzovská v proměnných $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ v okolí bodu $(x_0, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$.

Potom řešení $y(x)$ úlohy (4.11) je jednoznačné.

Důkaz. Úlohu (4.11) převedeme na úlohu (4.9) a využijeme Větu 4.8 o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy rovnic prvního řádu.

Pomocí transformace

$$y_1 := y, \quad y_2 := y', \quad y_3 := y'', \quad \dots, \quad y_n := y^{(n-1)}$$

úloha (4.11) přejde na soustavu n rovnic prvního řádu

$$\begin{array}{ll} y_1' &= y_2, & y_1(x_0) &= \gamma_0, \\ y_2' &= y_3, & y_2(x_0) &= \gamma_1, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, & y_{n-1}(x_0) &= \gamma_{n-2}, \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_n(x_0) &= \gamma_{n-1}. \end{array} \quad (4.12)$$

Podle předpokladu je každá z funkcí pravé strany tohoto systému spojitá, případně i lipschitzovská v $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$. Proto podle Věty 4.8 o existenci a jednoznačnosti řešení soustav existuje jediné řešení $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ soustavy (4.12), vyhovující uvedeným počátečním podmínkám. První složka $y_1(x)$ tohoto řešení je současně hledaným řešením úlohy (4.11). \square

5. Okrajové úlohy

Zatím jsme se zabývali počátečními úlohami. Rovnice n -tého řádu nebo soustava n rovnic prvního řádu byla doplněna n podmínkami v jednom bodě x_0 . Diferenciálními rovnicemi obvykle modelujeme situace z technické praxe. Rovnice, ve kterých nezávislá proměnná x má význam času, obvykle vedou na počáteční úlohu — pro modelování situace v čase $x > x_0$ rovnici musíme doplnit informacemi o stavu v čase x_0 , z kterého vycházíme.

V technické praxi se však vyskytují i situace, které vedou na tzv. okrajové úlohy. Jako příklad uveďme deformaci nosníku. Při deformaci nosníku průhyb popisuje proměnná $y(x)$, přičemž x probíhá interval $I = \langle a, b \rangle$ — proměnná x zde má význam prostorové souřadnice. Rovnici, kterou uvažujeme uvnitř intervalu I , musíme doplnit informací o situaci na koncích nosníku, tj. v bodech a, b . V případě rovnice nosníku, která je čtvrtého řádu, rovnici doplníme čtyřmi podmínkami: dvěmi v bodě a , dvěmi v bodě b .

Počáteční a okrajové úlohy

U počáteční úlohy má smysl zadávat derivace v jednom bodě; každá „rozumná“ soustava nezávislých n podmínek pro hodnoty derivací nultého až $n-1$ řádu tyto hodnoty určuje. V případě okrajových úloh je nutné zadávat hodnoty a derivace neznámé funkce v obou koncových bodech. Smysl má také zadávat podmínky ve tvaru kombinace hodnot a derivací: například $u(a) + u'(a) = A$.

Na rozdíl od počátečních úloh, ve kterých je v podstatě jediná možnost, jak zadat počáteční podmínky v jednom bodě, v případě okrajových úloh lze tedy zadat okrajové podmínky mnoha různými způsoby.

Z hlediska zkoumání existence a jednoznačnosti řešení jsou okrajové úlohy obtížnější: zatímco počáteční úloha pro „rozumnou“ funkci $f(x, y)$ má řešení pro libovolné počáteční podmínky, v případě okrajové úlohy úloha může mít pro některé hodnoty okrajových podmínek právě jedno řešení, zatímco pro jiné nemá žádné řešení, nebo jich má nekonečně mnoho. Jako příklad uveďme jednoduchou lineární rovnici

PŘÍKLAD 5.1 $y'' + y = 0, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$

Řešení: Obecné řešení má tvar $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Položíme-li $a = 0$, $A = 0$, řešení má tvar $y(x) = c_2 \sin x$. Pokud b není násobkem π , pro libovolné B najdeme právě jedno řešení. Pokud však $b = \pi$ a $B \neq 0$, podmínku $y(\pi) \equiv c_2 \sin \pi = B$ nelze splnit žádnou volbou c_2 — řešení tedy neexistuje. Konečně je-li $b = \pi$, $B = 0$, podmínka je splněna pro každé c_2 — řešení je nekonečně mnoho. \square

Okrajové úlohy jsou složitější také z hlediska numerického výpočtu. V případě počáteční úlohy, počáteční podmínka určuje hodnotu řešení v x_0 a hodnoty v dalších bodech x_i postupně dopočítáváme; úloha je lokální, můžeme kdykoliv skončit. V případě okrajové úlohy rovnici diskretizujeme pomocí dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Dostáváme tak soustavu rovnic pro neznámé y_0, y_1, \dots, y_n , přičemž $y_i \sim y(x_i)$. Řešení y_i dostaneme až po vyřešení celé soustavy, okrajová úloha je v tomto smyslu globální.

Okrajová úloha pro rovnici druhého řádu

Budeme se zabývat rovnicí druhého řádu

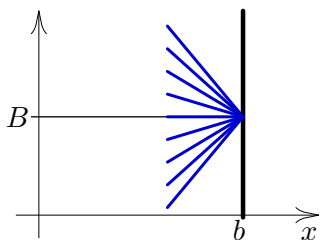
$$y'' = f(x, y, y') \tag{5.1}$$

na intervalu (a, b) se spojitou funkcí $f(x, \xi, \eta)$.

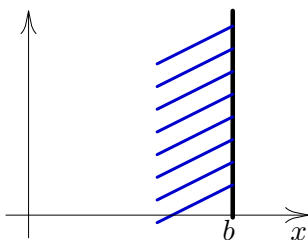
Různé typy okrajových podmínek

Rovnici (5.1) musíme doplnit dvěmi podmínkami; po jedné v koncových bodech $x = a$ a $x = b$. V koncovém bodě $x = b$ můžeme předepsat:

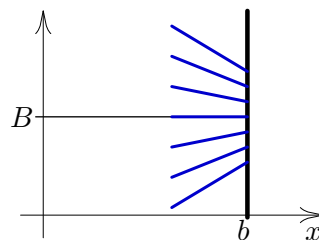
- (a) **Dirichletovu okrajovou podmínku**: hodnotu $y(b) = B$,
- (b) **Neumannovu okrajovou podmínku**: derivaci $y'(b) = B$,
- (c) nebo jejich kombinaci **Robinovu okrajovou podmínku**: $y'(b) + k y(b) = B$, které se říká také **Newtonova okrajová podmínka**.



Obr. 15: Dirichletova okrajová podmínka $y(b) = B$.



Obr. 16: Neumannova okrajová podmínka $y'(b) = \frac{1}{2}$.



Obr. 17: Robinova okrajová podmínka $y'(b) + k u(b) = B$.

Analogické podmínky můžeme předepsat v koncovém bodě $x = a$. Protože derivaci v koncovém bodě bereme ve směru vnější normály, tj. ven z intervalu I , v levém koncovém bodě a píšeme derivaci se záporným znaménkem, např. $-y'(a) + k y(a) = A$.

Fyzikální význam podmínek

Pokud neznámá $y(x)$ má význam teploty v rovnici pro ustálené vedení tepla v tyči $\langle a, b \rangle$, potom podmínka $y(b) = B$ má význam předepsané teploty B , například $y(b) = 0$ dosáhneme ponořením konce b do nádoby se směsí vody a ledu. Podmínka $y'(b) = g$ znamená předepsaný tepelný tok g ven v konci b , například $y'(b) = 0$ znamená, že koncem tyče b neprochází žádné teplo, což nastává v případě izolovaného konce tyče. Robinova podmínka $y'(b) = -k(y(b) - B)$ popisuje situaci, kdy tepelný tok $w = -k u_x$ závisí na rozdílu teploty $u(b)$ a teploty B okolí konce tyče b .

Také ve druhém koncovém bodě a předepíšeme jednu podmínku z uvedených typů. Pozor na znaménko. Přiložíme-li k levému konci a tyče tepelný zdroj o výkonu $g > 0$, podmínka bude $y'(a) = -A$, přiložíme-li zdroj o výkonu g k pravému konci b tyče podmínka bude $y'(b) = B$, jestliže tepelná vodivost je $k = 1$.

Pokud na obou koncích požadujeme Dirichletovu (Neumannovu, Robinovu) podmínku, mluvíme o **Dirichletově** (Neumannově, Robinově) úloze. Pokud na obou koncích předepíšeme různé typy podmínek, například $y(a) = A$, $y'(b) = g$, mluvíme o **smíšené úloze**.

Všechny tři uvedené typy podmínek lze zapsat ve tvaru

$$-\alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) = A, \quad \alpha_b y'(b) + \beta_b y(b) = B, \quad (5.2)$$

přičemž nezáporné koeficienty α_a, β_a a také α_b, β_b nesmějí být současně nulové, což lze zapsat podmínkou

$$|\alpha_a| + |\beta_a| > 0, \quad |\alpha_b| + |\beta_b| > 0. \quad (5.3)$$

Skutečně, volbou $\alpha_a = 0$, $\beta_a = 1$ dostáváme Dirichletovu podmínku a volbou $\alpha_a = 1$, $\beta_b = 0$ Neumannovu podmínku na konci a a podobně na konci b .

Obecněji lze uvažovat také podmínky ve tvaru nelineární kombinace, jako příklad uveďme $(y'(a))^2 + (y(a))^2 = 1$, nebo $y'(a)y(a) = 1$, nebo $y'(a) = \sin(y(a))$.

Okrajová úloha pro lineární rovnici

O existenci a jednoznačnosti řešení okrajové úlohy nelze obecně snadno rozhodnout. Jak lze očekávat, nejvíce prozkoumány jsou rovnice lineární.

Obecné řešení lineární rovnice druhého řádu

$$L(y)(x) \equiv y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (5.4)$$

lze zapsat ve tvaru

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + y_p(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (5.5)$$

kde $u_1(x), u_2(x)$ jsou dvě nezávislá řešení rovnice bez pravé strany tj. rovnice $L(y) = 0$ a $y_p(x)$ je partikulární řešení, tj. libovolné řešení rovnice s pravou stranou $L(y) = f(x)$.

Uvažujme Dirichletovu úlohu, rovnici s okrajovými podmínkami $y(a) = A$ a $y(b) = B$. Dosazením obecného řešení do okrajových podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} y(a) &= c_1 u_1(a) + c_2 u_2(a) + y_p(a) = A, \\ y(b) &= c_1 u_1(b) + c_2 u_2(b) + y_p(b) = B. \end{aligned}$$

Je to soustava dvou lineárních rovnic pro konstanty c_1, c_2 , kterou lze zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - y_p(a) \\ B - y_p(b) \end{pmatrix}.$$

Pokud matice této soustavy je regulární, soustava má právě jedno řešení, jsou to konstanty c_1, c_2 v obecném řešení okrajové úlohy. Jestliže matice soustavy není regulární, soustava a tím i okrajová úloha buď řešení nemá, nebo má řešení nekonečně mnoho.

Také v případě obecných lineárních podmínek (5.2) dosazení obecného řešení do těchto podmínek vede na soustavu lineárních rovnic pro konstanty c_1, c_2 s maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} -\alpha_a u_1'(a) + \beta_a u_1(a) & -\alpha_a u_2'(a) + \beta_a u_2(a) \\ \alpha_b u_1'(b) + \beta_b u_1(b) & \alpha_b u_2'(b) + \beta_b u_2(b) \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Opět řešitelnost okrajové úlohy závisí na této matici: pokud je regulární, existují jediné konstanty c_1, c_2 a okrajová úloha má právě jedno řešení pro každé hodnoty A, B a libovolné partikulární řešení $y_p(x)$. Pokud uvedená matice regulární není, pro některá $A, B, y_p(x)$ okrajová úloha má nekonečně mnoho řešení, pro ostatní $A, B, y_p(x)$ řešení neexistuje.

Poznamenejme, že v případě počáteční úlohy příslušná matice soustavy rovnic pro konstanty c_1, c_2 byla Wronského matice

$$W[u_1, u_2](x_0) = \begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) \\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) \end{pmatrix},$$

která je regulární. Proto počáteční úloha má vždy právě jedno řešení.

Rovnice v divergentním tvaru

V případě okrajových úloh se často studují lineární rovnice druhého řádu zapsané v tzv. divergentním tvaru:

$$-[p(x)y']' + q(x)y = f(x), \quad x \in (a, b) \quad (5.7)$$

s koeficienty $p(x) \geq \alpha > 0$, $q(x) > 0$. Pro jednoduchost uvažujme Dirichletovu úlohu, tj. okrajové podmínky $y(a) = A$ a $y(b) = B$. Lze uvažovat i Neumannovy, Robinovy podmínky nebo smíšenou úlohu.

Vynásobme rovnici tzv. testovací funkcí $v \in C^1(a, b)$ splňující $v(a) = 0$, $v(b) = 0$ a integrujme přes $I = (a, b)$. První integrál převedeme pomocí integrace per partes $-\int_I [p y']' v \, dx = \int_I p y' v' \, dx$. Dostáváme tak identitu

$$\int_a^b [p(x) y'(x) v'(x) + q(x) y(x) v(x)] \, dx = \int_a^b f(x) v(x) \, dx, \quad (5.8)$$

která umožňuje zavést pojem tzv. *zobecněného řešení*:

DEFINICE 5.2 Funkci $y(x)$ nazveme *zobecněným řešením* okrajové úlohy (5.7), jestliže

- (a) $y(x)$ má integrovatelnou derivaci,
- (b) splňuje okrajové podmínky $y(a) = A$, $y(b) = B$ a splňuje integrální identitu (5.8) pro každou funkci $v(x)$, která má také integrovatelnou derivaci a splňuje nulové okrajové podmínky $v(a) = v(b) = 0$.

Pomocí výsledků funkcionální analýzy lze dokázat, že za uvedených předpokladů má uvedená okrajová úloha právě jedno řešení.

Formulace zobecněného řešení v Definici 5.2 je základem pro výpočet přibližného řešení rovnice (5.7) nejrozšířenější numerické metody zvané Metoda konečných prvků.

Okrajová úloha pro rovnici čtvrtého řádu

Rovnici čtvrtého řádu $y'''' = f(x, y, y', y'', y''')$ na intervalu (a, b) musíme doplnit čtyřmi podmínkami. Obvykle zadáváme dvě podmínky v bodě $x = a$ a dvě v bodě $x = b$. Tyto podmínky svazují hodnoty $y(x), y'(x), y''(x), y'''(x)$ neznámé funkce $y(x)$ v krajních bodech, podmínky mohou být libovolné, musí však být navzájem nezávislé.

Jako příklad uveďme rovnici popisující ohyb tyče a průhyb nosníku

$$y''''(x) = f(x),$$

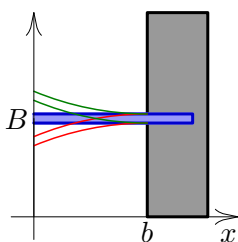
ve které neznámá $y(x)$ má význam průhybu, tedy posunutí nosníku v bodě x ve směru kolmém na nosník, a $f(x)$ popisuje zatížení nosníku. V koncovém bodě $x = b$ zadáváme dvě z čtyř následujících podmínek

$$y(b) = B_0, \quad y'(b) = B_1, \quad y''(b) = B_2, \quad y'''(b) = B_3.$$

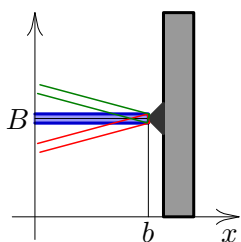
Uveďme čtyři základní dvojice podmínek a jejich fyzikální význam:

- (a) $y(b) = B$, $y'(b) = 0$ – **vetknutý konec**: konec se nemůže posouvat v kolmém směru ani se nemůže otáčet,
- (b) $y(b) = B$, $y''(b) = 0$ – **podepřený konec**: konec se nemůže posouvat ale může se volně otáčet okolo kloubu, nepůsobí přitom na něj žádný otáčející moment,
- (c) $y'(b) = 0$, $y'''(b) = 0$ – konec se nemůže otáčet, může se však volně posouvat v kolmém směru, nepůsobí na něj žádná tzv. posouvající síla. Například úloha zrcadlově symetrická podle osy $x = b$ vede na tyto podmínky v bodě b a

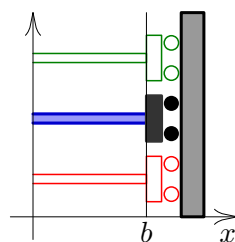
- (d) $y''(b) = 0$, $y'''(b) = 0$ – **volný konec**: konec se může volně posouvat i otáčet, nepůsobí na něj žádná posouvající síla ani otáčející moment.



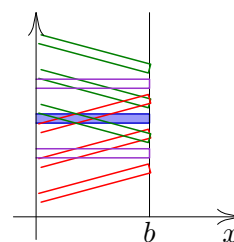
Obr. 18: Příklad (a).



Obr. 19: Příklad (b).



Obr. 20: Příklad (c).



Obr. 21: Příklad (d).

Lze také předepsat kombinaci podmínek, například dvojice podmínek $y'''(b) + k y(b) = B$, $y'' = 0$ popisuje pružné podepření.

Analogické podmínky předepisujeme v koncovém bodě $x = a$, jenom liché derivace se často píšou s opačným znaménkem, protože vnější normála v levém konci je -1 .

Řešitelnost okrajové úlohy pro lineární rovnici čtvrtého řádu

V obecném případě je obtížné odvodit jednoduché podmínky zaručující existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy.

Uvažujme proto rovnici $L(y) = f(x)$ s lineárním operátorem čtvrtého řádu

$$L(y) = y^{(4)} + a_3(x) y''' + a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y$$

a spojitými koeficienty $a_3(x), a_2(x), a_1(x), a_0(x)$. Obecné řešení této rovnice má tvar

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + c_3 u_3(x) + c_4 u_4(x) + y_p(x) \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R},$$

kde $u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x)$ je čtveřice nezávislých řešení rovnice $L(y) = 0$ a $y_p(x)$ je partikulární řešení rovnice $L(y) = f(x)$. Opět dosazením obecného řešení do okrajových podmínek dostáváme soustavu rovnic pro konstanty c_1, c_2, c_3, c_4 . Matice této soustavy odpovídá Wronského matici v případě počáteční úlohy. Pokud je regulární, soustava má právě jedno řešení c_1, c_2, c_3, c_4 , které určuje řešení $y(x)$ zkoumané okrajové úlohy.

Uvažujme například okrajové podmínky

$$y(a) = A_0, \quad y''(a) = A_1, \quad y(b) = B_0, \quad y''(b) = B_1,$$

které popisují situaci, když oba konce nosníku jsou podepřené, tj. mohou se v pevném kloubu volně otáčet. Dosazením obecného řešení do okrajových podmínek dostáváme soustavu čtyř lineárních rovnic pro konstanty c_1, c_2, c_3, c_4 s maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) & u_3(a) & u_4(a) \\ u_1''(a) & u_2''(a) & u_3''(a) & u_4''(a) \\ u_1(b) & u_2(b) & u_3(b) & u_4(b) \\ u_1''(b) & u_2''(b) & u_3''(b) & u_4''(b) \end{pmatrix}.$$

Pokud je tato matice regulární, uvedená okrajová úloha má právě jedno řešení pro libovolné hodnoty A_0, A_1, B_0, B_1 a libovolné partikulární řešení $y_p(x)$.

Vícebodové úlohy

Dosud jsme uvažovali počáteční úlohu, kdy všechny podmínky jsou zadány v jednom bodě a okrajovou úlohu, ve které jsou podmínky zadány v koncových bodech intervalu I , přitom řešení rovnice hledáme v intervalu I . Dalším zobecněním jsou úlohy vícebodové, kdy podmínky jsou zadány ve třech nebo více bodech – počet podmínek přitom musí být roven řádu rovnice.

Odlíšnou úlohu dostaneme v situaci, když podmínek je víc, než je řád rovnice. Potom interval I rozdělíme na několik podintervalů I_i a rovnici řešíme na jednotlivých intervalech I_i . Ve styčných bodech jsou zadány hodnoty řešení nebo spojitý přechod hodnot derivací, případně zadané skoky derivací.

