Moderní metody řešení diferenciálních rovnic

Požadavky ke zkoušce pro 5. ročník

studijního oboru Matematické inženýrství – 2018/19

I. Prostory funkcí

1. **Základní pojmy**
   (a) Metrické, lineární, normované a unitární prostory, Banachovy a Hilbertovy prostory.
   (b) Spojité funkcionály a operátory (lineární i nelineární).
   (c) Banachova věta o pevném bodu kontraktivního zobrazení.
2. **Lebesgueovy prostory**
   (a) Normy, vlastnosti $L^p(\Omega)$, prostor $L^\infty(\Omega)$, nerovnosti.
   (b) Spojité lineární funkcionály a jejich reprezentace.
   (c) Prostory separabilní a reflexivní, slabá a silná konvergence.
3. **Zobecněné funkce – distribuce**
   (a) Základní prostor, konvergence, distribuce.
   (b) Regulární a singulární distribuce, příklady.
   (c) Operace s distribucemi, derivování ve smyslu distribucí.
4. **Popis hranice oblasti**
   (a) Oblast se spojitou a lipschitzovskou hranicí; definice a příklady.
   (b) Oblast s vnitřní a vnější kuželovou vlastností.
5. **Sobolevovy prostory**
   (a) Definice prostorů $W^{k,p}(\Omega)$, $H^{k,p}(\Omega)$ a $BL^p(\Omega)$ a jejich srovnání.
   (b) Prostory $W_0^{1,p}(\Omega)$, ekvivalentní normy.
   (c) Vnoření a kompaktní vnoření prostorů $W^{1,p}(\Omega)$.
   (d) Stopy funkcí z $W^{1,p}(\Omega)$, idea důkazu věta o stopách.
   (e) Vlastnosti: prostor úplný, separabilní, reflexivní.
   (f) Spojité lineární funkcionály a jejich reprezentace.
   (g) Slabá a silná konvergence.
   (h) Případ $p = 2$ – Hilbertův prostor, skalární součin, spojité lineární funkcionály a jejich reprezentace.

II. Stacionární lineární úlohy

1. **Slabá formulace úloh**
   (a) Slabá a klasická formulace a jejich vztah.
   (b) Korektnost slabé formulace.
   (c) Případ nespojitých koeficientů, podmínky přechodu.
   (d) Laxovo-Milgramovo lemma, důkaz.
   (e) Existence, jednoznačnost a odhad řešení eliptických rovnic.
2. **Variační formulace a aproximace**
   (a) Variační formulace, existence a jednoznačnost řešení.
   (b) Vztah slabé a variační formulace, důkaz.
   (c) Galerkinova a Ritzova aproximace.
   (d) Konvergence konečněrozměrných aproximací.
   (e) Metoda konečných prvků.

III. Stacionární nelineární úlohy

1. **Lineární a nelineární úlohy** — srovnání, druhy nelinearit.
2. **Němyckého operátory** — měřitelnost, integrovatelnost, omezenost a spojitost operátorů.
3. **Úlohy ve variační formulaci**
   (a) Abstraktní variační úloha: formulace a věta o existenci minima.
   (b) Korektnost variační formulace.
   (c) Aplikace existenční věty, koercivita funkcionálu.
   (d) Slabě zdola polospojité funkcionály, problémy ve vektorové případě a jejich řešení.
4. **Úlohy ve slabé formulaci**
   (a) Prostor konečné dimenze. Existence řešení rovnice $f(x) = 0$ na kouli, Brouwerova věta a rovnice $f(x) = y$ v celém $\mathbb{R}^N$.
   (b) Rovnice $A(u) = b$ v Banachově prostoru, konvergence, podmínky spojitosti, monotónnosti, koercivity.
   (c) Rovnice se silně monotónním operátorem, důkaz.
   (d) Galerkinova aproximace, vlastnosti posloupnosti řešení.
   (e) Rovnice se slabě spojitým operátorem, důkaz.
   (f) Stacionární rovnice nelineární difuze.

IV. Stochastické diferenciální rovnice

1. **Základní pojmy**
   (a) Pravděpodobnost, náhodná veličina, střední hodnota a rozptyl, normální rozdělení, nezávislost, náhodný proces.
   (b) Wienerův proces (Brownův pohyb), vlastnosti, lineární a kvadratická variace.
2. **Stochastický integrál a diferenciální rovnice**
   (a) Zavedení Itôova a Stratonovičova integrálu.
   (b) Diferenciál složené funkce, Itôova formule.
   (c) Řešení Itôovy stochastické diferenciální rovnice.

Zkouška

1. **Praktická část** — zadána okrajová úloha pro kvazilineární rovnici v klasické, slabé nebo variační formulaci.
   (a) Odvoďte ostatní formulace.
   (b) Doplňte předpoklady pro data, aby formulace byla korektní.
   (c) Vyšetřete podmínky zaručující existenci a jednoznačnost řešení.
2. **Teoretická část** — po jedné otázce z částí I, II, III a IV.

Příklad: Buď $\Omega = (-1,1)^2$. Na množině $V = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u(\pm 1, y) = 1\}$ hledáme minimum integrálního funkcionálu

$$\Phi(u) = \int_\Omega \left[u_x^2 + 2\,u_y^2 + a(x,y,u) + fu\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} (u^2 - gu)(x, \pm 1)\,\mathrm{d}x.$$

Odvoďte slabou a klasickou formulaci úlohy. Doplňte předpoklady pro funkce a, f, g, aby formulace úlohy byla korektní. Za jakých podmínek je zaručena existence a případně jednoznačnost řešení?

Doporučená literatura pro studenty

1. J. Franců: *Moderní metody řešení diferenciálních rovnic*, skripta FSI VUT, Akad. nakl. CERM, Brno 2006.
2. E. Kolářová: *Stochastické diferenciální rovnice v elektrotechnice* (vybrané stránky z disertační práce na FSI VUT – dostupné na internetové adrese: `http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/francu/`).

V Brně 6. března 2019 Jan Franců