Jako příklad uveďme úlohu, která modeluje most tvořený nosníkem $I = \langle a, d \rangle$. Nosník je podepřený dvěma pilíři v bodech b, c , přičemž $a < b < c < d$. Zatížení nosníku je dáno funkcí $f(x)$. Výšku podpor v bodech a, b, c, d označme po řadě A, B, C, D . Předpokládáme, že nosník je vetknut na levém konci a pod nulovým úhlem a na pravém konci d je volně podepřen, tj. bez otáčivého momentu.

Řešení $y(x)$ rozdělíme na tři části: funkci $y_1(x)$ na intervalu $I_1 = \langle a, b \rangle$, funkci $y_2(x)$ na $I_2 = \langle b, c \rangle$ a funkci $y_3(x)$ na $I_3 = \langle c, d \rangle$. Pokud funkce $f(x)$ je spojitá, hledáme funkce $y_i(x)$, které mají tři spojitě derivace v intervalech I_i takové, že:

- (a) Ve vnitřních bodech intervalů I_i je splněna rovnice, tj.

$$y_i''''(x) = f(x), \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

- (b) V koncových bodech a, d podmínky vetknutí a podepření nosníku dávají

$$y_1(a) = A, \quad y_1'(a) = 0, \quad y_3(d) = D, \quad y_3''(d) = 0,$$

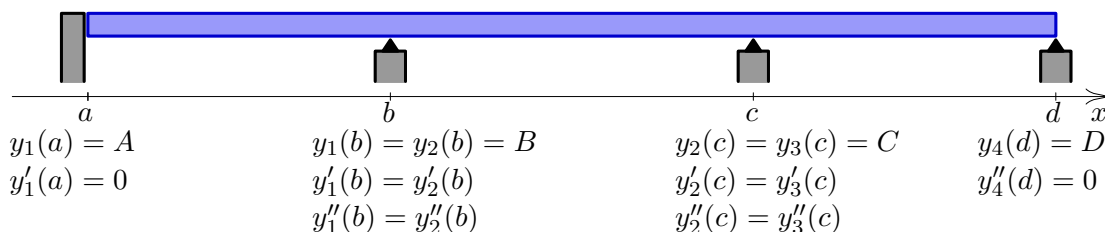
- (c) Podepření nosníku na pilířích b, c určují podmínky

$$y_1(b) = B, \quad y_2(b) = B, \quad y_2(c) = C, \quad y_3(c) = C.$$

- (d) Podpory v bodech b, c představují klouby, proto zde první a druhé derivace spojitě přecházejí, nosník zde není „zlomen“, nemění se ani otáčivý moment:

$$y_1'(b) = y_2'(b), \quad y_1''(b) = y_2''(b), \quad y_2'(c) = y_3'(c), \quad y_2''(c) = y_3''(c)$$

Úloha představuje sdružené tři rovnice čtvrtého řádu na intervalech (a, b) , (b, c) , (c, d) . Proto jsme potřebovali celkem $3 \times 4 = 12$ podmínek.



Obr. 22: Čtyřbodová úloha s podmínkami pro most s dvěma pilíři.

S touto situací jsme se setkali při definici kubického splajnu. Také pro soustavy ODR lze formulovat okrajové i vícebodové úlohy.

6. Stabilita a atraktivita řešení

Stabilita řešení (také rovnic, úloh, metod atd.) je důležitá vlastnost, která vypovídá o tom, jak citlivé je řešení na změnu dat, tj. podmínek, koeficientů, parametrů, atd. Už jsme se s ní setkali v případě soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, u nichž se zvažuje, zda je soustava dobře nebo špatně podmíněná. Také definice spojitosti funkce $f(x)$ v bodě x_0 je vlastně speciálním případem stability funkce $f(x)$ při změně argumentu x v okolí x_0 .

Stabilitu lze obecně charakterizovat větou: **malé změny dat** (koeficientů, parametrů) **vyvolají malou změnu řešení**. „Malost změn“ obvykle definujeme pomocí tzv. ε - δ gymnastiky, se kterou jsme se setkali při definici limity funkce: **pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, takové, že pokud se data změní o méně než δ , řešení se změní o méně než ε** .

V jednotlivých případech však nutno specifikovat, která data měníme, jak změnu dat měříme a také kde a jak změnu řešení měříme.

Stabilita řešení počáteční úlohy ODR1

Nejdříve budeme sledovat závislost řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu na změnách počáteční podmínky: zda malá změna počáteční podmínky vyvolá malou změnu řešení. Přesněji, zkoumáme, zda pro jakkoliv malý rozsah $\varepsilon > 0$ existuje rozsah $\delta > 0$ počáteční podmínky, který zaručí, že změna hodnot řešení na dané množině bude menší než ε .

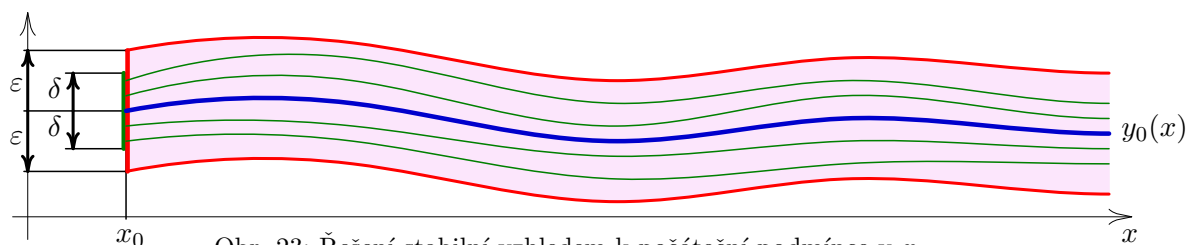
Uvažujme diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' = f(x, y), \quad (6.1)$$

na intervalu I s počáteční podmínkou v bodě $x_0 \in I$. Při těchto úvahách obvykle bereme $I = \langle x_0, \infty \rangle$. Dále buď $y_0(x)$ řešení této počáteční úlohy na intervalu I . Aby následující definice měla smysl, předpokládáme, že rovnice (6.1) má také řešení na celém intervalu I i pro počáteční podmínky v x_0 s hodnotami v určitém okolí hodnoty $y_0(x_0)$. Obvykle předpokládáme také, že tato řešení jsou svojí počáteční podmínkou určena jednoznačně.

DEFINICE 6.1 Řešení $y_0(x)$ rovnice (6.1) nazveme **stabilní na intervalu $I = \langle x_0, \infty \rangle$ vzhledem k počáteční podmínce v bodě x_0** , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé řešení $y(x)$ rovnice (6.1) platí:

$$|y(x_0) - y_0(x_0)| < \delta \implies |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I. \quad (6.2)$$



Obr. 23: Řešení stabilní vzhledem k počáteční podmínce v x_0

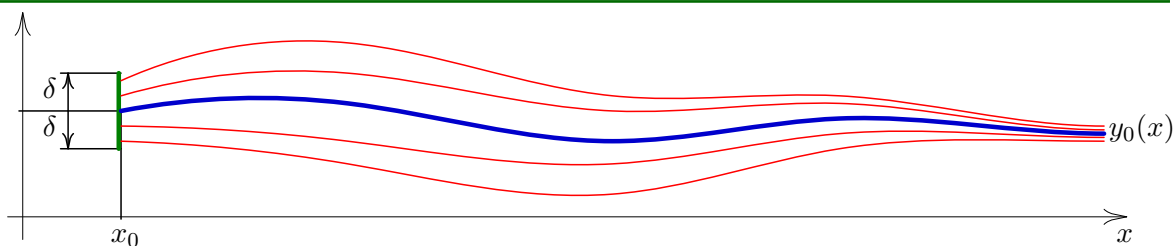
POZNÁMKY 6.2

- (a) Definice popisuje vlastnost: pokud se počáteční podmínka v x_0 změní o méně než δ , potom řešení na celém intervalu I se změní a o méně než ε , přičemž pro libovolné malé kladné ε najdeme kladné δ . Této vlastnosti se říká **Ljapunovská stabilita**.

- (b) Řekneme, že **řešení** $y_0(x)$ **je stabilní na** $I = \langle a, b \rangle$, jestliže je stabilní vzhledem k počáteční podmínce v každém $x_0 \in I$ na $\langle x_0, b \rangle$. Dále řekneme, že **rovnice (6.1) je stabilní na** I , jestliže všechna její řešení jsou stabilní na I .
- (c) Pokud řešení rovnice existuje jenom na nějakém omezeném intervalu $I = (a, b)$, definujeme stabilitu pouze na tomto intervalu I .
- (d) Obvykle stabilitu uvažujeme na intervalu $I = \langle x_0, \infty \rangle$, tj. pro x rostoucí. Pokud nás zajímá řešení pro x klesající, stabilitu definujeme pro interval $(-\infty, x_0]$, případně na intervalu $I = (a, x_0]$.
- (e) Někteří autoři, viz [1], zavádějí další druhy stability, například **stejnouměrnou stabilitu**, kdy v definici požadujeme stabilitu vzhledem ke všem bodům x_0 , přičemž parametr $\delta > 0$ závisí pouze na $\varepsilon > 0$, tj. nezávisí na bodě x_0 .

Dále zavedeme pojem **atraktivního** řešení, které **přitahuje** blízká řešení:

DEFINICE 6.3 Řešení $y_0(x)$ rovnice (6.1) nazveme **atraktivní**, také **přitažlivé**, jestliže řešení $y_0(x)$ při x rostoucím „přitahuje k sobě řešení v okolí“, přesněji jestliže existuje $\delta > 0$, že pro každé řešení $y(x)$ rovnice (6.1) splňující $|y(x_0) - y_0(x_0)| < \delta$ platí

$$|y(x) - y_0(x)| \rightarrow 0 \quad \text{pro } x \rightarrow \infty.$$


Obr. 24: Řešení atraktivní vzhledem k počáteční podmínce v x_0

POZNÁMKY 6.4

- (a) Poznamenejme, že stabilní řešení ještě nemusí být atraktivní a naopak existují řešení atraktivní podle této definice, které nejsou stabilní. Proto někteří autoři požadují, aby atraktivní řešení bylo také stabilní.
- (b) Obvykle uvažujeme o stabilitě řešení na intervalu $I = \langle x_0, \infty \rangle$ a atraktivitě řešení pro $x \rightarrow \infty$. Analogicky lze definovat stabilitu na libovolném intervalu $I = (a, b)$ obsahujícím x_0 a také atraktivitu řešení pro $x \rightarrow -\infty$ nebo x blížící se k jednomu z koncových bodů a, b . Lze také definovat atraktivní rovnice na intervalu I .

CVIČENÍ Zkoumejte stabilitu a atraktivitu řešení z Příkladů 1.6-1.10.

Stabilita řešení lineárních rovnic

Za předpokladu, že funkce $a(x)$ i $b(x)$ jsou spojité na intervalu $I = \langle x_0, \infty \rangle$, obecné řešení lineární rovnice prvního řádu $y' + a(x)y = b(x)$ lze zapsat ve tvaru

$$y(x) = c u(x) + y_p(x), \quad c \in \mathbb{R},$$

kde $u(x)$ je nenulové řešení rovnice $y' + a(x)y = 0$, $y_p(x)$ je partikulární řešení rovnice $y' + a(x)y = b(x)$.

Při zkoumání stability konkrétního řešení $y_0(x)$ je rozdíl $y(x) - y_0(x)$ roven násobku řešení $u(x)$. Všechna řešení jsou proto z hlediska stability na intervalu I stejná: buď jsou všechna stabilní, nebo všechna nestabilní. Stabilita tedy nezávisí na partikulárním řešení $y_p(x)$ ale jenom na chování funkce $u(x)$. Proto se obvykle zkoumá stabilita nulového řešení rovnice bez pravé strany; je-li toto řešení stabilní, jsou stabilní všechna řešení rovnice bez i s pravou stranou.

Dále platí, že pokud řešení $u(x)$ je omezené a nenulové, je každé řešení $y_0(x)$ stabilní, tj. rovnice je stabilní. Ze stejného důvodu jsou také všechna řešení atraktivní, nebo žádné není atraktivní, záleží opět jenom na chování $u(x)$. Jestliže $u(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$, budou také všechna řešení atraktivní.

CVIČENÍ Zkoumejte stabilitu a atraktivitu řešení rovnic z Příkladů 1.15-1.18.

Stabilita soustav diferenciálních rovnic prvního řádu

Soustavu n diferenciálních rovnic prvního řádu na intervalu $I = \langle x_0, \infty \rangle$ s počáteční podmínkou v bodě $x_0 \in I$ pro řešení $\mathbf{y}(x) \equiv (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$ zapisujeme ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) & y_1(x_0) &= \gamma_1, \\ \vdots & & \vdots & \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) & y_n(x_0) &= \gamma_n. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Buď $\mathbf{y}_0(x)$ řešení počáteční úlohy (6.3) definované na intervalu $I = \langle x_0, \infty \rangle$ obsahujícím bod x_0 . Aby definice měla smysl, budeme předpokládat, že uvedená soustava rovnic má řešení na celém intervalu I a také pro počáteční podmínky v jistém okolí hodnoty $\mathbf{y}(x_0)$, proto opět předpokládáme, že funkce $f_i(x, \xi_1, \dots, \xi_n)$ vystupující na pravých stranách rovnic jsou spojité a lipschitzovské v proměnných ξ_1, \dots, ξ_n .

Zapíšeme-li soustavu ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad \mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\gamma}$$

dostáváme formálně stejný tvar jako v případě rovnice prvního řádu. Definice stability a atraktivnosti řešení snadno přeneseme z případu jedné rovnice na případ soustavy rovnic. Pouze rozdíl hodnot $\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_0(x)$ musíme „měřit“ jako velikost vektorů, například pomocí maximové normy $\|\mathbf{y}\| \equiv \|\mathbf{y}\|_\infty = \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}$. Lze užít také součtovou normu $\|\mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i|$ nebo eukleidovskou normu $\|\mathbf{y}\|_2 = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$.

DEFINICE 6.5 Řešení $\mathbf{y}_0(x)$ počáteční úlohy (6.3) nazveme **stabilní** na $I = \langle x_0, \infty \rangle$ vzhledem k počáteční podmínce v bodě x_0 , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že každé řešení $\mathbf{y}(x)$ úlohy (6.3) platí následující implikace:

$$\|\mathbf{y}(x_0) - \mathbf{y}_0(x_0)\| < \delta \quad \implies \quad \|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_0(x)\| < \varepsilon \quad x \in I. \quad (6.4)$$

Dále řekneme, že řešení $\mathbf{y}_0(x)$ je **atraktivní** v počáteční podmínce v x_0 pro $x \rightarrow \infty$, jestliže existuje $\delta > 0$, že pro každé řešení $\mathbf{y}(x)$ splňující $\|\mathbf{y}(x_0) - \mathbf{y}_0(x_0)\| < \delta$ platí

$$\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_0(x)\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } x \rightarrow \infty.$$

Obecně některá řešení mohou být stabilní a jiná zase nestabilní, také některá atraktivní a jiná neatraktivní.

Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu lineárních rovnic zapsanou ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} \quad (6.5)$$

s maticí \mathbf{A} spojitých koeficientů $a_{ij}(x)$ a vektorem \mathbf{b} spojitých pravých stran $b_i(x)$. Obecné řešení této soustavy lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{u}_1(x) + \cdots + c_n \mathbf{u}_n(x) + \mathbf{y}_p(x),$$

kde funkce $\mathbf{u}_1(x), \dots, \mathbf{u}_n(x)$ jsou n -ticí nezávislých řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ a funkce $\mathbf{y}_p(x)$ libovolným řešením soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Rozdíl mezi řešeními v definici stability lze opět vyjádřit ve tvaru lineární kombinace řešení $\mathbf{u}_i(x)$:

$$\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_0(x) = c_1 \mathbf{u}_1(x) + \cdots + c_n \mathbf{u}_n(x).$$

Proto stejně jako v případě jedné lineární rovnice jsou i v případě lineární soustavy buď všechna řešení stabilní anebo všechna nestabilní. Jestliže jsou všechna $\mathbf{u}_1(x), \dots, \mathbf{u}_n(x)$ omezená, jsou také všechna řešení stabilní. Pokud je alespoň jedno řešení $\mathbf{u}_i(x)$ neomezené, jsou všechna řešení soustavy nestabilní. Dále pokud všechna řešení $\mathbf{u}_1(x), \dots, \mathbf{u}_n(x)$ konvergují k nule pro $x \rightarrow \infty$, jsou všechna řešení soustavy atraktivní, pokud alespoň jedno k nule nekonverguje, všechna řešení jsou neatraktivní.

V případě soustavy rovnic s konstantními koeficienty a_{ij} stabilitu a atraktivitu řešení pro $x \rightarrow \infty$ lze určit z vlastních čísel matice $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$. Jednoduché reálné vlastní číslo λ_i určuje řešení $\mathbf{u}_i(x) = \mathbf{v}e^{\lambda_i x}$, které je v případě $\lambda_i > 0$ neomezené. Pokud $\lambda_i \leq 0$, příslušné řešení je omezené a řešení odpovídající $\lambda_i < 0$ konverguje k nule.

V případě dvojice jednoduchých komplexně sdružených čísel $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$ záleží na reálné části μ , neboť $e^{(\mu \pm i\nu)x} = e^{\mu x} [\cos(\nu x) \pm i \sin(\nu x)]$. V případě násobných kořenů λ se zápornou reálnou částí příslušná řešení konvergují k nule.

Složitější situace je pouze v případě vícenásobného kořene λ s nulovou reálnou částí, kdy některé řešení mohou obsahovat navíc x například pro $\lambda_{1,2} = 0$ máme $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v}e^{0x}$, $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}xe^{0x} + \mathbf{w}e^{0x}$ a být tudíž neomezené.

Uvedené úvahy lze shrnout v následujícím tvrzení:

VĚTA 6.6 Uvažujme soustavu lineárních rovnic (6.5) s konstantními koeficienty. Buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní čísla matice \mathbf{A} koeficientů soustavy. Potom pro $x \rightarrow \infty$ platí:

- (a) Pokud všechna vlastní čísla λ_i mají zápornou reálnou část, potom všechna řešení soustavy jsou stabilní a atraktivní.
- (b) Pokud alespoň jedno vlastní číslo má kladnou reálnou část, potom všechna řešení jsou nestabilní a neatraktivní.
- (c) Pokud všechna vlastní čísla mají nezápornou reálnou část a všechna vlastní čísla s nulovou reálnou částí jsou jednoduchá, potom všechna řešení jsou stabilní a neatraktivní.
- (d) V případě násobných vlastních čísel λ_i s nulovou reálnou částí záleží na tom, zda všechna řešení $u_i(x)$ jsou omezená, nebo alespoň jedno $u_i(x)$ je neomezené.

CVIČENÍ Zkoumejte stabilitu a atraktivitu řešení soustav rovnic z příkladů 3.11-3.13.

Stabilita řešení diferenciálních rovnic n -tého řádu

Uvažujme nyní rovnici n -tého řádu ($n \geq 2$), kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (6.6)$$

Její řešení je určeno jednoznačně n počátečními podmínkami

$$y(x_0) = \gamma_0, \quad y'(x_0) = \gamma_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1}. \quad (6.7)$$

Nechť $x_0 \in I = (x_0, \infty)$ a funkce $y_0(x)$ je řešením počáteční úlohy (6.6)–(6.7) na intervalu I . Opět budeme předpokládat, že všechna řešení v okolí řešení $y_0(x)$ jsou definována na celém intervalu I .

Aby v definici stability řešení $y(x)$ bylo „blízké“ řešení $y_0(x)$, musíme „blízká“ řešení určit ne jedinou ale n „blízkými“ počátečními podmínkami. Pokud rovnici n -tého řádu převedeme na soustavu n rovnic prvního řádu, dojdeme ke stejnému závěru. Pro rovnici vyššího řádu definici stability přepíšeme následovně:

DEFINICE 6.7 Řekneme, že řešení $y_0(x)$ počáteční úlohy (6.6)–(6.7) je **stabilní** v bodě x_0 na intervalu I , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé řešení $y(x)$ rovnice (6.6) splňující podmínky

$$|y(x_0) - y_0(x_0)| < \delta, \quad |y'(x_0) - y_0'(x_0)| < \delta, \quad \dots, \quad |y^{(n-1)}(x_0) - y_0^{(n-1)}(x_0)| < \delta, \quad (6.8)$$

platí

$$|y(x) - y_0(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

Podobně řekneme, že řešení $y_0(x)$ rovnice (6.6) je **atraktivní** pro $x \rightarrow \infty$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé řešení $y(x)$ rovnice (6.6) splňující (6.8) platí

$$|y(x) - y_0(x)| \rightarrow 0 \quad \text{pro } x \rightarrow \infty.$$

Obecně, jako v předcházejících případech, některá řešení rovnice mohou být stabilní a jiná nestabilní. V případě lineárních rovnic je situace jednodušší.

Lineární rovnice n -tého řádu

Uvažujme diferenciální rovnici $L(y) = b(x)$ s lineárním operátorem n -tého řádu

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

a se spojitými koeficienty $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$. Obecné řešení rovnice lze zapsat jako

$$y(x) = c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x) + y_p(x), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R},$$

kde $u_1(x), \dots, u_n(x)$ je n -tice lineárně nezávislých řešení rovnice $L(y) = 0$ a funkce $y_p(x)$ je partikulární řešení, tj. libovolné řešení rovnice $L(y) = b$. Opět rozdíl řešení v definici stability lze vyjádřit jako lineární kombinaci řešení $u_1(x), \dots, u_n(x)$

$$y(x) - y_0(x) = c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x).$$

Proto buď jsou všechna řešení stabilní nebo všechna nestabilní. Také jsou buď všechna řešení atraktivní nebo všechna neatraktivní. Stabilita a atraktivita nezáleží na partikulárním řešení, záleží jen na chování řešení $u_i(x)$ rovnice $L(y) = 0$.

Pokud jsou všechna řešení $u_1(x), \dots, u_n(x)$ omezená, řešení budou stabilní, pokud alespoň jedno $u_k(x)$ omezené není, řešení budou nestabilní. Podobně, pokud všechna řešení $u_1(x), \dots, u_n(x)$ konvergují k nule, řešení jsou atraktivní, v opačném případě řešení atraktivní nejsou.

V případě rovnice s konstantními koeficienty stabilitu určují kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ charakteristického polynomu

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

Podobně jako v předchozím případě soustavy lineárních rovnic, reálná část λ_i určuje omezenost příslušného řešení $u_i(x)$.

Z definice stability a atraktivity a vlastností řešení ODRn s konstantními koeficienty plynou následující tvrzení:

VĚTA 6.8 (STABILITA LINEÁRNÍCH ROVNIC VYŠŠÍHO ŘÁDU)

Uvažujme lineární rovnici $L(y) = b(x)$ s konstantními koeficienty a_0, \dots, a_{n-1} . Označme $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ kořeny příslušného charakteristického polynomu $P(\lambda)$. Potom platí:

- (a) Pokud všechny kořeny λ_i mají zápornou reálnou část, všechna řešení jsou stabilní a atraktivní.
- (b) Pokud alespoň jeden kořen má kladnou reálnou část, všechna řešení jsou nestabilní a neatraktivní.
- (c) Pokud všechny kořeny mají zápornou nebo nulovou reálnou část, kořeny s nulovou reálnou částí jsou jednoduché a existuje alespoň jeden kořen s nulovou reálnou částí, potom všechna řešení jsou stabilní ale nejsou atraktivní.
- (d) V případě vícenásobného kořene s nulovou reálnou částí je alespoň jedno řešení neomezené a tudíž všechna řešení jsou nestabilní a neatraktivní.

CVIČENÍ Zkoumejte stabilitu a atraktivitu řešení rovnic z Příkladů 2.8–2.11.

7. Autonomní rovnice a soustavy

Rovnici nebo soustavu rovnic nazveme **autonomní**, jestliže rovnice nebo soustava nezávisí na nezávislé proměnné. Autonomní rovnici prvního řádu tak můžeme zapsat ve tvaru $y' = f(y)$, autonomní lineární rovnice $y' + ay = b$ má koeficienty a, b konstantní. Zápis autonomní soustavy rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ je podobný zápisu autonomní rovnice prvního řádu, autonomní lineární soustava $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ obsahuje matici konstantních koeficientů $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a konstantní vektor \mathbf{b} na pravé straně. Konečně autonomní rovnici n -tého řádu lze zapsat ve tvaru $y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$.

Ve fyzikálních aplikacích obvykle nezávisle proměnnou x je čas. Pojem autonomní rovnice (systém) je proto přirozený – jde o jevy, při kterých se s časem x nemění podmínky jevu, které tvoří data úlohy; v případě lineární rovnice jsou to koeficienty a pravá strana.

Připomeňme pojem trajektorie řešení soustavy rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$:

DEFINICE 7.1 **Trajektorie** řešení $\mathbf{y}(x)$ je množina hodnot, kterých nabývá řešení, je to průmět grafu řešení v prostoru $I \times \mathbb{R}^n$ do prostoru hodnot, tzv. **fázového prostoru**, kterým je \mathbb{R}^n . Pokud trajektorie je křivka, orientujeme ji podle rostoucího x . V případě konstantního řešení je trajektorií jeden bod, tzv. **singulární trajektorie**.

Pro soustavu n rovnic prvního řádu trajektorie řešení $\mathbf{y}(x), x \in I$ je množina bodů $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x)) \in \mathbb{R}^n, x \in I$, křivka v prostoru \mathbb{R}^n , zatímco graf řešení je křivka v \mathbb{R}^{n+1} . Trajektorie je tak průmět grafu řešení do prostoru \mathbb{R}^n , tzv. fázového prostoru: $\{(y_1(x), \dots, y_n(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in I\}$ v \mathbb{R}^n . Přitom šipka ukazuje orientaci „pohybu“ hodnoty řešení po trajektorii při rostoucím x .

Budeme se zabývat trajektoriemi úplných řešení, tj. řešeními na maximálním intervalu, které už nelze prodloužit na větší interval. Obvykle budeme předpokládat, že podmínky existence a jednoznačnosti jsou splněny.

Rovnice prvního řádu

Přestože autonomie a trajektorie mají význam zejména pro soustavu rovnic, nebo rovnice vyššího řádu, začneme jednorozměrným případem, kdy hodnoty řešení jsou reálná čísla a trajektorie jsou proto úsečky nebo body na přímce.

Autonomní rovnice prvního řádu je rovnice tvaru $y' = f(y)$. Předpokládejme, že funkce $f(y)$ je definovaná, spojitá a lipschitzovská na množině $G \subset \mathbb{R}$. Trajektorie rostoucího řešení je úsečka orientovaná v kladném směru, trajektorie klesajícího řešení je úsečka orientovaná v záporném směru. Trajektorie konstantního řešení je jednobodová množina, tzv. **singulární trajektorie**. Začneme lineární rovnicí:

PŘÍKLAD 7.2 Určete trajektorie řešení lineární rovnice $y' = ay + b$.

Řešení: V tomto případě lze snadno spočítat všechna řešení rovnice a určit jejich trajektorie. Pro $a \neq 0$ řešením jsou funkce

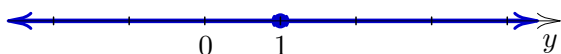
$$y(x) = \frac{c}{a} e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pro $c = 0$ dostáváme konstantní řešení $y(x) = -\frac{b}{a}$, jeho trajektorie je singulární, je to bod $y = -\frac{b}{a}$. Pro $a > 0, c > 0$ dostáváme rostoucí řešení s trajektoriemi $(-\frac{b}{a}, \infty)$ orientovanou kladně, pro $a > 0, c < 0$ je řešení klesající s trajektorií $(-\infty, -\frac{b}{a})$ orientovanou záporně, viz Obr. 25. Obě trajektorie se vzdalují od singulární trajektorie $-\frac{b}{a}$.

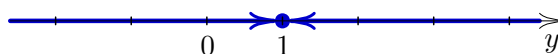
Z obrázku je vidět, že singulární řešení $y(x) = -\frac{b}{a}$ je nestabilní a neatraktivní. Také ostatní řešení jsou nestabilní a neatraktivní.

V případě $a < 0$ je situace odlišná, obě trajektorie jsou orientované opačně, tj. směřují k bodu $-\frac{b}{a}$, viz Obr. 26. V tomto případě singulární řešení $y(x) = -\frac{b}{a}$ je stabilní a atraktivní. Také všechna ostatní řešení jsou stabilní a atraktivní.

V případě $a = 0$, $b \neq 0$ jsou řešením funkce $y(x) = bx + c$, jejich trajektorie je celá přímka orientovaná kladně pro $b > 0$ a orientovaná záporně pro $b < 0$. V případě $a = 0$, $b = 0$ rovnice $y' = 0$ má jen konstantní řešení $y(x) = c$, každý bod reálné přímky je singulární trajektorie. \square



Obr. 25: Trajektorie řešení rovnice $y' = y - 1$.



Obr. 26: Trajektorie řešení rovnice $y' = -y - 1$.

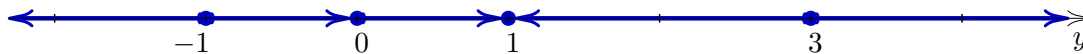
V jednorozměrném případě pro určení trajektorií řešení autonomní rovnice $y' = f(y)$ není nutné počítat řešení. Stačí zkoumat znaménko pravé strany $f(y)$. Nechť funkce $f(y)$ je spojitá a lipschitzovská. Kořeny rovnice $f(y) = 0$ dávají konstantní řešení a jsou to singulární trajektorie. Trajektorie rostoucích řešení jsou otevřené úsečky (bez koncových bodů) orientované kladně, jsou to body kde $f(y)$ je kladná. Trajektorie klesajících řešení jsou otevřené úsečky orientované záporně, jsou to body, kde $f(y) < 0$. Takto lze snadno určit trajektorie řešení autonomní rovnice $y' = f(y)$, výpočet jejíž řešení by byl pracný:

PŘÍKLAD 7.3 Určete trajektorie řešení rovnice $y' = (y + 1)y^2(y - 1)(y - 3)$.

Řešení: Pravá strana rovnice $y' = (y + 1)y^2(y - 1)(y - 3)$ je polynom pátého stupně $f(y) = (y + 1)y^2(y - 1)(y - 3)$, který má kořeny $-1, 0, 1, 3$, přičemž kořen 0 je dvojnásobný. Rovnice proto má čtyři konstantní řešení $y(x) = -1$, $y(x) = 0$, $y(x) = 1$, $y(x) = 3$, které dávají čtyři singulární trajektorie – body $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$, $y = 3$.

Polynom $f(y)$ je v intervalu $y \in (3, \infty)$ kladný, je to součin kladných čísel. Řešení je proto zde rostoucí a jejich trajektorie je otevřená úsečka $(3, \infty)$ orientovaná kladně. Podobně v intervalech $(0, 1)$, $(-1, 0)$ je funkce $f(y)$ také kladná, řešení rostoucí a jejich trajektorie jsou otevřené úsečky $(0, 1)$, $(-1, 0)$ orientované kladně. V intervalech $(1, 3)$, $(-\infty, -1)$ je funkce $f(y)$ záporná, řešení klesající a odpovídající trajektorie jsou otevřené úsečky $(1, 3)$, $(-\infty, -1)$ orientované záporně.

Z obrázku je vidět, že singulární řešení $y(x) = -1$, $y(x) = 0$, $y(x) = 3$ jsou nestabilní a neatraktivní, řešení $y(x) = 1$ je stabilní a atraktivní. \square



Obr. 27: Trajektorie řešení rovnice $y' = (y + 1)y^2(y - 1)(y - 3)$.

CVIČENÍ Určete trajektorie řešení nelineárních rovnic

- (a) $y' = y^2 + 1$ (b) $y' = 2\sqrt{y}$, (c) $y' = y^2$
 (d) $y' = \sqrt{1 - y^2}$ (e) $y' = y(y^2 - 1)$ (f) $y' = \sin y$.

Autonomní soustavy rovnic

Počáteční úlohu pro autonomní soustavu ODR prvního řádu zapisujeme ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\gamma}, \quad (7.1)$$

kde vektorová funkce $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je definovaná a spojitá v oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$. Spojitost vektorové funkce \mathbf{f} zaručuje existenci řešení počáteční úlohy (7.1) pro každé $\boldsymbol{\gamma}$. Přidáme-li podmínku lokální lipschitzovskosti funkce $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, zaručíme jednoznačnost řešení. Potom trajektorie úplných řešení mají následující vlastnosti:

VĚTA 7.4 Trajektorie řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ se spojitou funkcí $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ splňují:

- (a) Trajektorie každého řešení je **souvislá množina** v definičním oboru $G \subset \mathbb{R}^n$.
- (b) Je-li $\mathbf{y}(x)$ úplné řešení definované na intervalu (a, b) , potom pro každé $c \in \mathbb{R}$ funkce $\mathbf{y}_c(x) = \mathbf{y}(x - c)$ je také úplné řešení na $(a + c, b + c)$ a má tutéž trajektorii.
- (c) Pokud $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ je spojitá a lokálně lipschitzovská, každé dvě úplná řešení mají buď disjunktní trajektorie nebo jejich trajektorie splývají (jsou totožné).
- (d) Pokud $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ je spojitá a lokálně lipschitzovská, existují jen tři druhy trajektorií:
 - (i) **singulární bod** – trajektorie konstantního řešení,
 - (ii) **uzavřená neprotínající se křivka**, tzv. **cyklus** – trajektorie periodického řešení,
 - (iii) **neprotínající se křivka** bez koncových bodů – trajektorie ostatních řešení.

Náčrt důkazů.

- (a) Tvrzení je důsledkem vlastnosti spojitého zobrazení: **Spojitě zobrazení souvislou množinu zobrazí na souvislou množinu**. Trajektorie je totiž spojitým obrazem intervalu, tj. souvislé množiny.
- (b) Z rovnosti $\mathbf{y}_c(x) = \mathbf{y}(x - c)$ plyne $\mathbf{y}'_c(x) = [\mathbf{y}(x - c)]' = \mathbf{y}'(x - c) \cdot [x - c]' = \mathbf{y}'(x - c)$. Splňuje-li $\mathbf{y}(x)$ soustavu rovnic pro $x \in (a, b)$, pak $\mathbf{y}'(x - c) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(x - c))$ platí v bodě $x - c$, a tedy $\mathbf{y}_c(x)$ splňuje soustavu rovnic $\mathbf{y}'_c(x) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_c(x))$ pro $(x - c) \in (a, b)$, tj. $x \in (a + c, b + c)$. Obě funkce dávají stejné hodnoty, mají proto stejnou trajektorii.
- (c) Pokud trajektorie dvou řešení $\mathbf{y}_1(x)$ a $\mathbf{y}_2(x)$ mají společný bod, existují $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takové, že platí $\mathbf{y}_1(x_1) = \mathbf{y}_2(x_2)$. Podle předchozího tvrzení pro $c = x_1 - x_2$ platí $\mathbf{y}_1(x_1) = \mathbf{y}_1(x_1 - c) = \mathbf{y}_1(x_2)$, tedy $\mathbf{y}_1(x_2) = \mathbf{y}_2(x_2)$. Lipschitzovskost funkce $\mathbf{f}(x)$ zaručuje jednoznačnost řešení, proto $\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{y}_2(x)$ nejen pro $x = x_2$ ale i pro ostatní x a obě trajektorie jsou totožné. Pokud trajektorie nemají společný bod, jsou disjunktní.
- (d) Konstantní řešení dává singulární trajektorii – případ (i). Nechť úplné řešení není konstantní. Jestliže $\mathbf{y}(x_1) = \mathbf{y}(x_2)$ pro $x_1 < x_2$, potom opět pro $c = x_2 - x_1$ platí $\mathbf{y}_c(x) = \mathbf{y}(x - c)$ pro $x = x_1$. Jednoznačnost řešení dává $\mathbf{y}_c(x) \equiv \mathbf{y}(x - c) = \mathbf{y}(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Řešení $\mathbf{y}(x)$ je proto periodická funkce s periodou $c = x_2 - x_1$ a její trajektorie je uzavřená neprotínající se křivka – případ (ii).

Pokud se trajektorie nekonstantního řešení neprotíná, tj. pro každé $x_1 \neq x_2$ platí $\mathbf{y}(x_1) \neq \mathbf{y}(x_2)$, trajektorie je neprotínající se křivka. Křivka nemá koncové body, protože v koncovém bodě nekonstantního řešení by řešení šlo prodloužit a bod by nebyl koncovým bodem trajektorie případ – (iii).

□

V případě $n = 2$ je grafem řešení křivka v \mathbb{R}^3 , trajektorií množina (většinou křivka) v rovině, kterou lze načrtnout. Budeme se proto zabývat zejména soustavou dvou rovnic, i když příslušná tvrzení platí také pro soustavu tří a více rovnic.

PŘÍKLAD 7.5 Určete trajektorie řešení soustavy rovnic $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1$.

Řešení: Do zderivované první rovnice $y_1'' = -y_2'$ dosadíme za neznámou y_2' z druhé rovnice. Dostáváme tak rovnici $y_1'' + y_1 = 0$, jejímž obecným řešením je $y_1(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Z první rovnice $y_2 = -y_1'$ dopočítáme $y_2(x)$. Získali jsme tak řešení:

$$y_1(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad y_2(x) = c_1 \sin x - c_2 \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Výpočtem lze snadno ověřit, že pro každé $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

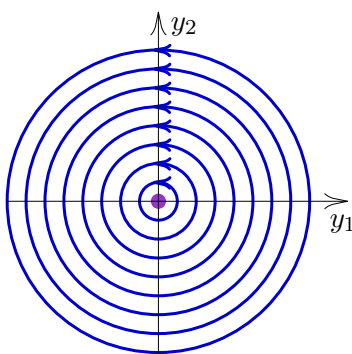
$$y_1^2(x) + y_2^2(x) = (c_1 \cos x + c_2 \sin x)^2 + (c_1 \sin x - c_2 \cos x)^2 = c_1^2 + c_2^2 \equiv k.$$

Pro $k > 0$ trajektorie jsou kružnice se středem v počátku. Tečný vektor kružnice s $c_1 > 0$, $c_2 = 0$, v $x = \frac{\pi}{2}$ dává orientaci $(-\sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}) = (-1, 0)$ kružnic v bodech $(0, c_1)$. Hodnota $k = 0$ dává konstantní řešení $\mathbf{y}(x) = \mathbf{0}$ se singulární trajektorií $(0, 0)$, viz Obr. 28. \square

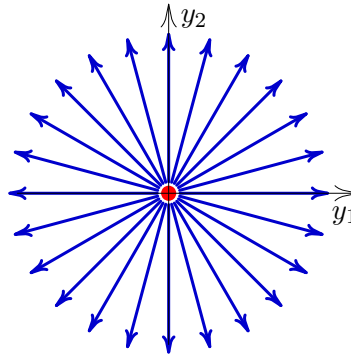
PŘÍKLAD 7.6 Určete trajektorie řešení soustavy rovnic $y_1' = y_1$, $y_2' = y_2$.

Řešení: Rovnice $y_1' = y_1$ má řešení $y_1(x) = c_1 e^x$, rovnice $y_2' = y_2$ dává řešení $y_2 = c_2 e^x$. Příklad $c_1 = c_2 = 0$ dává singulární trajektorii $(0, 0)$. Pro $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ dostáváme trajektorii $\mathbf{y}(x) = (0, c_2 e^x)$, což je pro $c_2 > 0$ kladná část a pro $c_2 < 0$ záporná část osy y_2 , obě trajektorie směřují od počátku.

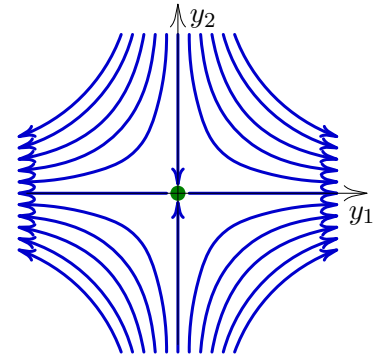
Pro ostatní $c_1 \neq 0$ a $c_2 \in \mathbb{R}$ dostáváme rovnost $y_2(x) = (c_2/c_1) y_1(x)$, kde $y_1(x) = c_1 e^x$. Jsou to polopřímky vycházející z počátku orientované od počátku, se směrnici c_2/c_1 . Trajektorie řešení jsou na Obr. 29. \square



Obr. 28: Trajektorie řešení soustavy $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1$.



Obr. 29: Trajektorie řešení rovnice $y_1' = y_1$, $y_2' = y_2$.



Obr. 30: Trajektorie řešení rovnice $y_1' = y_1$, $y_2' = -y_2$.

PŘÍKLAD 7.7 Určete trajektorie řešení soustavy rovnic $y_1' = y_1$, $y_2' = -y_2$.

Řešení: Rovnice $y_1' = y_1$ má řešení $y_1(x) = c_1 e^x$, rovnice $y_2' = -y_2$ dává řešení $y_2 = c_2 e^{-x}$. Opět $c_1 = c_2 = 0$ dává nulové řešení se singulární trajektorií $(0, 0)$. Trajektorie pro $c_1 = 0$ je pro $c_2 > 0$ kladná část a pro $c_2 < 0$ záporná část osy y_2 směřující do počátku. Pro $c_2 = 0$ dostáváme kladnou a zápornou část osy y_1 , trajektorie jsou orientovány od počátku.

Jaké jsou ostatní trajektorie? Součin $y_1(x) y_2(x) = c_1 c_2$ je konstantní, trajektorie jsou proto větve hyperbol $y_2 = k/y_1$ orientované k ose y_1 a od osy y_2 , viz Obr. 30. \square

Typy singulárních bodů v rovině

Budeme se zabývat autonomní soustavou dvou rovnic

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \text{tj.} \quad y_1' = f_1(y_1, y_2), \quad y_2' = f_2(y_1, y_2). \quad (7.2)$$

Předpokládáme, že funkce $f_1(y_1, y_2)$, $f_2(y_1, y_2)$ jsou definované, spojité a lokálně lipschitzovské v oblasti¹ G . Proto každým bodem \mathbf{y} množiny G prochází právě jedna trajektorie. Víme, že trajektorie jsou buď body, tzv. singulární body – trajektorie konstantních řešení, nebo regulární body trajektorií, které jsou neprotínající se uzavřené nebo otevřené křivky. Různé trajektorie jsou disjunktní, oblast G v rovině y_1, y_2 se tak rozpadne na body a neprotínající se křivky.

Souřadnice singulárního bodu \mathbf{y}_0 splňují soustavu $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$. V ostatních bodech \mathbf{y} platí $\mathbf{f}(\mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$, tj. buď $f_1(y_1, y_2) \neq 0$, nebo $f_2(y_1, y_2) \neq 0$. Protože funkce $f_1(y_1, y_2)$ a $f_2(y_1, y_2)$ jsou spojité, regulární bod \mathbf{y}^* , kde $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) \neq \mathbf{0}$, má okolí, kde $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ jsou také nenulové. Díky tomu každým bodem okolí prochází také regulární trajektorie.

Tyto trajektorie v okolí \mathbf{y}^* tvoří množinu navzájem disjunktních „rovnoběžných“ a „soulhasně orientovaných“ neprotínajících se křivek, které lze spojitě převést jednu na druhou se zachováním orientace.

V ryzím okolí² singulárního bodu – trajektorii konstantního řešení – je situace odlišná, trajektorie se mohou chovat různě, viz Obr. 28, 29, 30. Rozlišujeme následující typy izolovaných³ singulárních bodů v rovině:

DEFINICE 7.8 (TYPY IZOLOVANÝCH SINGULÁRNÍCH BODŮ V ROVINĚ)

Uvažujme trajektorie řešení soustavy rovnic (7.2). Nechť \mathbf{y}_0 je izolovaný singulární bod soustavy (7.2), tj. izolované řešení soustavy rovnic $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Bod \mathbf{y}_0 se nazývá:

střed – pokud existuje ryzí okolí U bodu \mathbf{y}_0 , ve kterém každým bodem $\mathbf{y} \in U$ prochází uzavřená trajektorie obsahující ve svém vnitřku bod \mathbf{y}_0 .

atraktivní uzel – pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie směřující do tohoto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie má limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0, \quad \text{a existuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

neatraktivní uzel – pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie vycházející z tohoto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie má limitu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0, \quad \text{a existuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

atraktivní ohnisko – pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie blížící se k tomuto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie nemá limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0, \quad \text{a neexistuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

¹Oblast je souvislá otevřená množina

²Ryzí okolí bodu x je okolí bodu x bez bodu x .

³Bod x je izolovaný bod množiny M , pokud existuje okolí U bodu x takové, že $U \cap M = \{x\}$

neatraktivní ohnisko – pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie vycházející z tohoto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie nemá limitu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0, \quad \text{a neexistuje limita} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathbf{y}'(x)}{\|\mathbf{y}'(x)\|}.$$

sedlo – pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém existuje jen konečně mnoho trajektorií, které se k němu blíží, a konečně mnoho trajektorií, které se od něj vzdalují, tj. existuje konečně mnoho řešení $\mathbf{y}_1(x)$ a $\mathbf{y}_2(x)$ takových, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}_1(x) = \mathbf{y}_0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{y}_2(x) = \mathbf{y}_0.$$

POZNÁMKY 7.9

- Singulární bod na Obr. 28 je střed, na Obr. 29 je neatraktivní uzel a na Obr. 30 je sedlo. V obecném případě trajektorie kolem středu mohou být elipsy, a v případě atraktivního uzlu trajektorie u singulárního bodu mohou být zakřivené.
- V literatuře lze najít také jiná jména. Singulárnímu bodu **střed** se říká také **centrum**, **atraktivní** (uzel nebo ohnisko) se nazývá také **přitahující** a **neatraktivní** (uzel nebo ohnisko) se nazývá také **odpuzující**.
- Uzel a ohnisko se liší limitou tečného vektoru. V případě atraktivního uzlu se trajektorie při $x \rightarrow \infty$ blíží k singulárnímu bodu „přímo“, tj. limita orientovaného úhlu, který svírá tečný vektor s osou y má konečnou limitu. V případě atraktivního ohniska se trajektorie blíží k singulárnímu bodu po spirále „obíhající“ singulární bod nekonečně mnoho krát, tj. orientovaný úhel tečny nemá konečnou limitu, ale roste do nekonečna, nebo klesá do $-\infty$. V případě neatraktivního uzlu nebo ohniska jde o limity pro $x \rightarrow -\infty$.
- Lze dokázat, že izolované singulární body v rovině, tj. v případě soustavy dvou rovnic, mohou být pouze uvedených typů: střed, uzel, ohnisko a sedlo.
- Zatím jsme se zabývali izolovanými singulárními body. V případě, kdy singulární body v rovině tvoří křivku, mohou nastat tyto případy:
 - Bod křivky je atraktivní uzel, tj. blíží se k němu dvě trajektorie.
 - Bod křivky je neatraktivní uzel, tj. vycházejí od něho dvě trajektorie.
 - Trajektorie v okolí křivky singulárních bodů vedou „rovnoběžně“ podél křivky.
- Singulární trajektorie mohou zaplnit plochu, například soustava diferenciálních rovnic $y'_1 = 0$, $y'_2 = 0$ má jen konstantní řešení, singulární body zaplňují celou rovinu.

Linearizace nelineární soustavy rovnic

V předchozím odstavci jsme studovali singulární bod \mathbf{y}_0 obecné soustavy nelineárních rovnic (7.4). Posunutím, tj. transformací $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y}^* = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$, lze singulární bod \mathbf{y}_0 převést do počátku $\mathbf{0}$ a studovat chování řešení v okolí singulárního bodu $\mathbf{0} = (0, 0)$ soustavy rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{f}^*(\mathbf{y})$, přičemž

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{y}_0).$$

Tyto posunuté funkce splňují $\mathbf{f}^*(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Dále nelineární funkce $f_1^*(y_1, y_2)$, $f_2^*(y_1, y_2)$ lze v okolí počátku $(0, 0)$ linearizovat

$$f_1^*(y_1, y_2) \approx A_{11} y_1 + A_{12} y_2, \quad f_2^*(y_1, y_2) \approx A_{21} y_1 + A_{22} y_2,$$

kde konstanty A_{ij} jsou parciální derivace funkcí $f_1^*(y_1, y_2)$, $f_2^*(y_1, y_2)$ v počátku:

$$A_{11} = \frac{\partial f_1^*}{\partial y_1}(0, 0), \quad A_{12} = \frac{\partial f_1^*}{\partial y_2}(0, 0), \quad A_{21} = \frac{\partial f_2^*}{\partial y_1}(0, 0), \quad A_{22} = \frac{\partial f_2^*}{\partial y_2}(0, 0).$$

Tímto způsobem lze typ singulárního bodu \mathbf{y}_0 nelineární soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ studovat pomocí přidružené homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí koeficientů $\mathbf{A} = (A_{ij})$

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A} \mathbf{y}(x). \quad (7.3)$$

Singulární body lineární soustavy

Uvažujme homogenní lineární soustavu rovnic (7.3). Tato soustava má obecné řešení

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{u}_1(x) + c_2 \mathbf{u}_2(x).$$

Pro $c_1 = c_2 = 0$ dostáváme nulové řešení, které dává singulární bod $(0, 0)$. Pokud matice \mathbf{A} je regulární, rovnice $\mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{0}$ má jen nulové řešení, a bod $\mathbf{0}$ je jediným singulárním bodem. Trajektorie v jeho okolí jsou určeny pomocí řešení $\mathbf{u}_1(x)$ a $\mathbf{u}_2(x)$, která závisí na kořenech λ_1, λ_2 charakteristického polynomu

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{A}) \lambda + \det(\mathbf{A}). \quad (7.4)$$

Uvažujme nejdříve nenulové kořeny, tj. případ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, díky kterým jediným singulárním bodem je počátek $\mathbf{0}$, který je také izolovaným singulárním bodem. Podle hodnoty diskriminantu rovnice $D = \text{Tr}(\mathbf{A})^2 - 4 \det(\mathbf{A})$ rozlišujeme tři případy:

- (1) $D > 0$ – rovnice má dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2 , které dávají řešení $\mathbf{u}_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $\mathbf{u}_2(x) = e^{\lambda_2 x}$. Je-li $\lambda > 0$ řešení $\mathbf{u}(x)$ se vzdaluje, tj. $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(x)\| = \infty$, řešení není atraktivní. Pro $\lambda < 0$ řešení $\mathbf{u}(x)$ se blíží k počátku, tj. $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(x)\| = 0$. Dostáváme tak tři případy kořenů a tím i singulárních bodů:

(1a) oba kořeny jsou kladné $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ – počátek je **neatraktivní uzel**,

(1b) jeden je záporný a druhý kladný: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ – vychází **sedlo**,

(1c) oba kořeny jsou záporné: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ dostáváme – **atraktivní uzel**.

- (2) $D < 0$ – rovnice má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_1 = \mu + i\nu$, $\lambda_2 = \mu - i\nu$. Obecné řešení je $\mathbf{y} = e^{\mu x}(c_1 \cos(\nu x) + c_2 \sin(\nu x))$. Reálná část μ určuje, zda se řešení blíží nebo vzdaluje počátku. Imaginární část $\nu \neq 0$ dává rotaci okolo počátku. Rozlišíme opět tři případy:

(2a) reálná část μ kořenů je kladná – počátek je **neatraktivní ohnisko**,

(2b) reálná část μ kořenů je záporná – vychází **atraktivní ohnisko**,

(2c) reálná část μ kořenů je nulová – dostáváme **střed**.

- (3) $D = 0$ – rovnice má dvojnásobný reálný kořen $\lambda_{1,2} = \lambda$. V tomto případě rozlišíme dva případy. Závisí na hodnotě matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$. Pokud $h(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, máme dva nezávislé vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ splňující $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_i = 0$ a tím i dvě nezávislá řešení $\mathbf{u}_i(x) = \mathbf{v}_i e^{\lambda x}$, trajektorie jsou polopřímky.

Pokud $h(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 1$, existuje „řetězec“ nenulových vektorů \mathbf{v}, \mathbf{w} , viz Kap. 3, splňující $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Tyto vektory dávají řešení $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v} e^{\lambda x}$, $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v} x e^{\lambda x} + \mathbf{w} e^{\lambda x}$. Protože e^x „převládne“ x v součinu $x e^x$, v obou případech:

(3a) $\lambda > 0$ – **neatraktivní uzel**, trajektorie se vzdalují od singulárního bodu,

(3b) $\lambda < 0$ – **atraktivní uzel**, trajektorie se blíží k singulárnímu bodu.

- (4) Nechť jeden kořen λ_1 je nulový a druhý λ_2 nenulový. Matice \mathbf{A} je singulární, řešení rovnice $\mathbf{A}\mathbf{y} = 0$ tvoří přímku určenou vektorem \mathbf{v}_1 , který splňuje rovnici $\mathbf{A}\mathbf{v} = 0$. Všechny body přímky jsou trajektorie konstantních řešení $\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{v}_1$. Pro jejich klasifikaci převezmeme názvy zavedené pro izolované singulární trajektorie.

Druhý kořen λ_2 dává řešení $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 x}$. Podle znaménka λ_2 platí: do (nebo z) každého singulárního bodu přímky vedou dvě trajektorie:

(4a) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ – singulární body jsou **neatraktivní uzly**, trajektorie se rovnoběžně vzdalují od singulárních bodů,

(4b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ – singulární body jsou **atraktivní uzly**, trajektorie se rovnoběžně přibližují k singulárním bodům.

- (5) Nula je dvojnásobný kořen. Podle hodnoty matice \mathbf{A} máme dva případy:

(5a) Jestliže $h(\mathbf{A}) = 1$, singulární body tvoří přímku určenou vektorem \mathbf{v} , který je nenulovým řešením $\mathbf{A}\mathbf{v} = 0$. Trajektorie druhého řešení $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v} x + \mathbf{w}$ jsou rovnoběžné s přímkou singulárních bodů – body nazveme **střed**,

(5b) pokud $h(\mathbf{A}) = 0$, tedy \mathbf{A} je nulová matice, singulární body tvoří celou rovinu.

Odvodili jsme následující tvrzení o typech singulárních bodů:

VĚTA 7.10 Uvažujme soustavu lineárních rovnic (7.3) a odpovídající charakteristickou rovnici (7.4) s nenulovými kořeny λ_1, λ_2 . Potom izolovaný singulární bod $(0, 0)$ je

neatraktivní uzel, pokud oba kořeny jsou reálné a kladné, tj. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$,

atraktivní uzel, pokud oba kořeny jsou reálné a záporné, tj. $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$,

sedlo, pokud jeden kořen je kladný a druhý záporný, tj. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$,

neatraktivní ohnisko, pokud kořeny jsou komplexně sdružené s kladnou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$, ($\mu > 0, \nu \neq 0$),

atraktivní ohnisko, pokud kořeny jsou komplexně sdružené se zápornou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$, ($\mu < 0, \nu \neq 0$),

střed, pokud kořeny jsou komplexně sdružené s nulovou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$, ($\nu \neq 0$).

V případě nulového kořene singulární body nejsou izolované, tvoří přímku, v případě hodnoty $h(\mathbf{A}) = 0$, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ celou rovinu. Pokud $h(\mathbf{A}) = 1$, singulární body jsou:

neatraktivní uzel, pokud druhý nenulový kořen je $\lambda_2 > 0$,

atraktivní uzel, pokud druhý nenulový kořen je $\lambda_2 < 0$,

střed, pokud nula je dvojnásobný kořen, ale $h(\mathbf{A}) = 1$.

POZNÁMKA 7.11 Předchozí věta platí pro soustavu lineárních ODR. V případě nelineární soustavy ODR chování jejích řešení v okolí singulárního bodu je stejné jako chování řešení příslušných linearizovaných ODR v případě, kdy kořeny mají nenulovou reálnou část. V případě nulových kořenů, nebo kořenů s nulovou reálnou částí už toto tvrzení neplatí, protože v okolí už kořeny nemusí mít nulovou reálnou část.

Jednotlivé případy ilustrujeme na konkrétních příkladech: ukážeme způsob načrtu trajektorií a uvedeme obrázky skutečných trajektorií.

PŘÍKLAD 7.12 Určete trajektorie řešení soustavy rovnic $y_1' = 2y_1 + y_2$, $y_2' = y_1 + 2y_2$.

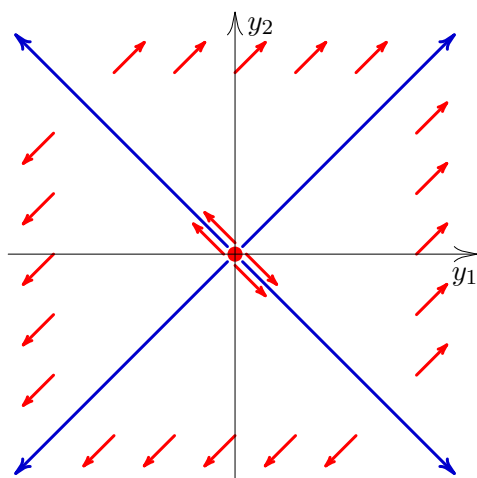
Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom je $\lambda^2 - 4\lambda + 3$ má dva různé kladné kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Singulární bod – počátek $(0, 0)$ je proto **neatraktivní uzel**.

Jak načrtnout fázový portrét singulárního bodu, tj. trajektorie v jeho okolí? Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{v}_i = 0$ dává vektory $\mathbf{v}_1 = (1, -1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1)^T$. Obecné řešení je proto

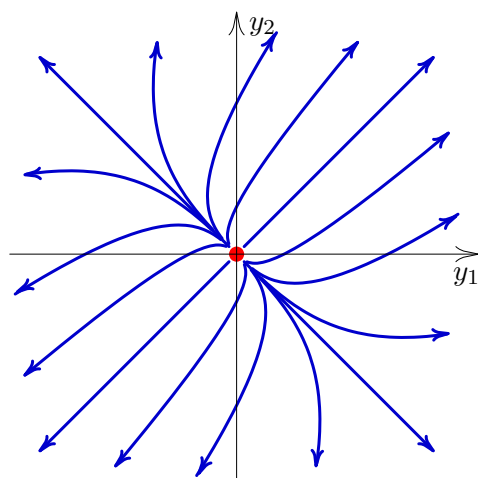
$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{u}_1(x) + c_2 \mathbf{u}_2(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Případ $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$ dává dvě polopřímky $y_2 = -y_1$. Kombinace $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ dává opět dvě polopřímky $y_2 = y_1$, všechny polopřímky jsou orientované od počátku. V případě nenulových c_1, c_2 určíme tečny trajektorií vycházejících z počátku, tedy při $x \rightarrow -\infty$:

$$\frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \frac{-c_1 e^x + 3c_2 e^{3x}}{c_1 e^x + 3c_2 e^{3x}} = \frac{-c_1 + 3c_2 e^{2x}}{c_1 + 3c_2 e^{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{-c_1}{c_1} = -1.$$



Obr. 31: Trajektorie a tečné vektory v 0 a ∞ .



Obr. 32: Skutečné trajektorie řešení.

Podobně určíme tečny při $x \rightarrow \infty$, tj. trajektoriích jdoucích do nekonečna, tj. vzda-

lujících se od počátku:

$$\frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \frac{-c_1 e^x + 3 c_2 e^{3x}}{c_1 e^x + 3 c_2 e^{3x}} = \frac{-c_1 3 e^{-2x} + c_2}{c_1 3 e^{-2x} + c_2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{c_2}{c_2} = 1.$$

Načtneme tečny v okolí počátku a na okraji obrázku a spojíme je hladkými křivkami, které se neprotínají a které nemají inflexní body, tj. jsou „prohnuté“ stále na jednu stranu. Tyto trajektorie nevycházejí z nuly, ale při $x \rightarrow -\infty$ se k ní jen „blíží“. \square

Porovnáním náčrtu tečen v nekonečnu s tečnami skutečných trajektorií je vidět, že tečny skutečných trajektorií se liší od „tečen v nekonečnu“, načrtnutou tečnu dosáhnou až „v nekonečnu“.

PŘÍKLAD 7.13 Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = -y_1 - 3y_2$, $y_2' = y_1 - 5y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom je $\lambda^2 + 6\lambda + 8$ má dva různé záporné kořeny $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$. Singulární bod – počátek $(0, 0)$ je proto **atraktivní uzel**.

Pro fázový portrét singulárního bodu spočítejme nejprve fundamentální řešení U . Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{v}_i = 0$ dává pro $\lambda_1 = -2$ vektor $\mathbf{v}_1 = (3, 1)$ a pro $\lambda_2 = -4$ vektor $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$. Obecné řešení je proto

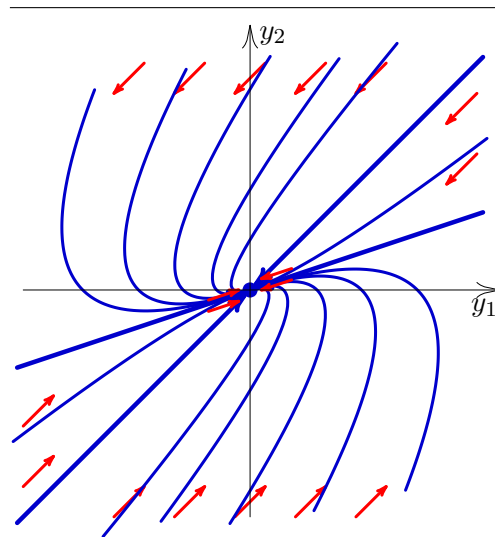
$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4x}.$$

Nejprve načtneme trajektorie řešení $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$. Jsou to dva páry polopřímek orientovaných do počátku se směrovými vektory $(3, 1)$, $(1, 1)$. Určeme tečné směry ostatních trajektorií v počátku, tj. pro $x \rightarrow \infty$, a v nekonečnu, tj. pro $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2c_1 e^{-2x} - 4c_2 e^{-4x}}{-6c_1 e^{-2x} - 4c_2 e^{-4x}} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2c_1 e^{-2x} - 4c_2 e^{-4x}}{-6c_1 e^{-2x} - 4c_2 e^{-4x}} = \frac{1}{1}.$$

Trajektorie ve větším úhlu přicházející se směrnici 1 se musejí otočit skoro do „protisměru“, aby získaly směrnici $1/3$. \square



Obr. 33: Fázový portrét řešení.

PŘÍKLAD 7.14 Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 - 3y_2$, $y_2' = 3y_1 - 5y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom je $\lambda^2 + 4\lambda + 4$ má jeden dvojnásobný záporný kořen $\lambda = -2$. Singulární bod – počátek $(0, 0)$ je proto **atraktivní uzel**.

Pro fázový portrét určíme fundamentální řešení U . Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ pro $\lambda = -2$ dává jediný vektor $\mathbf{v} = (1, 1)$ a tím jedno řešení $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v} e^{-2x}$. Podle části 3 případ (2C) druhé nezávislé řešení je $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v} x e^{-2x} + \mathbf{w} e^{-2x}$, kde \mathbf{w} splňuje soustavu

rovnice $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$, což jsou dvě stejné rovnice $3w_1 - 3w_2 = 1$. Zvolíme-li $w_2 = 0$, dostáváme $w_1 = \frac{1}{3}$. Obecné řešení je tedy

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x e^{-2x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2x} \right] = \begin{pmatrix} c_1 + c_2(x + \frac{1}{3}) \\ c_1 + c_2 x \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Trajektorie řešení $c_1 \mathbf{u}_1(x)$ je opět dvojice polopřímek $y_2 = y_1$ směřujících do počátku, který je singulárním bodem. Tečné směry obecného řešení $\mathbf{y}(x)$ v počátku, tj. pro $x \rightarrow \infty$, i v nekonečnu, tj. $x \rightarrow -\infty$, mají také směrnici rovnu 1 nezávisle na c_i , neboť

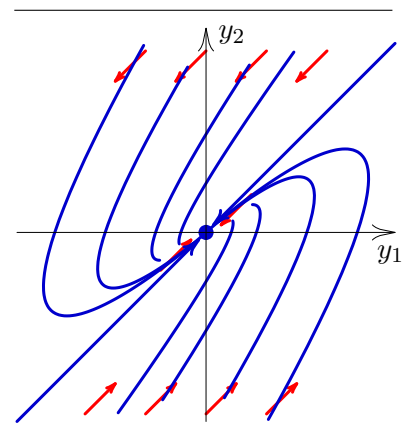
$$\frac{y'_2(x)}{y'_1(x)} = \frac{[c_2 - 2(c_1 + c_2 x)]e^{-2x}}{[c_2 - 2(c_1 + c_2(x + \frac{1}{3}))]e^{-2x}} \rightarrow \frac{-2c_2 x}{-2c_2 x} = 1, \quad \text{pro } x \rightarrow \pm\infty.$$

Jak vypadá trajektorie řešení pro $c_2 \neq 0$? Víme, že je pod nebo nad přímkou $y_2 = y_1$, tj. trajektoriemi $\mathbf{u}_1(x)$, s kterými se nesmí protnout. Jde zleva doprava a pak se otáčí do protisměru nebo obráceně? Pro $c_2 > 0$ ze vzorce plyne $y_2(x) < y_1(x)$, tj. trajektorie řešení leží pod přímkou $y_2 = y_1$. Spočítejme derivaci konkrétního řešení. Pro $c_2 = 2c_1 > 0$ vyjde

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \end{pmatrix} = -4c_1 \begin{pmatrix} x + \frac{1}{3} \\ x \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Obě složky pro $x \rightarrow -\infty$ mají kladnou derivaci, od $x = -\frac{1}{3}$ se derivace $y'_1(x)$ mění na zápornou a od $x = 0$ obě složky mají derivaci zápornou. Trajektorie leží pod přímkou $y_1 = y_2$ proto z JZ „nekonečna“ směřují k SV, pak se otáčejí k SZ a nakonec se otáčejí k počátku JZ směrem.

Záporné c_2 dávají trajektorie středově symetrické podle počátku s trajektoriemi s $c_2 > 0$. Tedy pro řešení s $c_2 \neq 0$ trajektorie se směrnici 1 v $-\infty$ se musejí otočit do „protisměru“, aby získali směrnici 1. \square



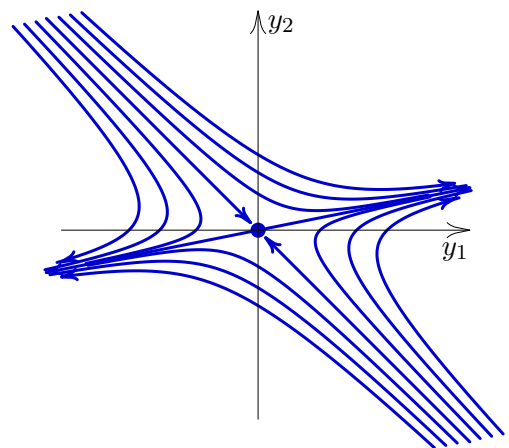
Obr. 34: Fázový portrét řešení.

PŘÍKLAD 7.15 Určete trajektorie řešení soustavy $y'_1 = y_1 + 5y_2$, $y'_2 = y_1 - 3y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom $\lambda^2 + 2\lambda - 8$ má jeden kladný $\lambda_1 = 2$ a jeden záporný kořen $\lambda_2 = -4$. Singulární bod – počátek $(0,0)$ je proto **sedlo**.

Pro fázový portrét spočítejme obecné řešení. Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ pro $\lambda_1 = 2$ dává vektor $\mathbf{v}_1 = (5, 1)$ a pro $\lambda_2 = -4$ vektor $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$. Získáme tím dvě nezávislá řešení: neatraktivní $\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v}_1 e^{2x}$ a atraktivní $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}_2 e^{-4x}$. Obecné řešení je tedy

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4x}.$$



Obr. 35: Fázový portrét řešení.

Trajektorie $c_1 \mathbf{u}_1(x)$ je dvojice polopřímek $y_2 = \frac{1}{5}y_1$ orientovaných od počátku, trajektorie $c_2 \mathbf{u}_2(x)$ je dvojice polopřímek $y_2 = -y_1$ orientovaných do počátku. Ostatní trajektorie přicházejí z nekonečna se směrnici -1 a otáčejí se do nekonečna se směrnici $\frac{1}{5}$. \square

PŘÍKLAD 7.16 Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 - 5y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom $\lambda^2 + 4$ má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Singulární bod $(0, 0)$ je proto **střed**, trajektorie budou soustředné elipsy se středem v počátku.

Spočítejme obecné řešení. Matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ pro $\lambda = 2i$ má řádky

$$\mathbf{A} - 2i \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 - 2i & -5 \\ 1 & -1 - 2i \end{pmatrix}.$$

Vynásobením druhého řádku číslem $(1 - 2i)$ dostáváme první řádek, rovnice v soustavě $(\mathbf{A} - 2i \mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ jsou proto závislé. Druhá rovnice dává $v_1 = (1 + 2i)v_2$, odkud plyne například $\mathbf{v} = (1 + 2i, 1)$. Dostáváme tím komplexní řešení:

$$\mathbf{u}^*(x) = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos(2x) + i \sin(2x)).$$

Reálná a imaginární část $\mathbf{u}^*(x)$ dává dvojici reálných řešení $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$, obecné řešení proto je:

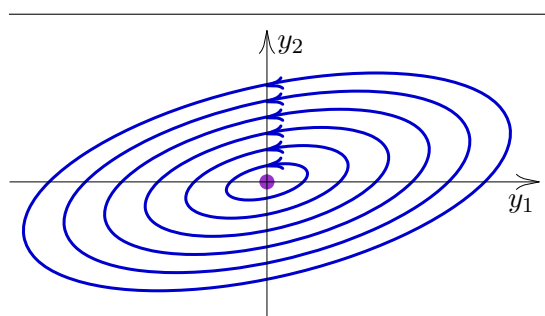
$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{u}_1(x) + c_2 \mathbf{u}_2(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(2x) - 2 \sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(2x) + 2 \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Protože funkce $\cos(2x)$, $\sin(2x)$ jsou periodické s periodou π , dostáváme periodické křivky, které obíhají počátek s periodou π . Jaká je orientace křivky? Volba $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ dává řešení $\mathbf{u}_1(x)$, tj. $y_1(x) = \cos(2x) - 2 \sin(2x)$, $y_2(x) = \cos(2x)$. Vyčíslíme řešení $\mathbf{u}_1(x)$ a jeho derivaci pro $x = 0$: $\mathbf{y}(0) = (1, 1)$ a $\mathbf{y}'(0) = (-4, 0)$ a vyznačíme v grafu. Trajektorie bude orientovaná v kladném smyslu, tj. pro směru hodinových ručiček. Můžeme také postupně vykreslit body $\mathbf{y}(x)$ pro vhodná: $x = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$, dostaneme tak postupně body $(1, 1)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-2, 0)$, $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-1, -1)$.

Dosažením za y_1, y_2 lze ověřit, že body trajektorie splňují rovnici $y_1^2 - 2y_1 y_2 + 5y_2^2 = 4$, což je rovnice elipsy. Její extrémy v y_1 i y_2 lze spočítat pomocí metod vyšetřování implicitní funkce

$$F(x, y) = y_1^2 - 2y_1 y_2 + 5y_2^2 - 4 = 0.$$

Pro $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, nebo obecnou volbou splňující $c_1^2 + c_2^2 = 1$ dostáváme stejnou rovnici a identickou elipsu jen s posunutou parametrizací. V případě $c_1^2 + c_2^2 = k^2$ dostáváme elipsy k -krát větší. \square



Obr. 36: Fázový portrét singulárního bodu.

PŘÍKLAD 7.17 Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = 3y_1 - 4y_2$, $y_2' = 2y_1 - y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, příslušný charakteristický polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$.

Singulární bod $(0, 0)$ je proto **neatraktivní ohnisko**, trajektorie budou soustředné spirály vzdalující se od počátku.

Spočítejme obecné řešení. Matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ pro $\lambda = 1 - 2i$ má řádky

$$\mathbf{A} - (1 - 2i) \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 + 2i & -4 \\ 2 & -2 + 2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 + i & -2 \\ 1 & -1 + i \end{pmatrix}.$$

Vynásobením druhého řádku číslem $(1 + i)$ dostáváme první řádek, rovnice v soustavě $(\mathbf{A} - (1 - 2i) \mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ jsou proto závislé. Druhá rovnice dává $v_1 = (1 - i)v_2$, odkud plyne $\mathbf{v} = (1 - i, 1)$. Dostáváme tím komplexní řešení:

$$\mathbf{u}^*(x) = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \end{pmatrix} e^x (\cos(2x) - i \sin(2x)).$$

Reálná a imaginární část $\mathbf{u}^*(x)$ dává dvojici reálných řešení $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x)$, obecné řešení je proto po změně znaménka \mathbf{u}_2 :

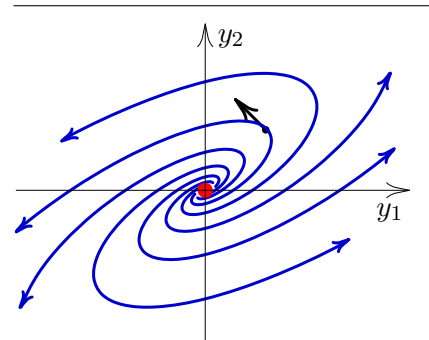
$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{u}_1(x) + c_2 \mathbf{u}_2(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(2x) - \sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} \sin(2x) + \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} e^x.$$

Funkce $\cos(2x)$, $\sin(2x)$ jsou periodické s periodou π , obstarávají pohyb okolo počátku, funkce e^x způsobuje vzdalování se od počátku, spirála se bude vzdalovat od počátku.

Jaká je orientace spirály? Opět zvolme $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Dostáváme řešení $\mathbf{u}_1(x)$ se složkami

$$y_1(x) = (\cos(2x) - \sin(2x))e^x, \quad y_2(x) = \cos(2x)e^x.$$

Vyčíslíme hodnoty řešení a jeho derivace pro $x = 0$: $\mathbf{y}(0) = (1, 1)$ a $\mathbf{y}'(0) = (-1, 1)$ a vyznačíme v grafu. Vidíme, že tečna vpravo od počátku má SZ směr, trajektorie bude orientovaná v kladném smyslu, tj. proti směru hodinových ručiček a bude se vzdalovat od počátku. Jinou možností je vyčíslit body $\mathbf{y}(x)$ pro zvětšující se x . \square



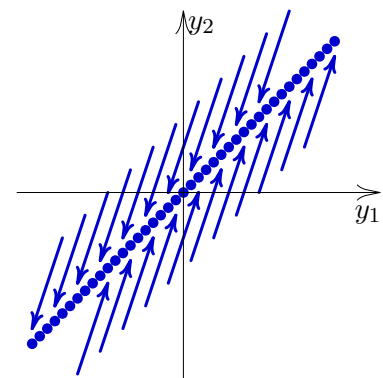
Obr. 37: Fázový portrét řešení.

PŘÍKLAD 7.18 Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 - y_2$, $y_2' = 3y_1 - 3y_2$.

Řešení: Matice soustavy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ je singulární, rovnice $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ má nekonečně mnoho řešení, jsou to násobky $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$. Singulární body proto tvoří přímku $y_2 = y_1$.

Charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda$ má vedle nulového kořene λ_1 záporný kořen $\lambda_2 = -2$. Spočítejme obecné řešení. Soustava $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = 0$ pro $\lambda_1 = 0$ dává vektor $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$, pro $\lambda_2 = -2$ vektor $\mathbf{v}_2 = (1, 3)$. Obecné řešení proto je:

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2x}.$$



Obr. 38: Fázový portrét řešení.

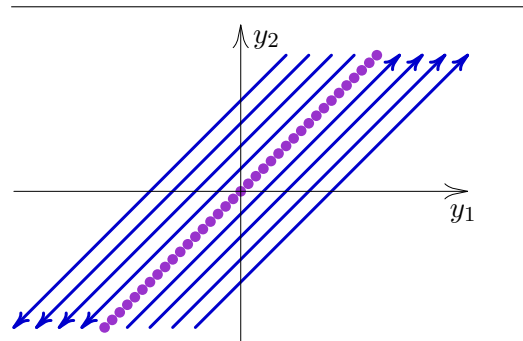
Singulární trajektorie pro $c_1 \in \mathbb{R}$ a $c_2 = 0$, tvoří přímku $y_2 = y_1$. Pro $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ dostáváme dvě polopřímky $y_2 = 3y_1$ orientované do počátku. Ostatní trajektorie jsou rovnoběžné polopřímky jdoucí se směrnici 3 do singulárních bodů na přímce $y_2 = y_1$. \square

PŘÍKLAD 7.19 Určete trajektorie řešení soustavy $y_1' = y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$.

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ je opět singulární, rovnice $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ má nekonečně mnoho řešení, jsou to násobky vektoru $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$. Singulární body proto tvoří přímku $y_2 = y_1$. Příslušný charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2$ má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 0$. Pro fázový portrét spočítejme obecné řešení. Soustava rovnic $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ pro $\lambda_{1,2} = 0$ dává jen jeden vektor $\mathbf{v} = (1, 1)$ a tím i konstantní řešení $\mathbf{u}_1(x) = (1, 1)$. Druhé řešení je ve tvaru $\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}x + \mathbf{w}$, kde vektor \mathbf{w} je řešením $(\mathbf{A} - 0 \mathbf{E})\mathbf{w} = \mathbf{v}$, tj. $w_1 - w_2 = 1$. Tato rovnice má opět nekonečně mnoho řešení, zvolme $\mathbf{w} = (1, 0)$. Dostáváme tak obecné řešení

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x+1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Získali jsme nekonečně mnoho singulárních trajektorií pro $c_1 \in \mathbb{R}$ a $c_2 = 0$, jsou to body přímky $y_2 = y_1$. Pro $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \neq 0$ dostáváme přímky $y_2 = y_1 - c_2$. Jsou to přímky rovnoběžné s přímkou $y_2 = y_1$ orientované v SV směru pod ní pro $c_2 > 0$ a v JZ směru nad ní pro $c_2 < 0$. \square



Obr. 39: Fázový portrét řešení.

Autonomní rovnice druhého řádu

Při zkoumání autonomních ODR vyššího řádu rovnici převedeme na soustavu autonomních ODR prvního řádu. Rovnice druhého řádu

$$y'' = f(y, y')$$

tak převedeme transformací $(y(x), y'(x)) \mapsto (y_1(x), y_2(x))$ na soustavu dvou rovnic

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = f(y_1, y_2).$$

Fázový prostor řešení $y(x)$ je rovina (y, y') , do které vynášíme body se souřadnicemi hodnot řešení a hodnot jeho derivace: $(y(x), y'(x))$. Fázový portrét řešení rovnice druhého řádu v rovině s osami y, y' jsou orientované křivky

$$\{(y(x), y'(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\}.$$

Konstantní řešení y má nulovou derivaci $y'(x) = 0$, proto singulární body se mohou vyskytovat pouze na ose y .

Pro nekonstantní řešení platí: nad osou y je derivace y' kladná a řešení je tedy rostoucí. Proto jsou trajektorie nad osou y jsou orientovány vpravo. Pod osou y je derivace y' záporná, proto trajektorie řešení jsou zde orientovány vlevo. Na ose y je derivace řešení $y' = 0$, proto trajektorie přecházejí osu y s tečnou kolmou na osu y .

Trajektorie řešení ODR druhého řádu v okolí singulárního bodu budeme klasifikovat stejným způsobem jako v případě autonomních soustav dvou rovnic: dvojice neznámých funkcí bude řešení $y(x)$ a derivace řešení $y'(x)$.

Autonomní lineární rovnici $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ převedeme na soustavu dvou lineárních rovnic $y_1'(x) = y_2(x)$, $y_2' = -a_0 y_1 - a_1 y_2$, tj. soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom soustavy $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ je stejný jako polynom původní rovnice druhého řádu s kořeny λ_1, λ_2 . Pro trajektorie řešení autonomních rovnic vyššího řádu platí analogická tvrzení jako pro trajektorie autonomních soustav. Stejnými úvahami jako u Věty 7.10 dostáváme ihned následující větu:

VĚTA 7.20 Uvažujme lineární rovnici druhého řádu $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ a odpovídající charakteristickou rovnici $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ s nenulovými kořeny λ_1, λ_2 .

Potom singulární bod $(0, 0)$ je:

neatraktivní uzel, pokud oba kořeny jsou reálné a kladné, tj. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$,

atraktivní uzel, pokud oba kořeny jsou reálné a záporné, tj. $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$,

sedlo, pokud jeden kořen je kladný a druhý záporný, tj. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$,

neatraktivní ohnisko, pokud kořeny jsou komplexně sdružené s kladnou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$, ($\mu > 0$, $\nu \neq 0$),

atraktivní ohnisko, pokud kořeny jsou komplexně sdružené se zápornou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$, ($\mu < 0$, $\nu \neq 0$),

střed, pokud kořeny jsou komplexně sdružené s nulovou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$, ($\nu \neq 0$).

V případě jednoduchého nulového kořene $\lambda_1 = 0$, tj. $a_1 \neq 0$, $a_0 = 0$, singulární body nejsou izolované, ale tvoří celou osu y . Potom singulární body jsou

neatraktivní uzel, pokud druhý nenulový kořen $\lambda_2 > 0$, tj. $a_1 < 0$,

atraktivní uzel, pokud druhý nenulový kořen $\lambda_2 < 0$, tj. $a_1 > 0$.

Pokud nula je dvojnásobný kořen, tj. $a_1 = a_0 = 0$, obecné řešení je tvaru $y(x) = c_1 + c_2 x$. Protože $y'(x) = c_2$, každý bod na ose y je singulární. Ostatní trajektorie jsou rovnoběžné s osou y ; nad osou y jsou orientovány vpravo ($c_2 > 0$), pod osou y vlevo ($c_2 < 0$). Každý singulární bod lze tedy nazvat **střed**.

POZNÁMKA 7.21 Předchozí věta platí pro lineární ODR. Podobně jako v případě nelineární soustav ODR chování řešení nelineární ODR v okolí singulárního bodu je stejné jako chování řešení příslušných linearizovaných ODR v případě, kdy kořeny mají nenulovou reálnou část. V případě nulových kořenů, nebo kořenů s nulovou reálnou částí už toto tvrzení neplatí, protože v okolí už kořeny nemusí mít nulovou reálnou část.

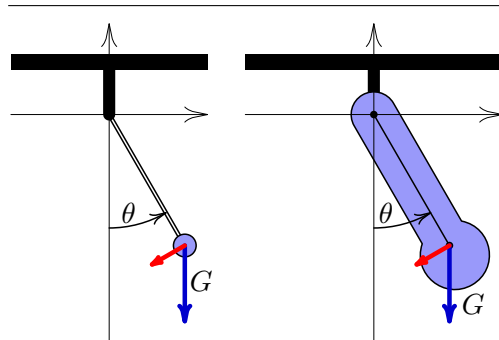
Matematické kyvadlo

Na závěr vyšetříme jednoduchý mechanický jev: **kmitání matematického kyvadla**, který má zajímavé trajektorie.

Fyzikální formulace úlohy

Ve svislé rovině uvažujme hmotný bod o hmotnosti m upevněný na konci nehmotné rovné tyče délky ℓ , jejíž druhý konec se může volně otáčet okolo počátku $(0, 0)$. Na hmotný bod působí jen gravitační síla $G = mg$ dolů.

Označme $\theta(t)$ orientovaný úhel (v radiánech proti směru pohybu hodinových ručiček), který v čase t svírá tyč se svislou osou, viz Obr. 40. Určete závislost úhlu θ na čase t .



Obr. 40: Matematické a fyzikální kyvadlo.

POZNÁMKA 7.22

Tento jev se nazývá kmitání **matematického kyvadla**. Obecnější úlohou je kmitání **fyzikálního kyvadla**, (také v [2] kmitání fyzického kyvadla), kdy místo hmotného bodu a nehmotné tyče uvažujeme hmotné těleso s těžištěm mimo počátek, které se může volně otáčet okolo počátku.

Odvození diferenciální rovnice

Hmotný bod o souřadnicích (x, y) se může pohybovat po kružnici se středem v počátku a poloměrem ℓ . Působí na něj svisle dolů stálá gravitační síla $G = mg$, která se rozkládá na normálovou F_n a tečnou složku F_t . Normálová složka je v rovnováze se silou, kterou působí tyč na hmotný bod, tečná složku F_t způsobí zrychlení hmotného bodu.

Pomocí úhlu $\theta(t)$ v čase t tečnou složku síly G vyjádříme jako $F_t(t) = -\sin(\theta)mg$, viz Obr. 41.

Derivací funkce $\theta(t)$ dostáváme úhlovou rychlost $\omega(t) = \theta'(t)$ a úhlové zrychlení $\alpha(t) = \theta''(t)$. Při pohybu po kružnici o poloměru ℓ dráhová rychlost je $v(t) = \ell \theta'(t)$ a dráhové zrychlení $a(t) = \ell \theta''(t)$.

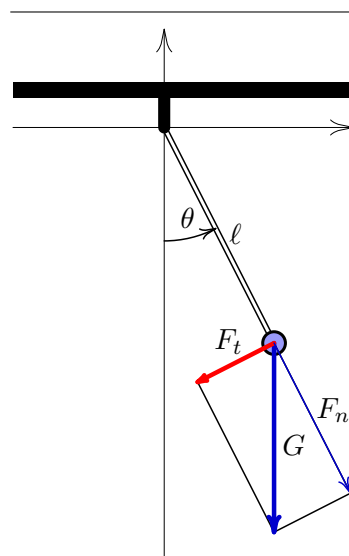
Podle Newtonova zákona $F = ma$ platí rovnice $-mg \sin \theta = m \ell \theta''$. Hmotností bodu m rovnici vydělíme a po úpravě dostáváme

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) = 0. \quad (7.5)$$

Označme $c = \sqrt{g/\ell}$ ($g, \ell > 0$) a přejdeme k tradičnímu označení ODR: závislou proměnnou úhel θ označme y , nezávislou proměnnou t čas označme x . Dostáváme autonomní obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$y'' + c^2 \sin(y) = 0 \quad (7.6)$$

pro neznámou funkci $y(x)$. Rovnice doplníme dvěma počátečními podmínkami v čase x_0 : $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, kde y_0 je počáteční úhlová výchylka a y_1 počáteční úhlová rychlost kyvadla.



Obr. 41: Matematické kyvadlo.

V okolí $y = 0$, tj. pro malé hodnoty y , platí $\sin y \doteq y$. Nahradíme-li $\sin y$ neznámou y dostáváme lineární aproximaci rovnice (7.6)

$$y'' + c^2 y = 0. \quad (7.7)$$

Studujme obě úlohy. Začneme jednodušší linearizovanou rovnicí.

PŘÍKLAD 7.23 Určete trajektorie řešení linearizované rovnice $y'' + c^2 y = 0$.

V případě lineární rovnice (7.7) příslušný charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + c^2$ má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = \pm i c$. Rovnice má proto jediné singulární řešení a to nulové řešení $y(x) = 0$, podle Věty 7.20 jeho typ je **střed**.

Ověřme výsledek výpočtem. Obecné řešení je $y(x) = a \cos(cx) + b \sin(cx)$, kde konstanty a, b jsou určeny hodnotami y_0, y_1 . Zvolme v čase $x = 0$ klidovou polohu $y'(0) = 0$ a rozkmit $y(0) = y_0 > 0$. Potom $a = y_0, b = 0$, řešení je tedy $y(x) = y_0 \cos(cx)$. Dosazením do výrazu $(y')^2 + c^2 y^2$ po úpravě dostáváme rovnici elipsy v souřadnicovém systému y, y'

$$\frac{y^2}{y_0^2} + \frac{(y')^2}{y_0^2 c^2} = 1$$

se středem v počátku, s vodorovnou poloosou y_0 a svislou poloosou cy_0 .

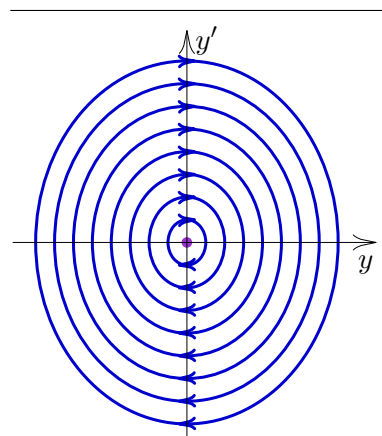
Trajektorie řešení lze určit také přímo integrací. Rovnici (7.7) vynásobíme y' . Získanou rovnost $y' y'' + c^2 y y' = 0$ integrujeme na $\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2}c^2 y^2 = K$. Z počátečních podmínek $y(0) = y_0, y'(0) = 0$ plyne $K = \frac{1}{2}c^2 y_0^2$. Z rovnice plyne

$$y' = \pm c \sqrt{y_0^2 - y^2}, \quad y \in \langle -y_0, y_0 \rangle.$$

Zbývá zjistit orientaci trajektorií. Trajektorie řešení $y(x) = y_0 \cos(cx)$ pro $x = 0$ je bod $(y(0), y'(0)) = (y_0, 0)$ s tečným vektorem $(y'(0), y''(0)) = (0, -c^2)$, elipsy jsou proto orientované podle pohybu hodinových ručiček, tj. v záporném smyslu. To je v souladu s pravidlem, že trajektorie nad osou y jsou orientovány vpravo, pod osou vlevo a osy y protínají „svisle“.

Všechna řešení jsou periodická. Jaká je perioda T ? Funkce kosinus má periodu 2π , proto délka periody T podle rovnice $cT = 2\pi$ je $T = 2\pi/c = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

Délka periody tedy nezávisí na rozkmitu, roste s odmocninou délky kyvadla ℓ a zmenšuje se s odmocninou gravitační konstanty g — na Měsíci s menším g stejné kyvadlo kmitá pomaleji než na Zemi.



Obr. 42: Trajektorie linearizované rovnice kyvadla pro $c = \frac{6}{5}$.

PŘÍKLAD 7.24 Určete trajektorie řešení nelineární rovnice $y'' + c^2 \sin(y) = 0$.

V případě nelineární rovnice je situace mnohem zajímavější, nastanou různé situace. Rovnici vynásobíme y' , čímž získáme rovnici $y' y'' + c^2 \sin y \cdot y' = 0$. Integrací získáme

$$\frac{1}{2}(y')^2 - c^2 \cos(y) = K. \quad (7.8)$$

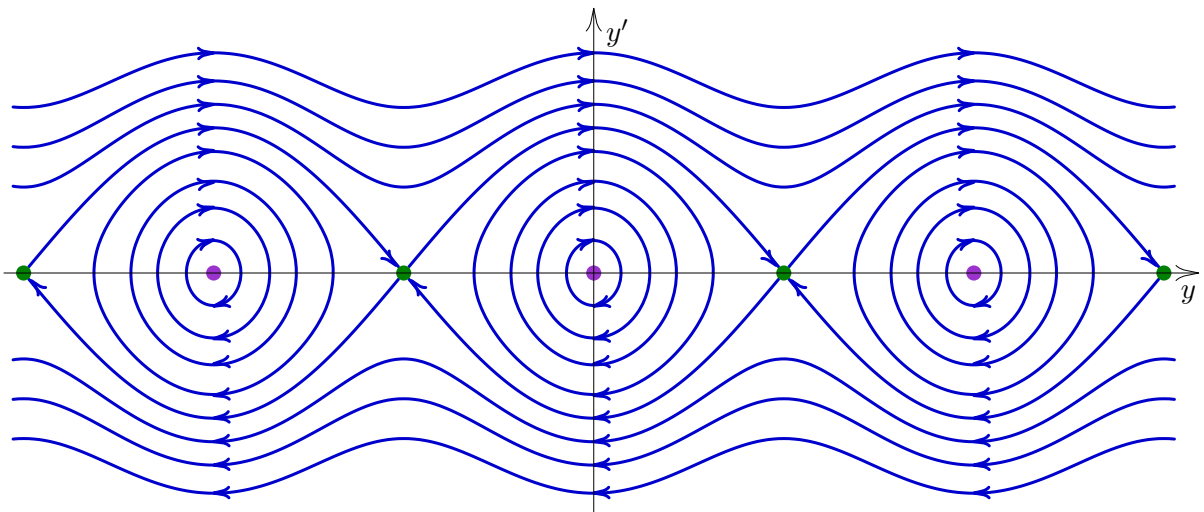
Určeme trajektorie řešení. Z rovnice (7.8) plyne $y' = \pm\sqrt{2(K + c^2 \cos y)}$. Odmocnina na pravé straně je definována pro

$$K + c^2 \cos y \geq 0. \quad (7.9)$$

Protože funkce kosinus nabývá hodnoty z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, rozlišíme případy:

- (a) Jestliže $K = -c^2$, potom z (7.9) plyne $\cos y = 1$, tedy $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a $y' = 0$. Dostáváme tak spočetně mnoho singulárních bodů $[y, y'] = [2k\pi, 0]$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Jsou to situace, kdy kyvadlo je v klidu ve stabilní dolní poloze.
- (b) Jestliže $K \in (-c^2, c^2)$, potom (7.9) platí v základní periodě $\langle -\pi, \pi \rangle$ pro hodnoty $y \in \langle -y_0, y_0 \rangle$, kde $y_0 = \arccos(-K/c^2) > 0$. Jsou to případy, kdy kyvadlo z krajní polohy $y = y_0$ ($|y_0| < \pi$) přechází do opačné polohy $y = -y_0$ a pak obráceně. Analogická situace je v intervalech $y \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$.
- (c) Jestliže $K = c^2$ a přitom $y' = 0$, potom pro $y = (2k + 1)\pi$ dostaneme singulární body, kdy kyvadlo je opět v klidu ale v horní nestabilní poloze.
- (d) Jestliže $K = c^2$ a $y' \neq 0$, potom v základní periodě y probíhá interval $(-\pi, \pi)$. Je to situace, kdy kyvadlo se z limitní polohy π v čase $y \rightarrow -\infty$ pohybuje v záporném směru do polohy $y \rightarrow \pi$ v čase $x \rightarrow \infty$, nebo obráceně: z polohy $y \rightarrow -\pi$ do polohy $y = \pi$ v kladném směru. Analogická situace je v intervalech $y \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$.
- (e) Jestliže $K > c^2$, potom $K + c^2 \cos y$ je kladné všechna $y \in \mathbb{R}$ a kyvadlo se točí stále v kladném směru nebo stále v záporném směru.

Jaká je klasifikace singulárních bodů? Body $(2k\pi, 0)$ – dolní stabilní polohy – jsou proto singulární body typu **střed** a body $(2k\pi + \pi, 0)$ – horní nestabilní polohy – jsou typu **sedlo**, viz Obr. 43.



Obr. 43: Fázový portrét nelineární rovnice kyvadla pro $c = \frac{6}{5}$, singulární body jsou typu **střed**, **sedlo**.

POZNÁMKY 7.25

- (a) Rovnice (7.8) je vlastně zákon zachování mechanické energie. Kinetická energie bodu o hmotnosti m pohybující se rychlostí $v = \ell y'$ je $E_{\text{kin}}(x) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell y')^2$. Potenciální energie bodu o hmotnosti m v gravitačním poli ve výšce $h = -\ell \cos(y)$ je $E_{\text{pot}} = mgh = -mg\ell \cos y$. Podle zákona o zachování mechanické energie

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m\ell^2(y')^2 - mg\ell \cos(y) = Km = \text{konst.}$$

- (b) Linearizovaná rovnice (7.7) je aproximací nelineární rovnice (7.6) v okolí $y = 0$. Při zvětšování rozkmitu y_0 se chyba zvětšuje, situace (c)–(e) už linearizovaná rovnice nedovede popsat.
- (c) Fyzikální kyvadlo vede na stejnou rovnici. Na těleso kyvadla o objemu V v jeho těžišti T působí stejná gravitační síla $G = mg$, kde m je hmotnost celého kyvadla, její tečná složka je opět $F_t = -mg \sin(\theta)$. Protože body kyvadla mají různou vzdálenost od závěsu, Newtonův zákon $F = ma$ pro dráhové zrychlení a musíme nahradit vztahem $M = J\alpha$ mezi momentem síly $M = F_t\ell$, kde ℓ je rameno síly, tj. vzdálenost těžiště T od osy otáčení, a úhlovým zrychlením $\alpha = \theta''$, kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení. Moment setrvačnosti lze spočítat integrací součinu hustoty ρ a čtverce vzdálenosti $x^2 + y^2$ bodu od osy otáčení:

$$J = \int_V (x^2 + y^2) \rho \, dV.$$

Dostáváme rovnici $J\theta'' + mg\ell \sin \theta = 0$. Při označení $c^2 = \frac{mg\ell}{J}$ dostáváme

$$\theta'' + c^2 \sin \theta = 0.$$

- (d) Perioda kyvů (čas kyvu tam a zpět) v lineárním modelu je $T = 2\pi c$ nezávisí na rozkmitu y_0 . Závisí jenom na délce ℓ kyvadla a gravitačním zrychlení g .
- (e) Jaká je délka kyvu T v nelineárním případě? Naznačme metodu výpočtu. Při rozkmitu, tj. maximální výchylce y_0 , je rychlost $y' = 0$. Z rovnice (7.8) dostaneme $K = -c^2 \cos y_0$. Pro rostoucí část kyvu $y' \geq 0$ z rovnice (7.8) po dosazení za K plyne $y' = c\sqrt{2(\cos y - \cos y_0)}$.

Zaměňme roli závislé a nezávislé proměnné: místo $y(x)$ uvažujme neznámou $x(y)$. Derivace vztahu $y(x(y)) = y$ podle y dává $y'(x(y)) \cdot x'(y) = 1$, odkud dostáváme $x'(y) = 1/y'(x(y))$. Inverzní neznámá $x(y)$ proto splňuje rovnici

$$\frac{dx}{dy}(y) = \frac{1}{c\sqrt{2(\cos y - \cos y_0)}}.$$

Perioda kyvadla T je čtyřnásobek času mezi $y = 0$ a rozkmitem $y_0 \in \langle 0, \pi \rangle$. Získáme ji integrací

$$T = 4 \frac{1}{c\sqrt{2}} \int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}} dy = 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}} dy.$$

Je to tzv. eliptický integrál, primitivní funkci nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Pro $y_0 \rightarrow \pi -$ jde čas T do nekonečna.

Příklady z populační biologie

Spojité matematické modely v biologii, viz např. [6], vedou na rovnice a soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Pokud se vnější podmínky v čase nemění, rovnice i soustavy jsou autonomní. Uvedeme pár příkladů. Naproti předchozímu fyzikálnímu jevu matematického a fyzikálního kyvadla, který je ve své idealizované podobě zcela přesný, modely v biologii přinášejí řadu aproximací: jedince tvořící populaci považujeme za identické, nerozlišujeme jejich věk, pohlaví, velikost ani jiné individuální charakteristiky, jejich počet, což je ve skutečnosti nezáporné celé číslo, nahrazujeme nezáporným reálným číslem, přírůstek v reálné situaci nastává vždy s jistým časovým zpožděním, atd. Přes tato a další zjednodušení, modely dávají zajímavé výsledky, které vysvětlují některé skutečnosti. Omezíme se také jen na deterministické modely.

Modely dynamiky populací

Místo označení užívaného v matematické biologii zachováme naše označení z ODR z předchozích částí s nezávislou proměnnou x , která hraje roli času, a závislou proměnnou y (případně $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$), která popisuje počet jedinců v čase x . Bude to nezáporná reálná funkce $y(x)$. Vývoj počtu populace bude záviset jen na velikosti populace a nebude záviset přímo na čase x . Obecný model tak vede na autonomní rovnici prvního řádu:

$$y' = f(y) \equiv \mu(y) \cdot y, \quad y(0) = y_0 \geq 0$$

s **parametrem růstu** $\mu(y)$, který udává počet $\mu \cdot \Delta x$ nově vzniklých jedinců na každého jedince za časový úsek Δx . V nejstarším **Malthusově modelu** $y' = ay$ je parametr růstu konstantní $\mu(y) = a$, parametr a je **porodnost–úmrtnost**. Úloha má jednoznačné řešení $y(x) = y_0 \cdot e^{ax}$. Podle tohoto modelu pro $a > 0$ počet jedinců roste exponenciálně do nekonečna, pro $a = 0$. Model odpovídá skutečnosti v situaci, kdy počet jedinců je malý a zdroje potravy jsou dostatečné. Kromě nulového řešení jsou všechna řešení rostoucí, nulové řešení $y(x) = 0$ je tedy **neatraktivní uzel**. Doplňme, že pro $a = 0$ je počet jedinců konstantní a pro $a < 0$ populace vymírá, nulové řešení je přitažlivý uzel.

Protože v reálném světě zdroje potravy jsou omezené, při zvětšování množství jedinců y nastává snižování parametru růstu. Položme například $\mu(y) = a - by$. K parametru růstu a jsme přidali parametr b **zpomalení růstu**. V tomto případě rovnice

$$y' = (a - by)y$$

s kladnými parametry a, b vedle řešení $y(x) = 0$, což je **neatraktivní uzel**, má konstantní řešení $y(x) = y^s = a/b$. Je to „rovnovážný“ počet jedinců, pro počáteční podmínku $y(0) < y^s$ řešení $y(x)$ stoupá k y^s a pro $y(0) > y^s$ řešení $y(x)$ klesá k y^s . Singulární řešení $y(x) = y^s$ je **atraktivní uzel**, protože všechna nenulová řešení se blíží k „rovnovážnému“ neboli „udržitelnému“ řešení $y^s(x)$.

Modely dvou populací

Uvažujme dvě různé populace obývající stejný prostor. Počet jejich jedinců v čase x budou nezáporné reálné funkce $y_1(x), y_2(x)$, přičemž vývoj jejich počtu bude záviset jenom na okamžitém počtu jedinců obou populací. Obecný model tak vede na autonomní soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$y_1' = f_1(y_1, y_2) \equiv \mu_1(y_1, y_2)y_1, \quad y_2' = f_2(y_1, y_2) \equiv \mu_2(y_1, y_2)y_2 \quad (7.10)$$

se spojitými funkcemi $\mu_1(y_1, y_2)$, $\mu_2(y_1, y_2)$. Soustavu doplníme počátečními podmínkami $y_1(x_0) = \gamma_1$, $y_2(x_0) = \gamma_2$, kde $\gamma_i \geq 0$, obvykle předpokládáme $\gamma_i > 0$. Pro jednoduchost místo obecných spojitých funkcí μ_1, μ_2 se obvykle uvažují jednoduché lineární závislosti s konstantními parametry, které popisují jednotlivé vlivy. K rovnicím $y'_i = (a_i - b_i y_i) y_i$ přidáme členy $c_i y_1 y_2$ popisující vliv druhé populace:

$$y'_1 = (a_1 - b_1 y_1 + c_1 y_2) y_1, \quad y'_2 = (a_2 - b_2 y_2 + c_2 y_1) y_2. \quad (7.11)$$

Pro $c_1 > 0$ populace y_2 zvětšuje růst populace y_1 , zatímco pro $c_1 < 0$ populace y_2 snižuje růst populace y_1 . Význam parametru c_2 je analogický.

Podle znamének parametrů c_1, c_2 rozlišujeme tři základní situace:

- (a) oba parametry c_1, c_2 jsou kladné, jde o případ **mutualismu**, také **symbiózy**, kdy se obě populace navzájem podporují,
- (b) oba parametry c_1, c_2 jsou záporné, jde o **konkurenci**,
- (c) mají opačná znaménka: $c_1 < 0$, $c_2 > 0$ jde o **predaci**, kdy se **predátor** y_2 se živí **kořistí** y_1 . V případě $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ jde jen o výměnu rolí populací.

Pomocné výsledky

Pro zkoumání trajektorií zavedeme pojem **nulkliny**, viz [6, 10]. V našem případě dvou proměnných první nulklina je množina bodů, ve kterých je první složka tečného vektoru (y'_1, y'_2) řešení nulová, tj. $y'_1 = 0$. V našem případě jsou to body fázového prostoru splňující $f_1(y_1, y_2) = 0$. V těchto bodech je tečna řešení rovnoběžná s osou y_2 . Analogicky druhou nulklinu tvoří body, ve kterých je druhá složka tečného vektoru nulová, tj. $y'_2 = 0$. Jsou to body, kde $f_2(y_1, y_2) = 0$, v těchto bodech má tečný vektor směr osy y_1 . Singulární body jsou body fázového prostoru ležící v průniku nulklin prvního a druhého druhu.

Abychom mohli určit typ singulárních bodů nelineární soustavy diferenciálních rovnic, potřebujeme určit kořeny charakteristického polynomu příslušné **linearizované rovnice** v tomto bodě. Pokud tyto kořeny mají nenulovou reálnou část, jsou nenulové i v okolí a řešení nelineární a linearizované rovnice mají stejný charakter.

Nechť (y_1^s, y_2^s) je singulárním bodem soustavy rovnic (7.10), tj. řešením soustavy rovnic $f_1(y_1, y_2) = 0$, $f_2(y_1, y_2) = 0$. Potom linearizovaná soustava ODR je

$$y'_1 = A_{11} (y_1 - y_1^s) + A_{12} (y_2 - y_2^s), \quad y'_2 = A_{21} (y_1 - y_1^s) + A_{22} (y_2 - y_2^s),$$

kde

$$A_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_1^s, y_2^s), \quad A_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(y_1^s, y_2^s), \quad A_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(y_1^s, y_2^s), \quad A_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(y_1^s, y_2^s). \quad (7.12)$$

Její charakteristický polynom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A), \quad (7.13)$$

kde $\text{Tr}(A) = A_{11} + A_{22}$ je **stopa** matice A a $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ **determinant** matice A . Při určování kořenů reálného polynomu využijeme následující tvrzení:

VĚTA 7.26 (KOŘENY KVADRATICKÉHO POLYNOMU)

Uvažujme polynom (7.13), tj. $P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A)$. Jeho diskriminant je

$$D = (\text{Tr}(A))^2 - 4\det(A) = (A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}A_{21}. \quad (7.14)$$

Potom platí:

- (a) Pokud $\det(A) < 0$, diskriminant D je kladný a polynom má dva reálné nenulové kořeny λ_1, λ_2 s opačnými znaménky.
- (b) Pokud $\det(A) \geq 0$ a diskriminant $D \geq 0$, polynom má dva reálné kořeny ne nutně různé. Jestliže $\text{Tr}(A) > 0$, kořeny jsou kladné, pro $\text{Tr}(A) < 0$ kořeny jsou záporné.
- (c) Pokud $\det(A) \geq 0$ a $D < 0$, polynom má dva komplexně sdružené kořeny.
- (d) Ve všech případech pro kořeny λ_1, λ_2 platí: $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$.

Jak to vypadá v našem případě soustavy rovnic (7.11)? Předpokládejme, že parametry a_i, b_i, c_i jsou nenulové. Rovnice $f_1 = y_1(a_1 - b_1y_1 + c_1y_2) = 0$ dává první nulkliny

$$y_1 = 0, \quad a_1 - b_1y_1 + c_1y_2 = 0. \quad (7.15)$$

V prvním kvadrantu je to osa y_2 a přímka s ní různoběžná.

Rovnice $f_2 = y_2(a_2 - b_2y_2 + c_2y_1) = 0$ dává dvě druhé nulkliny

$$y_2 = 0, \quad a_2 - b_2y_2 + c_2y_1 = 0. \quad (7.16)$$

Je to osa y_1 a přímka s ní různoběžná. Průsečíky nulklin jsou singulární body. Jsou to vždy tři body $S_0 = (0, 0)$, $S_1 = (a_1/b_1, 0)$, $S_2 = (0, a_2/b_2)$. Pokud „šikmé“ nulkliny nejsou rovnoběžné, tj. $d = b_1b_2 - c_1c_2 \neq 0$, jejich průsečík je čtvrtý singulární bod, který označíme S_{12} . Jednoduchý výpočet dává

$$S_{12} = (y_1^s, y_2^s) = \left(\frac{a_1b_2 + a_2c_1}{b_1b_2 - c_1c_2}, \frac{a_2b_1 + a_1c_2}{b_1b_2 - c_1c_2} \right) = \left(\frac{B_1}{d}, \frac{B_2}{d} \right), \quad (7.17)$$

kde $d = b_1b_2 - c_1c_2$, $B_1 = a_1b_2 + a_2c_1$, $B_2 = a_2b_1 + a_1c_2$. Záleží ještě na tom, zda průsečík S_{12} leží v prvním kvadrantu.

Vyčíslíme nyní parametry linearizované soustavy v singulárních bodech. Matice A koeficientů (7.12) linearizované soustavy v případě (7.11) má složky

$$A_{11} = a_1 - 2b_1y_1 + c_1y_2, \quad A_{12} = c_1y_1, \quad A_{21} = c_2y_2, \quad A_{22} = a_2 + c_2y_1 - 2b_2y_2. \quad (7.18)$$

V bodě $S_0 = (0, 0)$ platí $A_{11} = a_1$, $A_{12} = A_{21} = 0$, $A_{22} = a_2$. Charakteristický polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a_1 + a_2)\lambda + a_1a_2 \quad (7.19)$$

má dva ne nutně různé kořeny a_1, a_2 .

V bodě $S_1 = (a_1/b_1, 0)$ platí $A_{11} = -a_1$, $A_{12} = a_1c_1/b_1$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = a_2 + a_1c_2/b_1$. Charakteristický polynom $P(\lambda)$ a jeho diskriminant D je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{B_2}{b_1} - a_1 \right) \lambda - a_1 \frac{B_2}{b_1}, \quad D = \left(a_1 + \frac{B_2}{b_1} \right)^2. \quad (7.20)$$

Podobně v singulárním bodě $S_2 = (0, a_2/b_2)$ je $A_{11} = a_1 + a_2 c_1/b_2$, $A_{12} = 0$, $A_{21} = a_2 c_2/b_2$, $A_{22} = -a_2$ a charakteristický polynom $P(\lambda)$ a jeho diskriminant D vyjde

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{B_1}{b_2} - a_2 \right) \lambda - a_2 \frac{B_1}{b_2}, \quad D = \left(\frac{B_1}{b_2} + a_2 \right)^2. \quad (7.21)$$

Pokud $d = b_1 b_2 - c_1 c_2 \neq 0$, existuje i čtvrtý singulární bod $S_{12} = (B_1/d, B_2/d)$. Spočítejme koeficienty matice A v tomto singulárním bodu

$$A_{11} = -\frac{b_1 B_1}{d}, \quad A_{12} = \frac{c_1 B_1}{d}, \quad A_{21} = \frac{c_2 B_2}{d}, \quad A_{22} = -\frac{b_2 B_2}{d}.$$

Koeficienty dávají charakteristický polynom $P(\lambda)$ a jeho diskriminant D

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b_1 B_1 + b_2 B_2}{d} \lambda + \frac{B_1 B_2}{d}, \quad D = \frac{(b_1 B_1 - b_2 B_2)^2}{d^2} + 4 \frac{c_1 c_2 B_1 B_2}{d^2}. \quad (7.22)$$

Proberme jednotlivé případy podle znamének c_1, c_2 , které určují situaci.

1. *Mutualismus, symbióza – kladné c_1, c_2*

Nechť všechny parametry $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ jsou kladné. Proto B_1, B_2 jsou také kladné. Navíc předpokládejme, že $d = b_1 b_2 - c_1 c_2$ je kladné⁴. Rovnice (7.11) určují nulkliny. První nulkliny $y'_1 = 0$ jsou dvě přímky: $y_1 = 0$, tj. osa y_2 , a přímka $a_1 - b_1 y_1 + c_1 y_2 = 0$, která vychází z singulárního bodu $S_1 = (a_1/b_1, 0)$ s kladnou směrnici b_1/c_1 , viz Obr. 44.

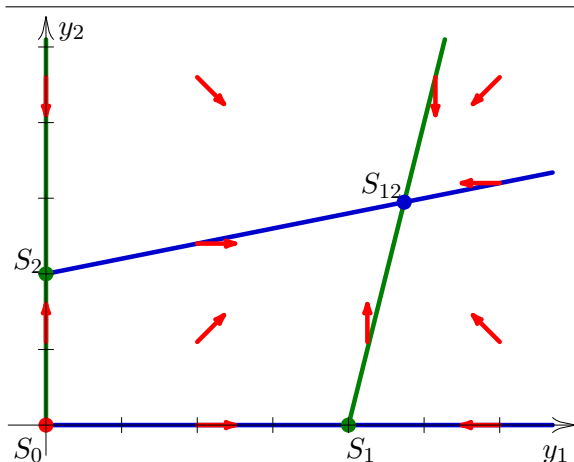
V bodech prvního kvadrantu mezi oběma polopřímkami je hodnota $y'_1 = f_1$ kladná, proto první složka y'_1 tečného vektoru je kladná, a v bodech vpravo od pravé nulkliny je složka tečného vektoru záporná.

Analogicky vyšetřeme druhé nulkliny $y'_2 = 0$. Jsou to opět dvě přímky: $y_2 = 0$, tj. osa y_1 a přímka $a_2 - b_2 y_2 + c_2 y_1 = 0$ vycházející ze singulárního bodu $S_2 = (0, a_2/b_2)$ s kladnou směrnici c_2/b_2 , viz Obr. 44. V bodech prvního kvadrantu mezi oběma přímkami je hodnota $y'_2 = f_2$ kladná, proto druhá složka tečného vektoru y'_2 je kladná, a v bodech nad horní nulklinou je složka tečného vektoru záporná.

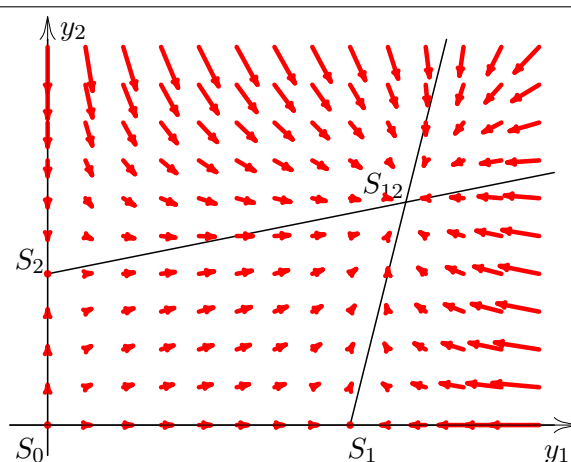
Protože $d > 0$ „šikmé“ nulkliny se protínají v prvním kvadrantu v bodě S_{12} a rozdělují tak první kvadrant na čtyři oblasti. Podle znamének složek tečného vektoru v Obr. 44 zakreslíme „orientaci“ tečných vektorů, tj. ve kterém kvadrantu nebo na které poloose je tečný vektor, protože v jednotlivých oblastech a na nulklinách je tato orientace konstantní. V Obr. 45 vykreslíme skutečné tečné vektory.

Všimněme si efektu symbiózy: singulární bod S_{12} přitahuje všechna řešení (mimo os y_1, y_2) a dává vyšší „rovnovážné hodnoty“ pro obě populace, než jsou rovnovážné hodnoty a_i/b_i u obou populací bez vzájemného vlivu. Tento stav je proto stabilní a „udržitelný“.

⁴Kdyby d bylo záporné, „šikmé“ nulkliny by se protínaly ve třetím kvadrantu. Uvnitř prvního kvadrantu by obě populace v limitě rostly nade vší meze, což by vedlo k destrukci prostředí a následnému vyhynutí obou populací. Načrtněte si obrázek!



Obr. 44: Symbióza: nulklíny a singulární body
($a_1 = 4; b_1 = 1; c_1 = 1/4; a_2 = 2; b_2 = 1; c_2 = 1/5$).



Obr. 45: Symbióza: tečné vektory trajektorií
($a_1 = 4; b_1 = 1; c_1 = 1/4; a_2 = 2; b_2 = 1; c_2 = 1/5$).

2. Konkurence — záporné c_1, c_2

Předpokládejme, že parametry a_1, a_2, b_1, b_2 jsou kladné a parametry c_1, c_2 záporné. Rovnice (7.11) určují nulklíny. Stejně jako v případě symbiózy první nulklína $y'_1 = 0$ jsou dvě přímky: $y_1 = 0$, tj. osa y_2 , a „šikmá“ přímka $a_1 - b_1y_1 + c_1y_2 = 0$, která vychází ze singulárního bodu $S_1 = (a_1/b_1, 0)$ se zápornou směrnici $b_1/c_1 < 0$. Stejně tak druhé nulklíny $y'_2 = 0$ jsou dvě přímky: $y_2 = 0$, tj. osa y_1 a „šikmá“ přímka $a_2 - b_2y_2 + c_2y_1 = 0$, která vychází ze singulárního bodu $(0, a_2/b_2)$ se zápornou směrnici $c_2/b_2 < 0$.

V našem případě konkurence se první nulklíny navíc protínají v prvním kvadrantu na kladné poloose y_2 v průsečíku $P_1 = (0, -a_1/c_1)$. Také druhé nulklíny se protínají na kladné poloose y_1 v bodě $P_2 = (-a_2/c_2, 0)$. Pozor, tyto průsečíky ovšem nejsou singulárními body, protínají se zde dvě první nebo dvě druhé nulklíny. Navíc, pokud koeficient $d = b_1b_2 - c_1c_2$ je nenulový, šikmé nulklíny se protínají.

Jaké je pořadí bodů S_1 a P_2 na poloose y_1 ? Jestliže $B_2 = a_2b_1 + a_1c_2 > 0$, potom $a_2b_1 > -a_1c_2 > 0$, odkud plyne $-a_2/c_2 > a_1/b_1$, tedy průsečík P_2 leží vpravo za singulárním bodem S_1 . V opačném případě $B_2 < 0$ průsečík P_2 leží vlevo před S_1 . Podobně v případě $B_1 = a_1b_2 + a_2c_1 > 0$ na poloose y_2 průsečík P_1 leží nad bodem S_2 , pro $B_1 < 0$ bod P_1 leží pod bodem S_2 . V případě $B_1 = 0$ nebo $B_2 = 0$ body P_1, S_2 nebo P_2, S_1 splývají.

Rozlišíme proto tři generické⁵ situace podle znamének B_1, B_2 .

2.a „Slabá konkurence“ – kladné B_1, B_2

V tomto případě na poloose y_1 bod P_2 leží za bodem S_1 a na poloose y_2 bod P_1 leží za bodem S_2 , viz Obr. 46. Jaké je d ? Z podmínky $B_1 > 0$ plyne $b_2/a_2 > -c_1/a_1 > 0$, podmínka $B_2 > 0$ dává $b_1/a_1 > -c_2/a_2 > 0$. Součin obou nerovností po vynásobení $a_1a_2 > 0$ dává $b_1b_2 > c_1c_2$, odkud plyne $d > 0$. To potvrzuje skutečnost, že průsečík S_{12} , leží v prvním kvadrantu, jeho souřadnice, viz (7.17), jsou kladné.

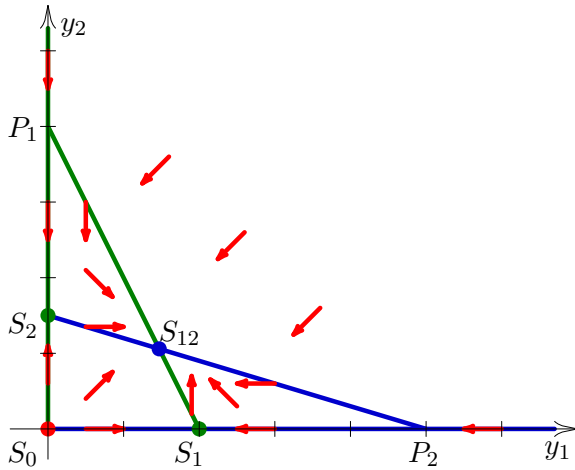
Nulklíny se protínající se v singulárním bodě S_{12} rozdělují první kvadrant na čtyři části. Podle znamének f_1, f_2 vykreslíme v nich „orientaci“ příslušných tečných vektorů (y'_1, y'_2) , viz Obr. 46.

⁵Generické situace jsou takové, které nejsou výjimečné, tj. nemají nulovou pravděpodobnost, a nemění se při malé změně. Rovnost dvou spojitých veličin je výjimečná, změna obou veličin může změnit rovnost na jednu nebo opačnou nerovnost.

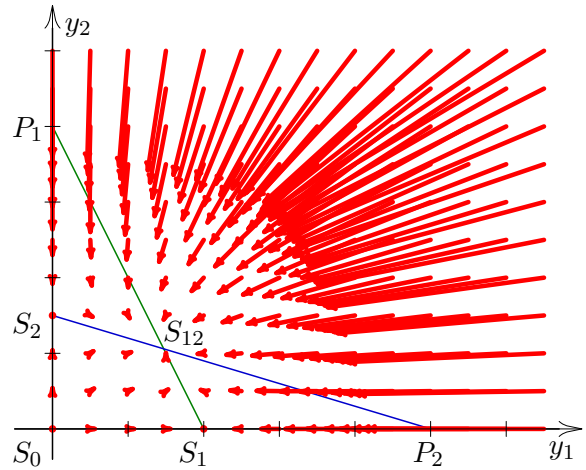
Jakého typu jsou singulární body? Podle (7.19) je bod S_0 **neatraktivní uzel**. Podle (7.20) a (7.21) charakteristické polynomy v bodech S_1 a S_2 mají záporný člen $\det(A)$, mají proto reálné kořeny s opačnými znaménky a singulární body S_1 , S_2 jsou tudíž **sedla**.

Ve čtvrtém singulárním bodě S_{12} podle (7.22) je $\det(A) = B_1 B_2 / d$ kladný, diskriminant D kladný a stopa $\text{Tr}(A)$ je záporná. Podle Věty 7.26 kořeny jsou záporné. Bod S_{12} je proto přitažlivý uzel. Pro kontrolu vykresleme směrové vektory v Obr. 47, potvrzují typy singulárních bodů.

Jaké je hodnocení situace? Všechny trajektorie (kromě bodů $y_1 y_2 = 0$) směřují do atraktivního bodu S_{12} , který dává obou druhům rovnovážný stabilní stav, který je menší v případě jedné populace. Oba druhy však přežívají.



Obr. 46: Slabá konkurence: nulkliny a sing. body ($a_1 = 4; b_1 = 2; c_1 = -1; a_2 = 3; b_2 = 1; c_2 = -0.6$).



Obr. 47: Slabá konkurence: tečné vektory ($a_1 = 4; b_1 = 2; c_1 = -1; a_2 = 3; b_2 = 1; c_2 = -0.6$).

2.b „Silná konkurence“ – záporné B_1, B_2

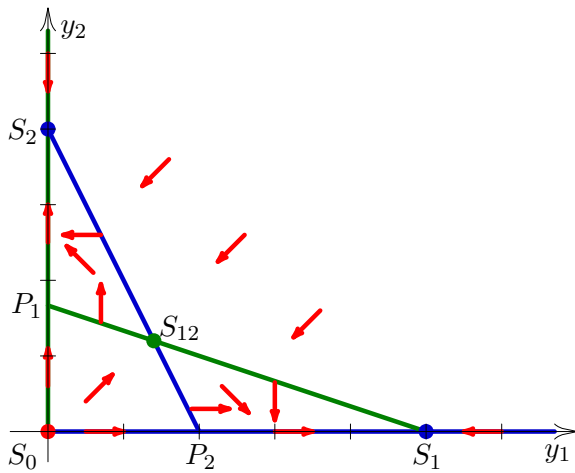
V tomto případě na poloose y_1 bod P_2 leží před bodem S_1 a na poloose y_2 bod P_1 před bodem S_2 , viz Obr. 48. Díky záporným B_1, B_2 máme nerovnosti $0 < b_2/a_2 < -c_1/a_1$ $0 < b_1/a_1 < -c_2/a_2$ jejichž vynásobením dává $b_1 b_2 < c_1 c_2$, proto $d < 0$ a v (7.17) souřadnice bodu S_{12} jsou kladné. Nulkliny se protínají v singulárním bodě S_{12} rozdělují v první kvadrant na čtyři části. Podle znamének f_1, f_2 vykresleme v nich orientaci příslušných tečných vektorů (y'_1, y'_2) , viz Obr. 48.

Jakého typu jsou singulární body? Podle (7.19) je bod S_0 **neatraktivní uzel**. Podle (7.20) v bodě S_1 charakteristický polynom (7.20) má díky $B_2 < 0$ zápornou stopu $\text{Tr}(A)$ a nezáporný diskriminant D . Kořeny λ_1, λ_2 jsou proto záporné a podle Věty 7.26 singulární bod S_1 je **přitažlivý uzel**. Analogickým výpočtem lze zjistit, že singulární bod S_2 je také **přitažlivý uzel**.

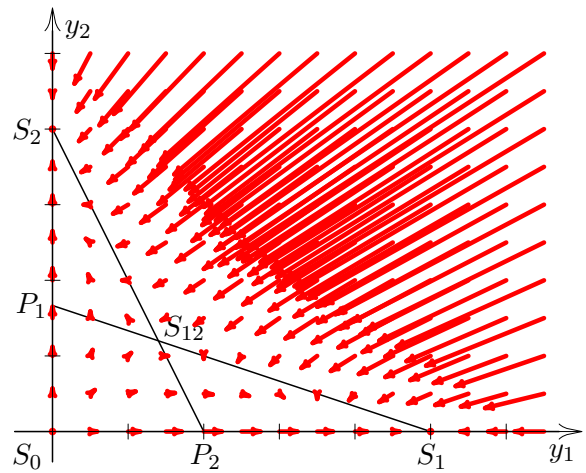
V singulárním bodě S_{12} charakteristický polynom $P(\lambda)$, viz (7.22), záporný $\det(A)$, protože B_1, B_2, d jsou záporné. Podle Věty 7.22 $P(\lambda)$ má proto reálné kořeny s opačnými znaménky a podle Věty 7.10 singulární bod S_{12} je **sedlo**.

Pro kontrolu vykresleme směrové vektory v Obr. 49, potvrzují typy singulárních bodů.

Jaké je hodnocení situace? Na rozdíl od slabé konkurence atraktivní jsou stavy na poloosách y_1 a y_2 . Trajektorie proto směřují buď do bodu S_1 nebo S_2 , tedy buď jedna nebo druhá populace vyhyne, záleží na počátečních podmínkách.



Obr. 48: Silná konkurence: nulkliny
($a_1 = 5; b_1 = 1; c_1 = -3; a_2 = 4; b_2 = 1; c_2 = -2$).



Obr. 49: Silná konkurence: tečné vektory
($a_1 = 5; b_1 = 1; c_1 = -3; a_2 = 4; b_2 = 1; c_2 = -2$).

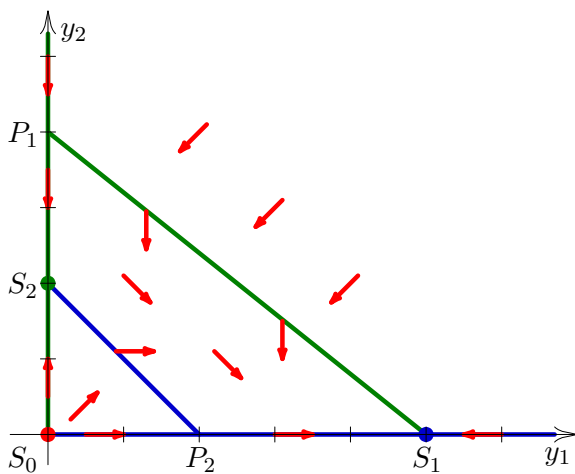
2.c „Dominance“ první populace – $B_1 > 0, B_2 < 0$

V tomto případě na poloose y_1 bod P_2 leží před bodem S_1 a na poloose y_2 bod P_1 za bodem S_2 , viz Obr. 50. Nulkliny se v prvním kvadrantu neprotínají, rozdělují ho proto jenom na tři části, průsečík S_{12} „šikmých“ nulklin není v prvním kvadrantu nebo neexistuje. Podle znamének $f_1(y_1, y_2)$, $f_2(y_1, y_2)$ vykresleme v jednotlivých oblastech „orientaci“ tečných vektorů (y'_1, y'_2), viz Obr. 50.

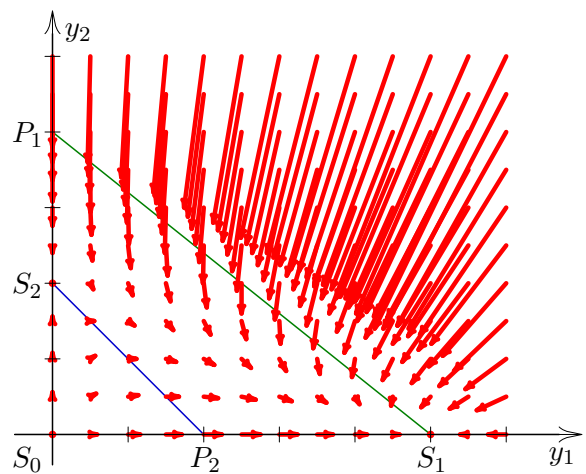
Jakého typu jsou singulární body? Podle (7.19) je bod S_0 **neatraktivní uzel**. Podle (7.20) v bodě S_1 charakteristický polynom (7.20) má díky $B_2 < 0$ zápornou stopu $\text{Tr}(A)$ a nezáporný diskriminant D . Kořeny λ_1, λ_2 jsou proto záporné a podle Věty 7.26 singulární bod S_1 je **přitažlivý uzel**.

V singulárním bodě $S_2 = (0, a_2/b_2)$ je situace odlišná. Podle (7.21) $\det(A)$ je záporný, podle Věty 7.26 proto polynom $P(\lambda)$ má dva reálné kořeny s opačnými znaménky. Podle věty 7.10 singulární bod S_2 je **sedlo**.

Pro kontrolu vykresleme směrové vektory v Obr. 51, potvrzují typ singulárních bodů.



Obr. 50: Dominance: nulkliny a singulární body
($a_1 = 5; b_1 = 1; c_1 = -5/4; a_2 = 4; b_2 = 2; c_2 = -2$).



Obr. 51: Dominance: tečné vektory trajektorií
($a_1 = 5; b_1 = 1; c_1 = -5/4; a_2 = 4; b_2 = 2; c_2 = -2$).

Jaké je hodnocení situace? V tomto případě je situace ještě horší pro „slabší“ druh.

Kromě výjimečné situace $y_1 = 0$ populace y_2 vždy vyhyne. První druh se ustálí na hodnotě, jako když druhý druh neexistuje.

V případě $B_1 < 0$ a $B_2 > 0$ je situace opačná, S_2 je atraktivní uzel, S_1 je sedlo, první druh vyhyne a druhý se ustálí na hodnotě jakoby první druh neexistoval.

3. Modely predátor-kořist — záporné c_1 a kladné c_2

Tyto modely popisují situaci dvou populací: první y_1 se nazývá kořist, druhá y_2 predátor se kořistí živí. Například kořistí je sněžný králík a predátorem rys. Dalšími příklady jsou kapři a štiky v rybníku, losy a vlci.

Protože predátor se živí kořistí, predátor snižuje populaci kořisti: parametr c_1 je záporný. Množství kořisti umožňuje množení predátora: parametr c_2 je kladný.

Uvedeme zjednodušený model, který nese jména dvou autorů. Model navrhl Alfred J. Lotka v roce 1910 pro chemické reakce, v roce 1925 model aplikoval na systém predátor-kořist ve své knize o biomatematice. Nezávisle stejné rovnice publikoval Vito Volterra 1926, aby vysvětlil periodické chování počtu vylovených ryb v Jaderském moři. Model byl inspirován periodickým vývojem počtu vykoupených koček sněžných králíků a rysů v severní Kanadě v letech 1845-1935, viz [10].

3.a Klasický Lotkův-Volterrův model

Abychom mohli využít výsledky z předchozích částí pro model využijeme označení parametrů z předchozích částí. Pro kořist y_1 necháme parametr a_1 kladný, omezení zdroji potravy zanedbáme, tj. položíme $b_1 = 0$. Predátor se živí kořistí, čímž snižuje populaci kořisti, tj. parametr c_1 je záporný. Predátor bez kořisti vymírá, proto parametr a_2 je záporný. Omezení prostředím zanedbáme $b_2 = 0$, množství potravy kořisti umožňuje přírůstek predátora, položíme proto $c_2 > 0$. Soustava rovnic se redukuje na

$$y_1' = a_1 y_1 + c_1 y_1 y_2 \equiv (a_1 + c_1 y_2) y_1, \quad y_2' = a_2 y_2 + c_2 y_1 y_2 \equiv (a_2 + c_2 y_1) y_2 \quad (7.23)$$

přičemž parametry a_1, c_2 jsou kladné a a_2, c_1 záporné.

První nulkliny jsou dvě na sebe kolmé přímky: $y_1 = 0$, tj. osa y_2 , a přímka $a_1 + c_1 y_2 = 0$ vycházející z bodu $(-a_1/c_1, 0)$ kolmá na osu y_1 . Druhé nulkliny jsou také dvě na sebe kolmé přímky: $y_2 = 0$, tj. osa y_1 , a přímka $a_2 + c_2 y_1 = 0$ vycházející z bodu $(0, -a_2/c_2)$ kolmá na osu y_2 , viz Obr. 52. Nulkliny se protínají ve čtyřech bodech: singulární body jsou však jenom dva $S_0 = (0, 0)$, $S_{12} = (-a_2/c_2, -a_1/c_1)$, protože body $P_1 = (0, -a_1/c_1)$, $P_2 = (-a_2/c_2, 0)$ jsou průsečky jenom prvních nebo druhých nulklin, neleží na obou nulklinách. Nulkliny rozdělují první kvadrant na čtyři části. Vykresleme v Obr. 52 nulkliny a úhly tečen trajektorií v příslušných oblastech.

Pro určení charakteru singulárních bodů určíme koeficienty A_{ij} (7.12) příslušné lineari-zované rovnice $A_{11} = a_1 + c_1 y_2$, $A_{12} = c_1 y_1$, $A_{21} = c_2 y_2$, $A_{22} = a_2 + c_2 y_1$ a charakteristický polynom nabude tvar

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a_1 + a_2 + c_1 y_2 + c_2 y_1) \lambda + (a_1 + c_1 y_2)(a_2 + c_2 y_1). \quad (7.24)$$

V bodě $S_0 = (0, 0)$ charakteristický polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - (a_1 + a_2) \lambda + a_1 a_2$ má kořeny $\lambda_1 = a_1 > 0$, $\lambda_2 = a_2 < 0$, tj. s opačnými znaménky. Podle Věty 7.26 bod S_0 je **sedlo**.

V bodě $S_{12} = (-a_2/c_2, -a_1/c_1)$ je $A_{11} = A_{22} = 0$, což dává $\text{Tr}(A) = 0$, a dále platí $A_{12} = -c_1 a_2 / c_2$, $A_{21} = -c_2 a_1 / c_1$ odkud plyne $\det(A) = -A_{12} A_{21} = -a_1 a_2 > 0$.

V bodě S_{12} tedy polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - a_1 a_2$ má nulovou stopu a záporný diskriminant $D = 4a_1 a_2 < 0$, má tedy dvojici komplexně sdružených kořenů s nulovou reálnou částí. Singulární bod S_{12} linearizované soustavy je proto **střed**. V případě nelineární soustavy rovnost $\text{Tr}(A) = 0$ sice platí v bodě S_{12} , ale nemusí to platit v okolí S_{12} , vedle středu by to mohlo být atraktivní nebo neatraktivní ohnisko.

V našem případě však lze spočítat trajektorie jako „vrstevnice“ funkce zadané implicitně $F(y_1, y_2) = \text{const}$. Z rovnic (7.23) plyne

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{(a_1 + c_1 y_2)y_1}{(a_2 + c_2 y_1)y_2}.$$

Z rovnosti lze proměnné y_1, y_2 separovat

$$\left(\frac{a_2}{y_1} + c_2\right) dy_1 = \left(\frac{a_1}{y_2} + c_1\right) dy_2$$

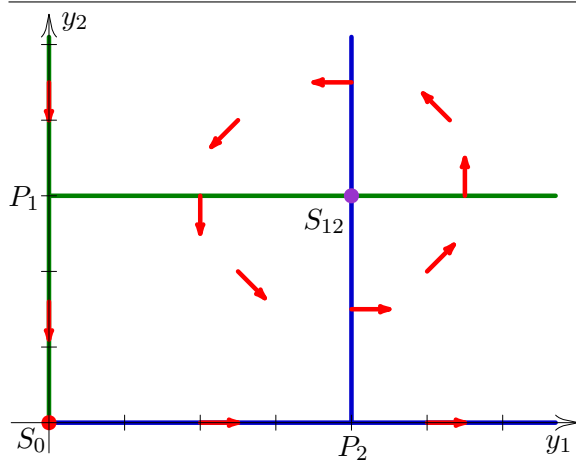
a integrací získáváme $a_2 \ln y_1 + c_2 y_1 = a_1 \ln y_2 + c_1 y_2 + \text{const}$, což dává trajektorie zadané implicitně

$$F(y_1, y_2) = a_2 \ln y_1 + c_2 y_1 - a_1 \ln y_2 - c_1 y_2 = \text{const}.$$

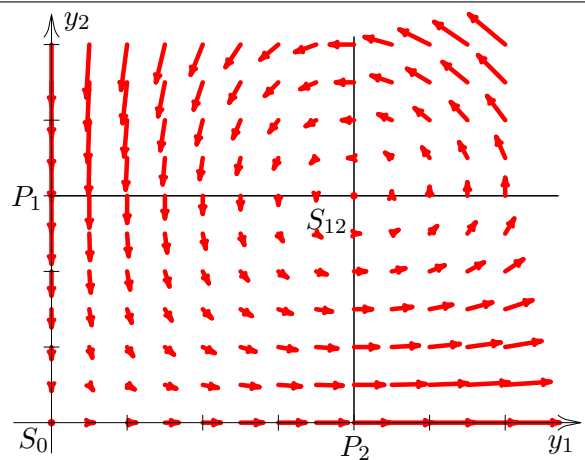
Funkce $F(y_1, y_2)$ má v bodě S_{12} obě první parciální derivace nulové, druhé

$$F''_{y_1 y_1} = -a_2/y_1^2 > 0, \quad F''_{y_1 y_2} = F''_{y_2 y_1} = 0, \quad F'_{y_2 y_2} = a_1/y_2^2 > 0$$

proto v bodě S_{12} je lokální minimum. Trajektorie v okolí S_{12} jsou proto uzavřené a singulární bod je **střed**.



Obr. 52: Predátor-kořist: nulklíny a body
($a_1 = 3; c_1 = -1; a_2 = -4; c_2 = 1$).



Obr. 53: Predátor-kořist: tečné vektory
($a_1 = 3; c_1 = -1; a_2 = -4; c_2 = 1$).

Jaké je hodnocení situace? Pokud je kořist nulová $y_1 = 0$, predátor vyhyne. Pokud neexistuje predátor $y_2 = 0$, kořist se množí neomezeně. V singulárním bodě S_{12} je stav kořisti i predátorů neměnný. Mimo tyto případy jde o periodický jev, vývoj probíhá v cyklu, kdy se postupně periodicky opakují čtyři situace:

- predátorů je málo, kořist se množí,
- kořisti je mnoho, roste počet predátorů,
- predátorů je mnoho, klesá počet kořisti,
- kořisti je málo, klesá počet predátorů.

Literatura

- [1] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno, 1995.
- [2] Jiří Bajer: *Mechanika 3*, chlup.net, Olomouc 2012.
- [3] Carmen Chicone: *Ordinary differential equations with applications*, Springer, New York, 1999.
- [4] J. Čermák, A. Ženíšek: *Matematika III*, skriptá FSI VUT, Akad. nakl. CERM, Brno 2001.
- [5] J. Franců: *Funkcionální analýza I*, skriptá FSI VUT, CERM, 2009.
- [6] J. Kalas, Z. Pospíšil: *Spojité modely v biologii*, Masarykova univerzita, Brno 2001.
- [7] J. Krempaský a kolektiv: *Synergetika . . .*, Veda, Bratislava 1988.
- [8] K. Rektorys a spol.: *Přehled užité matematiky I.*, Prometheus, Praha, 2009.
- [9] J. Škrášek, Z. Tichý: *Základy aplikované matematiky II.*, SNTL, Praha, 1986.
- [10] Anglická Wikipedie: <https://en.wikipedia.org/wiki/>, .